Conjuntos Numéricos

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Chama-se conjunto dos números naturais (símbolo $\mathbb{N}$) ao conjunto formado pelos números 0, 1, 2, 3, ...

Assim: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Destacamos o conjunto $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, ...\}$ (conjunto dos números naturais não nulos).

No conjunto dos números naturais, é sempre possível efetuarmos a soma ou a multiplicação de dois números (essas operações estão definidas em $\mathbb{N}$). Dizemos que o conjunto dos números naturais é fechado em relação à sua soma e à sua multiplicação. Porém, nem sempre sua subtração é possível. Por exemplo, $3 - 5 \notin \mathbb{N}$, daí a necessidade de um conjunto mais amplo.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Chama-se conjunto dos números inteiros (símbolo $\mathbb{Z}$) ao conjunto formado por todos os números naturais e pelos opostos.

Assim: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

No conjunto $\mathbb{Z}$, distinguimos cinco subconjuntos notáveis:

i) $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$ (conjunto dos inteiros não negativos).

ii) $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, ...\}$ (conjunto dos inteiros não positivos).

iii) $\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$ (conjunto dos inteiros não nulos).

iv) $\mathbb{Z}^*_+ = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$ (conjunto dos inteiros positivos).

v) $\mathbb{Z}^*_- = \{..., -3, -2, -1\}$ (conjunto dos inteiros negativos).

A soma, a subtração ou a multiplicação de números inteiros sempre resulta em um número inteiro. O conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) é, portanto, fechado em relação a essas operações.

Divisibilidade

Dizemos que o inteiro **a**, em que $a \neq 0$, é divisor do inteiro **b**, ou que **a** divide **b**, se a divisão de **b** por **a** for exata, ou seja, resto zero.

Exemplos

1º) 2 é divisor de 6, pois $6 : 2 = 3$.

2º) 7 divide -21, pois $-21 : 7 = -3$.

> Quando **a** é divisor de **b**, com $a \neq 0$, dizemos que "**b** é divisível por **a**" ou "**b** é múltiplo de **a**".

Para um inteiro **a** qualquer, indicamos com D(a) o conjunto de seus divisores e com M(a) o conjunto de seus múltiplos.

Exemplos

1º) $D(2) = \{\pm2, \pm1\}$

2º) $D(-3) = \{\pm3, \pm1\}$

3º) $D(0) = \mathbb{Z}^*$

4º) $M(2) = \{0, \pm2, \pm4, \pm6, ...\}$

5º) $M(-3) = \{0, \pm3, \pm6, \pm9, ...\}$

6º) $M(0) = \{0\}$

Dizemos que um número inteiro **p** é primo se $p \notin \{-1, 0, 1\}$ e $D(p) = \{-p, p, -1, 1\}$.

Exemplos

$-2, 2, -3, 3, -5, 5, -7$ e 7 são primos.

Dado um número $q \notin \{-1, 1\}$, o inverso de **q** não existe em $\mathbb{Z}$: $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$. Por isso, não podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de divisão. Introduziremos, então, o conjunto dos números racionais.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Chama-se conjunto dos números racionais (símbolo $\mathbb{Q}$) ao conjunto das frações que podem ser reduzidas à forma $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

No conjunto $\mathbb{Q}$, destacamos 5 subconjuntos:

i) $\mathbb{Q}_+$ = conjunto dos racionais não negativos.

ii) $\mathbb{Q}_-$ = conjunto dos racionais não positivos.

iii) $\mathbb{Q}^*$ = conjunto dos racionais não nulos.

iv) $\mathbb{Q}^*_+$ = conjunto dos racionais positivos.

v) $\mathbb{Q}^*_-$ = conjunto dos racionais negativos.

Na fração $\frac{a}{b}$, em que $b \neq 0$, **a** é o numerador e **b**, o denominador. Se **a** e **b** são primos entre si, isto é, se MDC (a, b) = 1, então dizemos que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível. Assim, as frações $\frac{2}{3}, \frac{3}{7}$ e $\frac{7}{15}$ são irredutíveis, mas $\frac{6}{10}$ não é.

O conjunto dos números inteiros está contido no conjunto números racionais ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$), pois todo inteiro é uma fração com denominador 1.

Assim, $2 \in \mathbb{Q}$, pois $2 = \frac{2}{1}$.

Números decimais

Notemos que todo número racional $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, pode ser representado por um número decimal. Passa-se um número racional $\frac{a}{b}$ para a forma de número decimal dividindo o inteiro **a** pelo inteiro **b**. Na passagem de uma notação para outra, podem ocorrer dois casos:

i) O número decimal tem uma quantidade finita de algarismos diferentes de zero, isto é, uma decimal exata.

Exemplos

1º) $\frac{2}{1} = 2$

2º) $\frac{1}{4} = 0,25$

3º) $\frac{1}{50} = 0,020$

4º) $\frac{1\,037}{10\,000} = 0,1037$

ii) O número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, uma dízima periódica.

Exemplos

1º) $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,\overline{6}$ (período 6)

2º) $\frac{2}{7} = 0,285714285714... = 0,\overline{285714}$ (período 285714)

3º) $\frac{11}{6} = 1,8333... = 1,8\overline{3}$ (período 3)

Podemos notar, também, que todo número na forma de decimal exata ou de dízima periódica pode ser convertido à forma de fração $\frac{a}{b}$ e, portanto, representa um número racional.

Quando a decimal é exata, podemos transformá-la em uma fração cujo numerador é o numeral decimal sem a vírgula e cujo denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do numeral dado.

- $0,3 = \frac{3}{10}$
- $4,236 = \frac{4\,236}{1\,000}$
- $0,17 = \frac{17}{100}$
- $63,4598 = \frac{634\,598}{10\,000}$

Quando a decimal é uma dízima periódica, devemos procurar sua geratriz. A seguir, são dados alguns exemplos de como obter a geratriz de uma dízima periódica.

Exemplo 1

Obter a fração geratriz de 0,444... .

$$\left.\begin{aligned} x &= 0,444... \\ 10x &= 4,444... \end{aligned}\right\} \Rightarrow 10x - x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

Portanto, $0,444... = \frac{4}{9}$.

Exemplo 2

Obter a fração geratriz de 0,41777...

$x = 0,41777...$

$$\left.\begin{aligned} 1\,000x &= 417,777... \\ 100x &= 41,777... \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$1\,000x - 100x = 417,777... - 41,777... \Rightarrow x = \frac{376}{900} = \frac{94}{225}$$

Portanto, $0,41777... = \frac{94}{225}$.

Regra prática I

No numerador da fração, coloca-se aquilo que se repete (período); no denominador, tantos noves quantos forem os algarismos que se repetem. No exemplo 1, só um algarismo (o quatro) se repete, por isso coloca-se um só 9 no denominador da fração.

Exemplo 3

$0,2323232... = \frac{23}{99}$

Regra prática II

Para formar o numerador, junta-se a parte que não se repete com o período (243) e subtrai-se da parte que não se repete (24). No denominador, coloca-se um 9 para cada algarismo do período e um 0 para cada algarismo que não se repete, após a vírgula.

Exemplo 4

$2,43333... = \frac{243 - 24}{90} = \frac{219}{90} = \frac{73}{30}$

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Números irracionais

Existem números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica. Por exemplo, o numeral decimal 0,1010010001... (em que o número de algarismos 0 intercalados entre os algarismos 1 vai crescendo) é não periódico. Ele representa um número não racional (irracional).

Outros exemplos de números irracionais:

1º) 1,234567891011...

2º) 6,02002000...

3º) 34,56789101112...

4º) $\sqrt{2}$

5º) $\sqrt[3]{5}$

6º) $\sqrt{1+\sqrt{3}}$

OBSERVAÇÕES

i) Dados **α** irracional e **r** racional não nulo, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + r \\ \alpha . r \\ \frac{\alpha}{r} \\ \frac{r}{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{são todos números irracionais.}$$

Exemplos

1º) $\sqrt{2} + 1$

2º) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3º) $3\sqrt{2}$

4º) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

Todos os números apresentados anteriormente são irracionais.

ii) A soma, subtração, multiplicação ou divisão de dois irracionais pode resultar em um racional ou em um irracional.

Exemplos

1º) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

2º) $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$

3º) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

4º) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Esses números são irracionais.

Exemplos

1º) $\sqrt{2} + \left(1 - \sqrt{2}\right) = 1$

2º) $\sqrt{2}.\sqrt{8} = 4$

3º) $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$

4º) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 2$

Esses números são racionais.

Números reais

Chama-se conjunto dos números reais (símbolo $\mathbb{R}$) àquele formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas ou periódicas (que são números racionais) e as decimais não exatas e não periódicas (que são números irracionais).

Dessa forma, o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é a união do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) com o conjunto dos números irracionais (símbolo $\mathbb{I}$).

No conjunto $\mathbb{R}$, destacamos cinco subconjuntos:

i) $\mathbb{R}_+$ = conjunto dos reais não negativos.

ii) $\mathbb{R}_-$ = conjunto dos reais não positivos.

iii) $\mathbb{R}^*$ = conjunto dos reais não nulos.

iv) $\mathbb{R}^*_+$ = conjunto dos reais positivos.

v) $\mathbb{R}^*_-$ = conjunto dos reais negativos.

Intervalos reais

Dados dois números reais **a** e **b**, com a < b, definimos:

i) Intervalo aberto de extremos **a** e **b** é o conjunto:

$$]a, b[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

ii) Intervalo fechado de extremos **a** e **b** é o conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

iii) Intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita) de extremos **a** e **b** é o conjunto:

$$[a, b[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

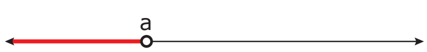
iv) Intervalo fechado à direita (ou aberto à esquerda) de extremos **a** e **b** é o conjunto:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Os números reais **a** e **b** são denominados, respectivamente, extremo inferior e extremo superior do intervalo.

Também são intervalos reais os "intervalos infinitos" assim definidos:

i) $]-\infty, a[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



ii) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

iii) $]a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

iv) $[a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Vimos que $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ qualquer que seja o real **a** não negativo. Assim, por exemplo, $\sqrt{5}$ e $\sqrt[3]{7}$ são números reais.

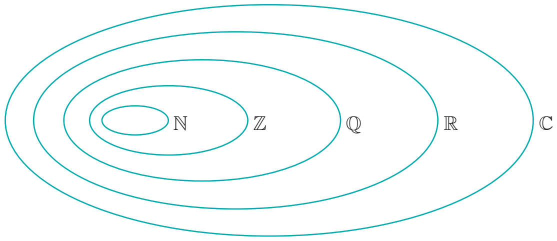
Se o índice da raiz for ímpar, os radicais da forma $\sqrt[n]{-a}$, em que $a \in \mathbb{R}_+$, também representam números reais. É o caso, por exemplo, de $\sqrt[5]{-3}$.

Por outro lado, se o radicando é negativo e o índice da raiz é par, o radical $\sqrt[n]{-a}$ não representa elemento de $\mathbb{R}$. Por exemplo, $\sqrt{-1}$ não é real, pois $\sqrt{-1} = x \Rightarrow -1 = x^2$, o que é impossível, pois se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$.

Para resolver esse problema com $\sqrt[n]{a}$, introduzimos o conjunto dos números complexos (símbolo $\mathbb{C}$), do qual $\mathbb{R}$ é um subconjunto.

RESUMO

Os conjuntos numéricos podem ser representados esquematicamente pela figura a seguir:



Observemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Notemos também que:

i) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ = conjunto dos números inteiros negativos.

ii) $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ = conjunto dos números racionais não inteiros.

iii) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ = conjunto dos números reais irracionais.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. ØSAT (UECE–2016) Dados os números racionais $\frac{3}{7}, \frac{5}{6}, \frac{4}{9}$ e $\frac{3}{5}$, a divisão do menor deles pelo maior é igual a:

A) $\frac{27}{28}$

B) $\frac{18}{25}$

C) $\frac{18}{35}$

D) $\frac{20}{27}$

02. ALRH (UFRGS-RS) Se x = 0,949494... e y = 0,060606..., então x + y é igual a:

A) 1,01

B) 1,11

C) $\frac{10}{9}$

D) $\frac{100}{99}$

E) $\frac{110}{9}$

03. FF3Q (Unicamp-SP–2018) Considere três números inteiros cuja soma é um número ímpar. Entre esses três números, a quantidade de números ímpares é igual a

A) 0 ou 1.

B) 1 ou 2.

C) 2 ou 3.

D) 1 ou 3.

04. (UFJF-MG) Marque a alternativa incorreta a respeito dos números reais.

A) Se a representação decimal infinita de um número é periódica, então esse número é racional.

B) Se a representação decimal de um número é finita, então esse número é racional.

C) Todo número irracional tem uma representação decimal infinita.

D) Todo número racional tem uma representação decimal finita.

05. O8LE (UFRR) Considere o intervalo $J = \left]\frac{3}{7}, \frac{8}{7}\right[$. Assinale a única afirmativa verdadeira sobre **J**.

A) Não existem valores inteiros no intervalo **J**.

B) Existem exatamente quatro números racionais no intervalo **J**.

C) Não existem números irracionais no intervalo **J**.

D) Existem infinitos números reais no intervalo **J**.

E) Existem exatamente seis números racionais no intervalo **J**.

06. (UFF-RJ) Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), "Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem."

Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas.

Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

A) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

B) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

C) entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.

D) entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.

E) a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

07. HCR8 (UECE–2018) A quantidade de números inteiros positivos **n**, que satisfazem a desigualdade: $\frac{3}{7} < \frac{n}{14} < \frac{2}{3}$ é:

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

08. 9GX3 (Fatec-SP–2016) Considere a sentença: para qualquer **x** pertencente ao conjunto **M** tem-se $x^2 > x$.

Assinale a alternativa que apresenta um possível conjunto **M**.

A) $\left\{-2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

B) $\left\{-\frac{1}{2}; 0; 2\right\}$

C) $\left\{-2; -\frac{1}{2}; 2\right\}$

D) {–1; 1; 2}

E) $\left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$

MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 1XSS (PUC Rio) Os números **m** e **n** são tais que $4 \leq m \leq 8$ e $24 \leq n \leq 32$. O maior valor possível de $\frac{m}{n}$ é:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{1}{8}$

02. (CEFET-MG) Um grupo de alunos cria um jogo de cartas, em que cada uma apresenta uma operação com números racionais. O ganhador é aquele que obtiver um número inteiro como resultado da soma de suas cartas. Quatro jovens ao jogar receberam as seguintes cartas:

	1ª carta	2ª carta
Maria	$1{,}333... + \frac{4}{5}$	$1{,}2 + \frac{7}{3}$
Selton	$0{,}222... + \frac{1}{5}$	$0{,}3 + \frac{1}{6}$
Tadeu	$1{,}111... + \frac{3}{10}$	$1{,}7 + \frac{8}{9}$
Valentina	$0{,}666... + \frac{7}{2}$	$0{,}1 + \frac{1}{2}$

O vencedor do jogo foi

A) Maria.

B) Selton.

C) Tadeu.

D) Valentina.

03. (UECE–2016) Se $x = \left\{0{,}333..., 0{,}760, \frac{13}{17}, \frac{6}{17}\right\}$.

Se **a** e **b** são respectivamente o maior e o menor dos elementos de **x**, então, $\frac{a + b^2}{b}$ é um número

A) entre 1 e 2.

B) entre 2 e 3.

C) entre 3 e 4.

D) maior do que 4.

04. (UEG-GO–2016) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, a interseção entre eles é dada pelo conjunto:

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 4\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

05. 3W3Z (UEG-GO–2015) Se colocarmos os números reais $-\sqrt{5}, 1, -\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{8}$ em ordem decrescente, teremos a sequência

A) $\frac{3}{8}, 1, -\frac{3}{5}, -\sqrt{5}$.

B) $\frac{3}{8}, 1, -\sqrt{5}, -\frac{3}{5}$.

C) $1, \frac{3}{8}, -\frac{3}{5}, -\sqrt{5}$.

D) $1, \frac{3}{8}, -\sqrt{5}, -\frac{3}{5}$.

06. (PUC RS–2015) Em nossos trabalhos com matemática, mantemos um contato permanente com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, que possui, como subconjuntos, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, o $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o dos números irracionais $\mathbb{I}$. O conjunto dos números reais também pode ser identificado por:

A) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$

B) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$

C) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}$

D) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{I}$

E) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

07. IAER (UFJF-MG) Define-se o comprimento de cada um dos intervalos [a, b],]a, b[,]a, b] e [a, b[como sendo a diferença (b – a). Dados os intervalos M = [3, 10], N =]6, 14[, P = [5, 12[, o comprimento do intervalo resultante de $(M \cap P) \cup (P - N)$ é igual a:

A) 1

B) 3

C) 5

D) 7

E) 9

08. CVR6 (CEFET-MG–2016) Considere os conjuntos **X** e **Y** definidos por

$X = \{ x \in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de $3 \}$ e

$Y = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y$ é divisor de $84 \}$.

Sobre o conjunto $A = X \cap Y$ é correto afirmar que

A) se $n \in A$ então $(-n) \in A$.

B) o conjunto **A** possui 4 elementos.

C) o menor elemento do conjunto **A** é o zero.

D) o maior elemento do conjunto **A** é divisível por 7.

09. BEKL (UFMG) Considere **x**, **y** e **z** números naturais. Na divisão de **x** por **y**, obtêm-se quociente **z** e resto 8. Sabe-se que a representação decimal de $\frac{x}{y}$ é a dízima periódica 7,363636... Então, o valor de x + y + z é:

A) 190

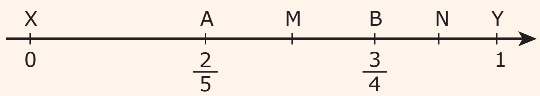
B) 193

C) 191

D) 192

10. MU50

(UFTM-MG) Sabe-se que há infinitos números irracionais entre dois números racionais quaisquer, e há infinitos números racionais entre dois números irracionais quaisquer. A figura mostra um trecho da reta numérica:



Se **M** é ponto médio do segmento AB, e **N** é ponto médio do segmento BY, então é correto afirmar que a abscissa do ponto:

A) **M** é uma dízima periódica simples.

B) **N** não possui representação fracionária.

C) **M** e a abscissa do ponto **N** possuem representação decimal exata.

D) **M** é um número irracional.

E) **M** e a abscissa do ponto **N** são dízimas periódicas compostas.

11. (UEL-PR) Considere os seguintes conjuntos:

I. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 20\}$

II. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$

III. $C = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \dfrac{40}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

O conjunto $(A \cap B) \cap C$ tem

A) dois elementos.

B) três elementos.

C) quatro elementos.

D) oito elementos.

E) quatorze elementos.

12. 2XW7

(IFMA–2016) Sejam as afirmativas: sabendo que $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais:

I. $\sqrt{10} \in (\mathbb{Q} \cup \mathbb{I})$

II. $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}$

III. $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}) = \varnothing$

IV. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$

V. $3{,}762 \in (\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z})$

VI. $\mathbb{I} \not\subset \mathbb{Z}$

As afirmativas corretas são

A) V e VI.

B) II, IV e V.

C) II, III e V.

D) I, III e VI.

E) III e IV.

13. 9J6Q

(UFRGS-RS) Sendo **a**, **b** e **c** números reais, considere as seguintes afirmações.

I. Se $a \neq 0, b \neq 0$ e $a < b$, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

II. Se $c \neq 0$, então $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

III. Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então $(a : b) : c = a : (b : c)$.

Quais estão corretas?

A) Apenas I.

B) Apenas II.

C) Apenas I e II.

D) Apenas II e III.

E) I, II e III.

14. C2BV

(CEFET-MG) Considere as afirmações a seguir, em que **a** e **b** são números reais.

I. $a^2 \geq a$

II. $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$

III. $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$

IV. $a < b \Leftrightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$

Estão corretas apenas as afirmativas

A) I e II.

B) I e III.

C) II e IV.

D) III e IV.

15. 1Y5C

(UFV-MG) Sejam $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...\}$, $M = \{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ é divisor de } 24\}$, $P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ é múltiplo de 2 e menor que 14}\}$ e $Q = \{q \in \mathbb{N} \mid q \text{ é um número quadrado perfeito e divisor de 64}\}$. Considerando-se as operações entre os conjuntos **M**, **P** e **Q**, assinale a alternativa incorreta.

A) $(M \cap P) - (P \cap Q) = \{2, 6, 8, 12\}$

B) $M \cap (P \cup Q) = (M \cap P) \cup (M \cap Q)$

C) $M \cup (P \cap Q) = M$

D) $P - Q = \{2, 6, 8, 10, 12\}$

16. WWTP

(UEFS-BA) Sejam **N**, **Z**, **Q** e **R** os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, respectivamente.

Dados: $G = \left\{n \in Z \mid \dfrac{90}{n} \in N\right\}$, $F = \{q \in Q \mid 12q \in Z\}$ e $D = \{x \in R \mid \sqrt{x} \in Q\}$, é correto afirmar:

A) $F \cap D \subset N$.

B) $F \cap Z$ é o conjunto vazio.

C) $\sqrt{2} \in (D - Q)$.

D) $G \cup D \subset F$.

E) $G \cap F \cap D$ tem 2 elementos.

MATEMÁTICA

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. RHYW (Enem–2017) Uma pessoa ganhou uma pulseira formada por pérolas esféricas, na qual faltava uma das pérolas. A figura indica a posição em que estaria faltando esta pérola.

Ela levou a joia a um joalheiro que verificou que a medida do diâmetro dessas pérolas era 4 milímetros. Em seu estoque, as pérolas do mesmo tipo e formato, disponíveis para reposição, tinham diâmetros iguais a: 4,025 mm; 4,100 mm; 3,970 mm; 4,080 mm e 3,099 mm.

O joalheiro então colocou na pulseira a pérola cujo diâmetro era o mais próximo do diâmetro das pérolas originais.

A pérola colocada na pulseira pelo joalheiro tem diâmetro, em milímetro, igual a:

A) 3,099
B) 3,970
C) 4,025
D) 4,080
E) 4,100

02. (Enem–2016) Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$.

Colocando os valores dessas medidas em ordem crescente, encontramos

A) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{4}$.

B) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{3}{8}$.

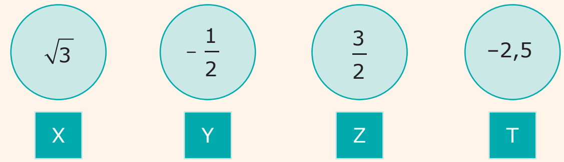
C) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}$.

D) $\frac{3}{8}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}$.

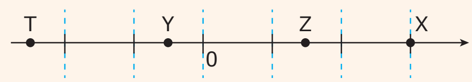
E) $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$.

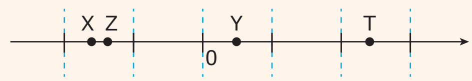
03. (Enem) Em um jogo educativo, o tabuleiro é uma representação da reta numérica e o jogador deve posicionar as fichas contendo números reais corretamente no tabuleiro, cujas linhas pontilhadas equivalem a 1 (uma) unidade de medida. Cada acerto vale 10 pontos.

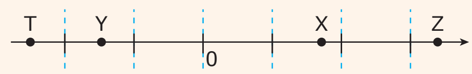
Na sua vez de jogar, Clara recebe as seguintes fichas:

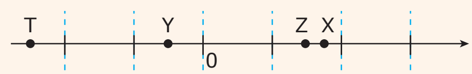


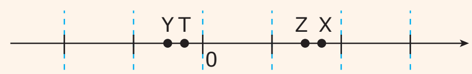
Para que Clara atinja 40 pontos nessa rodada, a figura que representa seu jogo, após a colocação das fichas no tabuleiro, é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. D	05. D	07. B
02. D	04. D	06. D	08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B	05. C	09. C	13. B
02. C	06. E	10. C	14. D
03. B	07. C	11. B	15. D
04. A	08. D	12. D	16. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. C
03. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Raciocínio Lógico

Lógica (do grego *logos*) significa pensamento, ideia, argumento. Ela tem o objetivo primordial de garantir uma linha de pensamento que chegue a conhecimentos verdadeiros.

Podemos, então, dizer que a lógica nos ensina a lidar com os argumentos e a raciocinar corretamente, para não chegarmos a conclusões equivocadas. Estudaremos neste módulo alguns princípios complementares da lógica, importantes para o estudo da Matemática.

PROPOSIÇÕES

Proposição é uma declaração (afirmativa ou negativa) que pode ser classificada como verdadeira ou falsa.

São proposições:

i) "A Bahia fica na região Nordeste."
É uma proposição verdadeira.

ii) "O dobro de três não é seis."
É uma proposição falsa.

iii) "Todo triângulo é equilátero."
É uma proposição falsa.

Não são proposições, pois não podemos classificar como verdadeiras ou falsas:

i) "Antônio gosta de salada?"
É uma oração interrogativa.

ii) "Thiago, vá estudar para a prova de Biologia."
É uma oração imperativa.

iii) "$2x + 3 = 1$"
É uma equação.

CONECTIVOS

A partir de proposições simples, podemos formar proposições mais complexas, por meio do emprego de símbolos lógicos, denominados conectivos. As proposições formadas com conectivos são chamadas proposições compostas.

Conectivo **e**

Inserindo o conectivo **e** (representado pelo símbolo $\wedge$) entre duas proposições simples **A** e **B**, obtemos uma proposição composta. Essa nova proposição é dita conjunção das proposições originais **A** e **B**, ou seja, é a proposição em que se declaram, ao mesmo tempo, **A** e **B**.

A conjunção é verdadeira quando **A** $\wedge$ **B** forem ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $A \wedge B$ é falsa.

Exemplo 1

A: Cinco é ímpar. (verdadeira)
B: A água é incolor. (verdadeira)
$A \wedge B$: Cinco é ímpar e a água é incolor. (verdadeira)

Exemplo 2

A: Belo Horizonte é maior do que Goiânia. (verdadeira)
B: O Rio de Janeiro é maior do que São Paulo. (falsa)
$A \wedge B$: Belo Horizonte é maior do que Goiânia e o Rio de Janeiro é maior do que São Paulo. (falsa)

Conectivo **ou**

Inserindo o conectivo **ou** (representado pelo símbolo $\vee$) entre duas proposições simples **A** e **B**, obtemos uma proposição composta. Essa nova proposição é denominada disjunção das proposições originais **A** e **B**, ou seja, é a proposição em que se declara verdadeira pelo menos uma das proposições **A** e **B**.

A disjunção é verdadeira quando ao menos uma das proposições **A** e **B** forem verdadeiras, sendo falsa somente quando todas as proposições forem falsas ao mesmo tempo.

Exemplo 1

A: Aranhas são mamíferos. (falsa)
B: Cobras são répteis. (verdadeira)
$A \vee B$: Aranhas são mamíferos ou cobras são répteis. (verdadeira)

Exemplo 2

A: O céu é azul. (verdadeira)
B: Triângulos não possuem diagonais. (verdadeira)
$A \vee B$: O céu é azul ou triângulos não possuem diagonais. (verdadeira)

Condicional

Assim como as demais conectivas, a condicional possui caracteres específicos que norteiam seu uso. As sentenças compostas são associadas com o uso das palavras se e então, sendo escritas conforme a seguir:

Se P, então Q (simbologia: $P \rightarrow Q$)

Os elementos P e Q são proposições que devem ser ligados formando um único corpo. A sentença P será denominada de antecedente, e a sentença Q de consequente. Mas lembre-se que a Filosofia estabelece a forma e os resultados a serem seguidos pelas ciências, ou seja, pode-se olhar a condicional como uma forma lógica fixa que pode ser mudada somente com a alteração das proposições P e Q.

Na lógica formal aristotélica, foi instituído que a proposição composta condicional possui um resultado falso somente quando sua premissa P é verdadeira e o consequente Q é falso. Nos demais casos, a condicional será considerada verdadeira.

Em algumas situações, é possível perceber uma relação de inclusão nessa conduta. Observe o exemplo a seguir:

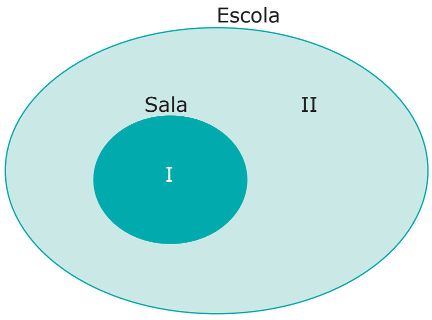
Se João está na sala de aula, então João está na escola.

Elementos: Proposição P: João está na sala de aula.

Proposição Q: João está na escola.

Observa-se uma relação de inclusão nessa situação prática, pois a sala de aula está contida na Escola.

Considere que o aluno estando dentro do elemento sala ou escola torna a sentença verdadeira e, no caso contrário, falsa.



I. Dentro da sala que, por sua vez, está dentro da escola.

II. Somente dentro da escola.

Nesse caso específico, constata-se a seguinte situação do aluno: João está na sala e, consequentemente, na escola é possível; João está na escola e não está na sala de aula também é possível; João pode não estar na sala de aula e não estar na escola é uma situação fática possível; contudo, a situação João está dentro da sala de aula e, ao mesmo tempo, não está na escola não pode ocorrer em uma situação fática e, nesse caso, a condicional se tornaria falsa, pois a sentença P (premissa) é verdadeira e a sentença Q (consequente) é falsa.

A situação descrita anteriormente pode ser percebida de forma clara, entretanto, a lógica formal aristotélica não foi escrita somente para esse tipo de caso, e sim de forma genérica para todas as construções lógicas, ou seja, as condicionais não estão restritas às situações que possam ser criadas como representação de conjuntos, embora, no campo da matemática, sejam bastante usadas nesse contexto. A seguir será estabelecido alguns exemplos específicos.

I. Considere as proposições simples a seguir:

P: 7 é um número primo (verdadeiro).

Q: $2 < 3$ (verdadeiro).

Preposição composta condicional:

Se 7 é um número primo, então $2 < 3$.

Valor lógico: verdadeiro, pois a primeira e a segunda proposição são verdadeiras.

II. Considere as proposições a seguir:

B: O triângulo ABC de lados medindo 6, 6 e 7 é equilátero (falso).

A: O triângulo ABC de lados medindo 6, 6 e 7 é isósceles (verdadeiro).

Proposição composta condicional:

Se A então B.

Valor lógico: Falso, pois a primeira sentença (A) é verdadeira e a segunda sentença (B) é falsa. Lembre-se que a condicional é falsa somente nessa situação apresentada, em que o antecedente, primeira sentença, é verdadeira e o consequente, segunda sentença, é falsa. simbolicamente: $V \rightarrow F$ resultado F.

A sentença condicional $P \rightarrow Q$ pode ser lida como: P condicional Q; P acarreta Q; P somente se Q; P é condição suficiente de Q.

Bicondicional

A proposição composta denominada de Bicondicional associa-se a uma escrita rígida através das palavras se, e somente se, sendo escrita como a seguir:

P se, e somente se, Q (simbologia: $P \leftrightarrow Q$).

Os elementos P e Q são proposições que devem ser ligados formando um único corpo. A bicondicional apresenta-se como duas proposições condicionais (se, então) atribuídas ao sentido de ida e volta. Observe a seguir:

P se, e somente se, Q possui a mesma eficácia da conjunção (e) descrita por: Se P, então Q e se Q, então P.

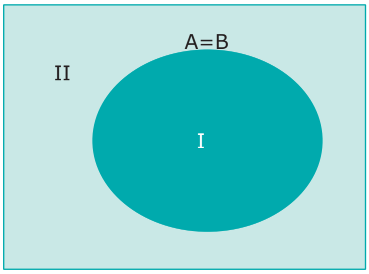
Simbolicamente: $P \leftrightarrow Q$ é equivalente a $(P \leftrightarrow Q)$ e $(Q \leftrightarrow P)$.

A proposição bicondicional possui, segundo a Filosofia, valor lógico falso nos casos:

I. Quando a primeira proposição é verdadeira e a segunda é falsa (simbolicamente: $V \leftrightarrow F$).

II. Quando a primeira proposição é falsa e a segunda é verdadeira (simbolicamente: $F \leftrightarrow V$).

Nas situações fáticas que são possíveis, pode-se entender a bicondicionalidade como uma relação de igualdade entre dois conjuntos, em que os elementos do conjunto A e B são os elementos que satisfazem, respectivamente, as proposições P e Q. Observe a seguir:



I. Satisfaz as proposições P e Q.

II. Não satisfaz as proposições P e Q.

As situações que podem existir para esse diagrama seria satisfazer simultaneamente aos dois conjuntos ou não satisfazer a nenhum, ou seja, não existe como satisfazer ao conjunto A (verdadeiro para P) e não satisfazer ao conjunto B (falso para Q) ou vice-versa. Nos dois últimos casos descritos que não existem nesse contexto fático, tem-se a bicondicionalidade falsa.

QUANTIFICADORES

Já vimos que sentenças do tipo $x + 2 = 5$ (ou seja, sentenças com variáveis) não são proposições, já que não são verdadeiras ou falsas. Por isso, são chamadas de sentenças abertas. Há duas maneiras de se transformarem sentenças abertas em proposições: atribuindo-se valores específicos às variáveis ou utilizando-se um dos dois tipos de quantificadores que veremos a seguir.

Proposições envolvendo quantificadores também são chamadas de proposições quantificadas.

Quantificador universal

O quantificador universal é indicado pelo símbolo $\forall$ e deve ser lido "qualquer que seja", "para todo" ou "para cada".

Exemplos

Se **x** denota um número real, temos as proposições:

i) $\forall x: 2^x > 0$ (verdadeira)

ii) $\forall x: x + 3 = 1$ (falsa)

Se **x** denota uma sobremesa, podemos construir a proposição:

$\forall$ x: **x** é calórica. (falsa)

Escrevendo essa proposição em liguagem corrente, temos: "toda sobremesa é calórica".

Quantificador existencial

O quantificador existencial é indicado pelo símbolo $\exists$ e deve ser lido "existe", "existe ao menos um" ou "existe um".

Exemplos

Se **x** denota um número real, temos as proposições:

i) $\exists x: x + 2 = 5$ (verdadeira)

ii) $\exists x: x^2 + 1 < 0$ (falsa)

Se **x** denota um estudante, podemos construir a proposição:

$\exists$ x: **x** é inteligente. (verdadeira)

Escrevendo essa proposição em linguagem corrente, temos: "existe estudante inteligente".

OBSERVAÇÃO

Há também um tipo de quantificador, indicado pelo símbolo **$\exists!$**, que significa "existe um único".

NEGAÇÃO DE PROPOSIÇÕES

Negação de proposições simples

A negação de uma proposição **A** é simbolizada por ~A, que se lê "não **A**" ou, simplesmente, "negação de **A**". Assim, se **A** é falsa, então ~A é verdadeira e, se **A** é verdadeira, então ~A é falsa. Também podemos dizer que negar uma proposição acarreta inversão de seu valor lógico.

OBSERVAÇÃO

Para qualquer proposição **A**, é claro que ~(~A) e **A** têm o mesmo valor lógico.

Exemplo

A: 4 é primo. (falsa)

~A: 4 não é primo. (verdadeira)

Negação de proposições compostas

Para negarmos uma conjunção ou uma disjunção, devemos inverter o valor lógico de cada proposição e trocar "**e**" por "**ou**" e vice-versa.

i) A negação da conjunção (**A** e **B**) é a disjunção (~A ou ~B).

ii) A negação da disjunção (**A** ou **B**) é a conjunção (~A e ~B).

Em símbolos, escrevemos:

$\sim(A \wedge B) \leftrightarrow (\sim A) \vee (\sim B)$

$\sim(A \vee B) \leftrightarrow (\sim A) \wedge (\sim B)$

Exemplo

A: Marcos trabalha. (verdadeira)

B: Marcos joga tênis. (falsa)

$A \vee B$: Marcos trabalha ou joga tênis. (verdadeira)

$\sim(A \vee B)$: Marcos não trabalha e não joga tênis. (falsa)

Negação de "todo"

Para tornar falsa a proposição "todo professor é alto", devemos encontrar, pelo menos, um professor que não é alto. Portanto, seja a afirmação:

A: Todo professor é alto. (falsa)

Sua negação é:

~A: Existe (pelo menos um) professor que não é alto. (verdadeira)

~A: Nem todo professor é alto. (verdadeira)

Negação de "nenhum"

Analogamente, para negar a proposição "nenhum homem é fiel", devemos encontrar pelo menos um homem que seja fiel. Temos, então:

A: Nenhum homem é fiel. (falsa)

~A: Existe (pelo menos um) homem fiel. (verdadeira)

~A: Algum homem é fiel. (verdadeira)

Negação de "algum" ou "existe"

A: Existe cachorro inteligente. (falsa)

Se houver um ou mais cachorros inteligentes, a proposição anterior é verdadeira. Para torná-la falsa, não pode haver cachorro inteligente. Portanto, a negação da proposição **A** é:

~A: Nenhum cachorro é inteligente. (verdadeira)

~A: Todo cachorro não é inteligente. (verdadeira)

CONTRAPOSITIVA DE UMA IMPLICAÇÃO

Definição

Dada uma implicação A → B, chamamos de contrapositiva dessa implicação a proposição ~B → ~A.

Uma implicação qualquer e sua contrapositiva sempre têm o mesmo valor lógico, como podemos perceber nos exemplos seguintes.

Exemplo 1

A: Jorge trabalha. (verdadeira)

B: Jorge estuda. (falsa)

A → ~B: Se Jorge trabalha, então não estuda. (verdadeira)

B → ~A: Se Jorge estuda, então não trabalha. (verdadeira)

Exemplo 2

A: Todo número primo é ímpar. (falsa)

B: Nenhum número par é primo. (falsa)

A → B: Se todo número primo é ímpar, então nenhum número par é primo. (verdadeira)

~B → ~A: Se algum número par é primo, então nem todo número primo é ímpar. (verdadeira)

PRINCÍPIO DA CASA DE POMBOS

O Princípio da Casa de Pombos, ou Princípio das Gavetas, ou "Teorema de Dirichlet", foi estabelecido pelo matemático Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Dirichlet estabeleceu o conceito usual de funções usado hoje em 1837, sendo um dos seus grandes trabalhos na área da Teoria dos Números.

O princípio consiste na certeza de obter determinado resultado e pode ser enunciado como a seguir:

Considere uma casa de pombos com (n – 1) entradas. Em uma revoada de **n** pombos para dentro da casa, é possível garantir com certeza que por pelo menos uma das entradas passou pelo menos 2 pombos. Observe que essa afirmação não é uma mera expectativa, e sim, uma certeza, pois o número de pombos supera o número de entradas.

Exemplo:

Uma urna possui 8 bolas pretas (P), 6 bolas brancas (B) e 5 bolas verdes (V). Quantas bolas devem ser retiradas da urna para garantir a certeza de obter:

A) Duas bolas de cores diferentes.

B) Duas bolas na cor preta.

Resposta:

A) Para garantir que as bolas possuam cores diferentes deve-se obter a saída da pior hipótese analisada, ou seja, a maior saída de bolas de cores iguais. Com a saída de 8 bolas pretas, então a próxima bola terá uma cor diferente da preta, pois não existem mais bolas pretas. Logo, retiram-se 9 bolas para garantir a certeza.

B) Nesse caso, a pior hipótese de saída seria sair todas as bolas verdes e brancas, sendo totalizadas 11 bolas (5 bolas verdes e 6 bolas brancas). Com as próximas duas retiradas das bolas pretas tem-se a condição do problema. Logo, retirando-se 13 bolas para garantir a certeza de obter duas bolas pretas.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. XW80 (ESPM-SP–2017) Para a escola que tivesse pelo menos um aluno classificado para a terceira fase, seria concedido um diploma de Honra ao Mérito. Sabe-se que a escola N. Sra. do Socorro ao Ensino Público não recebeu esse diploma. Isso foi porque

A) algum de seus alunos foi desclassificado na segunda fase.

B) somente um aluno dessa escola chegou à terceira fase.

C) nenhum aluno dessa escola chegou à terceira fase.

D) todos os alunos dessa escola foram desclassificados na primeira fase.

E) todos os alunos dessa escola foram reprovados na terceira fase.

02. CB74 (Vunesp) Um jantar reúne 13 pessoas de uma mesma família. Das afirmações a seguir, referentes às pessoas reunidas, a única necessariamente verdadeira é:

A) Pelo menos uma delas tem altura superior a 1,90 m.

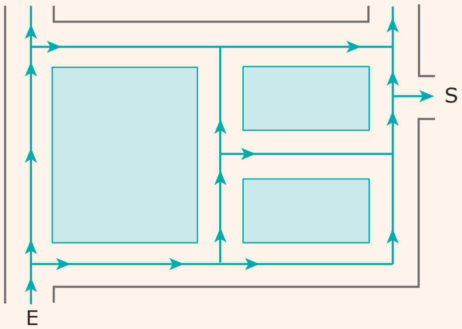
B) Pelo menos duas delas são do sexo feminino.

C) Pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês.

D) Pelo menos uma delas nasceu num dia par.

E) Pelo menos uma delas nasceu em janeiro ou fevereiro.

03. ZUV6 (UFRN) A figura a seguir representa uma região de ruas de mão única. O número de carros se divide igualmente em cada local onde existem duas opções de direções, conforme a figura.



Se 128 carros entram em **E**, podemos afirmar que o número de carros que deixam a região pela saída **S** é:

A) 24

B) 48

C) 64

D) 72

04. RY11 (Fatec-SP) Na Lógica, tem-se que a proposição

Se ocorre **P**, então ocorre **Q**.

é equivalente à proposição

Se não ocorre **Q**, então não ocorre **P**.

Assim sendo,

Se $x < 3$, então $y = -4$

é equivalente a

A) Se $x > 3$, então $y \neq -4$.

B) Se $x \geq 3$, então $y \neq 4$.

C) Se $y \neq 4$, então $x \geq 3$.

D) Se $y \neq -4$, então $x > 3$.

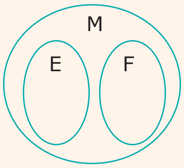
E) Se $y \neq -4$, então $x \geq 3$.

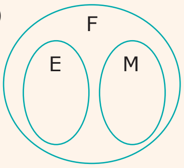
05. (UFG-GO) A afirmação "Todo jovem que gosta de Matemática adora esportes e festas" pode ser representada segundo o diagrama:

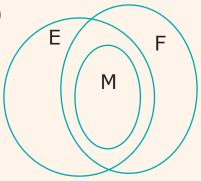
M = {jovens que gostam de Matemática}

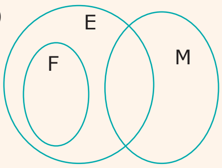
E = {jovens que adoram esportes}

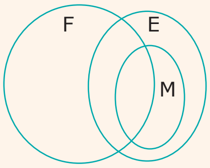
F = {jovens que adoram festas}

A)


B)


C)


D)


E)


06. WUB2 (Unifor-CE) Certo dia, o Centro Acadêmico de uma Faculdade de Medicina publicou a seguinte notícia:

"Todos os alunos serão reprovados em Anatomia!"

A repercussão dessa manchete fez com que a direção da faculdade interpelasse os responsáveis e deles exigisse, como forma de retratação, a publicação de uma negação da afirmação feita. Diante desse fato, a nota de retratação pode ter sido:

A) "Nenhum aluno será reprovado em Anatomia."
B) "Algum aluno será aprovado em Anatomia."
C) "Algum aluno será reprovado em Anatomia."
D) "Se alguém for reprovado em Anatomia, então não será um aluno."
E) "Todos os reprovados em Anatomia não são alunos."

07. (UERJ–2015) Uma loja identifica seus produtos com um código que utiliza 16 barras, finas ou grossas. Nesse sistema de codificação, a barra fina representa o zero e a grossa, o 1. A conversão do código em algarismos do número correspondente a cada produto deve ser feita de acordo com esta tabela:

Código	Algarismo
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9

Observe um exemplo de código e de seu número correspondente:

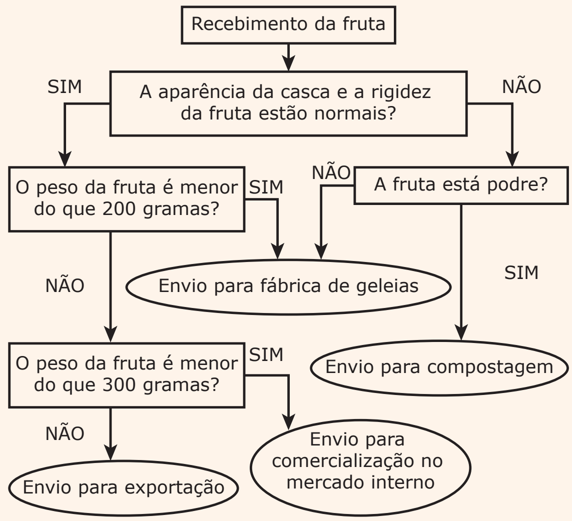
= 0729

Considere o código a seguir, que identifica determinado produto.

Esse código corresponde ao seguinte número:

A) 6 835
B) 5 724
C) 8 645
D) 9 768

08. (Insper-SP) A figura abaixo mostra o fluxograma do processo que é utilizado em uma cooperativa agrícola para definir o destino das frutas enviadas a ela pelos produtores da região.



De acordo com o fluxograma, se o peso de uma fruta recebida pela cooperativa é 320 gramas, então essa fruta, necessariamente,

A) será enviada para exportação.
B) será enviada para a fábrica de geleias.
C) não será enviada para comercialização no mercado interno.
D) não será enviada para compostagem.
E) não será enviada para a fábrica de geleias.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. DCJF (UEL-PR) O "Sudoku" é um jogo de desafio lógico inventado pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783). Na década de 70, esse jogo foi redescoberto pelos japoneses, que o rebatizaram como Sudoku, palavra com o significado "número sozinho". É jogado em um quadro com 9 por 9 quadrados, que é subdividido em 9 submalhas de 3 por 3 quadrados, denominadas quadrantes. O jogador deve preencher o quadro maior de forma que todos os espaços em branco contenham números de 1 a 9. Os algarismos não podem se repetir na mesma coluna, linha ou quadrante.

LEÃO, S. Lógica e estratégia. *Folha de Londrina, Especial* 14, 17 set. 2006.

Com base nessas informações, o algarismo a ser colocado na casa marcada com ◯ no quadro a seguir é:

4				7			5	6
						9		2
6								
3				6	9			
		5	8	◯	1	7		
8			7		4			
					3		2	1
		2						
1	6			2				7

A) 2
B) 3
C) 5
D) 7
E) 9

02. VRØ3 (Fatec-SP–2016) Um aluno da Fatec Cotia deve realizar cinco trabalhos: **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, que serão executados um de cada vez. Considerando o cronograma de entrega, ele estabeleceu as seguintes condições:

- não é possível realizar o trabalho **A** antes do trabalho **B**;
- não é possível realizar o trabalho **A** antes do trabalho **D**;
- o trabalho **E** só pode ser feito depois do trabalho **C**; e
- o trabalho **E** deverá ser o terceiro a ser realizado.

Assim sendo, o quarto trabalho a ser realizado

A) só pode ser o **A**.

B) só pode ser o **B**.

C) só pode ser o **D**.

D) só pode ser o **A** ou o **B**.

E) só pode ser o **B** ou o **D**.

03. 19MQ (Fatec-SP) Considerando verdadeiras as premissas:

- Todo lixo eletrônico contamina o meio ambiente.
- Existe lixo eletrônico que é destinado à reciclagem.

Pode-se concluir logicamente que, se um determinado lixo

A) é eletrônico ou é destinado à reciclagem, então contamina o meio ambiente.

B) não é eletrônico e contamina o ambiente, então não é destinado à reciclagem.

C) contamina o meio ambiente e não é destinado à reciclagem, então é lixo eletrônico.

D) não é destinado à reciclagem e não contamina o meio ambiente, então não é eletrônico.

E) é destinado à reciclagem ou não contamina o meio ambiente, então não é lixo eletrônico.

04. (Fatec-SP–2016) Proposição é uma frase declarativa que exprime um pensamento de sentido completo. Toda proposição possui um único valor lógico: Falso (F) ou Verdadeiro (V).

Assinale a alternativa que apresenta uma proposição.

A) Vamos estudar?

B) Parabéns!

C) $x + y > 3$

D) $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

E) $x^2 + 5x + 6$

05. (PUC Rio–2018) Os sobrenomes de Roy, Edu e Luan são Todeka, Sharifa e Arrabeca, não necessariamente nessa ordem. O de sobrenome Sharifa, que não é o Roy, é mais velho que Luan. O de sobrenome Arrabeca é o mais velho dos três.

Concluímos, então, que os sobrenomes de Roy, Edu e Luan são, respectivamente:

A) Todeka, Sharifa e Arrabeca.

B) Todeka, Arrabeca e Sharifa.

C) Arrabeca, Sharifa e Todeka.

D) Arrabeca, Todeka e Sharifa.

E) Sharifa, Todeka e Arrabeca.

06. VYUK (FGV-RJ–2017) Considere as instruções a seguir, dadas a um computador:

1. Inicialize o valor de **X** com 4 e o valor de **Y** com 0 (zero).
2. Some 7 ao valor de **X**.
3. Some **X** ao valor de **Y**.
4. Se o valor de **Y** for no mínimo 100, vá para a instrução 5; caso contrário, vá para a instrução 2 e prossiga a partir de lá.
5. Imprima o valor de **X**.
6. Pare.

O valor de **X** que será impresso na instrução 5 é:

A) 101

B) 54

C) 29

D) 25

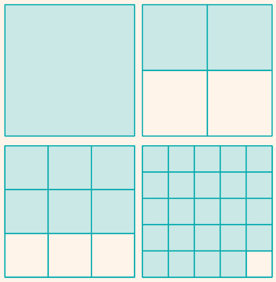
E) 39

07. N2ØF (ESPM-SP–2017) Se $y > 3$, então $x \neq 2$ e $x \neq 5$. Sabe-se que $x^2 - 7x + 10 = 0$. Podemos afirmar que um possível valor de $x + y$ é:

A) 10 C) 9 E) 8

B) 11 D) 12

08. WWH2 (UEG-GO–2016) A figura a seguir representa uma sequência lógica, na qual cada quadrado possui uma quantidade de quadradinhos pintados em seu interior. Se prosseguirmos dessa maneira verificaremos que o 8º quadrado possuirá



A) abaixo de 1 000 quadradinhos pintados.

B) 6 144 quadradinhos pintados.

C) acima de 60 000 quadradinhos pintados.

D) 40 320 quadradinhos pintados.

09. 1CXR (IFAL–2016) A Lógica estuda a valorização das sentenças e suas relações, e muitas vezes usa a simbologia dos conjuntos para expressar essa linguagem. Por exemplo: sejam o conjunto dos jogadores de futebol e o conjunto dos atletas, denotados por **F** e **A** respectivamente. A sentença lógica "TODO JOGADOR DE FUTEBOL É ATLETA" significa que para qualquer elemento $X \in F$ tem-se também que $X \in A$. Representamos simbolicamente por $F \subset A$, ou seja, o conjunto **F** está contido no conjunto **A**.

Posto isto, a simbologia $F \not\subset A$ expressa corretamente pela lógica que

A) nenhum jogador de futebol é atleta.

B) todo atleta é jogador de futebol.

C) existe jogador de futebol que é atleta.

D) existe atleta que não é jogador de futebol.

E) existe jogador de futebol que não é atleta.

10. (PUCPR–2016) Três amigos, João, Carlos e Renato, estão em uma fila. Sabe-se que João só fala a verdade, Renato só fala mentiras e Carlos às vezes mente e às vezes fala a verdade. Em uma conversa com eles, o primeiro ocupante da fila disse:

– João está atrás de mim.

O ocupante da segunda posição da fila disse:

– Meu nome é Carlos.

E o ocupante do final da fila disse:

– Renato está na segunda posição da fila.

Dessa forma podemos concluir que estão na primeira, segunda e terceira posição da fila, respectivamente:

A) Carlos, Renato e João.

B) Carlos, João e Renato.

C) Renato, Carlos e João.

D) Renato, João e Carlos.

E) João, Renato e Carlos.

11. X1Y1 (ESPM-SP–2016) Se o cachorro dorme, então o gato não mia. Se o pássaro não canta, então o cachorro dorme. Sabemos que o gato mia. Então, é correto afirmar que:

A) O cachorro dorme e o pássaro canta.

B) O cachorro não dorme e o pássaro canta.

C) O cachorro não dorme e o pássaro não canta.

D) O cachorro dorme e o pássaro não canta.

E) Não se pode saber se o pássaro canta ou não.

12. BIBZ (Fatec-SP–2017) Considere que:

- a sentença "Nenhum A é B" é equivalente a "Todo A é não B";
- a negação da sentença "Todo A é B" é "Algum A é não B";
- a negação da sentença "Algum A é B" é "Todo A é não B".

Assim sendo, a negação da sentença "Nenhum nefelibata é pragmático" é

A) Todo nefelibata é não pragmático.

B) Todo não nefelibata é pragmático.

C) Algum nefelibata é pragmático.

D) Algum não nefelibata é pragmático.

E) Algum não nefelibata é não pragmático.

13. 1PUC (ESPM-SP–2017) Quanto ao estado civil das funcionárias de um escritório, é verdade que:

- Ou Laura não é casada ou Maria é casada.
- Se Maria é casada, então Paula é divorciada.
- Se Paula não é divorciada, então Laura é casada.

Com base no exposto, pode-se afirmar que:

A) Laura é casada.

B) Maria é solteira.

C) Paula é casada.

D) Laura é solteira.

E) Paula é divorciada.

14. DGYH (ESPM-SP–2016) Se Paulo é médico, então Carlos é advogado. Se João não é advogado, então Paulo é médico. O engenheiro é o mais velho dos três. Sabe-se que cada um dos personagens citados exerce uma e somente uma das profissões mencionadas e que Carlos não é advogado. Podemos afirmar que:

A) Paulo é o mais velho, Carlos é médico e João é advogado.

B) Paulo é advogado, Carlos é engenheiro e João é médico.

C) Paulo é médico ou Carlos é advogado ou João é o mais velho.

D) Paulo é advogado, Carlos é médico e João é engenheiro.

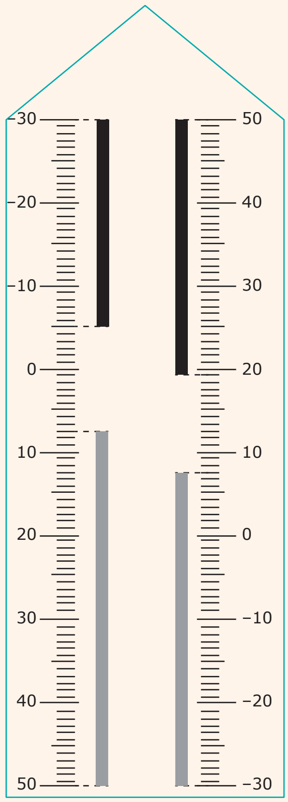
E) Paulo é médico, Carlos é engenheiro e João é advogado.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. JIM5

(Enem–2017) Neste modelo de termômetro, os filetes na cor preta registram as temperaturas mínima e máxima do dia anterior e os filetes na cor cinza registram a temperatura ambiente atual, ou seja, no momento da leitura do termômetro.



Por isso ele tem duas colunas. Na da esquerda, os números estão em ordem crescente, de cima para baixo, de –30 °C até 50 °C. Na coluna da direita, os números estão ordenados de forma crescente, de baixo para cima, de –30 °C até 50 °C.

A leitura é feita da seguinte maneira:

- a temperatura mínima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da esquerda;
- a temperatura máxima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da direita;
- a temperatura atual é indicada pelo nível superior dos filetes cinza nas duas colunas.

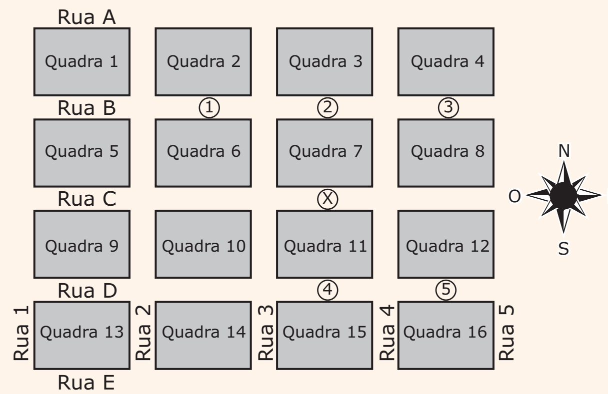
Disponível em: <www.if.ufrgs.br>.
Acesso em: 28 ago. 2014 (Adaptação).

Qual é a temperatura máxima mais aproximada registrada nesse termômetro?

A) 5 °C
B) 7 °C
C) 13 °C
D) 15 °C
E) 19 °C

02. G3IL

(Enem–2017) Um menino acaba de se mudar para um novo bairro e deseja ir à padaria. Pediu ajuda a um amigo que lhe forneceu um mapa com pontos numerados, que representam cinco locais de interesse, entre os quais está a padaria. Além disso, o amigo passou as seguintes instruções: a partir do ponto em que você se encontra, representado pela letra **X**, ande para oeste, vire à direita na primeira rua que encontrar, siga em frente e vire à esquerda na próxima rua. A padaria estará logo a seguir.



A padaria está representada pelo ponto numerado com:

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

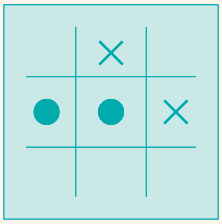
03. (Enem) Cinco times de futebol **A**, **B**, **C**, **D** e **E** ocuparam as primeiras colocações em um campeonato realizado em seu país. A classificação final desses clubes apresentou as seguintes características:

- O time **A** superou o time **C** na classificação.
- O time **C** ficou imediatamente à frente do time **E**.
- O time **B** não ficou entre os 3 últimos colocados.
- O time **D** ficou em uma classificação melhor que a do time **A**.

Assim, os dois times mais bem classificados foram:

A) A e B.
B) A e C.
C) B e D.
D) B e E.
E) C e D.

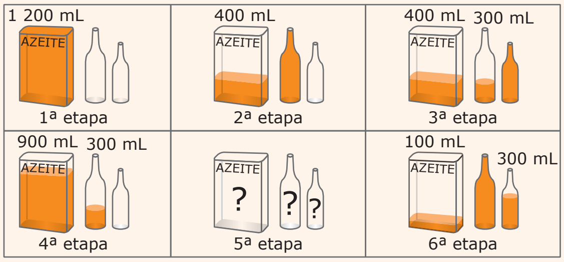
04. (Enem) O jogo da velha é um jogo popular, originado na Inglaterra. O nome "velha" surgiu do fato de esse jogo ser praticado, à época em que foi criado, por senhoras idosas que tinham dificuldades de visão e não conseguiam mais bordar. Esse jogo consiste na disputa de dois adversários que, em um tabuleiro 3×3, devem conseguir alinhar, verticalmente, horizontalmente ou na diagonal, 3 peças de formato idêntico. Cada jogador, após escolher o formato da peça com a qual vai jogar, coloca uma peça por vez, em qualquer casa do tabuleiro, e passa a vez para o adversário. Vence o primeiro que alinhar 3 peças.



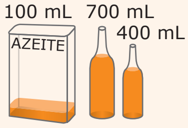
No tabuleiro representado anteriormente, estão registradas as jogadas de dois adversários em um dado momento. Observe que uma das peças tem formato de círculo e a outra tem a forma de um "xis". Considere as regras do jogo da velha e o fato de que, neste momento, é a vez do jogador que utiliza os círculos. Para garantir a vitória na sua próxima jogada, esse jogador pode posicionar a peça no tabuleiro de:

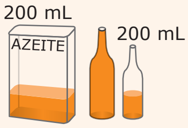
A) uma só maneira.
B) duas maneiras distintas.
C) três maneiras distintas.
D) quatro maneiras distintas.
E) cinco maneiras distintas.

05. (Enem) A diversidade de formas geométricas espaciais criadas pelo homem, ao mesmo tempo que traz benefícios, causa dificuldades em algumas situações. Suponha, por exemplo, que um cozinheiro precise utilizar exatamente 100 mL de azeite de uma lata que contenha 1 200 mL e queira guardar o restante do azeite em duas garrafas, com capacidade para 500 mL e 800 mL cada, deixando cheia a garrafa maior. Considere que ele não disponha de instrumento de medida e decida resolver o problema utilizando apenas a lata e as duas garrafas. As etapas do procedimento utilizado por ele estão ilustradas nas figuras a seguir, tendo sido omitida a 5ª etapa.



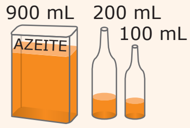
Qual das situações ilustradas a seguir corresponde à 5ª etapa do procedimento?

A)


B)


C)


D)


E)


GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. C
- 03. A
- 04. E
- 05. C
- 06. B
- 07. A
- 08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. E
- 03. D
- 04. D
- 05. C
- 06. E
- 07. E
- 08. D
- 09. E
- 10. A
- 11. B
- 12. C
- 13. E
- 14. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. A
- 03. C
- 04. B
- 05. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

Teoria dos Conjuntos

Entendemos a ideia de conjuntos como qualquer coleção ou grupo de objetos ou símbolos (os quais chamamos de elementos).

Para indicar que **x** é um elemento de **A**, escrevemos $x \in A$ (lê-se: **x** pertence a **A**). Se **x** não pertence a **A**, indicamos $x \notin A$.

As principais maneiras de representar um conjunto são:

i) Por meio da enumeração de seus elementos.

Exemplo

O conjunto dos dias da semana é:

S = {domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado}

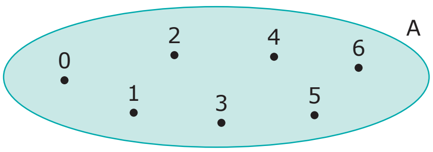
ii) Por meio de uma propriedade comum aos seus elementos.

Exemplo

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, que corresponde ao conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

iii) Por meio do Diagrama de Venn (John Venn, lógico inglês, 1834-1923).

Exemplo



Admite-se a existência de conjunto com um só elemento (conjunto unitário) e de conjunto sem elementos, denominado conjunto vazio e representado por $\varnothing$ ou **{ }**.

SUBCONJUNTOS

Dados os conjuntos **A** e **B**, dizemos que **B** é subconjunto de **A** se, e somente se, todo elemento de **B** for elemento de **A**.

Notação: $B \subset A$ (lê-se: **B** está contido em **A**)

Exemplo

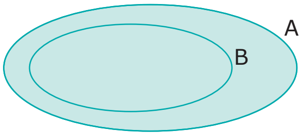


Diagrama de Venn

Sendo **A** e **B** conjuntos, temos que $A \subset B$ e $B \subset A$ se, e somente se, $A = B$.

OBSERVAÇÕES

i) Qualquer que seja o conjunto **A**, temos que **A** é subconjunto de **A**, pois todo elemento de **A** é elemento de **A**.

ii) Qualquer que seja o conjunto **A**, temos que o conjunto vazio é subconjunto de **A**, pois, se não o fosse, deveria existir pelo menos um elemento do conjunto vazio que não pertencesse a **A** (o que é um absurdo).

Exemplo

Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \{3, 4\}\}$, classificar em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das seguintes proposições.

A) ( ) **A** possui 4 elementos.

B) ( ) $1 \in A$ e $2 \in A$

C) ( ) $\{1, 2\} \subset A$

D) ( ) $\{3, 4\} \subset A$

E) ( ) $\{\{3, 4\}\} \subset A$

O conjunto **A** possui 4 elementos, a saber, os números 1, 2 e 3 e o conjunto binário {3, 4}; portanto, tem-se que $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$ e $\{3, 4\} \in A$.

$\{1, 2\} \subset A$, pois 1 e 2 são elementos de **A**.

$\{3, 4\} \not\subset A$, pois 4 não é elemento de **A**.

$\{\{3, 4\}\} \subset A$, pois {3, 4} é elemento de **A**.

Assim, a única proposição falsa é a letra **D**.

CONJUNTO DAS PARTES

Sendo **A** um conjunto finito, com **n** elementos, podemos demonstrar que o número de subconjuntos de **A** é 2^n.

O conjunto de todos os subconjuntos de **A** é chamado conjunto das partes de **A**, e será indicado por P(A).

Exemplo

Dado o conjunto A = {x, y, z}, obter o conjunto das partes de **A**.

Como o número de elementos de **A** é 3, concluímos que o número de seus subconjuntos é $2^3 = 8$. Os subconjuntos de **A** são:

$$\varnothing;\ \{x\};\ \{y\};\ \{z\};\ \{x, y\};\ \{x, z\};\ \{y, z\};\ A$$

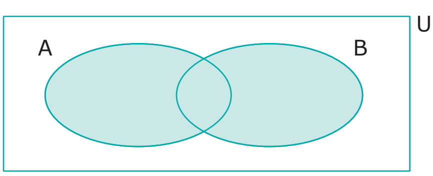
Assim, o conjunto das partes de **A** é:

$$P(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, A\}$$

UNIÃO

Dados os conjuntos **A** e **B** em um universo **U**, chamamos união (ou reunião) de **A** com **B** ao conjunto dos elementos que pertencem a, pelo menos, um dos conjuntos **A** ou **B**.

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Exemplos

1º) $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2º) $\{1, 2, 3, 4\} \cup \varnothing = \{1, 2, 3, 4\}$

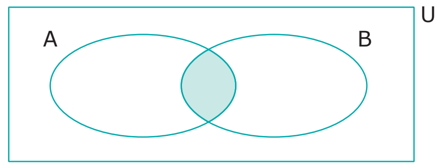
Propriedades

$$A \cup B = B \cup A$$
$$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$$
$$A \cup \varnothing = A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

INTERSEÇÃO

Dados os conjuntos **A** e **B** em um universo **U**, chamamos interseção de **A** com **B** ao conjunto dos elementos comuns a **A** e **B**.

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Exemplos

1º) $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 5\} = \{4\}$

2º) $\{1, 2, 3, 4\} \cap \varnothing = \varnothing$

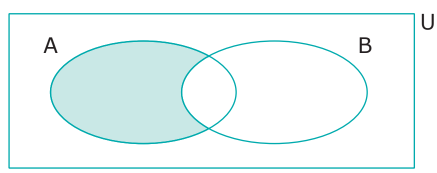
Propriedades

$$A \cap B = B \cap A$$
$$B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$
$$(A \cap B) \subset (A \cup B)$$

DIFERENÇA

Dados os conjuntos **A** e **B** em um universo **U**, chamamos diferença entre **A** e **B**, nessa ordem, ao conjunto dos elementos de **A** que não são elementos de **B**.

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Exemplos

1º) $\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5\} = \{1, 2, 3\}$

2º) $\{1, 2\} - \varnothing = \{1, 2\}$

3º) $\varnothing - \{1, 2\} = \varnothing$

Propriedades

$$(A - B) \subset A$$
$$A - \varnothing = A$$
$$\varnothing - A = \varnothing$$
$$A - (A \cap B) = A - B$$

Exemplo

Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4} e B = {3, 4, 5, 6, 7}, obter os conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, A – B e B – A.

$A \cap B = \{3, 4\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A - B = \{1, 2\}$

$B - A = \{5, 6, 7\}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Numa pesquisa escolar a respeito da leitura dos jornais **A** e **B**, constatou-se que:

i) 280 alunos leem somente um dos jornais.

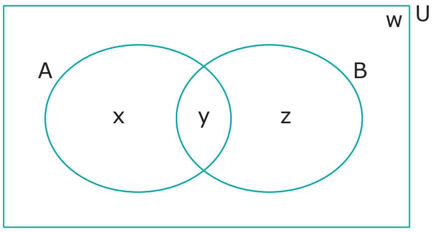
ii) 230 leem o jornal **B**.

iii) 100 leem os dois.

iv) 200 não leem o jornal **A**.

Quantos alunos foram entrevistados?

Resolução:



Sendo **x**, **y**, **z** e **w** o número de elementos de cada região indicada no diagrama anterior, temos:

$$\begin{aligned} x + z &= 280 \quad (1) \\ y + z &= 230 \quad (2) \\ y &= 100 \quad (3) \\ z + w &= 200 \quad (4) \end{aligned}$$

Das equações (3) e (2), temos que z = 130.

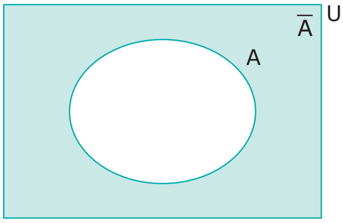
Substituindo **z** por 130 nas equações (1) e (4), obtemos, respectivamente, os valores de **x** e **w**: x = 150 e w = 70.

O número total de alunos que foram entrevistados é:

$$x + y + z + w = 450$$

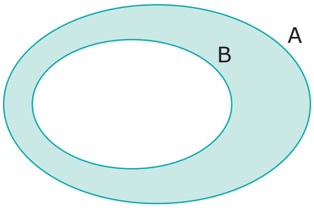
COMPLEMENTAR

Chamemos de conjunto universo **U** o conjunto que contém todos os elementos do contexto no qual estamos trabalhando. No Diagrama de Venn a seguir, representamos o complementar de **A** em relação ao universo (indicado por C_U^A ou $\overline{A}$).



Dados os conjuntos **A** e **B**, com $B \subset A$, chamamos de complementar de **B** em relação a **A** o conjunto:

$$C_A^B = \{x \in A \text{ e } x \notin B\} = A - B$$



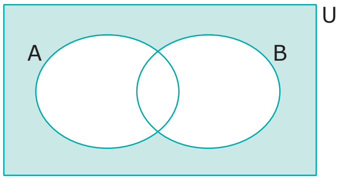
Exemplo

Dados A = {1, 2, 3, 4} e B = {2, 4}. O complementar de **B** em relação a **A** é $C_A^B = \{1, 3\}$.

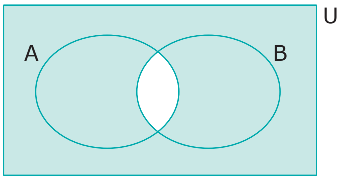
LEIS DE MORGAN

Podemos verificar, através do Diagrama de Venn, as seguintes igualdades:

i) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$



ii) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$



MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFMG) Se A = {1, 3, 5, 7, 9, 11}, B = {1, 2, 3, 4, 5} e C = {2, 4, 7, 8, 9, 10}, então $(A \cup B) \cap C - A$ é igual a:

A) {4}

B) {2, 4}

C) {2, 4, 8}

D) {8, 10}

02. 5K4C (UEG-GO–2018) Dados dois conjuntos, A e B, onde $A \cap B = \{b, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ e $B - A = \{a\}$. O conjunto B é igual a:

A) {a}

B) {c, e}

C) {a, b, d}

D) {b, c, d, e}

E) {a, b, c, d, e}

03. (PUCPR) As pessoas atendidas em uma unidade de saúde apresentaram os seguintes sintomas: febre alta, dores no corpo e dores de cabeça. Os dados foram tabulados conforme quadro a seguir:

Sintomas	Número de pacientes
Febre	22
Dor no corpo	16
Náuseas	24
Febre e dor no corpo	10
Dor no corpo e náuseas	10
Náuseas e febre	8
Febre, dor no corpo e náuseas	6

Determine o número de pacientes atendidos no posto de saúde.

A) 62 pessoas.

B) 68 pessoas.

C) 40 pessoas.

D) 86 pessoas.

E) 42 pessoas.

04. X0A7 (UFT-TO) Uma Instituição de Ensino Superior oferece os cursos **A** e **B**. Em seu processo seletivo, o candidato pode optar por inscrever-se nos dois cursos ou apenas em um curso. Ao final, o número de inscrições por curso e o número total de candidatos inscritos pode ser observado no quadro que segue:

Número de inscrições no curso A	Número de inscrições no curso B	Número total de candidatos inscritos
480	392	560

Com base nas informações anteriores e nas possibilidades de inscrições, pode-se afirmar que o número de candidatos que optaram por inscrever-se somente no curso **A** foi:

A) 80

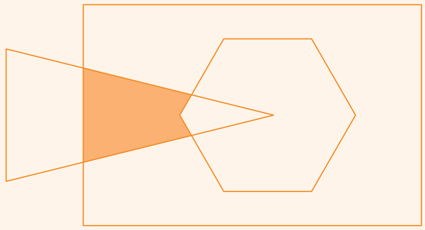
B) 168

C) 312

D) 480

E) 560

05. C91M (UFSJ-MG) Na figura, **R** é um retângulo, **T** é um triângulo e **H** é um hexágono.



Então é correto afirmar que a região destacada em laranjado é dada por:

A) $(H - T) \cap R$

B) $T - H$

C) $(R \cap T) - (T \cap H)$

D) $(R \cap T)$

06. IL18 (UERN–2015) Uma empresa de *software* aloca seus funcionários em duas equipes de trabalho: manutenção e atendimento. Sabe-se que 80% de seus funcionários trabalham na equipe de manutenção e 35% na equipe de atendimento. Sabendo-se que essa empresa possui 500 funcionários e que um funcionário não precisa necessariamente trabalhar em uma única equipe, então o número de funcionários que trabalham nas equipes de atendimento e de manutenção é:

A) 50

B) 60

C) 65

D) 75

07. J7Y9 (UERJ) Considere um grupo de 50 pessoas que foram identificadas em relação a duas categorias: quanto à cor dos cabelos, louras ou morenas; quanto à cor dos olhos, azuis ou castanhos. De acordo com essa identificação, sabe-se que 14 pessoas no grupo são louras com olhos azuis, que 31 pessoas são morenas e que 18 têm olhos castanhos. Calcule, no grupo, o número de pessoas morenas com olhos castanhos.

08. CB44 (UFOP-MG) Três frutas são consumidas por um grupo de 400 pessoas: laranja, banana e maçã. Dessas pessoas, 185 consomem laranja, 125 consomem laranja e banana, 130 consomem banana e maçã, 120 consomem laranja e maçã e 100 consomem laranja, banana e maçã. O número de pessoas que consomem banana é igual ao número de pessoas que consomem maçã. O número de pessoas que consomem maçã e não consomem laranja é de:

A) 95

B) 125

C) 195

D) 245

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFES) As marcas de cerveja mais consumidas em um bar, num certo dia, foram **A**, **B** e **S**. Os garçons constataram que o consumo se deu de acordo com a tabela a seguir:

Marcas consumidas	Nº de consumidores
A	150
B	120
S	80
A e B	60
B e S	40
A e S	20
A, B e S	15
Outras	70

A) Quantos beberam cerveja no bar, nesse dia?

B) Dentre os consumidores de **A**, **B** e **S**, quantos beberam apenas duas dessas marcas?

C) Quantos não consumiram a cerveja **S**?

D) Quantos não consumiram a marca **B** nem a marca **S**?

02. (UEPA–2015) De acordo com a reportagem da Revista *Veja* (edição 2341), é possível fazer gratuitamente curso de graduação pela Internet. Dentre os ofertados temos os cursos de Administração (bacharelado), Sistemas de Computação (Tecnólogo) e Pedagogia (licenciatura). Uma pesquisa realizada com 1 800 jovens brasileiros sobre quais dos cursos ofertados gostariam de fazer, constatou que 800 optaram pelo curso de Administração; 600 optaram pelo curso de Sistemas de Computação; 500 optaram pelo curso de Pedagogia; 300 afirmaram que fariam Administração e Sistemas de Computação; 250 fariam Administração e Pedagogia; 150 fariam Sistemas de Computação e Pedagogia e 100 dos jovens entrevistados afirmaram que fariam os três cursos. Considerando os resultados dessa pesquisa, o número de jovens que não fariam nenhum dos cursos elencados é:

A) 150
B) 250
C) 350
D) 400
E) 500

03. YTS6
(UECE–2015) Em um grupo de 300 alunos de línguas estrangeiras, 174 alunos estudam inglês e 186 alunos estudam chinês. Se, neste grupo, ninguém estuda outro idioma além do inglês e do chinês, o número de alunos deste grupo que se dedicam ao estudo de apenas um idioma é:

A) 236
B) 240
C) 244
D) 246

04. D8RM
(IMED-SP–2015) Dos 500 alunos matriculados em uma escola, constatou-se que:

- 40% do total frequenta oficinas de xadrez;
- 35% do total frequenta oficinas de robótica;
- 75 alunos cursam, simultaneamente, xadrez e robótica;
- **x** alunos cursam outras oficinas.

Com base nessas informações, o número de alunos que frequentam outras oficinas é:

A) 75
B) 100
C) 125
D) 200
E) 300

05. EAYW
(UFPA–2016) Em uma turma de cinquenta alunos de Medicina, há dezoito cursando Anatomia, quinze cursando Citologia e treze cursando Biofísica. Seis alunos cursam simultaneamente Anatomia e Citologia, cinco cursam simultaneamente Citologia e Biofísica e quatro cursam simultaneamente Anatomia e Biofísica. Dezesseis alunos não cursam nenhuma destas disciplinas.

O número de alunos que cursam, simultaneamente, exatamente duas disciplinas é:

A) 31
B) 15
C) 12
D) 8
E) 6

06. CGM3
(Unicamp-SP–2017) Sabe-se que, em um grupo de 10 pessoas, o livro A foi lido por 5 pessoas e o livro B foi lido por 4 pessoas. Podemos afirmar corretamente que, nesse grupo,

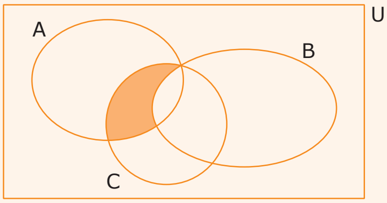
A) pelo menos uma pessoa leu os dois livros.

B) nenhuma pessoa leu os dois livros.

C) pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.

D) todas as pessoas leram pelo menos um dos dois livros.

07. M93R
(UFPE) Considere o seguinte "Diagrama de Venn", que representa graficamente os conjuntos **A**, **B** e **C**, em que **U** representa o universo.



Assinale, entre as alternativas a seguir, o conjunto que é representado pela área sombreada no diagrama. A barra (¯) representa o complementar do conjunto em relação a **U**.

A) $A \cap B \cap C$

B) $A \cap B \cap \overline{C}$

C) $A \cup B \cup C$

D) $A \cap \overline{B} \cap C$

E) $\overline{A} \cup B \cup C$

08. EFY5 (FGV–2016) Em uma pesquisa para estudar a incidência de três fatores de risco (**A**, **B** e **C**) para doenças cardíacas em homens, verificou-se que, do total da população investigada,

15% da população apresentava apenas o fator **A**;

15% da população apresentava apenas o fator **B**;

15% da população apresentava apenas o fator **C**;

10% da população apresentava apenas os fatores **A** e **B**;

10% da população apresentava apenas os fatores **A** e **C**;

10% da população apresentava apenas os fatores **B** e **C**;

em 5% da população os três fatores de risco ocorriam simultaneamente.

Da população investigada, entre aqueles que não apresentavam o fator de risco **A**, a porcentagem dos que não apresentavam nenhum dos três fatores de risco é, aproximadamente,

A) 20%.
B) 50%.
C) 25%.
D) 66%.
E) 33%.

09. ED9M (UNIRIO-RJ) Numa pesquisa para se avaliar a leitura de três revistas, **A**, **B** e **C**, descobriu-se que 81 pessoas leem, pelo menos, uma das revistas; 61 pessoas leem somente uma delas e 17 pessoas leem duas das três revistas. Assim, o número de pessoas mais bem informadas dentre as 81 é:

A) 3
B) 5
C) 12
D) 29
E) 37

10. (FUVEST-SP–2018) Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:

I. 14 não obtiveram nota mínima em matemática;
II. 16 não obtiveram nota mínima em português;
III. 12 não obtiveram nota mínima em inglês;
IV. 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;
V. 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;
VI. 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês e
VII. 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi:

A) 44
B) 46
C) 47
D) 48
E) 49

11. (UFF-RJ) Os muçulmanos sequer se limitam aos países de etnia árabe, como muitos imaginam. Por exemplo, a maior concentração de muçulmanos do mundo encontra-se na Indonésia, que não é um país de etnia árabe.

SUPERINTERESSANTE, ed. 169, out. 2001 (Adaptação).

Considere **T** o conjunto de todas as pessoas do mundo; **M** o conjunto de todas aquelas que são muçulmanas e **A** o conjunto de todas aquelas que são árabes. Sabendo que nem toda pessoa que é muçulmana é árabe, pode-se representar o conjunto de pessoas do mundo que não são muçulmanas nem árabes por:

A) $T - (A \cup M)$
B) $T - A$
C) $T - (A \cap M)$
D) $(A - M) \cup (M - A)$
E) $M - A$

12. ØWXO (UECE) Num certo grupo de pessoas, metade lê o jornal *A notícia* e um terço lê *O informativo*, mas somente um sexto lê ambos os jornais. Do grupo, a quantidade de pessoas que não leem nem *A notícia* e nem *O informativo* é

A) a metade.
B) um terço.
C) dois terços.
D) um quinto.
E) um sexto.

13. (ESPM-SP–2016) Em uma aula de Matemática, o professor propôs 2 problemas para serem resolvidos pela turma. 76% dos alunos resolveram o primeiro problema, 48% resolveram o segundo e 20% dos alunos não conseguiram resolver nenhum dos dois. Se apenas 22 alunos resolveram os dois problemas, pode-se concluir que o número de alunos dessa classe é

A) maior que 60.
B) menor que 50.
C) múltiplo de 10.
D) múltiplo de 7.
E) ímpar.

14. ZPI3 (UEFS-BA–2016) Em um grupo de 30 jovens, 2 já assistiram a todos os filmes **X**, **Y** e **Z**, e 10 ainda não viram nenhum. Dos 14 que viram **Y**, 5 também assistiram a **X**, e 6 também viram **Z**. Ao todo, 11 jovens assistiram a **X**.

Com base nessas informações, é correto concluir que, nesse grupo,

A) ninguém assistiu apenas a **X**.
B) ninguém assistiu apenas a **Z**.
C) alguém assistiu a **Z**, mas não viu **Y**.
D) nem todos os que assistiram a **Z** viram **Y**.
E) todos os que assistiram a **X** também viram **Z**.

15. Q06M (PUC RS–2015) Numa escola de idiomas, 250 alunos estão matriculados no curso de inglês, 130 no de francês e 180 no de espanhol. Sabe-se que alguns desses alunos estão matriculados em 2, ou até mesmo em 3 desses cursos. Com essas informações, pode-se afirmar que o número de alunos que estão matriculados nos três cursos é, no máximo,

A) 130

B) 180

C) 250

D) 310

E) 560

16. GBW4 (Albert Einstein–2017) Sejam **A**, **B** e **C** subconjuntos do conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$, de modo que:

- **A** é o conjunto dos números de 3 algarismos, todos distintos.
- **B** é o conjunto dos números que possuem exatamente 1 algarismo 5.
- **C** é o conjunto dos números pares.

E sejam os conjuntos:

$P = A \cap C$

$Q = A^C \cup B^C$

$R = B \cup C^C$

onde a notação X^C indica o conjunto complementar do conjunto X.

São elementos respectivos dos conjuntos **P**, **Q** e **R** os números:

A) 204, 555, 550

B) 972, 1 234, 500

C) 1 234, 505, 5 555

D) 204, 115, 550

SEÇÃO ENEM

01. (Enem) Uma pesquisa foi realizada para tentar descobrir, do ponto de vista das mulheres, qual é o perfil da parceira ideal procurada pelo homem do séc. XXI. Alguns resultados estão apresentados no quadro a seguir.

O QUE AS MULHERES PENSAM QUE OS HOMENS PREFEREM	
72% das mulheres têm certeza de que os homens odeiam ir ao *shopping*	**65%** pensam que os homens preferem mulheres que façam todas as tarefas da casa
No entanto, apenas **39%** dos homens disseram achar a atividade insuportável	No entanto, **84%** deles disseram acreditar que as tarefas devem ser divididas entre o casal

CORREIO BRAZILIENSE, 29 jun. 2008 (Adaptação).

Se a pesquisa foi realizada com 300 mulheres, então a quantidade delas que acredita que os homens odeiam ir ao *shopping* e pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa é

A) inferior a 80.

B) superior a 80 e inferior a 100.

C) superior a 100 e inferior a 120.

D) superior a 120 e inferior a 140.

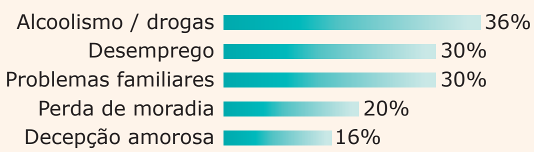
E) superior a 140.

Instrução: Texto para as questões **02** e **03**.

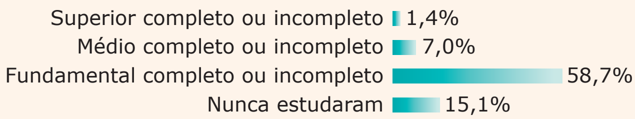
A vida na rua como ela é

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31 922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no Ensino Superior, 0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros a seguir:

Por que vive na rua?



Escolaridade



ISTOÉ, p. 21, 07 maio 2008, (Adaptação).

02. (Enem) As informações apresentadas no texto são suficientes para se concluir que:

A) as pessoas que vivem na rua e sobrevivem de esmolas são aquelas que nunca estudaram.

B) as pessoas que vivem na rua e cursaram o Ensino Fundamental, completo ou incompleto, são aquelas que sabem ler e escrever.

C) existem pessoas que declararam mais de um motivo para estarem vivendo na rua.

D) mais da metade das pessoas que vivem na rua e que ingressaram no Ensino Superior se diplomou.

E) as pessoas que declararam o desemprego como motivo para viver na rua também declararam a decepção amorosa.

03. (Enem) No universo pesquisado, considere que **P** seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo / drogas e **Q** seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto **P** ou do conjunto **Q**, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de **P** e **Q** é igual a

A) 12%.
B) 16%.
C) 20%.
D) 36%.
E) 52%.

04. (Enem) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas.

Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C_1.

Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

A) 135
B) 126
C) 118
D) 114
E) 110

05. (Enem) Uma escola de Ensino Médio tem 250 alunos que estão matriculados na 1ª, 2ª ou 3ª séries. 32% dos alunos são homens e 40% dos homens estão na 1ª série. 20% dos alunos matriculados estão na 3ª série, sendo 10 alunos homens. Dentre os alunos da 2ª série, o número de mulheres é igual ao número de homens. A tabela a seguir pode ser preenchida com as informações dadas:

	1ª	2ª	3ª	Total
Mulher	a	b	c	a + b + c
Homem	d	e	f	d + e + f
Total	a + d	b + e	c + f	250

O valor de **a** é:

A) 10
B) 48
C) 92
D) 102
E) 120

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. C
- 03. C
- 04. B
- 05. C
- 06. D
- 07. 13
- 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01.
  - A) 315
  - B) 75
  - C) 235
  - D) 155
- 02. E
- 03. B
- 04. D
- 05. E
- 06. C
- 07. D
- 08. E
- 09. A
- 10. E
- 11. A
- 12. B
- 13. C
- 14. B
- 15. A
- 16. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. C
- 03. A
- 04. C
- 05. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

Divisibilidade, MDC e MMC

DIVISÃO EUCLIDIANA

O algoritmo da divisão de dois números inteiros **D** e **d**, com $d \neq 0$, é representado da seguinte forma:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

Temos que $0 \leq r < |d|$ e $D = qd + r$.

Portanto, **q** é o quociente, **r** é o resto da divisão de **D** por **d**, e denotamos **D** por dividendo e **d** por divisor.

OBSERVAÇÃO

Quando temos o caso em que r = 0, então D = q.d e, assim, dizemos que **D** é um múltiplo de **d** ou que **d** é um divisor de **D**.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Considerar todas as divisões entre números naturais tais que o divisor é 13 e o resto é o triplo do quociente. Determinar a soma dos possíveis quocientes dessas divisões.

Resolução:

Sejam **D** o dividendo e **q** o quociente na situação descrita. Como o resto é o triplo do quociente, escrevemos:

$$\begin{array}{l|l} D & 13 \\ \hline 3q & q \end{array}$$

Sabemos que o resto deve ser menor do que o divisor. Portanto, devemos encontrar todos os valores de **q** para os quais $3q < 13$. Assim, temos:

Para $q = 0 \Rightarrow 3q = 0 < 13$

Para $q = 1 \Rightarrow 3q = 3 < 13$

Para $q = 2 \Rightarrow 3q = 6 < 13$

Para $q = 3 \Rightarrow 3q = 9 < 13$

Para $q = 4 \Rightarrow 3q = 12 < 13$

Para $q = 5 \Rightarrow 3q = 15 > 13$ (não convém)

Portanto, os possíveis valores de **q** são 0, 1, 2, 3 e 4. A sua soma é igual a 10.

MÚLTIPLOS E DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL

Sejam dois números inteiros **a** e **b**, em que $b \neq 0$. O número **a** será múltiplo de **b** se existir um número inteiro **m** tal que:

$$\boxed{a = m.b}$$

Daí, dizemos que:

i) **a** é múltiplo de **b**, ou

ii) **a** é divisível por **b**, ou

iii) **b** é divisor de **a**, ou

iv) **b** divide **a**.

Número par

É todo número inteiro divisível por 2, ou seja, que pode ser escrito na forma **2n**, com $n \in \mathbb{Z}$.

Número ímpar

É todo número inteiro que não é divisível por 2, ou seja, que pode ser escrito na forma $2n + 1$, em que $n \in \mathbb{Z}$.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Divisibilidade por 2: Um número é divisível por 2 quando seu último algarismo é par.

Divisibilidade por 3: Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos é divisível por 3.

Divisibilidade por 4: Um número é divisível por 4 quando o número formado pelos dois últimos algarismos é divisível por 4.

Divisibilidade por 5: Um número é divisível por 5 quando o último algarismo é 0 ou 5.

Divisibilidade por 6: Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3.

Divisibilidade por 8: Um número é divisível por 8 quando o número formado pelos 3 últimos algarismos é divisível por 8.

Divisibilidade por 9: Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é divisível por 9.

Divisibilidade por 10: Um número é divisível por 10 quando o seu último algarismo é 0.

Divisibilidade por 11: Um número é divisível por 11 quando a soma dos algarismos de ordem ímpar menos a soma dos algarismos de ordem par é um número divisível por 11.

Divisibilidade por 12: Um número é divisível por 12 quando é divisível por 3 e por 4.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (EPCAR-MG) Considere o número m = 488 a9b, em que **b** é o algarismo das unidades e **a** é o algarismo das centenas. Sabendo-se que **m** é divisível por 45, o valor da soma a + b é:

A) 7

B) 9

C) 16

D) 18

Resolução:

Um número é divisível por 45 se esse número é divisível por 9 e por 5. Para que **m** seja divisível por 5, temos de considerar duas possibilidades: b = 0 ou b = 5.

1) Para b = 0, temos m = 488 a90. Porém, **m** é divisível também por 9, ou seja, a soma

$4 + 8 + 8 + a + 9 + 0 = 29 + a$

deve ser divisível por 9. O múltiplo de 9 mais próximo de 29 é o número 36. Para que a soma seja igual a esse número, temos a = 7.

2) Para b = 5, temos m = 488 a95. Porém, **m** é divisível também por 9, ou seja, a soma

$4 + 8 + 8 + a + 9 + 5 = 34 + a$

deve ser divisível por 9. Como no caso anterior, a soma deve ser igual a 36. Portanto, a = 2.

Em ambos os casos, temos a + b = 7.

NÚMEROS PRIMOS

Um número inteiro positivo é dito primo quando admite exatamente dois divisores positivos: o número 1 e ele mesmo.

Sendo **P** o conjunto dos números primos positivos, temos:

$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...\}$

OBSERVAÇÕES

i) Se um número natural não nulo possui mais de dois divisores positivos, ele é chamado de composto.

ii) O número 1 não é primo nem composto.

Reconhecimento de um número primo

Seja **n** um número inteiro positivo. Para verificarmos se **n** é primo, podemos proceder da seguinte forma:

i) Calculamos o valor de $\sqrt{n}$.

ii) Verificamos se **n** é divisível por cada um dos números primos menores do que $\sqrt{n}$.

iii) Se **n** não é divisível por nenhum desses números primos, então **n** é primo. Caso contrário, **n** é composto.

Exemplo

Verificar se 97 é primo.

$\sqrt{97} = 9{,}85$ (aproximadamente)

Os primos menores do que $\sqrt{97}$ são 2, 3, 5 e 7.

Observe que 97 não é divisível por nenhum desses números, ou seja, 97 é primo.

DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou pode ser escrito como um produto de fatores primos. Esse produto é obtido pela chamada decomposição em fatores primos ou, simplesmente, fatoração do número.

Exemplo

Decompor em fatores primos o número 840.

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	$840 = 2^3 . 3 . 5 . 7$

CÁLCULO DA QUANTIDADE DE DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL

i) Decompõe-se o número em fatores primos.

ii) Tomam-se os expoentes de cada fator primo, e soma-se 1a cada um deles.

iii) Multiplicam-se os resultados anteriores. O produto é a quantidade de divisores positivos do número.

Exemplo

Vamos determinar a quantidade de divisores de 360.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Assim, a quantidade de divisores é:

$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

MÁXIMO DIVISOR COMUM (MDC)

O máximo divisor comum de dois ou mais números naturais é o maior número que é divisor de todos esses números. Para se obter o MDC entre dois ou mais números, deve-se:

i) Decompô-los em fatores primos.

ii) Tomar os fatores primos comuns com seus menores expoentes.

iii) Efetuar o produto desses fatores.

Exemplo

Vamos calcular o máximo divisor comum dos números 90, 96 e 54.

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $\quad 96 = 2^5 \cdot 3$ $\quad 54 = 2 \cdot 3^3$

Daí, temos que MDC(90, 96, 54) $= 2 \cdot 3 = 6$.

OBSERVAÇÃO

Dois números são ditos primos entre si quando o MDC entre eles é igual a 1.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC)

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números naturais é o menor número natural, excluindo o zero, que é múltiplo desses números.

Assim, para se obter o MMC entre dois ou mais números naturais, deve-se:

i) Decompô-los em fatores primos.

ii) Tomar todos os fatores primos comuns e não comuns com seus maiores expoentes.

iii) Efetuar o produto desses fatores.

Exemplo

Podemos calcular o mínimo múltiplo comum dos números 90, 96 e 54 da seguinte forma:

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $\quad 96 = 2^5 \cdot 3$ $\quad 54 = 2 \cdot 3^3$

Daí, temos que o MMC(90, 96, 54) $= 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 = 4\,320$.

OBSERVAÇÕES

Podemos também calcular o MMC de dois ou mais números por meio da chamada decomposição simultânea.

Refazendo o exemplo anterior, temos:

90, 96, 54	2
45, 48, 27	2
45, 24, 27	2
45, 12, 27	2
45, 6, 27	2
45, 3, 27	3
15, 1, 9	3
5, 1, 3	3
5, 1, 1	5
1, 1, 1	MMC(90, 96, 54) $= 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 = 4\,320$

RELAÇÃO ENTRE O MMC E O MDC

Sendo **a** e **b** dois números naturais, temos:

$$[\text{MMC}(a, b)] \cdot [\text{MDC}(a, b)] = a \cdot b$$

MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

03. Determinar a soma dos algarismos do menor número natural que, quando dividido por 2, 3, 5 ou 9, deixa sempre resto 1.

Resolução:

Seja **x** o número procurado. Logo, temos:

$$\begin{array}{r|l} x & 2 \\ \cline{2-2} 1 & q_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 3 \\ \cline{2-2} 1 & q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 5 \\ \cline{2-2} 1 & q_3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 9 \\ \cline{2-2} 1 & q_4 \end{array},$$

em que q_1, q_2, q_3 e q_4 são os quocientes de cada uma dessas divisões. Podemos escrevê-las da seguinte forma:

$x = 2q_1 + 1 \Rightarrow x - 1 = 2q_1 \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 2

$x = 3q_2 + 1 \Rightarrow x - 1 = 3q_2 \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 3

$x = 5q_3 + 1 \Rightarrow x - 1 = 5q_3 \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 5

$x = 9q_4 + 1 \Rightarrow x - 1 = 9q_4 \Rightarrow x - 1$ é múltiplo de 9

Portanto, $x - 1$ é um múltiplo comum de 2, 3, 5 e 9. Como queremos o menor número **x** que satisfaz essas condições, temos:

$x - 1 = \text{MMC}(2, 3, 5, 9) = 90 \Rightarrow x - 1 = 90 \Rightarrow x = 91$

A soma dos algarismos de **x** é 10.

04. Determinar o menor número natural que deixa restos 3, 5 e 6 quando dividido por 5, 7 e 8, respectivamente.

Resolução:

Seja **x** o número procurado. Daí, temos:

$$\begin{array}{r|l} x & 5 \\ \cline{2-2} 3 & q_1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 7 \\ \cline{2-2} 5 & q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x & 8 \\ \cline{2-2} 6 & q_3 \end{array},$$

em que q_1, q_2, q_3 são os quocientes de cada uma dessas divisões. Logo:

$x = 5q_1 + 3 \Rightarrow$

$x + 2 = 5q_1 + 3 + 2 \Rightarrow$

$x + 2 = 5q_1 + 5 \Rightarrow$

$x + 2 = 5(q_1 + 1)$

$x + 2$ é múltiplo de 5.

$x = 7q_2 + 5 \Rightarrow$

$x + 2 = 7q_2 + 5 + 2 \Rightarrow$

$x + 2 = 7q_2 + 7 \Rightarrow$

$x + 2 = 7(q_2 + 1)$

$x + 2$ é múltiplo de 7.

$x = 8q_3 + 6 \Rightarrow$

$x + 2 = 8q_3 + 6 + 2 \Rightarrow$

$x + 2 = 8q_3 + 8 \Rightarrow$

$x + 2 = 8(q_3 + 1)$

$x + 2$ é múltiplo de 8.

Como queremos o menor número **x** que satisfaz essas condições, temos:

$x + 2 = \text{MMC}(5, 7, 8) = 280 \Rightarrow x = 278$

05. Em um terminal rodoviário, sabe-se que:

- a cada 50 minutos parte um ônibus da linha Amarela;
- a cada 30 minutos parte um ônibus da linha Verde;
- a cada 40 minutos parte um ônibus da linha Branca.

Considerando-se que, às 8h, houve uma partida simultânea de um ônibus de cada uma das três linhas e que o quadro de horários não sofrerá alterações, determinar a hora exata em que a próxima partida simultânea ocorrerá.

Resolução:

O tempo da próxima partida simultânea deve ser igual ao mínimo múltiplo comum dos tempos de partida de cada uma das linhas. Assim, temos que MMC(50, 30, 40) = 600 minutos = 10 horas. Portanto, a próxima partida simultânea ocorrerá às 8h + 10h = 18 horas.

06. Uma sala retangular de dimensões 36 m e 40 m deverá ter o seu piso preenchido com placas idênticas, de formato quadrado e dimensões inteiras. Qual é o menor número de placas quadradas necessário para se revestir esse piso, nas condições dadas, de maneira que não haja cortes ou sobras de material?

Resolução:

Seja **x** a medida do lado de cada placa quadrada. Observe que, para que não haja sobra de material, a medida **x** deve ser um divisor de 36 e de 40. Para que tenhamos o menor número de placas, é necessário que a medida **x** seja a maior possível. Portanto, $x = \text{MDC}(36, 40) = 4$ m. O número de placas é obtido dividindo-se a área total da sala pela área de uma das placas quadradas.

Logo: $\dfrac{36 \cdot 40}{4 \cdot 4} = 90$ placas.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 2UK6 (Fatec-SP) O número inteiro $N = 16^{15} + 2^{56}$ é divisível por:

A) 5 B) 7 C) 11 D) 13 E) 17

02. UYQ1 (UECE–2018) O número de divisores inteiros e positivos do número $2\,018^2 - 2\,017^2$ é:

A) 8 B) 14 C) 10 D) 12

03. N2WW (Fatec-SP–2017) Os números naturais de 0 a 3 000 foram dispostos, consecutivamente, conforme a figura, que mostra o começo do processo.

5ª linha					4								12								20				
4ª linha				3		5						11		13						19		21			
3ª linha			2				6				10				14				18				22		
2ª linha		1						7		9						15		17						...	
1ª linha	0								8								16								...

Nessas condições, o número 2 017 está na

A) 1ª linha. B) 2ª linha. C) 3ª linha. D) 4ª linha. E) 5ª linha.

04. (UFC-CE) O expoente do número 3 na decomposição por fatores primos positivos do número natural $10^{63} - 10^{61}$ é igual a:

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

05. 4FTL (CEFET-RJ–2016) João faz caminhada a cada 4 dias. Pedro, vizinho de João, faz caminhada no mesmo local, a cada 6 dias. Considerando que Pedro e João se encontraram hoje fazendo caminhada, eles se encontrarão novamente daqui a **n** dias. Qual das alternativas a seguir indica um valor possível para **n**?

A) 30 B) 32 C) 36 D) 42

06. (UEPB) Com relação ao movimento dos cometas no universo, sabemos que muitos deles passam pelo planeta Terra em períodos de anos definidos. Os cometas A e B passam de 20 em 20 anos e 35 em 35 anos respectivamente, e suas últimas aparições na Terra ocorreram em 1930. A próxima passagem dos dois pela Terra ocorrerá no ano de:

A) 2072 B) 2060 C) 2075 D) 2070 E) 2065

07. D9A8 (UEFS-BA–2016) Uma equipe de professores corrigiu, em três dias de correção de um vestibular, números de redações iguais a 702, 728 e 585. Em cada dia, as redações foram igualmente divididas entre os professores.

O número de professores na equipe é um divisor de:

A) 52 B) 54 C) 60 D) 68 E) 77

08. Ø1E2 (UFJF-MG) Em uma rodovia, a partir do quilômetro 40, a cada 3 km há postos de telefones SOS. Ocorreu um acidente no quilômetro 750 dessa rodovia. A distância do telefone SOS mais próximo do local do acidente é

A) 0,6 km. B) 0,8 km. C) 1 km. D) 1,2 km. E) 1,4 km.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Cesgranrio) Certo botânico desenvolveu em laboratório 3 variedades de uma mesma planta, V_1, V_2 e V_3, que se desenvolvem cada uma a seu tempo, de acordo com a tabela a seguir. Plantando-se as 3 variedades no mesmo dia, confiando-se na exatidão da tabela, não ocorrendo nenhum fato que modifique os critérios da experiência tabulada e levando-se em conta que, a cada dia de colheita, outra semente da mesma variedade será plantada, o número mínimo de semanas necessário para que a colheita das três variedades ocorra simultaneamente será:

Variedade	Tempo de germinação (em semanas, após o plantio)	Tempo de floração (em semanas, após a germinação)	Tempo para única colheita (em semanas, após a floração)
V_1	4	3	1
V_2	2	3	1
V_3	1	2	1

A) 24 B) 18 C) 16 D) 12 E) 8

MATEMÁTICA

02. KJ40
(CEFET-MG) Em um campeonato esportivo, todos os jogos iniciarão em 15 de março de 2014. Os jogos de futebol acontecerão a cada 30 dias, os de basquete a cada 45 dias e os de vôlei, a cada 60 dias. Após o início das competições, o primeiro mês em que os jogos das três modalidades voltarão a coincidir é

A) agosto.
B) setembro.
C) novembro.
D) dezembro.

03. (UERJ–2016) O ano bissexto possui 366 dias e sempre é múltiplo de 4. O ano de 2012 foi o último bissexto. Porém, há casos especiais de anos que, apesar de múltiplos de 4 não são bissextos: são aqueles que também são múltiplos de 100 e não são múltiplos de 400. O ano de 1900 foi o último caso especial.
A soma dos algarismos do próximo ano que será um caso especial é:

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6

04. 6DG3
(ESPM-SP) As moedas de 10 e 25 centavos de real tem, praticamente, a mesma espessura. 162 moedas de 10 centavos e 90 moedas de 25 centavos serão empilhadas de modo que, em cada pilha, as moedas sejam do mesmo tipo e todas as pilhas tenham a mesma altura. O menor número possível de pilhas é:

A) 12
B) 13
C) 14
D) 15
E) 16

05. 1JZ2
(IFSC-SC–2015) Em uma loja existem três relógios cucos desregulados. O primeiro toca o cuco a cada 12 min., o segundo a cada 22 min. e o terceiro a cada 39 min. Se os três cucos tocaram juntos às quinze horas da tarde, é correto afirmar que eles tocarão juntos novamente

A) às 19 horas e 32 minutos do mesmo dia.
B) somente às 4 horas e 28 minutos do dia seguinte.
C) às 16 horas e 32 minutos do mesmo dia.
D) somente às 2 horas e 44 minutos do dia seguinte.
E) somente às 19h e 36 minutos do dia seguinte.

06. (UDESC) A quantidade de números naturais que são divisores do mínimo múltiplo comum entre os números a = 540, b = 720, c = 1 800 é igual a:

A) 75
B) 18
C) 30
D) 24
E) 60

07. 7B3L
(ACAFE-SC–2016) Um feirante deseja distribuir 576 goiabas, 432 laranjas e 504 maçãs entre várias famílias de um bairro carente. A exigência do feirante é que a distribuição seja feita de modo que cada família receba o mesmo e o menor número possível de frutas de uma mesma espécie.

A quantidade total de frutas recebida por cada família representa um número

A) divisível por 9.
B) múltiplo de 7.
C) múltiplo de 12.
D) entre 40 e 50.

08. (IFPE–2016) Na Escola Pierre de Fermat, foi realizada uma gincana com o objetivo de arrecadar alimentos para a montagem e doação de cestas básicas. Ao fim da gincana, foram arrecadados 144 pacotes de feijão, 96 pacotes de açúcar, 192 pacotes de arroz e 240 pacotes de fubá. Na montagem das cestas, a diretora exigiu que fosse montado o maior número de cestas possível, de forma que não sobrasse nenhum pacote de alimento e nenhum pacote fosse partido. Seguindo a exigência da diretora, quantos pacotes de feijão teremos em cada cesta?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

09. J07Q
(ACAFE-SC–2015) Um grupo de 216 mulheres e 180 homens inscreveram-se como voluntários para visitar pessoas doentes em hospitais de uma cidade. Todas as pessoas inscritas serão divididas em grupos segundo o seguinte critério: todos os grupos deverão ter a mesma quantidade de pessoas, e em cada grupo só haverá pessoas do mesmo sexo.
Nessas condições, se grupos distintos deverão visitar hospitais distintos, o menor número de hospitais a serem visitados é um número

A) par.
B) divisível por 6.
C) quadrado perfeito.
D) primo.

10. BU0X
(UTFPR–2016) Gabriela ficou doente. Sua mãe a levou ao médico que receitou alguns remédios dentre eles um antibiótico. O primeiro deve ser tomado a cada uma hora e trinta minutos e o segundo a cada duas horas e trinta minutos. Sabendo que Gabriela iniciou seu tratamento às 6h da manhã, tomando os dois medicamentos ao mesmo tempo, assinale a que horas da noite ela tomará os dois medicamentos juntos novamente.

A) 19h30min.
B) 20h.
C) 20h30min.
D) 21h.
E) 21h30min.

11. I7LF
(PUCPR–2016) Um estagiário recebeu a tarefa de organizar documentos em três arquivos. No primeiro arquivo, havia apenas 42 contratos de locação; no segundo arquivo, apenas 30 contratos de compra e venda; no terceiro arquivo, apenas 18 laudos de avaliação de imóveis. Ele foi orientado a colocar os documentos em pastas, de modo que todas as pastas devem conter a mesma quantidade de documentos. Além de não poder mudar algum documento do seu arquivo original, deveria colocar na menor quantidade possível de pastas. O número mínimo de pastas que ele pode usar é:

A) 13
B) 15
C) 26
D) 28
E) 30

12. M657
(Mackenzie-SP) Se **m**, **n** e **p** são inteiros positivos, tais que $m = \frac{3p}{7}$ e n = 48 – 3p, então, para o menor valor possível de **p**, a soma m + n é igual a:

A) 30
B) 35
C) 38
D) 40
E) 42

13. 98Q3 (PUC RS) Paulo, aluno do curso de Medicina, necessitando aprofundar seus estudos em Anatomia, retirou da biblioteca um livro com 675 páginas. Ele pretende estudar diariamente 25 páginas desse livro. Seu colega José também retirou um livro de Anatomia, este com 615 páginas, e pretende estudar 15 páginas em cada dia. Iniciando a leitura no mesmo dia, em um determinado dia **x** de leitura eles terão a mesma quantidade de páginas ainda por ler. Este número **x** é:

A) 12
B) 10
C) 8
D) 6
E) 4

14. YHMY (CEFET-CE) O algarismo que se deve intercalar entre os algarismos do número 76 de modo que o numeral obtido seja divisível por 4 e 9, simultaneamente, é:

A) 1
B) 7
C) 5
D) 6

15. (Unigranrio-RJ–2017) Uma mulher tem três filhas matriculadas regularmente no Ensino Fundamental. O produto da sua idade com as idades de suas filhas é 37 037. Desta forma, pode-se afirmar que a diferença entre as idades de sua filha mais velha e sua filha mais nova é:

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

16. T8F3 (UFU-MG) Se o máximo divisor comum entre os números 144 e 30^p é 36, em que **p** é um inteiro positivo, então o expoente **p** é igual a:

A) 1
B) 3
C) 4
D) 2

17. (FUVEST-SP–2017) Sejam **a** e **b** dois números inteiros positivos. Diz-se que **a** e **b** são equivalentes se a soma dos divisores positivos de **a** coincide com a soma dos divisores positivos de **b**.

Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

A) 8 e 9
B) 9 e 11
C) 10 e 12
D) 15 e 20
E) 16 e 25

18. 4C2V (Mackenzie-SP) A soma dos naturais positivos que, divididos por 37, dão resto igual ao cubo do quociente é:

A) 258
B) 290
C) 301
D) 320
E) 348

19. (UECE–2016) O número de degraus de uma escada é um múltiplo de sete, compreendido entre 40 e 100. Se ao subirmos essa escada, de dois em dois degraus, falta um degrau para atingir o topo da escada e ao subirmos de três em três degraus faltam dois degraus, podemos afirmar corretamente que o número de degraus da escada é:

A) 49
B) 63
C) 77
D) 91

20. VBB5 (FUVEST-SP) Maria quer cobrir o piso de sua sala com lajotas quadradas, todas com lado de mesma medida inteira, em centímetros. A sala é retangular, de lados 2 m e 5 m. Os lados das lajotas devem ser paralelos aos lados da sala, devendo ser utilizadas somente lajotas inteiras. Quais são os possíveis valores do lado das lajotas?

21. NH1D (Unicamp-SP) Sejam **a** e **b** dois números inteiros positivos tais que MDC (a, b) = 5 e MMC (a, b) = 105.

A) Qual é o valor de **b**, se a = 35?
B) Encontre todos os valores possíveis para (a, b).

22. 1CWY (ESPM-SP–2017) Dividindo-se o número natural **N** por 13, obtém-se quociente **Q** e resto **R**. Aumentando-se 2 unidades no dividendo e mantendo-se o divisor, o quociente aumenta de 1 unidade e a divisão é exata.

Sabendo-se que Q + R = 16, podemos afirmar que os divisores primos de **N** são:

A) 2 e 19
B) 2, 3 e 13
C) 3 e 17
D) 3, 5 e 7
E) 5 e 11

23. 9C74 (UECE–2016) Ao fatorarmos o número inteiro positivo **n**, obtemos a expressão $n = 2^x \cdot 5^y$ onde **x** e **y** são números inteiros positivos. Se **n** admite exatamente 12 divisores positivos e é menor do que o número 199, então, a soma x + y é igual a:

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8

24. TG3T (UFMG) No sítio de Paulo, a colheita de laranjas ficou entre 500 e 1 500 unidades. Se essas laranjas fossem colocadas em sacos com 50 unidades cada um, sobrariam 12 laranjas e, se fossem colocadas em sacos com 36 unidades cada um, também sobrariam 12 laranjas. Assim sendo, quantas laranjas sobrariam se elas fossem colocadas em sacos com 35 unidades cada um?

A) 4
B) 6
C) 7
D) 2

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2015) Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m.
Atendendo ao pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

A) 105 peças.
B) 120 peças.
C) 210 peças.
D) 243 peças.
E) 420 peças.

02. (Enem–2015) O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

1) Cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
2) Todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
3) Não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é:

A) 2
B) 4
C) 9
D) 40
E) 80

03. (Enem) Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número **N** é dado pela expressão $2^x \cdot 5^y \cdot 7^z$, na qual **x**, **y** e **z** são números inteiros não negativos. Sabe-se que **N** é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7.

O número de divisores de **N**, diferentes de **N**, é:

A) $x \cdot y \cdot z$
B) $(x + 1) \cdot (y + 1)$
C) $x \cdot y \cdot z - 1$
D) $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot z$
E) $(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (z + 1) - 1$

04. (Enem) Em uma plantação de eucaliptos, um fazendeiro aplicará um fertilizante a cada 40 dias, um inseticida para combater as formigas a cada 32 dias e um pesticida a cada 28 dias. Ele iniciou aplicando os três produtos em um mesmo dia.

De acordo com essas informações, depois de quantos dias, após a primeira aplicação, os três produtos serão aplicados novamente no mesmo dia?

A) 100
B) 140
C) 400
D) 1 120
E) 35 840

05. (Enem) Nosso calendário atual é embasado no antigo calendário romano, que, por sua vez, tinha como base as fases da Lua. Os meses de janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro possuem 31 dias, e os demais, com exceção de fevereiro, possuem 30 dias. O dia 31 de março de certo ano ocorreu em uma terça-feira.

Nesse mesmo ano, qual dia da semana será o dia 12 de outubro?

A) Domingo.
B) Segunda-feira.
C) Terça-feira.
D) Quinta-feira.
E) Sexta-feira.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. A
- 03. B
- 04. E
- 05. C
- 06. D
- 07. A
- 08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. B
- 03. A
- 04. C
- 05. E
- 06. E
- 07. B
- 08. C
- 09. D
- 10. D
- 11. B
- 12. A
- 13. D
- 14. C
- 15. C
- 16. D
- 17. E
- 18. A
- 19. C
- 20. 1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm, 10 cm, 20 cm, 25 cm, 50 cm, 100 cm.
- 21.
  - A) 15
  - B) (15, 35); (35, 15); (5, 105); (105, 5)
- 22. A
- 23. B
- 24. D

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. C
- 03. E
- 04. D
- 05. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

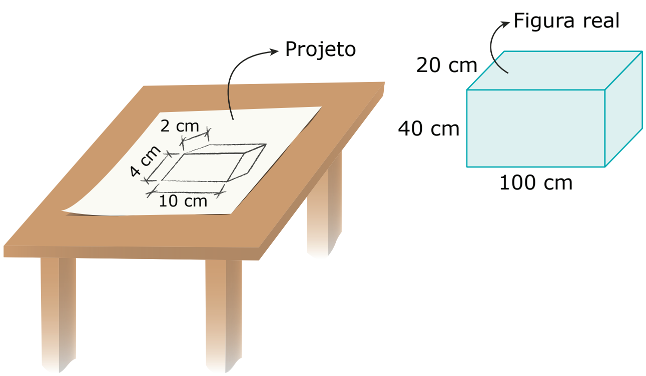
Razões e Proporções

RAZÃO

Para a, b $\in \mathbb{R}$ ($b \neq 0$), o quociente $\frac{a}{b}$ é chamado de **razão** entre **a** e **b** (nessa ordem, **a** é denominado antecedente, e **b**, consequente).

Escala

Duas figuras são chamadas de semelhantes quando possuem uma correspondência entre seus elementos e a razão entre os valores lineares correspondentes é constante. Observe a ilustração do projeto de uma caixa.



O projeto criado ilustra uma figura semelhante à original e a constante de proporcionalidade poderá ser encontrada a seguir.

Relação entre o projeto e a figura real:

$$\frac{10\text{ cm}}{100\text{ cm}} = \frac{4\text{ cm}}{40\text{ cm}} = \frac{2\text{ cm}}{20\text{ cm}} = \frac{1}{10}$$

Observa-se que a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{10}$, ou seja, a cada 1 cm no projeto encontram-se 10 cm na figura real.

A relação entre as dimensões da figura e o valor correspondente real é denominada **escala**, ou seja, a escala pode ser entendida como a razão entre as medidas do desenho e a medida real correspondente.

Exemplos

1º) Em um mapa, a distância entre duas cidades é de 6 cm. Sabendo que a distância real entre as cidades é de 690 km, qual é a escala desse mapa?

Medida no desenho: 6 cm

Medida real: 690 km = 69 000 000 cm

$$\text{Escala} = \frac{\text{medida no desenho}}{\text{medida real}}$$

$$\frac{6}{69\,000\,000} = \frac{1}{11\,500\,000} \text{ ou } 1 : 11\,500\,000$$

A expressão 1 : 11 500 000 significa que cada 1 cm da medida no desenho corresponde a 11 500 000 cm no tamanho real.

2º) No mapa a seguir, a distância entre **A** e **B** corresponde a 7 cm. Dada a escala gráfica, qual é a distância real entre **A** e **B**?

De acordo com a escala gráfica dada no mapa, cada 1 cm no desenho corresponde a 200 m (20 000 cm) de distância real. Assim, a escala é 1 : 20 000 e a distância real pode ser encontrada da seguinte forma:

$$\frac{1}{20\,000} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = 140\,000\text{ cm} = 1\,400\text{ m} = 1{,}4\text{ km}$$

PROPORÇÃO

Para a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ ($b \neq 0$, $d \neq 0$), a igualdade de razões é chamada de **proporção**.

a : b = c : d, que também pode ser escrito na forma: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Algumas propriedades das proporções

Das propriedades dos números reais, podemos concluir algumas equivalências entre proporções.

Para a, b, c, d $\in \mathbb{R}^*$, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

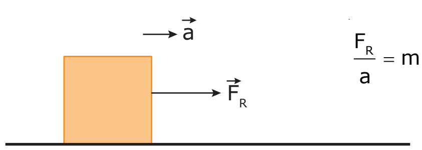
$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

NÚMEROS PROPORCIONAIS

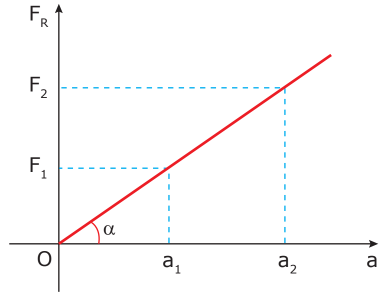
Considere um corpo de massa **m**. Sabemos que a razão entre a força resultante que age sobre esse corpo e a sua aceleração é constante e igual a **m**.



$$\frac{F_R}{a} = m$$

Quando duas grandezas possuem razão constante, são chamadas de **grandezas diretamente proporcionais**.

A função por elas determinada é denominada função linear, e o gráfico, se contínuo, é uma reta que passa pela origem.



$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2}$$

Exemplo

Para um corpo de massa 2 kg, vejamos a aceleração gerada por diversas forças resultantes:

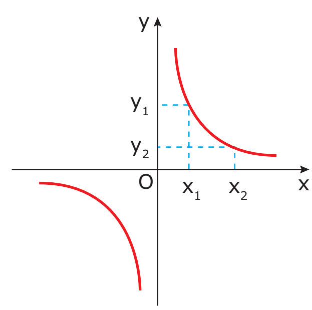
F_R (N)	2	4	6	8	10
a (m/s²)	1	2	3	4	5

Duas grandezas, tais que o produto entre elas é sempre constante, são chamadas de **grandezas inversamente proporcionais**. A função por elas determinada é uma função recíproca, e o gráfico é uma hipérbole equilátera.

Exemplo

xy = 8

x	y
−4	−2
−2	−4
−1	−8
1	8
2	4
4	2



$$x_1y_1 = x_2y_2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (Unicamp-SP) A quantia de R$ 1 280,00 deverá ser dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se

A) a divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?

B) a divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

Resolução:

Sendo **x**, **y** e **z** a quantia, em reais, que cada pessoa receberá, então:

A) $\frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x+y+z}{8+5+7} = \frac{1\,280}{20} = 64 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x}{8} = 64 \\ \frac{y}{5} = 64 \\ \frac{z}{7} = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 512 \\ y = 320 \\ z = 448 \end{cases}$$

B) $\frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}} = \frac{1\,280}{\frac{2+5+1}{10}} = 1\,600 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x}{\frac{1}{5}} = 1\,600 \\ \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1\,600 \\ \frac{z}{\frac{1}{10}} = 1\,600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}.1\,600 \\ y = \frac{1}{2}.1\,600 \\ z = \frac{1}{10}.1\,600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 320 \\ y = 800 \\ z = 160 \end{cases} \Leftrightarrow$$

02. (UFOP-MG) Duas torneiras são utilizadas para encher um tanque vazio. Sozinhas, elas levam 10 horas e 15 horas, respectivamente, para enchê-lo. As duas juntas enchem-no em:

A) 6 horas.

B) 12 horas e 30 minutos.

C) 25 horas.

D) 8 horas e 15 minutos.

Resolução:

A 1ª torneira possui uma velocidade de enchimento igual a $v_1 = \frac{1}{10}\frac{\text{tanque}}{\text{hora}}$, e a 2ª torneira, igual a $v_2 = \frac{1}{15}\frac{\text{tanque}}{\text{hora}}$.

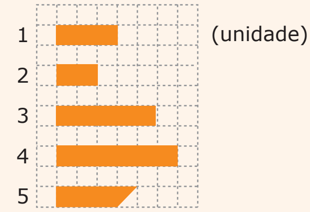
As duas torneiras juntas encherão o tanque com uma velocidade $v_{1,2} = v_1 + v_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30}\frac{\text{tanque}}{\text{hora}}$,

ou seja, encherão 5 tanques em 30 h, ou 1 tanque em 6 h.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 3AKG (IFSP) Na figura, estão representadas 5 barras em uma malha quadriculada.



Tomando-se a barra 1 como unidade, pode-se concluir que os números racionais associados às medidas das barras 2, 3, 4 e 5 são, respectivamente:

A) $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 2$ e $\frac{7}{6}$.

B) $\frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}$ e $\frac{6}{7}$.

C) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$ e $\frac{1}{4}$.

D) $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}$ e $\frac{7}{3}$.

E) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, 2$ e $\frac{7}{6}$.

02. (IFPE) Nos mapas usados nas aulas de Geografia, encontramos um tipo de razão chamada de escala. Uma escala é a relação matemática entre o comprimento ou a distância medida sobre um mapa e a sua medida real na superfície terrestre. Em um mapa encontramos a escala 1 : 200 000. Se nesse mapa a distância entre duas cidades é igual a 65 cm, então a distância real, em km, entre as cidades é igual a:

A) 100

B) 105

C) 110

D) 120

E) 130

03. JVVD (IFSP–2016) Um mapa tem como escala a indicação 1 : 1 500 000. Nesse mapa, uma distância, em linha reta, de exatos 180 quilômetros reais entre duas cidades A e B é representado por um segmento de reta que, em centímetros, mede:

A) 12

B) 2,7

C) 27,0

D) 0,12

E) 1,2

04. VEQB (IFSP–2016) Anderson pagou R$ 30,90 por 0,750 quilograma de um produto. Se ele tivesse comprado 1,250 quilogramas desse produto, ele teria pago o valor de

A) R$ 52,40.

B) R$ 50,60.

C) R$ 51,50.

D) R$ 53,70.

E) R$ 49,80.

05. NIW6 (UECE–2015) Se um pacote de biscoito contém 10 biscoitos e pesa 95 gramas, e se 15 gramas de biscoito correspondem a 90 calorias, quantas calorias tem cada biscoito?

A) 53 calorias.

B) 55 calorias.

C) 57 calorias.

D) 59 calorias.

06. (Unicamp-SP) Considere três modelos de televisores de tela plana, cujas dimensões aproximadas são fornecidas na tabela a seguir, acompanhadas dos preços dos aparelhos.

Modelo	Largura (cm)	Altura (cm)	Preço (R$)
23"	50	30	750,00
32"	70	40	1 400,00
40"	90	50	2 250,00

Com base na tabela, pode-se afirmar que o preço por unidade de área da tela

A) aumenta à medida que as dimensões dos aparelhos aumentam.

B) permanece constante do primeiro para o segundo modelo, e aumenta do segundo para o terceiro.

C) aumenta do primeiro para o segundo modelo, e permanece constante do segundo para o terceiro.

D) permanece constante.

07. KQZ6 (ESPM-SP–2015) Sabe-se que uma grandeza **A** é inversamente proporcional ao quadrado de uma grandeza **B** e que, quando **A** vale 1, **B** vale 6. Pode-se afirmar que, quando **A** vale 4 a grandeza **B** vale:

A) 1

B) 1,5

C) 3

D) 4

E) 4,5

08. JU1V (UERJ–2018) Uma herança foi dividida em exatamente duas partes: **x**, que é inversamente proporcional a 2, e **y**, que é inversamente proporcional a 3.

A parte **x** é igual a uma fração da herança que equivale a:

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{5}{6}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. BY7Q (IFPE–2016) Um aluno do curso de Mecânica, do IFPE, recebeu o desenho de uma peça, fez as devidas medições e, a partir de sua escala, fabricou a peça. Se a largura da peça no desenho tinha 1,5 mm e a largura da peça já fabricada tinha 45 cm, qual a escala do desenho?

A) 1 : 3

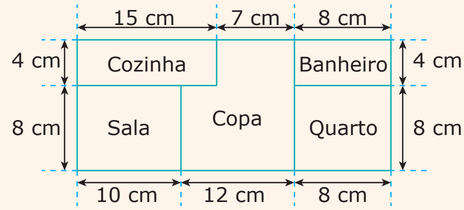
B) 1 : 30

C) 1 : 300

D) 1 : 3000

E) 1 : 30000

02. (UEMG) A planta de uma residência, apresentada no desenho a seguir, tem escala 1 : 80, ou seja, cada medida de 1 cm corresponde a uma medida de 80 cm na dimensão real.



Considerando informações e ilustração, só é correto afirmar que a área real da parte ocupada pela copa é igual a

A) 75,01 m².

B) 79,36 m².

C) 86,12 m².

D) 90,4 m².

03. 5BPX (PUC-SP) Felício e Jandira pretendem viajar e foram a uma casa de câmbio, onde receberam as seguintes informações: com os 3 060 reais de que dispunha, Felício poderia comprar 1 500 dólares e, com os 3 250 reais de Jandira, seria possível comprar 1 250 euros. Com base nessas informações, é correto afirmar que, nesse dia, a cotação do euro em relação ao dólar era de:

A) 1,2745

B) 1,2736

C) 1,2625

D) 1,1274

E) 1,1235

04. (Unicamp-SP) A razão entre a idade de Pedro e a de seu pai é igual a $\frac{2}{9}$. Se a soma das duas idades é igual a 55 anos, então Pedro tem

A) 12 anos.

B) 13 anos.

C) 10 anos.

D) 15 anos.

05. I3ES (UEL-PR) José limpa o vestiário de um clube de futebol em 30 minutos, enquanto seu irmão, Jair, limpa o mesmo vestiário em 45 minutos. Quanto tempo levarão os dois para limpar o vestiário juntos?

A) 15 minutos e 30 segundos.

B) 18 minutos.

C) 20 minutos.

D) 36 minutos.

E) 37 minutos e 30 segundos.

06. (PUC Rio–2015) Os sócios de uma empresa decidem dividir o lucro de um determinado período, pelos seus três gerentes, de modo que cada um receba uma parte diretamente proporcional ao seu tempo de serviço.

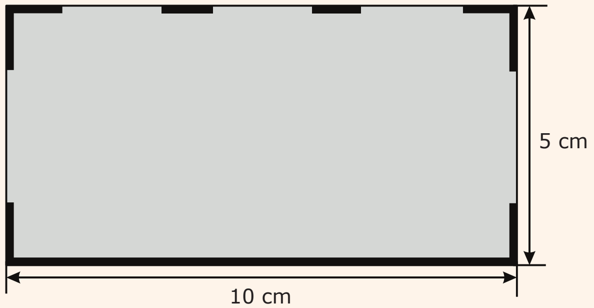
Sabendo que o lucro que será dividido é de R$ 18 500,00 e que o tempo de serviço de cada um deles é, respectivamente 5, 7 e 8 anos, podemos afirmar que o mais antigo na empresa receberá

A) R$ 4 625,00.
B) R$ 5 125,00.
C) R$ 6 475,00.
D) R$ 7 400,00.
E) R$ 9 250,00.

07. W26E (Insper-SP–2015) Em uma noite, a razão entre o número de pessoas que estavam jantando em um restaurante e o número de garçons que as atendiam era de 30 para 1. Em seguida, chegaram mais 50 clientes, mais 5 garçons iniciaram o atendimento e a razão entre o número de clientes e o número de garçons ficou em 25 para 1. O número inicial de clientes no restaurante era:

A) 250
B) 300
C) 350
D) 400
E) 450

08. QD66 (Unesp–2015) Para divulgar a venda de um galpão retangular de 5 000 m² uma imobiliária elaborou um anúncio em que constava a planta simplificada do galpão, em escala, conforme mostra a figura.



O maior lado do galpão mede, em metros,

A) 200
B) 25
C) 50
D) 80
E) 100

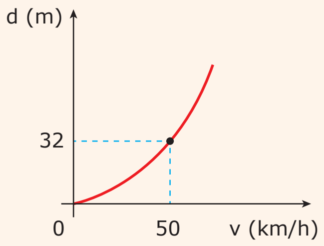
09. 2P1V (CEFET-MG–2015) Três pessoas **A**, **B** e **C** ao criarem uma empresa investiram respectivamente, R$ 200 000,00, R$ 300 000,00 e R$ 500 000,00 e firmaram o compromisso de que todo lucro mensal deverá ser dividido entre elas proporcionalmente ao capital investido por cada uma. No mês em que a empresa obteve um lucro de R$ 540 000,00 o valor que **B** recebeu, em reais, foi de:

A) 54 000
B) 162 000
C) 180 000
D) 270 000

10. SAF2 (UFU-MG) Gumercindo decidiu dividir sua fazenda de 30 alqueires entre seus dois filhos, João e José. Essa divisão seria diretamente proporcional à produção que cada filho conseguisse em uma plantação de soja. Eles produziram juntos 1,5 tonelada de soja, sendo que José produziu 250 kg a mais que João. Como foi dividida a fazenda?

11. QRHP (UERJ) Distância de frenagem é aquela percorrida por um carro do instante em que seu freio é acionado até o momento em que ele para. Essa distância é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade que o carro está desenvolvendo no instante em que o freio é acionado.

O gráfico a seguir indica a distância de frenagem **d**, em metros, percorrida por um carro, em função de sua velocidade **v**, em quilômetros por hora.



Admita que o freio desse carro seja acionado quando ele alcançar a velocidade de 100 km/h.

Calcule sua distância de frenagem, em metros.

12. 1HT9 (PUC-SP) Certo dia, Adilson, Bento e Celso, funcionários de uma mesma empresa, receberam um lote de documentos para arquivar e dividiram o total de documentos entre eles, na razão inversa de suas respectivas idades: 24, 30 e 36 anos. Se, ao completarem tal tarefa, foi observado que a soma dos documentos arquivados por Adilson e Celso excedia a quantidade arquivada por Bento em 26 unidades, então o total de documentos do lote era um número

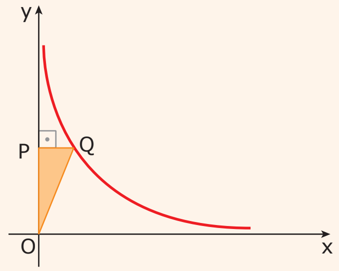
A) primo.
B) quadrado perfeito.
C) múltiplo de 4.
D) divisível por 6.
E) maior do que 60.

13. (UFRN) Marcos, Kátia, Sérgio e Ana foram jantar em uma pizzaria e pediram duas *pizzas* gigantes, que, cortadas, resultaram em 16 fatias. Marcos e Sérgio comeram quatro fatias cada, enquanto Kátia e Ana comeram três cada uma. Se o preço de cada *pizza* era de R$ 21,00 e a conta do jantar foi dividida proporcionalmente à quantidade de fatias que cada um consumiu, o valor pago por cada homem e cada mulher foi, respectivamente,

A) R$ 6,00 e R$ 4,50.
B) R$ 12,00 e R$ 9,00.
C) R$ 10,50 e R$ 7,90.
D) R$ 24,00 e R$ 18,00.

MATEMÁTICA

14. W8B4 (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, **Q** é um ponto do gráfico da função y = f(x), com **x** e **y** inversamente proporcionais.



Se $(x, y) = \left(\frac{5}{3}, 480\right)$ é um ponto da curva, então a área do triângulo OPQ é:

A) 160
B) 320
C) 380
D) 400
E) 800

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. JL5R (Enem–2017) Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto, há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1 : 400, e que seu volume é de 25 cm^3.

O volume do monumento original, em metro cúbico, é de:

A) 100
B) 400
C) 1 600
D) 6 250
E) 10 000

02. (Enem–2017) Um estudante elaborou uma planta baixa de sua sala de aula. A sala, com forma de retângulo, tem lados medindo 9 m e 5,5 m. No desenho feito pelo estudante, os lados da figura mediam 18 cm e 11 cm.

A fração que representa a razão entre as medidas dos lados da figura desenhada e as medidas dos lados do retângulo que representa a sala original é:

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{5}$
C) $\frac{1}{20}$
D) $\frac{1}{50}$
E) $\frac{1}{200}$

03. (Enem–2017) Um jogo de boliche consiste em arremessar uma bola sobre uma pista com o objetivo de atingir e derrubar o maior número de pinos. Para escolher um dentre cinco jogadores para completar sua equipe, um técnico calcula, para cada jogador, a razão entre o número de arremessos em que ele derrubou todos os pinos e o total de arremessos efetuados por esse jogador. O técnico escolherá o jogador que obtiver a maior razão.

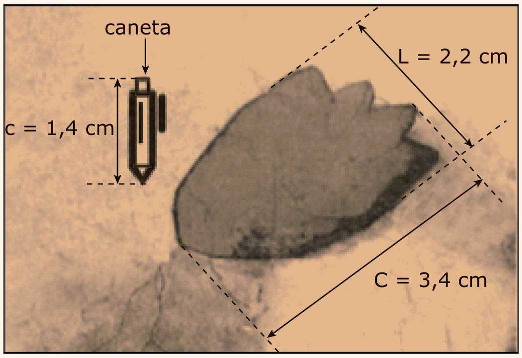
O desempenho dos jogadores está no quadro.

Jogador	Nº de arremessos em que derrubou todos os pinos	Nº total de arremessos
I	50	85
II	40	65
III	20	65
IV	30	40
V	48	90

Deve ser escolhido o jogador

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

04. (Enem–2015) Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a

A) 4,9 e 7,6.
B) 8,6 e 9,8.
C) 14,2 e 15,4.
D) 26,4 e 40,8.
E) 27,5 e 42,5.

05. (Enem) Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12 t. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação.

No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente:

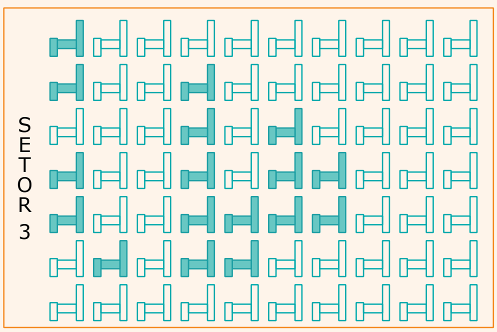
A) 1,8 t; 8,4 t; 1,8 t.
B) 3,0 t; 6,0 t; 3,0 t.
C) 2,4 t; 7,2 t; 2,4 t.
D) 3,6 t; 4,8 t; 3,6 t.
E) 4,2 t; 3,6 t; 4,2 t.

06. (Enem) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m³ de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m³, na carga de concreto trazido pela betoneira?

A) 1,75
B) 2,00
C) 2,33
D) 4,00
E) 8,00

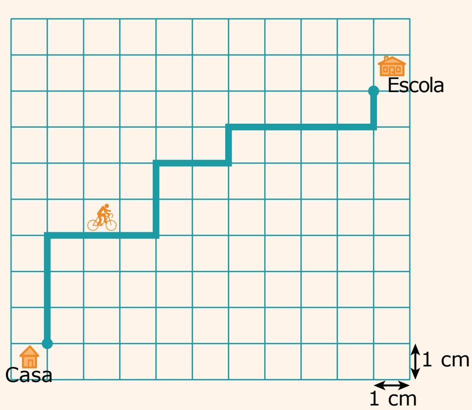
07. (Enem) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

A) $\frac{17}{70}$
B) $\frac{17}{53}$
C) $\frac{53}{70}$
D) $\frac{53}{17}$
E) $\frac{70}{17}$

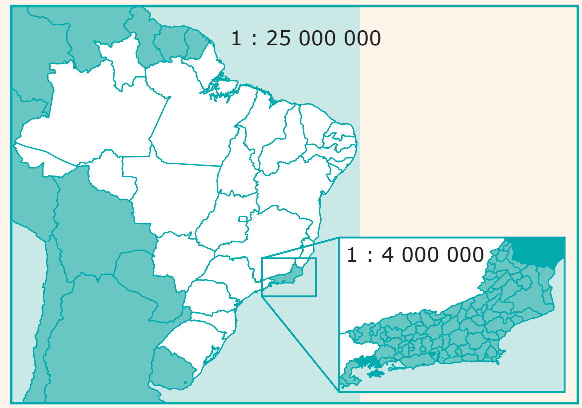
08. (Enem) A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola. Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura, na escala 1 : 25 000, por um período de cinco dias.



Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?

A) 4
B) 8
C) 16
D) 20
E) 40

09. (Enem) A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.

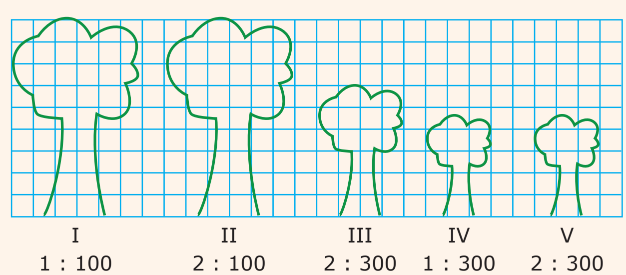


Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil.

Esse número é

A) menor que 10.
B) maior que 10 e menor que 20.
C) maior que 20 e menor que 30.
D) maior que 30 e menor que 40.
E) maior que 40.

10. (Enem) Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.



Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

11. (Enem) O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas.

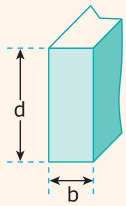
Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

Disponível em: <http://veja.abril.com.br>. Acesso em: 25 jun. 2011 (Adaptação).

Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e a percorrida pelo atleta?

A) 1 : 700
B) 1 : 7 000
C) 1 : 70 000
D) 1 : 700 000
E) 1 : 7 000 000

12. (Enem) A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura **b** e ao quadrado da altura **d**, conforme a figura. A constante de proporcionalidade **k** varia de acordo com o material utilizado na sua construção.



Considerando-se **S** como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é:

A) $S = k.b.d$
B) $S = b.d^2$
C) $S = k.b.d^2$
D) $S = \frac{k.b}{d^2}$
E) $S = \frac{k.d^2}{b}$

13. (Enem) Um comerciante contratou um novo funcionário para cuidar das vendas. Combinou pagar a essa pessoa R$ 120,00 por semana, desde que as vendas se mantivessem em torno dos R$ 600,00 semanais e, como um estímulo, também propôs que na semana na qual ele vendesse R$ 1 200,00, ele receberia R$ 200,00, em vez de R$ 120,00. Ao término da primeira semana, esse novo funcionário conseguiu aumentar as vendas para R$ 990,00 e foi pedir ao seu patrão um aumento proporcional ao que conseguiu aumentar nas vendas. O patrão concordou e, após fazer algumas contas, pagou ao funcionário a quantia de

A) R$ 160,00.
B) R$ 165,00.
C) R$ 172,00.
D) R$ 180,00.
E) R$ 198,00.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. E
- 03. A
- 04. C
- 05. C
- 06. D
- 07. C
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. B
- 03. A
- 04. C
- 05. B
- 06. D
- 07. E
- 08. E
- 09. B
- 10. José: 17,5
  João: 12,5
- 11. 128 m
- 12. E
- 13. B
- 14. D

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. D
- 03. D
- 04. D
- 05. C
- 06. B
- 07. A
- 08. E
- 09. D
- 10. D
- 11. D
- 12. C
- 13. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Regra de Três

REGRA DE TRÊS SIMPLES

Essa regra é aplicada quando temos apenas duas grandezas envolvidas (direta ou inversamente proporcionais), e queremos relacionar dois valores correspondentes de cada grandeza. São conhecidos três dos quatro valores e o outro valor é, então, determinado através dessa regra. Temos, assim, duas possibilidades:

i) Se a_1 e a_2 são diretamente proporcionais a b_1 e b_2, então:

Grandeza a	Grandeza b
↓ a_1 a_2	↓ b_1 b_2

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Exemplo

Considerando que em um festival cada 5 pessoas ocupavam uma área de 2 m^2, quantas pessoas estavam presentes em toda a área de 800 m^2 do festival?

Quanto maior o número de pessoas no festival, maior o espaço ocupado por todas elas. Logo, o número de pessoas e a área ocupada são grandezas diretamente proporcionais:

Número de pessoas	Área ocupada
↓ 5 x	↓ 2 800

$$\frac{5}{x} = \frac{2}{800} \Leftrightarrow x = 2\,000 \text{ pessoas}$$

Assim, estavam presentes no festival 2 000 pessoas.

ii) Se a_1 e a_2 são inversamente proporcionais a b_1 e b_2, então:

Grandeza a	Grandeza b
↓ a_1 a_2	↑ b_1 b_2

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}$$

Exemplo

Abrindo completamente 6 torneiras, enche-se um tanque com água em 22 minutos. Se abrirmos apenas 4 torneiras, em quanto tempo o tanque ficará cheio?

Quanto menor o número de torneiras abertas, menor será a vazão de água e, consequentemente, mais tempo será gasto para encher o tanque. Logo, o número de torneiras abertas e o tempo são grandezas inversamente proporcionais:

Número de torneiras	Tempo
↓ 6 4	↑ 22 x

$$\frac{6}{4} = \frac{x}{22} \Leftrightarrow x = 33 \text{ minutos}$$

Portanto, com 4 torneiras, o tanque ficará cheio após 33 minutos.

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Essa regra é aplicada quando são envolvidas mais de duas grandezas. Podemos analisar como se relacionam duas dessas grandezas fixando as demais.

Exemplo

Se 4 operários constroem um muro de 30 m de comprimento em 10 dias, trabalhando 8 horas por dia, quantas horas por dia deverão trabalhar 6 operários para construir 45 m do mesmo muro em 8 dias?

Sendo **x** o número de horas, por dia, trabalhadas pelos 6 operários, temos:

A Número de operários	B Comprimento do muro	C Número de dias	D Número de horas por dia
↑ 4 6	↓ 30 45	↑ 10 8	↓ 8 x

Vamos determinar o valor faltante da grandeza **D**, que depende dos valores das grandezas **A**, **B** e **C**.

Fixando **A** e **C**, **D** é diretamente proporcional a **B**, pois quanto maior o número de horas trabalhadas por dia, maior será o comprimento do muro construído (na mesma razão, por exemplo, se dobrarmos uma grandeza, a outra também dobrará).

Fixando **B** e **C**, **D** é inversamente proporcional a **A**, pois quanto maior o número de horas trabalhadas por dia, menor será o número de operários necessários à construção (em uma razão inversa, por exemplo, se dobrarmos uma grandeza, a outra cairá pela metade).

Fixando **A** e **B**, **D** é inversamente proporcional a **C**, pois quanto maior o número de horas trabalhadas por dia, menor será o número de dias necessários à construção (em uma razão inversa).

Então, **D** é proporcional a $\frac{B}{AC}$, e podemos montar a seguinte proporção a partir do produto das razões dos valores conhecidos, observando o mesmo sentido das setas mostradas anteriormente:

$$\frac{x}{8} = \frac{10}{8} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{45}{30} \Leftrightarrow x = 10\ \frac{h}{dia}$$

Portanto, cada um dos operários deverá trabalhar 10 horas por dia.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UERJ-2015) Na imagem da etiqueta, informa-se o valor a ser pago por 0,256 kg de peito de peru.

O valor, em reais, de um quilograma desse produto é igual a:

A) 25,60
B) 32,76
C) 40,00
D) 50,00

02. JHD1 (PUC Rio–2018) Um estudante vai a pé da escola até o metrô. Se ele caminha a 6 km/h, ele demora 20 minutos. Se ele corre, ele demora apenas 12 minutos.

Com que velocidade ele corre?

A) 10 km/h
B) 12 km/h
C) 25 km/h
D) 9 km/h
E) 8 km/h

03. SBUO (UFPE) Se treze datilógrafos, de mesma capacidade, digitam treze mil e treze símbolos em treze minutos, quantos símbolos são digitados por cada um deles em um minuto?

A) 77
B) 71
C) 65
D) 59
E) 55

04. KFØJ (CEFET-MG–2016) Em uma empresa, 10 funcionários produzem 150 peças em 30 dias úteis. O número de funcionários que a empresa vai precisar para produzir 200 peças, em 20 dias úteis, é igual a:

A) 18
B) 20
C) 22
D) 24

05. DJ6E (CEFET-MG–2016) Numa fábrica de peças de automóvel, 200 funcionários trabalhando 8 horas por dia produzem, juntos, 5 000 peças por dia. Devido à crise, essa fábrica demitiu 80 desses funcionários e a jornada de trabalho dos restantes passou a ser de 6 horas diárias.

Nessas condições, o número de peças produzidas por dia passou a ser de:

A) 1 666
B) 2 250
C) 3 000
D) 3 750

06. MDN1 (PUC RS) Duas rodas dentadas, que estão engrenadas, têm 12 e 60 dentes, respectivamente. Enquanto a maior dá 8 voltas, a menor dará _______.

A) $\frac{1}{5}$ de volta

B) $\frac{8}{5}$ de volta

C) 5 voltas

D) 40 voltas

E) 96 voltas

07. (PUC Rio–2018) Sabemos que 5 gatos comem 20 kg de ração em 20 dias. Considere as seguintes afirmações:

I. 2 gatos comem 2 kg de ração em 2 dias.

II. 5 gatos comem 5 kg de ração em 5 dias.

III. 4 gatos comem 16 kg de ração em 16 dias.

Quais destas afirmativas são verdadeiras?

A) Apenas I

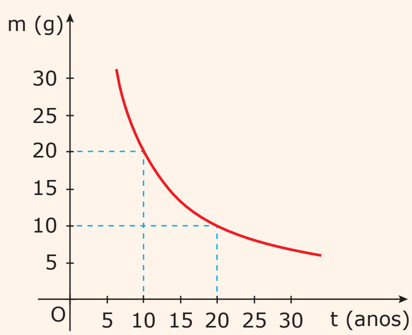
B) Apenas II

C) Apenas III

D) Nenhuma delas

E) Todas as três

08. EHTW (UFRRJ) A decomposição de uma determinada substância é inversamente proporcional ao tempo. O gráfico da figura foi construído com a massa da substância expressa em gramas, e o tempo, em anos.



O tempo necessário para que essa substância se reduza a 2,5 gramas é de:

A) 60 anos.

B) 80 anos.

C) 120 anos.

D) 160 anos.

E) 240 anos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (Unifor-CE–2016) Quinze operários, trabalhando 8 horas por dia, demoram 16 dias para fazer um muro de 80 metros de comprimento. Se a quantidade de operários fosse reduzida para 10, a quantidade de horas, por dia, que precisariam trabalhar, para em 24 dias, fazerem um muro de 90 metros de comprimento, com a mesma espessura e altura que o anterior, é de:

A) 6

B) 7

C) 8

D) 9

E) 10

02. (IFBA–2016) Marta chegou em casa após 30 dias de viagem, e notou que uma torneira estava um pouco aberta, gotejando água em intervalos de tempo constantes. Em tempos de economia de água, ela, preocupada, resolveu medir o desperdício, e, para isso, usou um copo de 200 mL, que a torneira encheu em 20 minutos. Deste modo, o total desperdiçado, em litros, foi, no mínimo, igual a:

A) 43,2

B) 432

C) 600

D) 720

E) 4 320

03. LBJL (EPCAR-MG) A "Avenida Euclidiana", retilínea, tem 190 m de comprimento e 0,5 dam de largura em toda a sua extensão. Para asfaltá-la, são necessários 380 kg de asfalto. Pretende-se asfaltar a "Avenida Pitagórica", também retilínea, cuja largura é 100 cm maior que a largura da "Avenida Euclidiana", onde será necessário utilizar 930 kg do mesmo asfalto (mesma espessura).

Se o comprimento da "Avenida Pitagórica" é **x** dm, então, a soma dos algarismos de **x** é igual a:

A) 22

B) 23

C) 24

D) 25

04. THLP (PUC Rio) Duas torneiras jogam água em um reservatório, uma na razão de 1 m³ por hora e a outra na razão de 1 m³ a cada 6 horas. Se o reservatório tem 14 m³, em quantas horas ele estará cheio?

A) 8

B) 10

C) 12

D) 14

E) 16

05. ZY3G (Unifor-CE–2016) Um automóvel consome 1 litro de gasolina a cada 11 km para transportar, diariamente, ida e volta o prefeito de uma cidade do interior cearense, que reside em sua fazenda a 16,5 km da sede do município. Considerando meses com 30 dias e a gasolina a preço constante de R$ 3,60 o litro, o gasto mensal com o combustível para a prefeitura será de

A) R$ 195,00.

B) R$ 255,00.

C) R$ 315,00.

D) R$ 324,00.

E) R$ 345,00.

06. (EPCAR-MG–2018) Uma prestadora de serviços combina um prazo de 9 dias, utilizando 12 máquinas, para executar certo trabalho. Ao final do quarto dia, 4 máquinas estragam, não sendo substituídas e não havendo interrupção do trabalho. As máquinas levam 3 dias para serem consertadas, retornando ao trabalho no dia seguinte. Para que seja cumprido o prazo combinado no início, a prestadora coloca, além das 12 máquinas, mais **x** máquinas iguais às primeiras.

É correto afirmar que **x** é igual a:

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

MATEMÁTICA

07. AMNN (UFTM-MG) Como combustível, o etanol de cana-de--açúcar e o etanol de milho têm qualidades iguais. O grande diferencial entre eles é a produtividade. Sabe-se que 1 hectare de cana-de-açúcar produz 7 500 litros de etanol, enquanto 1 hectare de milho produz apenas 3 000 litros. Uma região específica da usina tem **x** hectares plantados, divididos entre cana e milho, de forma diretamente proporcional à produtividade de cada cultura. Considerando que 1 ha = 10 000 m² e que ao plantio do milho couberam 400 hectares, a área total, em m², dessa região específica pode ser corretamente expressa por:

A) $1{,}2 \cdot 10^6$

B) $1{,}3 \cdot 10^6$

C) $1{,}4 \cdot 10^7$

D) $1{,}4 \cdot 10^8$

E) $1{,}6 \cdot 10^8$

08. UWTC (ESPM-SP–2016) Duas impressoras iguais imprimem 5 000 páginas em 30 minutos. Se elas forem substituídas por uma só impressora 20% mais eficiente que cada uma das anteriores, 3 600 páginas seriam impressas num tempo de

A) 36 min.

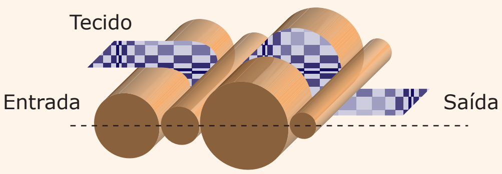
B) 42 min.

C) 24 min.

D) 28 min.

E) 48 min.

09. GEGE (UFMS) Numa fábrica de tecidos, quatro rolos cilíndricos de metal estão dispostos sequencialmente como um conjunto de engrenagens conectadas (veja a figura a seguir). Sabe-se que o diâmetro do primeiro rolo mede 1,6 metro; do segundo, 50 centímetros; do terceiro, 2 metros; e o quarto rolo tem raio medindo 10 centímetros. Estando o sistema já em funcionamento, e sabendo-se que o quarto rolo dá 10 voltas completas por minuto, quantas voltas completas o primeiro rolo dará em 12 horas seguidas de funcionamento?



A) 7 200

B) 900

C) 720

D) 480

E) 450

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. VZG4 (Enem–2016) Para garantir a segurança de um grande evento público que terá início às 4h da tarde, um organizador precisa monitorar a quantidade de pessoas presentes em cada instante. Para cada 2 000 pessoas se faz necessária a presença de um policial. Além disso, estima-se uma densidade de quatro pessoas por metro quadrado de área de terreno ocupado. Às 10h da manhã, o organizador verifica que a área de terreno já ocupada equivale a um quadrado com lados medindo 500 m. Porém, nas horas seguintes, espera-se que o público aumente a uma taxa de 120 000 pessoas por hora até o início do evento, quando não será mais permitida a entrada de público.

Quantos policiais serão necessários no início do evento para garantir a segurança?

A) 360

B) 485

C) 560

D) 740

E) 860

02. (Enem–2016) Um clube tem um campo de futebol com área total de 8 000 m², correspondente ao gramado. Usualmente, a poda da grama desse campo é feita por duas máquinas do clube próprias para o serviço. Trabalhando no mesmo ritmo, as duas máquinas podam juntas 200 m² por hora. Por motivo de urgência na realização de uma partida de futebol, o administrador do campo precisará solicitar ao clube vizinho máquinas iguais às suas para fazer o serviço de poda em um tempo máximo de 5 h.

Utilizando as duas máquinas que o clube já possui, qual o número mínimo de máquinas que o administrador do campo deverá solicitar ao clube vizinho?

A) 4

B) 6

C) 8

D) 14

E) 16

03. (Enem–2015) Alguns medicamentos para felinos são administrados com base na superfície corporal do animal. Foi receitado a um felino pesando 3,0 kg um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado de superfície corporal.

O quadro apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados.

Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal

Massa (kg)	Área (m^2)
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

NORSWORTHY, G. *O paciente felino*. São Paulo: Roca, 2009.

A dose diária, em miligramas, que esse felino deverá receber é de:

A) 0,624

B) 52,0

C) 156,0

D) 750,0

E) 1 201,9

04. (Enem) Um *show* especial de Natal teve 45 000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o *show*, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao *show* e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados. Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

A) 1 hora.

B) 1 hora e 15 minutos.

C) 5 horas.

D) 6 horas.

E) 6 horas e 15 minutos.

05. (Enem) Nos Estados Unidos a unidade de medida de volume mais utilizada nas latas de refrigerante é a onça fluida (fl oz), que equivale a aproximadamente 2,95 centilitros (cL).

Sabe-se que o centilitro é a centésima parte do litro e que a lata de refrigerante usualmente comercializada no Brasil tem capacidade de 355 mL.

Assim, a medida do volume da lata de refrigerante de 355 mL, em onça fluida (fl oz), é mais próxima de:

A) 0,83

B) 1,20

C) 12,03

D) 104,73

E) 120,34

06. (Enem) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfico dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1 500 telhas ou 1 200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

A) 300 tijolos.

B) 360 tijolos.

C) 400 tijolos.

D) 480 tijolos.

E) 600 tijolos.

07. (Enem) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a:

A) 2

B) 4

C) 5

D) 8

E) 9

08. (Enem) Nos *shopping centers,* costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por cada período de tempo de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques.

Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo *shopping* custa R$ 3,00 e que uma bicicleta custa 9 200 tíquetes. Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é:

A) 153

B) 460

C) 1 218

D) 1 380

E) 3 066

09. (Enem) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de

A) 12 kg.

B) 16 kg.

C) 24 kg.

D) 36 kg.

E) 75 kg.

10. (Enem) Muitas medidas podem ser tomadas em nossas casas visando à utilização racional de energia elétrica. Isso deve ser uma atitude diária de cidadania. Uma delas pode ser a redução do tempo no banho. Um chuveiro com potência de 4 800 W consome 4,8 kW por hora.

Uma pessoa que toma dois banhos diariamente, de 10 minutos cada um, consumirá, em sete dias, quantos kW?

A) 0,8

B) 1,6

C) 5,6

D) 11,2

E) 33,6

11. (Enem) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia.

Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

A) 920 kg.

B) 800 kg.

C) 720 kg.

D) 600 kg.

E) 570 kg.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. A
- 03. A
- 04. B
- 05. B
- 06. D
- 07. B
- 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B
- 03. B
- 04. C
- 05. D
- 06. D
- 07. C
- 08. A
- 09. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. D
- 03. B
- 04. B
- 05. C
- 06. D
- 07. C
- 08. D
- 09. A
- 10. D
- 11. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Noções Primitivas de Geometria Plana

INTRODUÇÃO

Na Geometria Plana, ponto, reta e plano são conceitos primitivos. Neste texto, vamos designar pontos por letras maiúsculas (A, B, C, ...), retas por letras minúsculas (r, s, t, ...) e planos por letras gregas (α, β, γ, ...).

Em nosso estudo, faremos uso de alguns postulados (ou axiomas), que são verdades aceitas sem demonstração, e de teoremas (ou proposições), afirmações que podem ser demonstradas.

São exemplos de postulados:

P1) Numa reta, bem como num plano, há infinitos pontos.

P2) Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.

P3) Três pontos distintos não colineares determinam um único plano que os contém.

São exemplos de teoremas, que serão demonstrados posteriormente:

T1) Em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é igual a 180°.

T2) Em qualquer quadrilátero, a soma dos ângulos internos é igual a 360°.

Segmento de reta

Dados dois pontos distintos, **A** e **B**, na reta **r**, a reunião desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles, em **r**, é o segmento de reta $\overline{AB}$.

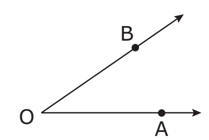
Semirreta

Dados dois pontos distintos, **A** e **B**, na reta **r**, define-se semirreta $\overrightarrow{AB}$ como a reunião dos pontos com origem em **A** e sentido para **B**.

ÂNGULOS

Definição

Chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem.

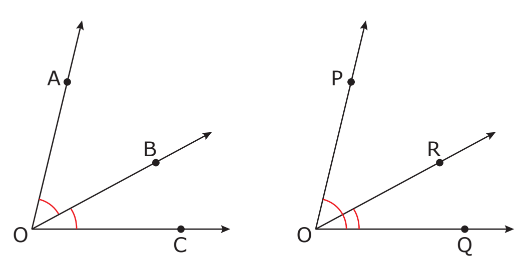


Indica-se: $\angle AOB$, $\angle BOA$, $A\hat{O}B$, $B\hat{O}A$ ou $\hat{O}$.

Nomenclatura: vértice **O** e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Ângulos consecutivos

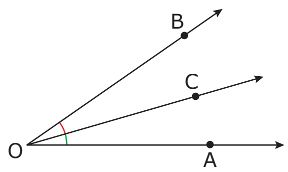
Dois ângulos são consecutivos se eles possuem um lado em comum.



Nas figuras, os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ (assim como os $P\hat{O}Q$ e $R\hat{O}Q$) são consecutivos.

Ângulos adjacentes

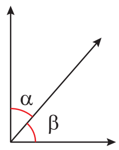
Dois ângulos consecutivos, que não possuem ponto interior comum, são chamados de ângulos adjacentes.



Na figura, $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ são ângulos adjacentes.

Ângulos complementares

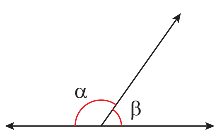
Dois ângulos são complementares se, e somente se, a soma de suas medidas for 90° $\left(\frac{\pi}{2}\text{ radianos}\right)$. Dizemos, nesse caso, que um dos ângulos é o complemento do outro.



$\Rightarrow$ Dois ângulos complementares $\alpha + \beta = 90°$

Ângulos suplementares

Dois ângulos são suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas for 180° (π radianos). Dizemos, nesse caso, que um dos ângulos é o suplemento do outro.



$\Rightarrow$ Dois ângulos suplementares $\alpha + \beta = 180°$

Exemplo

O suplemento do dobro de um ângulo excede em 30° o triplo do complemento desse ângulo. Determinar o ângulo.

Ângulo: **x**

Complemento do ângulo: $90° - x$

Suplemento do dobro do ângulo: $180° - 2x$

Equacionando, teremos:

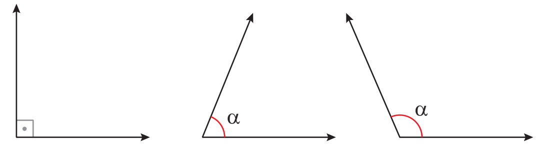
$180° - 2x = 30° + 3(90° - x) \Rightarrow x = 120°$

Classificação

i) Ângulo reto é todo ângulo cuja medida é 90°.

ii) Ângulo agudo é um ângulo cuja medida é maior que 0° e menor que 90°.

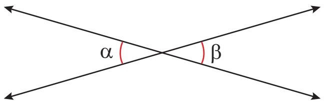
iii) Ângulo obtuso é um ângulo cuja medida é maior que 90° e menor que 180°.



Ângulo reto (90°) | Ângulo agudo ($0° < \alpha < 90°$) | Ângulo obtuso ($90° < \alpha < 180°$)

Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

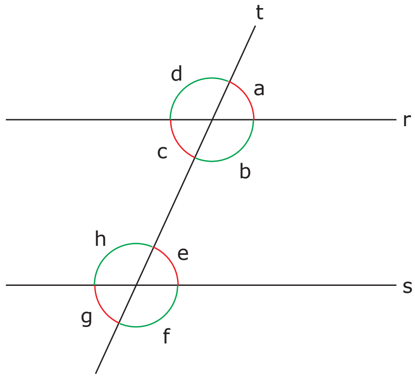


$\Rightarrow$ Ângulos opostos pelo vértice $\alpha = \beta$

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes (possuem a mesma medida).

RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Duas retas **r** e **s**, paralelas distintas, e uma transversal **t** determinam oito ângulos geométricos, conforme a figura. Dois quaisquer desses ângulos ou são suplementares ou são congruentes.



r // s

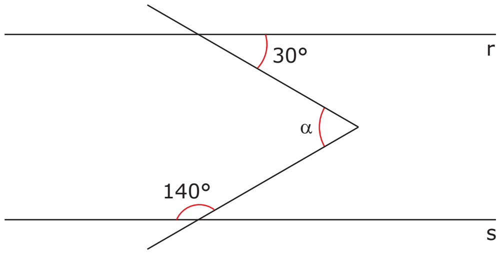
Ângulos correspondentes	a = e b = f d = h c = g
Ângulos alternos	internos $\begin{cases} b = h \\ c = e \end{cases}$ externos $\begin{cases} a = g \\ d = f \end{cases}$
Ângulos colaterais	internos $\begin{cases} b + e = 180° \\ c + h = 180° \end{cases}$ externos $\begin{cases} a + f = 180° \\ d + g = 180° \end{cases}$

OBSERVAÇÃO

Se uma reta transversal **t** determina com duas retas coplanares, **r** e **s**, ângulos alternos congruentes, então r // s.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Na figura a seguir, as retas **r** e **s** são paralelas. Determinar α.

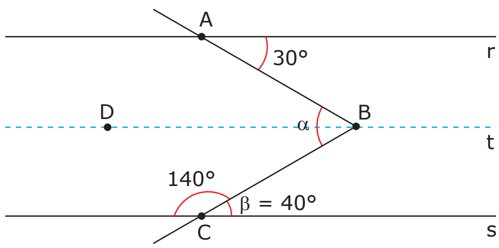


Resolução:

Sejam os pontos **A**, **B** e **C** e o ângulo β.

Os ângulos 140° e β são suplementares, ou seja, β = 40°.

Trace a reta tracejada **t** paralela às retas **r** e **s**, passando por **B**. Seja **D** um ponto da reta **t**.



Os ângulos de medidas 30° e $A\hat{B}D$ são alternos internos, ou seja, $A\hat{B}D$ = 30°.

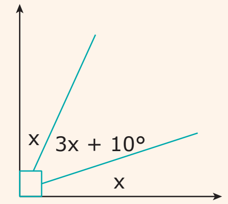
Os ângulos de medidas 40° e $C\hat{B}D$ são alternos internos, ou seja, $C\hat{B}D$ = 40°.

Assim: α = $A\hat{B}D$ + $C\hat{B}D$ = 70°.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UTFPR–2015) Calcule o valor de **x**, em graus, na figura:

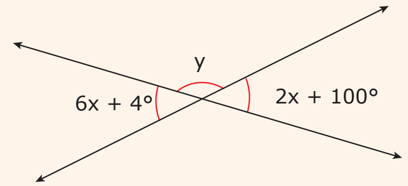


A) 16
B) 10
C) 20
D) 58
E) 32

02. DNY6 (ESPM-SP–2015) A medida de um ângulo cujo suplemento tem 100° a mais que a metade do seu complemento é igual a

A) 40°.
B) 50°.
C) 60°.
D) 70°.
E) 80°.

03. (UTFPR) A medida de **y** na figura, em graus, é



A) 42°.
B) 32°.
C) 142°.
D) 148°.
E) 24°.

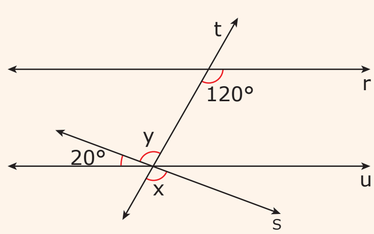
04. VTGU (UEPB) Duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos externos expressos em graus pelas equações 3x + 18 e 5x + 10. O valor de **x** de modo que estas retas sejam paralelas é:

A) 4
B) 5
C) 8
D) 10
E) 12

05. NXMP (UFU-MG) Dois ângulos consecutivos são complementares. Então, o ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos é

A) 20°.
B) 30°.
C) 35°.
D) 40°.
E) 45°.

06. N5G6 (FGV-SP) Considere as retas **r**, **s**, **t**, **u**, todas num mesmo plano, com r // u.



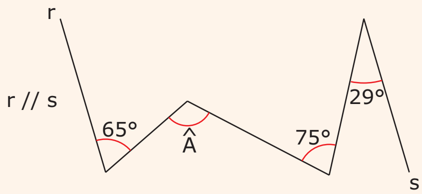
O valor em graus de 2x + 3y é

A) 64°.
B) 500°.
C) 520°.
D) 660°.
E) 580°.

07. QZWO

(CEFET-PR) Numa gincana, a equipe "Já Ganhou" recebeu o seguinte desafio:

Na cidade de Curitiba, fotografe a construção localizada na Rua Marechal Hermes no número igual à nove vezes o valor do ângulo $\hat{A}$ da figura a seguir:

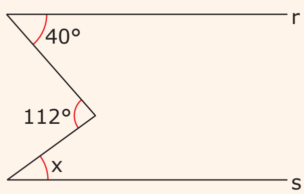


Se a equipe resolver corretamente o problema, irá fotografar a construção localizada no número:

A) 990
C) 999
E) 1 260
B) 261
D) 1 026

08. WYXT

(Unimontes-MG) Se r // s , então o valor de **x**, na figura a seguir, é

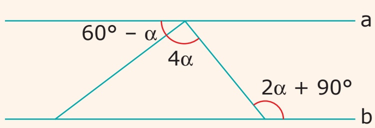


A) 52°.
B) 68°.
C) 72°.
D) 58°.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, **a** e **b** são retas paralelas.



A afirmação correta a respeito do número que expressa, em graus, a medida do ângulo α é

A) um número primo maior que 23.
B) um número ímpar.
C) um múltiplo de 4.
D) um divisor de 60.
E) um múltiplo comum entre 5 e 7.

02. (IFCE) Sabendo-se que a soma de dois ângulos é 78° e que um deles vale $\frac{3}{5}$ do complemento do outro, os valores são

A) 10° e 68°.
C) 16° e 62°.
E) 20° e 58°.
B) 15° e 63°.
D) 18° e 60°.

03. FRMX

(IFCE) Dois ângulos são suplementares. Os $\frac{2}{3}$ do maior excedem os $\frac{3}{4}$ do menor em 69°. Determine os ângulos.

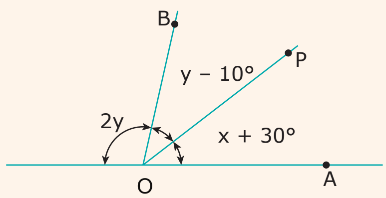
04. 0240

(IFSul–2015) Duas retas paralelas "r" e "s", cortadas por uma transversal "t", formam ângulos colaterais internos, dos quais um excede o outro em 20°.

O ângulo colateral interno agudo mede

A) 20°.
B) 35°.
C) 55°.
D) 80°.

05. (CEFET-SC) Na figura a seguir, OP é bissetriz do ângulo AÔB. Determine o valor de **x** e **y**.



A) x = 13 e y = 49
D) x = 17 e y = 42
B) x = 15 e y = 35
E) x = 10 e y = 50
C) x = 12 e y = 48

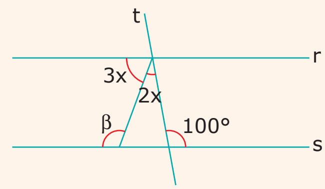
06. 4I34

(PUCPR) Dois ângulos complementares $\hat{A}$ e $\hat{B}$, sendo $\hat{A} < \hat{B}$, têm medidas na razão de 13 para 17. Consequentemente, a razão da medida do suplemento do ângulo $\hat{A}$ para o suplemento do ângulo $\hat{B}$ vale:

A) $\frac{43}{47}$
B) $\frac{17}{13}$
C) $\frac{13}{17}$
D) $\frac{119}{48}$
E) $\frac{47}{43}$

07. KØLA

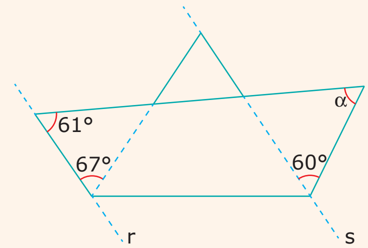
(UEPB) As retas paralelas **r** e **s** são cortadas pela reta **t** como mostra a figura a seguir. A medida do ângulo β é



A) 120°.
C) 140°.
E) 110°.
B) 100°.
D) 130°.

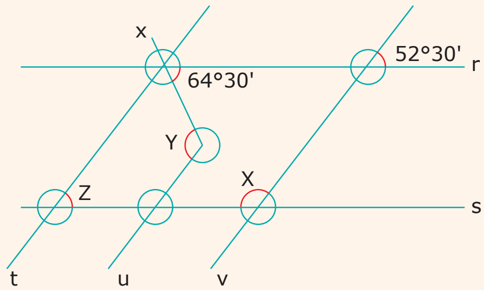
08. QØR6

(IFPE–2018) Eva é aluna do curso de Construção Naval do campus Ipojuca e tem mania de construir barquinhos de papel. Durante a aula de desenho técnico, resolveu medir os ângulos do último barquinho que fez, representado na imagem a seguir. Sabendo que as retas suportes, **r** e **s** são paralelas, qual a medida do ângulo α destacado?



A) 52°
C) 61°
E) 59°
B) 60°
D) 67°

09. (UTFPR) Na figura a seguir, temos r//s e t//u//v.



Com base nos estudos dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, pode-se afirmar que:

I. O ângulo X mede 127° 30′.

II. O ângulo Y mede 117°.

III. O ângulo Z mede 64° 30′.

Analise as proposições acima e assinale a alternativa correta.

A) Somente as afirmações I e II estão corretas.

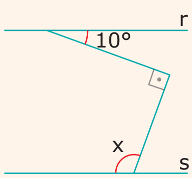
B) Somente as afirmações I e III estão corretas.

C) Somente a afirmação I está correta.

D) As afirmações I, II e III estão corretas.

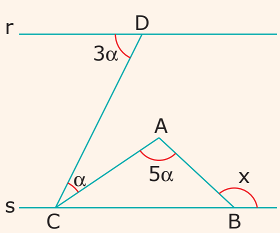
E) As afirmações I, II e III estão incorretas.

10. EHKS (PUC-SP) Na figura r//s, então o valor do ângulo **x** é:



11. 1Y1Z (ESPM-SP) Na figura a seguir, as retas **r** e **s** são paralelas e $\overline{AB} = \overline{AC}$.

O valor de **x** é igual a



A) 120°.

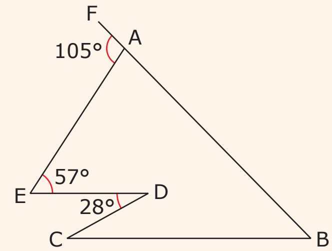
B) 135°.

C) 140°.

D) 150°.

E) 165°.

12. AXQJ (UFMG) Observe esta figura:



Nessa figura, os pontos **F**, **A** e **B** estão em uma reta, e as retas CB e ED são paralelas. Assim, o ângulo $A\hat{B}C$ mede

A) 39°. B) 44°. C) 47°. D) 48°.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2015) Uma família fez uma festa de aniversário e enfeitou o local da festa com bandeirinhas de papel. Essas bandeirinhas foram feitas da seguinte maneira: inicialmente, recortaram as folhas de papel em forma de quadrado, como mostra a figura 1. Em seguida, dobraram as folhas quadradas ao meio sobrepondo os lados BC e AD, de modo que **C** e **D** coincidam, e o mesmo ocorra com **A** e **B**, conforme ilustrado na figura 2. Marcaram os pontos médios **O** e **N**, dos lados FG e AF, respectivamente, e o ponto **M** do lado AD, de modo que AM seja igual a um quarto de AD. A seguir, fizeram cortes sobre as linhas pontilhadas ao longo da folha dobrada.

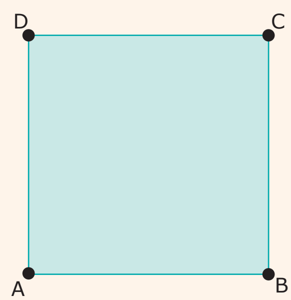


Figura 1

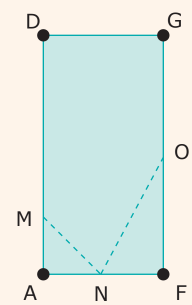
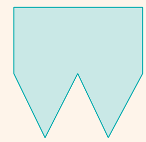
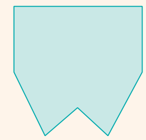


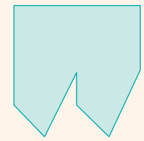
Figura 2

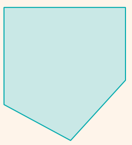
Após os cortes, a folha é aberta e a bandeirinha está pronta.

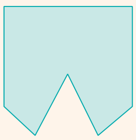
A figura que representa a forma da bandeirinha pronta é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

02. (Enem) Um decorador utilizou um único tipo de transformação geométrica para compor pares de cerâmicas em uma parede. Uma das composições está representada pelas cerâmicas indicadas por I e II.

I II III

Utilizando a mesma transformação, qual é a figura que compõe par com a cerâmica indicada por III?

A) 

C) 

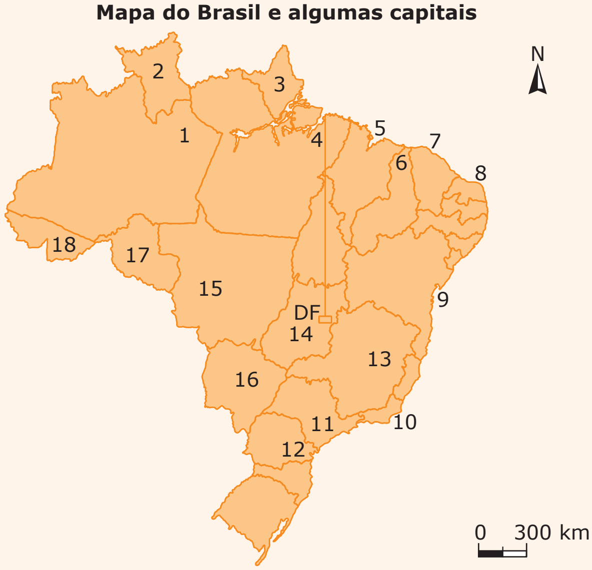
E) 

B) 

D) 

03. (Enem) Rotas aéreas são como pontes que ligam cidades, estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião AI que partiu de Brasília-DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em DF e em 4.

Mapa do Brasil e algumas capitais



1. Manaus	7. Fortaleza	13. Belo Horizonte
2. Boa Vista	8. Natal	14. Goiânia
3. Macapá	9. Salvador	15. Cuiabá
4. Belém	10. Rio de Janeiro	16. Campo Grande
5. São Luís	11. São Paulo	17. Porto Velho
6. Teresina	12. Curitiba	18. Rio Branco

SIQUEIRA, S. *Brasil Regiões*. Disponível em: <www.santiagosiqueira.pro.br>. Acesso em: 28 jul. 2009 (Adaptação).

Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião AII, que seguiu a direção que forma um ângulo de 135 graus no sentido horário com a rota Brasília-Belém, e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião AIII, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião AII ao partir de Brasília-DF. Considerando que a direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em:

A) Belo Horizonte, e, em seguida, embarcou para Curitiba.

B) Belo Horizonte, e, em seguida, embarcou para Salvador.

C) Boa Vista, e, em seguida, embarcou para Porto Velho.

D) Goiânia, e, em seguida, embarcou para o Rio de Janeiro.

E) Goiânia, e, em seguida, embarcou para Manaus.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. D
- 03. B
- 04. A
- 05. E
- 06. B
- 07. C
- 08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. D
- 03. 36° e 144°
- 04. D
- 05. E
- 06. E
- 07. A
- 08. E
- 09. A
- 10. 100°
- 11. C
- 12. D

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. B
- 03. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Triângulos e Pontos Notáveis

TRIÂNGULOS

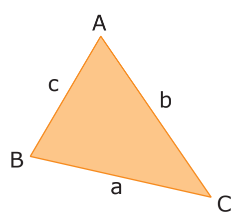
Considere três pontos não colineares, **A**, **B** e **C**. A união dos três segmentos de reta $(\overline{AB}, \overline{AC} \text{ e } \overline{BC})$ com extremidades nos três pontos é denominada triângulo ABC (indicação: ΔABC).

Elementos

i) Vértices: São os pontos **A**, **B** e **C**.

ii) Lados: São os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, de medidas **a**, **b** e **c** indicadas na figura.

iii) Ângulos internos: $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.

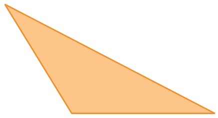


O perímetro de um triângulo é a soma das medidas dos lados. Representamos o perímetro por **2p** e o semiperímetro por **p**. Assim, no triângulo ABC anterior, tem-se:

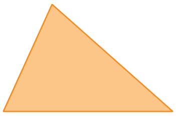
$$\boxed{2p = a + b + c \ \text{ e } \ p = \frac{a + b + c}{2}}$$

Classificação

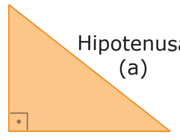
Quanto à medida dos seus ângulos internos, podemos classificar os triângulos em:



Triângulo obtusângulo
(um ângulo interno obtuso)



Triângulo acutângulo
(três ângulos internos agudos)

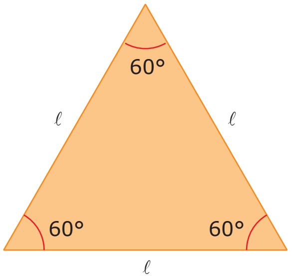


Triângulo retângulo
(um ângulo interno reto)

Sabemos que, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

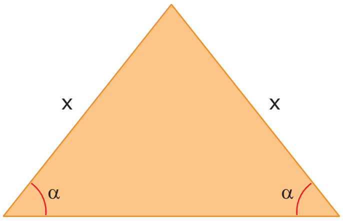
Quanto à medida dos seus lados, podemos classificar os triângulos em:

i) Triângulo equilátero: Os três lados são congruentes entre si, e os três ângulos medem 60°.



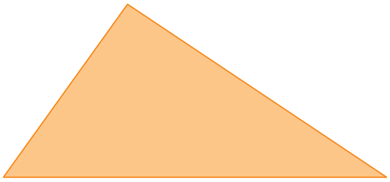
Triângulo equilátero

ii) Triângulo isósceles: Possui pelo menos dois lados congruentes. O lado de medida diferente, caso exista, é chamado base, e o ângulo oposto à base é chamado ângulo do vértice. Os ângulos da base (opostos a lados de medidas iguais) são congruentes. Observe que todo triângulo equilátero é isósceles.



Triângulo isósceles

iii) Triângulo escaleno: Os três lados e os três ângulos são não congruentes entre si.



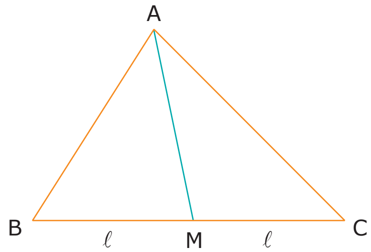
Triângulo escaleno

PONTOS NOTÁVEIS

Baricentro

Mediana de um triângulo é um segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

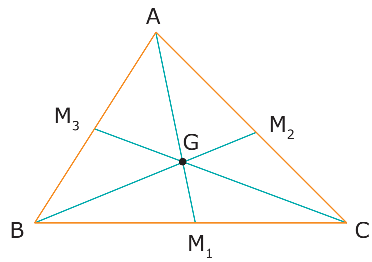
Na figura, $\overline{AM}$ é mediana do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.



Propriedades

i) As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, chamado baricentro.

ii) O baricentro divide cada uma das medianas na proporção de 2 para 1 (do vértice ao ponto médio).



$AG = 2.GM_1$

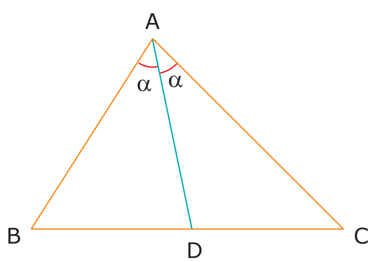
$BG = 2.GM_2$

$CG = 2.GM_3$

Incentro

Bissetriz interna de um triângulo é um segmento de reta que une um vértice ao lado oposto e divide o ângulo do vértice ao meio.

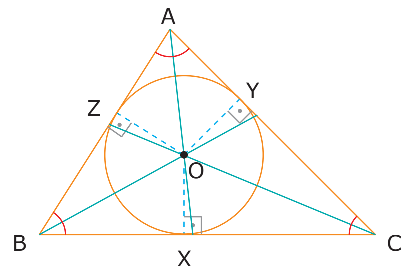
Na figura, $\overline{AD}$ é a bissetriz interna do triângulo ABC relativa ao vértice **A**, e $B\hat{A}D = D\hat{A}C$.



Propriedades

i) As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, chamado incentro.

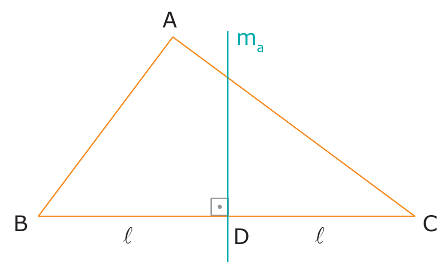
ii) O incentro é equidistante dos lados; portanto, é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC.



Circuncentro

Mediatriz de um lado de um triângulo é a reta perpendicular a esse lado pelo seu ponto médio.

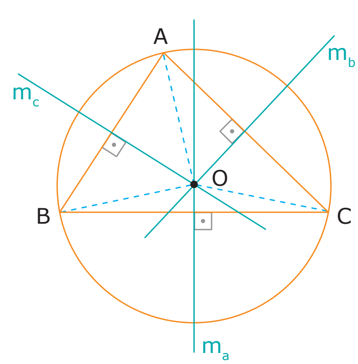
Na figura, $\mathbf{m_a}$ é mediatriz do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.



Propriedades

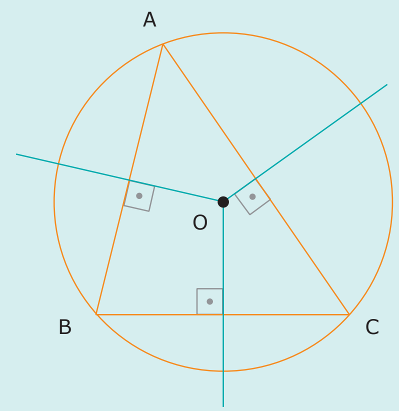
i) As três mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, chamado circuncentro.

ii) O circuncentro é equidistante dos vértices; portanto, é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

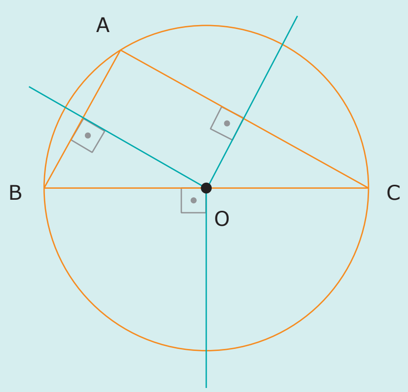


Posição do circuncentro em relação a um triângulo

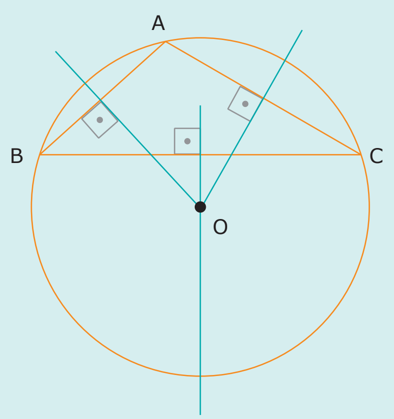
A) É interno, se o triângulo é acutângulo.



B) É o ponto médio da hipotenusa, se o triângulo é retângulo.



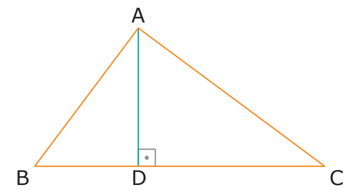
C) É externo, se o triângulo é obtusângulo.



Ortocentro

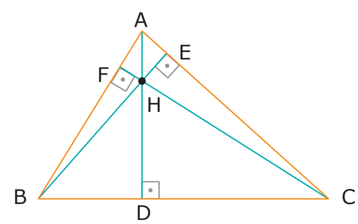
Altura de um triângulo é o segmento de reta traçado de um vértice à reta suporte do lado oposto, perpendicularmente a esta.

Nesta figura, $\overline{AD}$ é a altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.



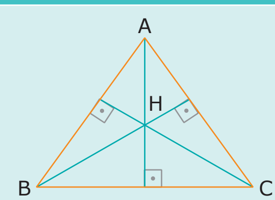
Propriedades

As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto, denominado ortocentro.

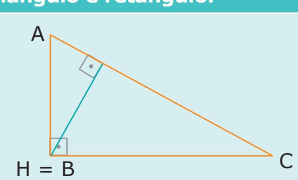


Posição do ortocentro em relação a um triângulo

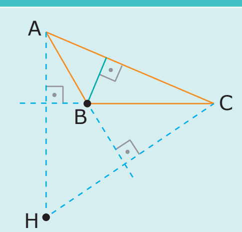
A) É interno, se o triângulo é acutângulo.



B) É o vértice do ângulo reto, se o triângulo é retângulo.

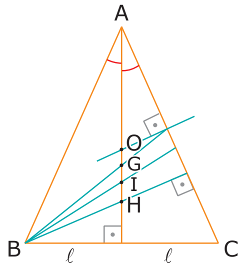


C) É externo, se o triângulo é obtusângulo.

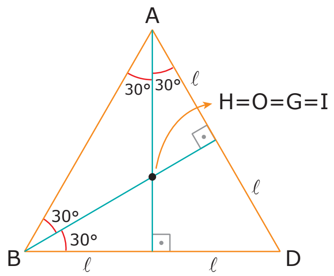


OBSERVAÇÕES

i) Em um triângulo isósceles, o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro são colineares.



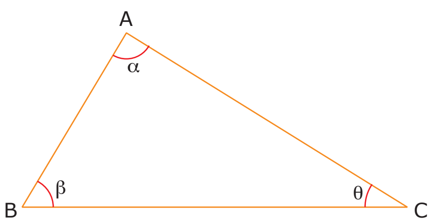
ii) Em um triângulo equilátero, os quatro pontos notáveis são coincidentes.



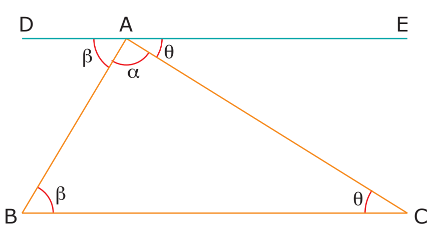
TEOREMAS

Soma dos ângulos internos de um triângulo

Considere um triângulo qualquer ABC cujos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ têm medidas α, β e θ, respectivamente.



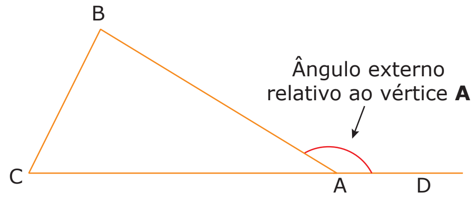
Traçando por **A** a reta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela a $\overline{BC}$, determinamos ângulos alternos internos congruentes.



Como o ângulo $D\hat{A}E$ mede 180°, concluímos que:

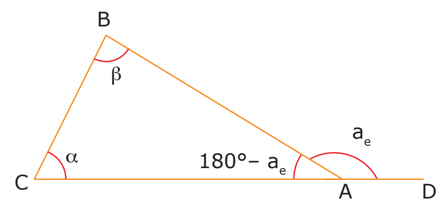
$$\boxed{\alpha + \beta + \theta = 180°}$$

Ângulo externo de um triângulo



O ângulo $B\hat{A}D$ é adjacente e suplementar de um ângulo interno do triângulo ABC; por isso, $B\hat{A}D$ é chamado de ângulo externo desse triângulo.

Sendo α e β as medidas dos ângulos internos **C** e **B**, respectivamente, e indicando por a_e a medida do ângulo externo relativo ao vértice **A**,

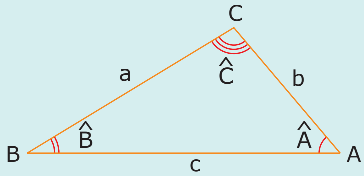


temos $\alpha + \beta + 180° - a_e = 180° \Rightarrow a_e = \alpha + \beta$, isto é:

> A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

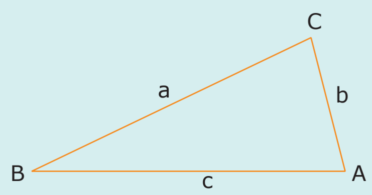
Desigualdades nos triângulos

A) Dados dois lados de um triângulo, de medidas diferentes, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.



$$b < a < c \Leftrightarrow \hat{B} < \hat{A} < \hat{C}$$

B) Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.



$a < b + c$

$b < a + c$

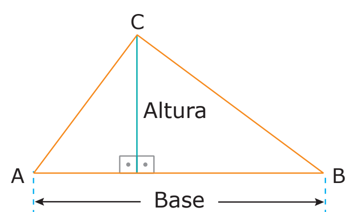
$c < a + b$

As três desigualdades citadas são equivalentes a:

$$\boxed{|b - c| < a < b + c}$$

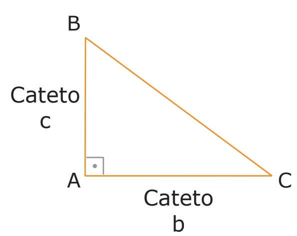
Área de um triângulo

Para calcular a área de um triângulo, fazemos metade do produto de um dos lados (base) pela altura relativa a ele. No triângulo ABC a seguir, temos:



$$\boxed{\text{Área}_{\Delta ABC} = \frac{\text{Base}\,.\,\text{Altura}}{2}}$$

Se o triângulo for retângulo e considerarmos como base um dos catetos, o outro cateto será a altura, e a área será igual ao semiproduto dos catetos:

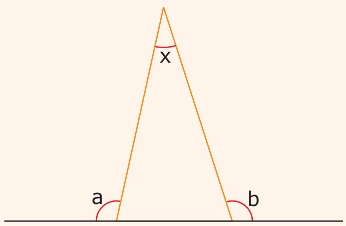


$$\boxed{A_{\Delta ABC} = \frac{b.c}{2}}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

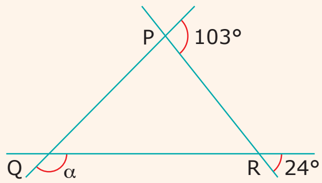
01. N7SX (PUC-SP) Na figura a seguir, a = 100° e b = 110°.



Quanto mede o ângulo **x**?

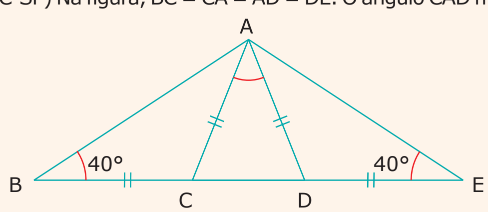
A) 30°
B) 50°
C) 80°
D) 100°
E) 220°

02. FBYS (UECE) As retas na figura interceptam-se duas a duas nos pontos **P**, **Q** e **R**. Considerando os valores indicados, o ângulo **α** é igual a



A) 101°.
B) 102°.
C) 103°.
D) 104°.

03. 8F4N (PUC-SP) Na figura, BC = CA = AD = DE. O ângulo $C\hat{A}D$ mede

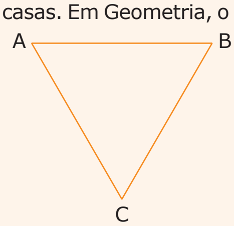


A) 10°.
B) 20°.
C) 30°.
D) 40°.
E) 60°.

04. (Cesesp-PE) Dentre os quatro centros principais do triângulo qualquer, há dois deles que podem se situar no seu exterior, conforme o tipo de triângulo. Assinale a alternativa em que os mesmos são citados.

A) O baricentro e o ortocentro.
B) O baricentro e o incentro.
C) O circuncentro e o incentro.
D) O circuncentro e o ortocentro.
E) O incentro e o ortocentro.

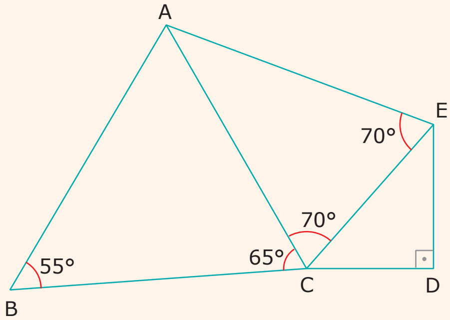
05. (UNIFICADO-RJ) Na figura a seguir, os pontos **A**, **B** e **C** representam as posições de três casas construídas numa área plana de um condomínio. Um posto policial estará localizado num ponto **P** situado à mesma distância das três casas. Em Geometria, o ponto **P** é conhecido pelo nome de



A) baricentro.
B) ortocentro.
C) circuncentro.
D) incentro.
E) ex-incentro.

MATEMÁTICA

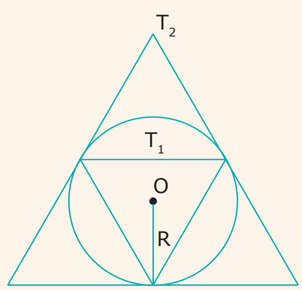
06. UYSP (UFMG) Observe a figura.



Com base nos dados dessa figura, pode-se afirmar que o maior segmento é

A) $\overline{AB}$.
B) $\overline{AE}$.
C) $\overline{EC}$.
D) $\overline{BC}$.
E) $\overline{ED}$.

07. IRV1 (UNIFESP) Numa circunferência de raio $R > 0$, consideram-se, como na figura, os triângulos equiláteros T_1, inscrito, e T_2, circunscrito.

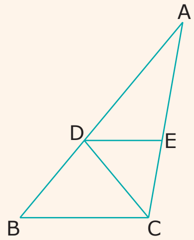


A razão entre a altura de T_2 e a altura de T_1 é:

A) 4
B) 3
C) $\dfrac{5}{2}$
D) $\dfrac{2\pi}{3}$
E) 2

08. 16C4 (UFPE) Seja um triângulo ABC, um ponto **D** sobre AB e um ponto **E** sobre AC, tais que:

- medida do ângulo $B\hat{A}C$ é de 30º.
- DB = DC e ED = EC.
- DE e BC são paralelas.

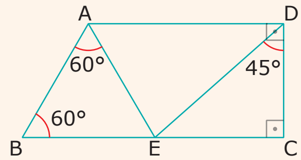


Qual é a medida, em graus, do ângulo $A\hat{B}C$?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Fatec-SP) Dada a figura:



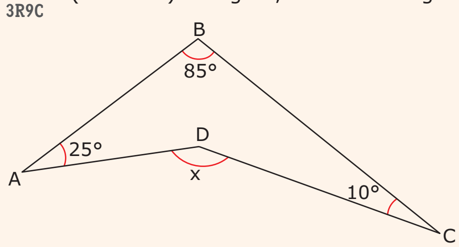
Sobre as sentenças

I. O triângulo CDE é isósceles.
II. O triângulo ABE é equilátero.
III. AE é bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$.

é verdade que

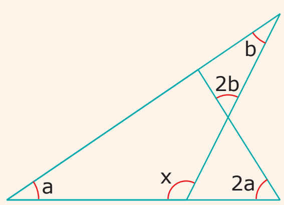
A) somente a I é falsa.
B) somente a II é falsa.
C) somente a III é falsa.
D) são todas falsas.
E) são todas verdadeiras.

02. 3R9C (Fatec-SP) Na figura, o valor do ângulo **x**, em graus, é:



A) 90
B) 100
C) 110
D) 120
E) 130

03. ØG49 (UFMG) Observe a figura:



Nela, a, 2a, b, 2b e x representam as medidas, em graus, dos ângulos assinalados. O valor de **x**, em graus, é:

A) 100
B) 110
C) 115
D) 120

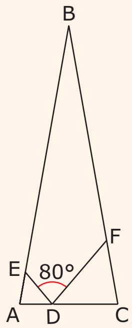
04. (EFOMM-RJ–2018) Num triângulo ABC as bissetrizes dos ângulos externos do vértice **B** e **C** formam um ângulo de medida 50º. Calcule o ângulo interno do vértice **A**.

A) 110º
B) 90º
C) 80º
D) 50º
E) 20º

05. (UFES) Um dos ângulos internos de um triângulo isósceles mede 100°. Qual é a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos outros ângulos internos?

A) 20°
B) 40°
C) 60°
D) 80°
E) 140°

06. Q5DX (FUVEST-SP) Na figura a seguir, tem-se que AD = AE, CD = CF e BA = BC. Se o ângulo $E\hat{D}F$ mede 80°, então o ângulo $A\hat{B}C$ mede



A) 20°.

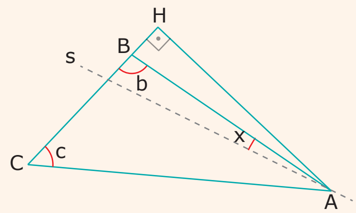
B) 30°.

C) 50°.

D) 60°.

E) 90°.

07. BDSM (FGV) Na figura a seguir, o triângulo AHC é retângulo em **H** e **s** é a reta suporte da bissetriz do ângulo $C\hat{A}H$.



Se c = 30° e b = 110°, então

A) x = 15°.
B) x = 30°.
C) x = 20°.
D) x = 10°.
E) x = 5°.

08. MMPZ (IFCE) A altura e a mediana traçadas do vértice do ângulo reto de um triângulo retângulo formam um ângulo de 24°. Sendo assim, os ângulos agudos do triângulo são

A) 33° e 57°.
B) 34° e 56°.
C) 35° e 55°.
D) 36° e 54°.
E) 37° e 53°.

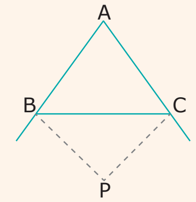
09. QKTO (UNIFEI-MG) Considere um ponto **Q**, interior ao triângulo MNP, de modo que $\overline{MQ}$ e $\overline{NQ}$ sejam bissetrizes dos ângulos $\hat{M}$ e $\hat{N}$, respectivamente. Se o ângulo $\hat{P}$ mede 70°, qual a medida do ângulo $M\hat{Q}N$?

A) 90°
B) 100°
C) 115°
D) 125°

10. FV4P (FUVEST-SP) Um triângulo ABC têm ângulos $\hat{A}$ = 40° e $\hat{B}$ = 50°. Qual é o ângulo formado pelas alturas relativas aos vértices **A** e **B** desse triângulo?

A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 90°
E) 120°

11. OPLD (Uncisal) Um professor de Matemática pediu que três de seus alunos se posicionassem cada um deles nos vértices de um triângulo ABC. O primeiro aluno se posicionou no vértice do ângulo $\hat{A}$ cujo valor é 65º. Os outros dois alunos se posicionaram nos vértices dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. O professor então pediu que o segundo e o terceiro se encontrassem em um ponto **P** caminhando segundo as bissetrizes externas dos ângulos externos de **B** e **C**, respectivamente.



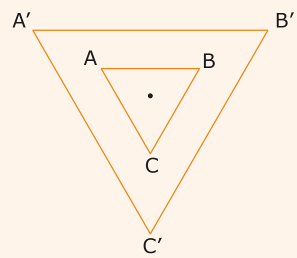
O ângulo $B\hat{P}C$ formado pela trajetória dos alunos no ponto **P** é igual a

A) 32°30′.
B) 47°30′.
C) 50°.
D) 57°30′.
E) 60°.

12. LYS5 (Ibmec-SP) Considere um triângulo isósceles ABC, com AB = AC, em que o ângulo interno $\hat{A}$ é obtuso. Seja **H** o ortocentro desse triângulo, ou seja, o ponto de encontro das retas suportes de suas alturas. Se os triângulos ABC e ABH são congruentes, então o ângulo interno $\hat{C}$, em graus, mede:

A) 10
B) 15
C) 20
D) 25
E) 30

13. (UFC-CE) Na figura a seguir, temos dois triângulos equiláteros, ABC e A′B′C′, que possuem o mesmo baricentro, tais que AB // A′B′, AC // A′C′ e BC // B′C′. Se a medida dos lados de ABC é igual a $3\sqrt{3}$ cm e a distância entre os lados paralelos mede 2 cm, então a medida das alturas de A′B′C′ é igual a



A) 11,5 cm.

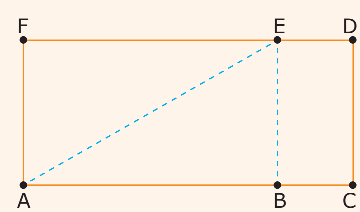
B) 10,5 cm.

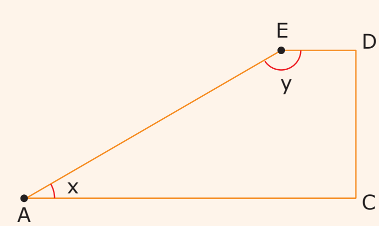
C) 9,5 cm.

D) 8,5 cm.

E) 7,5 cm.

14. GTR7 (CEFET-MG) Uma folha retangular de papel ofício de medidas 287 × 210 mm foi dobrada conforme a figura.





Os ângulos **x** e **y** resultantes da dobradura medem, respectivamente, em graus

A) 40 e 90.
B) 40 e 140.
C) 45 e 45.
D) 45 e 135.

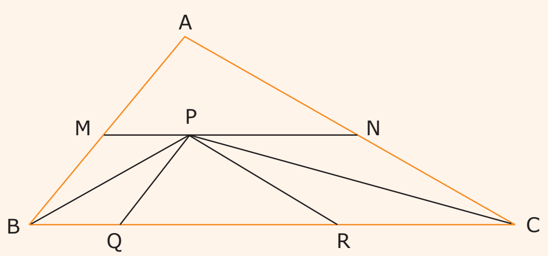
15. (UECE–2017) No triângulo isósceles XOZ, cuja base é o segmento XZ, considere os pontos E e U, respectivamente, nos lados OZ e XZ, tais que os segmentos OE e OU sejam congruentes. Se a medida do ângulo $X\hat{O}U$ é 48º graus, então, a medida do ângulo $Z\hat{U}E$ é igual a

A) 24º. B) 22º. C) 28º. D) 26º.

16. BZXW (UECE–2015) Seja AEC um triângulo isósceles (as medidas dos lados AE e AC são iguais) e **O** um ponto do lado AC tal que a medida do ângulo $E\hat{O}C$ é 120 graus. Se existe um ponto **B**, do lado AE, tal que o segmento OB é perpendicular ao lado AE e a medida do ângulo $E\hat{O}B$ seja igual a 40 graus, então a medida do ângulo $O\hat{E}C$, em graus, é igual a:

A) 9 B) 7 C) 5 D) 3

17. UØLT (UFPI) No triângulo ABC (figura a seguir), os lados AB, AC e BC medem respectivamente 5 cm, 7 cm e 9 cm. Se **P** é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e PQ // MB, PR // NC e MN // BC, a razão entre os perímetros dos triângulos AMN e PQR é:



A) $\frac{10}{9}$

B) $\frac{9}{8}$

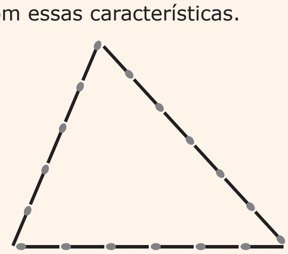
C) $\frac{7}{6}$

D) $\frac{4}{3}$

E) $\frac{7}{5}$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é:

A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

02. (Enem) Quatro estações distribuidoras de energia, **A**, **B**, **C** e **D**, estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja, ao mesmo tempo, equidistante das estações **A** e **B** e da estrada (reta) que liga as estações **C** e **D**. A nova estação deve ser localizada

A) no centro do quadrado.

B) na perpendicular à estrada que liga **C** e **D** passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.

C) na perpendicular à estrada que liga **C** e **D** passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.

D) no vértice de um triângulo equilátero de base AB, oposto a essa base.

E) no ponto médio da estrada que liga as estações **A** e **B**.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. A
- 03. B
- 04. D
- 05. C
- 06. A
- 07. E
- 08. 50°

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. D
- 03. D
- 04. C
- 05. B
- 06. A
- 07. D
- 08. A
- 09. D
- 10. D
- 11. D
- 12. E
- 13. B
- 14. D
- 15. A
- 16. C
- 17. D

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Sistemas Métricos e Base Decimal

BASE DECIMAL DE NUMERAÇÃO

Base numérica é o conjunto de símbolos (ou algarismos) utilizados para representar uma quantidade.

Diariamente, utilizamos o sistema de numeração decimal formado pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Os demais números são formados agrupando-se dois ou mais algarismos e considerando as posições relativas deles.

O número 23, por exemplo, corresponde a 20 + 3, ou seja, 2 grupos de dez unidades e mais 3 unidades. Já o número 154 pode ser decomposto na forma 100 + 50 + 4, ou seja, 1 grupo de cem unidades, 5 grupos de dez unidades e mais 4 unidades.

Assim:

$23 = 2 \cdot 10 + 3$

ou

Dezena	Unidade
2	3

$154 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$

ou

Centena	Dezena	Unidade
1	5	4

$abcd = a.10^3 + b.10^2 + c.10 + d$

ou

Unidade de Milhar	Centena	Dezena	Unidade
a	b	c	d

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Justapondo-se 82 à esquerda de um algarismo **x**, obtém-se o número **z**. Justapondo-se 36 à direita do mesmo algarismo **x**, obtém-se o número **y**. Se y + z = 1 563, determinar o valor de **x**.

Resolução:

1ª maneira:

$82x = z \Rightarrow 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + x = z$

$x36 = y \Rightarrow x.10^2 + 3 \cdot 10 + 6 = y$

Por hipótese: y + z = 1 563

Então:

$100x + 36 + 820 + x = 1\,563 \Rightarrow x = 7$

2ª maneira:

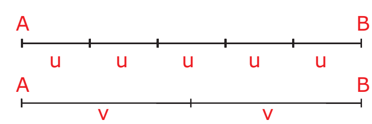
$$\begin{array}{rl} 82x & \to z \\ +\ \ x36 & \to y \\ \hline 1\,563 & \end{array}$$

O único algarismo que satisfaz a operação anterior é x = 7.

UNIDADES DE COMPRIMENTO

Ao medir um segmento de reta $\overline{AB}$, devemos adotar uma unidade de medida e, em seguida, verificar quantas vezes essa unidade cabe em $\overline{AB}$.

Por exemplo, o comprimento de $\overline{AB}$ na unidade u é 5u, enquanto na unidade v é 2v.



A unidade de medida adotada como padrão no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o metro. No quadro a seguir, apresentamos os múltiplos e os submúltiplos do metro.

Múltiplos			**Submúltiplos**		
quilômetro	hectômetro	decâmetro	decímetro	centímetro	milímetro
km	hm	dam	dm	cm	mm
1 000 m	100 m	10 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Pelo quadro anterior, percebemos que:

$$1 \text{ km} = 10 \text{ hm} = 100 \text{ dam} = 1\,000 \text{ m}$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1\,000 \text{ mm}$$

Concluímos que, para mudarmos de uma unidade para outra, procedemos da seguinte maneira:

Multiplicamos por 10 a cada casa deslocada para a direita.

Dividimos por 10 a cada casa deslocada para a esquerda.

:10	:10	:10	:10	:10	:10	
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
×10	×10	×10	×10	×10	×10	

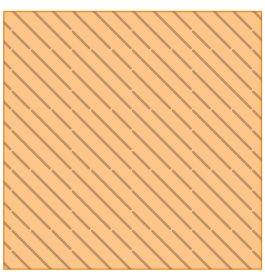
Exemplos

1º) 12,73 km = 127,3 hm

2º) 743 dm = 74,3 m = 7,43 dam

UNIDADES DE ÁREA

Se a unidade de comprimento padrão é o metro, a unidade padrão de área é o m^2, que corresponde à área de um quadrado de lado 1 m.



1 m

1 m

Múltiplos e submúltiplos

$:10^2$	$:10^2$	$:10^2$	$:10^2$	$:10^2$	$:10^2$	
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$	

Para mudarmos de uma unidade de área para outra, procedemos da seguinte forma:

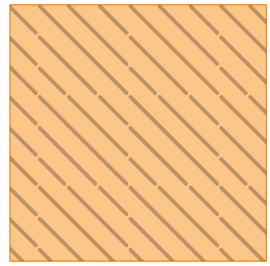
Multiplicamos por 10^2 a cada casa deslocada para a direita.

Dividimos por 10^2 a cada casa deslocada para a esquerda.

Exemplos

1º) 0,003 km^2 = 0,3 hm^2 = 30 dam^2 = 3 000 m^2

2º)



1 m = 10 dm

1 m = 10 dm

Área = 1 m^2 = 100 dm^2

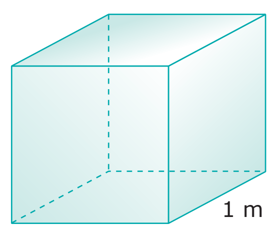
OBSERVAÇÃO

1 a (are) = 100 m^2

1 ha (hectare) = 100 a = 10 000 m^2

UNIDADES DE VOLUME

A unidade padrão de volume é o m^3, que corresponde ao volume de um cubo de aresta 1 m.



1 m

1 m

1 m

Múltiplos e submúltiplos

$:10^3$	$:10^3$	$:10^3$	$:10^3$	$:10^3$	$:10^3$	
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	

Para mudarmos de uma unidade de volume para outra, procedemos do seguinte modo:

Multiplicamos por 10^3 a cada casa deslocada para a direita.

Dividimos por 10^3 a cada casa deslocada para a esquerda.

Exemplos

1º) 1 hm^3 = 10^3 dam^3 = 10^6 m^3

2º) 2 520 mm^3 = 2,52 cm^3

Comumente, utilizamos a unidade litro e seus múltiplos e submúltiplos. Veja algumas relações:

1 L = 1 dm^3
1 000 L = 1 m^3
1 mL = 1 cm^3

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (UFOP-MG) Na maquete de uma casa, a réplica de uma caixa-d'água de 1 000 litros tem 1 mililitro de capacidade. Se a garagem da maquete tem 3 centímetros de largura por 7 centímetros de comprimento, então a área real da garagem da casa é de

A) 21 cm^2.

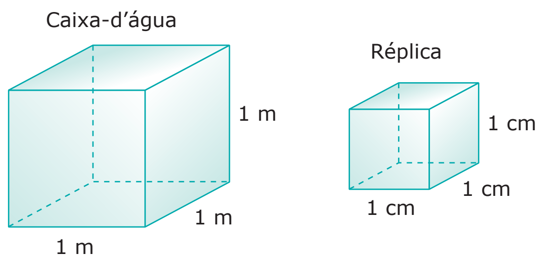
B) 21 m^2.

C) 210 m^2.

D) 10 m^2.

Resolução:

A caixa-d'água tem capacidade de 1 000 L ou 1 m^3, enquanto sua réplica tem capacidade de 1 mL ou 1 cm^3. Considerando a caixa-d'água com formato cúbico, temos a situação seguinte:



Portanto, as dimensões da caixa-d'água foram reduzidas em 100 vezes (mesmo que a caixa não seja cúbica). A garagem da maquete tem 3 cm de largura por 7 cm de comprimento. Como essas medidas estão reduzidas em 100 vezes, a área real da garagem da casa será dada por:

A = (300 cm).(700 cm) = (3 m).(7 m) = 21 m^2.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UECE–2018) Uma torneira está gotejando de maneira regular e uniforme. Observa-se que a cada 12 minutos o gotejamento enche um recipiente com volume de 0,000020 m^3. Considerando um litro equivalente ao volume de 1 dm^3, é correto afirmar que o volume, em litros, do gotejamento ao final de 30 minutos é:

A) 0,15

B) 0,36

C) 0,24

D) 0,05

02. RV8M (UFRGS-RS) Considere que o corpo de uma determinada pessoa contém 5,5 litros de sangue e 5 milhões de glóbulos vermelhos por milímetro cúbico de sangue.

Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de glóbulos vermelhos no corpo dessa pessoa é:

A) $2,75 \cdot 10^9$

B) $5,5 \cdot 10^{10}$

C) $5 \cdot 10^{11}$

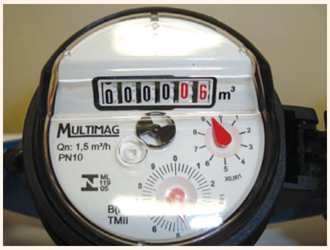
D) $5,5 \cdot 10^{12}$

E) $2,75 \cdot 10^{13}$

03. KZEH (CEFET-MG) A fachada de um prédio de 12 m de altura e 20 m de comprimento é revestida com uma cerâmica quadrada de 10 cm de lado, vendida em caixas com 50 unidades. O número de caixas necessárias para revestimento dessa fachada é:

A) 300 B) 360 C) 420 D) 480

04. (IFSC-SC)



O consumo de água das residências que possuem água encanada é medido por um aparelho chamado hidrômetro. O hidrômetro utiliza, como unidade de medida, o metro cúbico.

Em diversos municípios catarinenses, essa leitura é feita mensalmente no hidrômetro para que cada consumidor tome conhecimento de seu consumo de água e para que a CASAN (Companhia Catarinense de Águas e Saneamento) possa emitir a fatura mensal de pagamento. Recentemente, foi aprovada uma lei que considera como consumo mínimo residencial o equivalente a 10 m^3 ao mês.

Considerando que o consumo mensal de uma residência é de 600 litros, então essa residência terá pago em litros durante um ano sem consumir, o equivalente a

A) 48 000 litros.

B) 112 800 litros.

C) 4 800 litros.

D) 11 280 litros.

E) 1 128 litros.

05. VCRW (Insper-SP) Uma das normas de um aeroporto **X** determina que o intervalo de tempo mínimo entre duas decolagens realizadas em sua única pista deve ser de 45 segundos. Seja **Q** a quantidade de decolagens realizadas no aeroporto **X** das 9h00min às 10h00min de um certo dia. Para que a referida norma não tenha sido respeitada nesse período de uma hora

A) é necessário e suficiente que Q = 80.

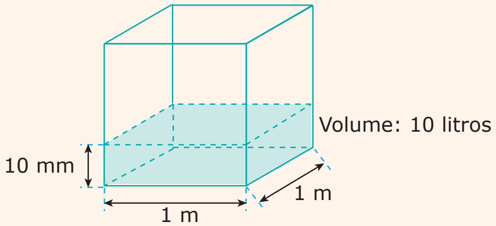
B) é necessário que Q = 81.

C) é necessário que Q > 81.

D) é suficiente que Q = 100.

E) é suficiente que Q < 100.

06. TSV4 (UNIFESP) Quando se diz que numa determinada região a precipitação pluviométrica foi de 10 mm, significa que a precipitação naquela região foi de 10 litros de água por metro quadrado, em média.



Se numa região de 10 km² de área ocorreu uma precipitação de 5 cm, quantos litros de água foram precipitados?

A) $5 \cdot 10^7$ C) $5 \cdot 10^9$ E) $5 \cdot 10^{11}$

B) $5 \cdot 10^8$ D) $5 \cdot 10^{10}$

07. LX1Z (UFScar-SP) Considere **a**, **b** e **c** algarismos que fazem com que a conta a seguir, realizada com números de três algarismos, esteja correta.

$$\begin{array}{r} 4\,a\,5 \\ -\ 1\,5\,B \\ \hline c\,7\,7 \end{array}$$

Nas condições dadas, $b \cdot c^{-a}$ é igual a:

A) 0 C) $\frac{1}{4}$ E) 16

B) $\frac{1}{16}$ D) 1

08. D17U (PUC-SP–2017) A soma dos quatro algarismos distintos do número N = abcd é 16. A soma dos três primeiros algarismos é igual ao algarismo da unidade, e o algarismo do milhar é igual à soma dos algarismos da centena e da dezena. O produto dos algarismos da dezena e da centena é:

A) 4

B) 3

C) 2

D) 1

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UECE–2016) Deseja-se construir um reservatório para armazenar água, que tenha capacidade suficiente para satisfazer as necessidades básicas de cada um dos 3 500 habitantes de uma cidade durante 16 dias. Se cada um dos habitantes utiliza diariamente, para as suas necessidades básicas, exatamente 0,028 m³ de água, então, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído é:

A) 15 680 C) 1 568 000

B) 156 800 D) 15 680 000

02. FWR3 (CEFET-MG) Para realizar uma campanha de imunização infantil, a prefeitura recebeu 1 728 litros de certa vacina distribuída em 80 caixas, cada uma contendo o mesmo número de ampolas de 18 cm³. Para vacinar 114 000 crianças, em dose única, o número de caixas, a mais, da vacina que a prefeitura deverá receber é:

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20

03. (IFCE) Seja $x = a_1a_2a_3a_4$ um número de quatro algarismos. Considere o número $y = a_4a_3a_2a_1$ formado pelos mesmos algarismos de **x**, escritos na ordem inversa. A diferença x – y é sempre divisível por:

A) 2 C) 5 E) 9

B) 4 D) 7

04. (Fatec-SP–2017) Leia o texto e siga as orientações:

- pense em um número inteiro positivo **N**, de três algarismos distintos e não nulos;
- com os algarismos de **N**, forme todos os possíveis números de dois algarismos distintos;
- obtenha a soma (**S**) de todos esses números de dois algarismos;
- obtenha a soma (**R**) dos três algarismos do número **N**;
- finalmente, divida **S** por **R**.

O quociente da divisão de **S** por **R** é igual a:

A) 21 C) 23 E) 25

B) 22 D) 24

05. 2XJ5 (UERJ) O código de uma inscrição tem 14 algarismos; dois deles e suas respectivas posições estão indicados a seguir.

5				8				x					

Considere que, nesse código, a soma de três algarismos consecutivos seja sempre igual a 20.

O algarismo representado por **x** será divisor do seguinte número:

A) 49 B) 64 C) 81 D) 125

06. (UFMG) Sejam **N** um número natural de dois algarismos não nulos e **M** o número obtido invertendo-se a ordem dos algarismos de **N**. Sabe-se que N – M = 45. Então, quantos são os possíveis valores de **N**?

A) 7 B) 4 C) 5 D) 6

07. 2GJ2 (PUCPR–2016) Considere os números **a**, **b** e **c**, em que $a, b, c \in \mathbb{N}$ e que $a \neq b \neq c$. Se a operação

$$\begin{array}{r} abc \\ abc \\ \underline{+abc} \\ bbb \end{array}$$

é verdadeira, podemos afirmar que a + b + c é igual a:

A) 5
B) 9
C) 11
D) 12
E) 13

08. 5MQS (FGV-SP) Chamaremos de S(n) a soma dos algarismos do número inteiro positivo **n**, e de P(n) o produto dos algarismos de **n**. Por exemplo, se n = 47, então S(47) = 11 e P(47) = 28. Se **n** é um número inteiro positivo de dois algarismos tal que n = S(n) + P(n), então o algarismo das unidades de **n** é:

A) 1
B) 2
C) 3
D) 6
E) 9

09. HJRO (Unesp) Seja **n** um número natural de 3 algarismos. Se ao multiplicar-se **n** por 7 obtém-se um número terminado em 373, é correto afirmar que:

A) **n** é par.
B) o produto dos algarismos de **n** é par.
C) a soma dos algarismos de **n** é divisível por 2.
D) **n** é divisível por 3.
E) o produto dos algarismos de **n** é primo.

10. Ø67U (CEFET-MG) Sobre um número natural **n** formado por dois algarismos, sabe-se que:

- o algarismo das unidades excede o triplo do das dezenas em 1;
- a inversão da ordem dos algarismos produz um número que excederá o dobro do original em 18 unidades.

A soma dos algarismos do número **n**, que atende as condições acima, é:

A) 5
B) 7
C) 9
D) 11

11. 9NXJ (IFSP) Ada Byron (Condessa de Lovelace), filha do poeta inglês Lord Byron, viveu no século XIX e foi pioneira na história do desenvolvimento de programas para computador junto com Charles Babbage.

Certo dia, ao lhe perguntarem a idade, ela respondeu: "Se trocarmos a ordem dos seus algarismos e elevarmos ao quadrado, obteremos justamente o ano em que estamos".

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Explorando o Ensino da Matemática* – Artigos. Brasília, 2004. V. 1, p. 191 (Adaptação).

Em 1977, após **x** anos de seu nascimento, Ada Byron foi homenageada: uma linguagem de programação foi desenvolvida recebendo o nome de ADA. O valor de **x** é:

A) 119
B) 128
C) 137
D) 151
E) 162

12. KL75 (FUVEST-SP) Um número inteiro positivo **n** de 4 algarismos decimais satisfaz às seguintes condições:

I. A soma dos quadrados dos 1º e 4º algarismos é 58.
II. A soma dos quadrados dos 2º e 3º algarismos é 52.
III. Se desse número **n** subtrairmos o número 3 816, obteremos um número formado pelos mesmos algarismos do número **n**, mas na ordem contrária.

Qual é esse número?

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2017) Medir distâncias sempre foi uma necessidade da humanidade. Ao longo do tempo, fez-se necessária a criação de unidades de medidas que pudessem representar tais distâncias, como, por exemplo, o metro. Uma unidade de comprimento pouco conhecida é a Unidade Astronômica (UA), utilizada para descrever, por exemplo, distâncias entre corpos celestes. Por definição, 1 UA equivale à distância entre a Terra e o Sol, que, em notação científica, é dada por $1{,}496 \,.\, 10^2$ milhões de quilômetros.

Na mesma forma de representação, 1 UA, em metro equivale a

A) $1{,}496 \,.\, 10^5$ m.
B) $1{,}496 \,.\, 10^6$ m.
C) $1{,}496 \,.\, 10^8$ m.
D) $1{,}496 \,.\, 10^{10}$ m.
E) $1{,}496 \,.\, 10^{11}$ m.

02. (Enem–2017) A Chlamydia, a menor bactéria do mundo, mede cerca de 0,2 micrômetro (1 micrômetro equivale à milionésima parte de um metro). Para ter uma noção de como é pequena a Chlamydia, uma pessoa resolveu descrever o tamanho da bactéria na unidade milímetro.

A medida da Chlamydia, em milímetro, é:

A) $2 \,.\, 10^{-1}$
B) $2 \,.\, 10^{-2}$
C) $2 \,.\, 10^{-4}$
D) $2 \,.\, 10^{-5}$
E) $2 \,.\, 10^{-7}$

03. (Enem–2015) Alguns exames médicos requerem uma ingestão de água maior do que a habitual. Por recomendação médica, antes do horário do exame, uma paciente deveria ingerir 1 copo de água de 150 mililitros a cada meia hora, durante as 10 horas que antecederiam um exame. A paciente foi a um supermercado comprar água e verificou que havia garrafas dos seguintes tipos:

Garrafa I: 0,15 litro
Garrafa II: 0,30 litro
Garrafa III: 0,75 litro
Garrafa IV: 1,50 litro
Garrafa V: 3,00 litros

A paciente decidiu comprar duas garrafas do mesmo tipo, procurando atender à recomendação médica e, ainda, de modo a consumir todo o líquido das duas garrafas antes do exame.

Qual o tipo de garrafa escolhida pela paciente?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

04. (Enem) A maior piscina do mundo, registrada no livro *Guiness*, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área.

Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado.

Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

A) 8
B) 80
C) 800
D) 8 000
E) 80 000

05. (Enem) Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota-d'água tem o volume de 0,2 mL.
Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

A) 0,2
B) 1,2
C) 1,4
D) 12,9
E) 64,8

MATEMÁTICA

06. (Enem) João decidiu contratar os serviços de uma empresa por telefone através do SAC (Serviço de Atendimento ao Consumidor). O atendente ditou para João o número de protocolo de atendimento da ligação e pediu que ele anotasse. Entretanto, João não entendeu um dos algarismos ditados pelo atendente e anotou o número 1 3 _ 9 8 2 0 7, sendo que o espaço vazio é o do algarismo que João não entendeu.

De acordo com essas informações, a posição ocupada pelo algarismo que falta no número de protocolo é a de

A) centena.
B) dezena de milhar.
C) centena de milhar.
D) milhão.
E) centena de milhão.

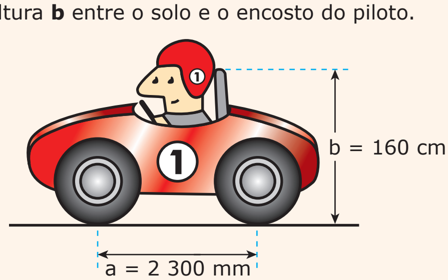
07. (Enem) O sistema de numeração romana, hoje em desuso, já foi o principal sistema de numeração da Europa. Nos dias atuais, a numeração romana é usada no nosso cotidiano essencialmente para designar os séculos, mas já foi necessário fazer contas e descrever números bastante grandes nesse sistema de numeração. Para isto, os romanos colocavam um traço sobre o número para representar que esse número deveria ser multiplicado por 1 000. Por exemplo, o número $\overline{\text{X}}$ representa o número 10 . 1 000 ou seja, 10 000.

De acordo com essas informações, os números $\overline{\text{MCC}}\text{V}$ e $\overline{\text{XLIII}}$ são, respectivamente, iguais a

A) 1 205 000 e 43 000.
B) 1 205 000 e 63 000.
C) 1 205 000 e 493 000.
D) 1 250 000 e 43 000.
E) 1 250 000 e 63 000.

08. (Enem) Um mecânico de uma equipe de corrida necessita que as seguintes medidas realizadas em um carro sejam obtidas em metros:

A) Distância **a** entre os eixos dianteiro e traseiro;
B) Altura **b** entre o solo e o encosto do piloto.



Ao optar pelas medidas **a** e **b** em metros, obtém-se, respectivamente,

A) 0,23 e 0,16.
B) 2,3 e 1,6.
C) 23 e 16.
D) 230 e 160.
E) 2 300 e 1 600.

09. (Enem) Em 2010, um caos aéreo afetou o continente europeu, devido à quantidade de fumaça expelida por um vulcão na Islândia, o que levou ao cancelamento de inúmeros voos. Cinco dias após o início desse caos, todo o espaço aéreo europeu acima de 6 000 metros estava liberado, com exceção do espaço aéreo da Finlândia. Lá, apenas voos internacionais acima de 31 mil pés estavam liberados.

Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 21 abr. 2010 (Adaptação).

Considere que 1 metro equivale a aproximadamente 3,3 pés. Qual a diferença, em pés, entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu cinco dias após o início do caos?

A) 3 390 pés.
B) 9 390 pés.
C) 11 200 pés.
D) 19 800 pés.
E) 50 800 pés.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. D
02. E
03. D
04. B
05. D
06. B
07. D
08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. C
03. E
04. B
05. A
06. B
07. E
08. E
09. D
10. C
11. E
12. 7 463

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. E
02. C
03. D
04. E
05. C
06. C
07. A
08. B
09. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Porcentagem

Porcentagem, ou percentagem, é uma fração cujo denominador é igual a 100. Por exemplo, "sete por cento" é representado como 7%, e equivale à fração $\frac{7}{100}$.

O conceito de porcentagem é um dos mais utilizados no dia a dia, para, por exemplo, efetuar comparações com valores dados. Vamos supor que uma prestação de R$ 500,00 vai sofrer um reajuste de 30%. Em termos matemáticos, escrevemos:

$$30\% \text{ de } 500 = \frac{30}{100}.500 = 150$$

Assim, a nova prestação será igual a R$ 650,00.

Podemos dizer também que, ao calcularmos a porcentagem em relação a um valor dado, estamos representando uma proporção, na qual um dos denominadores é igual a 100. Desse modo, no exemplo dado, dizemos que o valor de 150 representa em 500 o mesmo que o valor 30 representa em 100.

$$\frac{150}{500} = \frac{30}{100}$$

OBSERVAÇÃO

Há três modos de representar uma porcentagem: na forma percentual, na forma fracionária ou na forma decimal. Vejamos alguns exemplos:

Forma percentual	Forma fracionária	Forma decimal
20%	$\frac{20}{100}$	0,2
5%	$\frac{5}{100}$	0,05
1,3%	$\frac{1,3}{100}$	0,013

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (PUC Minas) Certa cidade tem 18 500 eleitores. Na eleição para prefeito, houve 6% de abstenção entre os homens e 9% entre as mulheres; com isso, o número de votantes do sexo masculino ficou exatamente igual ao número de votantes do sexo feminino. Pode-se afirmar que o número de eleitores do sexo feminino, nessa cidade, é:

A) 7 200

B) 8 500

C) 9 250

D) 9 400

Resolução:

Sejam:

H: Total de eleitores do sexo masculino.

M: Total de eleitores do sexo feminino.

Temos H + M = 18 500.

Além disso, temos 0,94H votantes do sexo masculino e 0,91M votantes do sexo feminino.

Temos 0,94H = 0,91M.

Portanto, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} H + M = 18\,500 \\ 0,94H = 0,91M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H + M = 18\,500 \\ 94H - 91M = 0 \end{cases}$$

Substituindo H = 18 500 – M na segunda equação, temos:

$94(18\,500 - M) - 91M = 0 \Rightarrow$

$1\,739\,000 - 94M - 91M = 0 \Rightarrow$

$185M = 1\,739\,000 \Rightarrow$

$M = 9\,400$

02. (UERJ–2015) Considere uma mercadoria que teve seu preço elevado de **x** reais para **y** reais. Para saber o percentual de aumento, um cliente dividiu **y** por **x**, obtendo quociente igual a 2,08 e resto igual a zero.

Em relação ao valor de **x**, o aumento percentual é equivalente a

A) 10,8%.

B) 20,8%.

C) 108,0%.

D) 208,0%.

Resolução:

A razão do valor final pelo valor inicial nos fornece o fator de aumento (ou redução) do sistema em questão, sendo que o fator de aumento é igual a um mais a taxa percentual. Tomando como **i** a taxa de variação percentual:

fator de aumento = 1 + i $\Rightarrow$ i = 2,08 – 1 = 1,08 = 108,0%.

AUMENTOS E DESCONTOS SUCESSIVOS

Aumentos sucessivos

A título de exemplo, vamos imaginar que o preço de uma mercadoria seja igual a **P** reais. Qual será o novo preço após um aumento de 10%?

Nesse caso, temos que 10% de P = 0,1.P.

Portanto, o novo preço será igual a P + 0,1P = 1,1P.

Observe que o preço após o aumento também pode ser obtido simplesmente multiplicando-se o preço anterior **P** por 1,1. Esse artifício é muito útil para solucionarmos problemas envolvendo aumentos sucessivos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

03. Um vendedor resolveu promover dois reajustes sucessivos de 5% no preço de uma mercadoria. Isso equivale a um só aumento de

A) 10%. B) 10,25%. C) 11%. D) 12%.

Resolução:

Seja **P** o preço da mercadoria. A cada aumento de 5%, multiplicamos **P** por 1,05. Temos:

$$\underbrace{1{,}05.P}_{\text{Preço após o primeiro aumento}}$$

$$\underbrace{1{,}05.(1{,}05.P)}_{\text{Preço após o segundo aumento}} = 1{,}1025.P$$

1,1025.P – P = 0,1025.P, o que equivale a um só aumento de 10,25%.

Descontos sucessivos

De maneira análoga à utilizada no caso dos aumentos sucessivos, vamos imaginar que o preço **P** da mercadoria sofreu um desconto de 30%. Qual será o preço após esse desconto?

Temos 30% de P = 0,3.P.

O novo preço é dado por P – 0,3.P = 0,7.P.

Observe que o preço após o desconto é dado pela multiplicação do preço **P** por 0,7.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

04. Um eletrodoméstico teve seu preço reduzido em 15%. Tendo atraído poucos compradores, o comerciante resolveu dar um novo desconto, dessa vez de 10%. Em relação ao preço original, qual foi o desconto total dado pelo comerciante?

Resolução:

Seja **P** o preço original dessa mercadoria. Temos:

$$\underbrace{0{,}85.P}_{\text{Preço após a redução de 15\%}}$$

$$\underbrace{0{,}9.(0{,}85.P)}_{\text{Preço após a redução de 10\%}} = 0{,}765.P$$

Observe que P – 0,765.P = 0,235.P, o que significa que houve um desconto total de 23,5%.

Lucro

Considere um determinado produto vendido por um comerciante por um preço de venda **V**. Suponhamos que esse comerciante tenha adquirido tal produto no atacado a um preço de custo **C**. Definimos como lucro o valor efetivamente recebido pelo comerciante, descontado o custo de aquisição. Em termos algébricos, temos:

L = V – C

L: lucro por unidade vendida;

V: valor arrecadado com a venda;

C: custo de aquisição do produto.

Em muitos problemas, deseja-se saber a porcentagem correspondente a esse lucro, normalmente em função do custo. Porém, em algumas situações, tal porcentagem pode ser calculada em função do preço de venda.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

05. Um comerciante obteve um lucro de 30% sobre o preço de custo de um determinado produto. Qual foi a porcentagem do lucro sobre o preço de venda desse mesmo produto?

Resolução:

Sejam:

L: lucro por unidade vendida;
V: preço de venda do produto;
C: preço de custo do produto.

Temos L = V – C. (I)

Mas L = 0,3C.

Portanto, $C = \dfrac{L}{0{,}3} = \dfrac{10L}{3}$.

Substituindo em (I), temos:

$$L = V - \frac{10}{3}.L \Rightarrow L + \frac{10}{3}.L = V \Rightarrow \frac{13L}{3} = V \Rightarrow$$

$$L = \frac{3}{13}.V \approx 0{,}23.V$$

Portanto, o lucro é de cerca de 23% sobre o preço de venda.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. JGE6 (UECE–2015) As ações da Empresa BRASTEC, nos anos de 2011 e 2012, valorizaram 12% e 7%, respectivamente, e nos anos de 2013 e 2014 desvalorizaram 2% e 8%, respectivamente. A valorização das ações correspondente ao período considerado (2011–2014) foi aproximadamente de

A) 9%.
C) 8%.
B) 8,5%.
D) 7,5%.

02. (PUC Rio) Um imóvel em São Paulo foi comprado por **x** reais, valorizou 10% e foi vendido por R$ 495 000,00. Um imóvel em Porto Alegre foi comprado por **y** reais, desvalorizou 10% e também foi vendido por R$ 495 000,00. Os valores de **x** e **y** são

A) x = 445 500 e y = 544 500.
B) x = 450 000 e y = 550 000.
C) x = 450 000 e y = 540 000.
D) x = 445 500 e y = 550 000.
E) x = 450 000 e y = 544 500.

03. YVEM (Unicamp-SP) Um automóvel foi anunciado com um financiamento "taxa zero" por R$ 24 000,00 (vinte e quatro mil reais), que poderiam ser pagos em doze parcelas iguais e sem entrada. Para efetivar a compra parcelada, no entanto, o consumidor precisaria pagar R$ 720,00 (setecentos e vinte reais) para cobrir despesas do cadastro. Dessa forma, em relação ao valor anunciado, o comprador pagará um acréscimo

A) inferior a 2,5%.
C) entre 3,5% e 4,5%.
B) entre 2,5% e 3,5%.
D) superior a 4,5%.

04. TEØZ (UFF-RJ) Em uma certa cidade, a tributação que incide sobre o consumo de energia elétrica residencial é de 33% sobre o valor do consumo, se a faixa de consumo estiver entre 51 kWh e 300 kWh mensais. Se, no mês de junho, em uma residência dessa cidade, foram consumidos 281 kWh e o valor total (valor cobrado pelo consumo acrescido do valor correspondente aos tributos) foi de R$ 150,29, é correto afirmar que

A) a quantia de R$ 37,29 é referente aos tributos.
B) a quantia de R$ 49,59 é referente aos tributos.
C) o valor cobrado pelo consumo é 67% do valor total.
D) o valor cobrado pelo consumo é de R$ 146,67.
E) o valor cobrado pelo consumo é de R$ 117,29.

05. OGRJ (UECE–2015) Em um empreendimento imobiliário, o centro comercial e o parque de estacionamento ocupam, respectivamente, 42% e 53% da área do terreno. A área restante, que corresponde a 3 000 m^2, é destinada a jardins e vias de circulação. Nestas condições, a medida da área do terreno ocupada pelo centro comercial, em m^2, é:

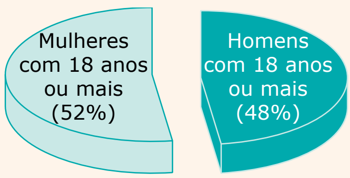
A) 24 800
C) 25 200
B) 25 000
D) 25 400

06. 8725 (UFRGS-RS) Na compra de três unidades idênticas de uma mesma mercadoria, o vendedor oferece um desconto de 10% no preço da segunda unidade e um desconto de 20% no preço da terceira unidade. A primeira unidade não tem desconto. Comprando três unidades dessa mercadoria, o desconto total é

A) 8%.
C) 22%.
E) 32%.
B) 10%.
D) 30%.

07. (Unesp) Considere os dados aproximados, obtidos em 2010, do Censo realizado pelo IBGE.

Idade (anos)	Nº de pessoas
De 0 a 17	56 300 000
De 18 a 24	23 900 000
De 25 a 59	90 000 000
60 ou mais	20 600 000
Total	190 800 000



IBGE.

A partir das informações, é correto afirmar que o número aproximado de mulheres com 18 anos ou mais, em milhões, era:

A) 70
B) 52
C) 55
D) 59
E) 65

08. J4F7 (UEG-GO) O Cerrado é o segundo maior bioma brasileiro, localizado em uma grande área do Brasil Central. Além da biodiversidade, os recursos hídricos da região ressaltam-se em quantidade e qualidade: nas suas chapadas estão as nascentes dos principais rios das bacias Amazônica, do Prata e do São Francisco. Estudos realizados pelos pesquisadores do Programa Cerrado da CI-Brasil indicam que o bioma corre o risco de desaparecer até 2030. Dos 204 milhões de hectares originais, 57% já foram completamente destruídos. O desmatamento do Cerrado é alarmante, chegando a 1,5% ou três milhões de hectares/ano.

Disponível em: <http://noticias.uol.com.br>. Acesso em: 28 ago. 2011.

Considerando-se que o desmatamento do Cerrado continue na mesma velocidade de hoje, nos próximos 10 anos, a quantidade de Cerrado original que restará, em porcentual, será aproximadamente igual a

A) 57%.
B) 42%.
C) 28%.
D) 15%.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IFSul–2015) Para comprar um terreno, Adamastor pagou 25% do total do valor na entrada. Sabendo-se que, do restante a ser pago, 34% correspondem a R$ 10 200,00, o valor do terreno é

A) R$ 38 000,00.
C) R$ 55 000,00.
B) R$ 30 000,00.
D) R$ 40 000,00.

02. V2FC (UECE) Em uma empresa multinacional, 60% dos seus 2 400 funcionários são do sexo feminino. Se 672 dos funcionários do sexo masculino são de nacionalidade brasileira e 25% das mulheres não são brasileiras, então, a porcentagem do total de funcionários que não são brasileiros é

A) 23%.
C) 27%.
B) 25%.
D) 29%.

MATEMÁTICA

03. N6L7 (UFPR) Em uma pesquisa com 500 pessoas, 50% dos homens entrevistados responderam "sim" a uma determinada pergunta, enquanto 60% das mulheres responderam "sim" à mesma pergunta. Sabendo que, na entrevista, houve 280 respostas "sim" a essa pergunta, quantas mulheres a mais que homens foram entrevistadas?

A) 40
B) 70
C) 100
D) 120
E) 160

04. BQOT (CEFET-RJ–2016) O preço do novo celular *CefeX* sofreu três reajustes durante o ano de 2015: um aumento de 20% em fevereiro; outro de mais 25% em junho; e, em outubro, um desconto de 40%. Com base nessas informações, qual é a porcentagem final de variação do preço sofrido pelo produto, em relação ao preço inicial, durante o ano de 2015?

05. GAR2 (UEG-GO–2016) Com a alta da inflação e para não repassar aos clientes o aumento dos gastos na produção de suco de laranja, um empresário decidiu que no próximo mês 10% do volume desse suco será composto por água, volume que atualmente é de apenas 4%. Se hoje são consumidos 10 000 litros de água no volume de suco de laranja produzido, mantendo-se a mesma quantidade produzida, no próximo mês a quantidade de água consumida no volume desse suco será de

A) 10 000 litros.
B) 12 500 litros.
C) 16 000 litros.
D) 25 000 litros.

06. (Unicamp-SP–2018) A tabela a seguir exibe o valor das mensalidades do Ensino Fundamental em três escolas particulares nos anos de 2017 e 2018.

ANO	Escola A	Escola B	Escola C
2017	R$ 1 000,00	R$ 1 200,00	R$ 1 500,00
2018	R$ 1 150,00	R$ 1 320,00	R$ 1 680,00

A) Determine qual escola teve o maior aumento percentual nas mensalidades de 2017 para 2018.
B) Uma família tem três filhos matriculados na Escola B. Suponha que essa escola ofereça um desconto de 10% na mensalidade para o segundo filho e de 20% para o terceiro filho. Calcule o valor a ser gasto mensalmente com os três filhos em 2018.

07. (UFU-MG–2016) Um estudante recorre a uma imobiliária na expectativa de alugar um apartamento. A imobiliária exige de seus locatários o pagamento de um depósito caução, dividido em três parcelas fixas e de iguais valores, a serem pagas junto com as mensalidades do aluguel nos três primeiros meses.
Essas mensalidades são fixas e de iguais valores. O estudante desembolsará, em um ano de contrato, um total de R$ 8 400,00, de maneira que o desembolso total, após o término do pagamento do depósito caução, será 80% superior àquele correspondente ao desembolso referente aos três primeiros meses.
Nas condições apresentadas, o valor do depósito caução é igual a

A) R$ 1 400,00.
B) R$ 1 200,00.
C) R$ 900,00.
D) R$ 1 800,00.

08. KDKB (ACAFE-SC–2016) O gerente de uma academia de dança faz uma promoção para aumentar o número de frequentadores, tanto do sexo masculino quanto do feminino. Com a promoção, o número de frequentadores do sexo masculino aumentou de 80 para 126 e, apesar disso, o percentual da participação de homens caiu de 40% para 28%.
Com essas informações, o número de mulheres que frequentam essa academia, após a promoção, teve um aumento de

A) 170%.
B) 70%.
C) 60%.
D) 270%.

09. (UERJ–2017) Para combater a subnutrição infantil, foi desenvolvida uma mistura alimentícia composta por três tipos de suplementos alimentares: I, II e III. Esses suplementos, por sua vez, contêm diferentes concentrações de três nutrientes: A, B e C. Observe as tabelas a seguir, que indicam a concentração de nutrientes nos suplementos e a porcentagem de suplementos na mistura, respectivamente.

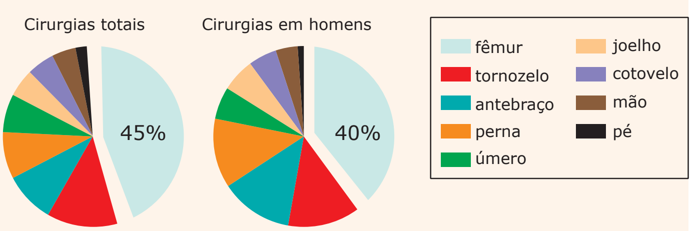
Nutriente	Concentração dos suplementos alimentares (g/kg)		
	I	II	III
A	0,2	0,5	0,4
B	0,3	0,4	0,1
C	0,1	0,4	0,5

Suplemento alimentar	Quantidade na mistura (%)
I	45
II	25
III	30

A quantidade do nutriente C, em g/kg encontrada na mistura alimentícia é igual a:

A) 0,235
B) 0,265
C) 0,275
D) 0,295

10. 2TF4 (UERJ–2018) No mapa mensal de um hospital, foi registrado o total de 800 cirurgias ortopédicas, sendo 440 em homens, conforme os gráficos a seguir.



De acordo com esses dados, o número total de cirurgias de fêmur realizadas em mulheres foi:

A) 144
B) 162
C) 184
D) 190

11. ML50 (UFES) Um empregado recebe um salário mensal para trabalhar 8 horas diárias. Trabalhando 2 horas extras todo dia, ele tem um acréscimo de 50% em seu salário. Quanto ele ganha a mais por hora extra?

A) 50%.
B) 60%.
C) 80%.
D) 100%.
E) 120%.

12. UXLZ (UFF-RJ) A confeitaria Cara Melada é conhecida por suas famosas balas de leite, vendidas em pacotes. No Natal, essa confeitaria fez a seguinte promoção: colocou, em cada pacote, 20% a mais de balas e aumentou em 8% o preço do pacote. Determine a variação, em porcentagem, que essa promoção acarretou no preço de cada bala do pacote.

13. 4Q2M (UFLA-MG) Um motorista escolhe um trajeto que sabe ser 20% maior que o trajeto que usualmente toma, pois nesse novo trajeto poderá desenvolver uma velocidade média 100% maior que a do trajeto usual. O tempo de viagem diminuirá

A) 40%.
B) 50%.
C) 100%.
D) 9%.
E) 20%.

14. WU8H (FUVEST-SP) Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 44% superior ao preço de custo. Porém, ele prepara a tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter desconto no momento da compra. Qual é o maior desconto que ele pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo a não ter prejuízo?

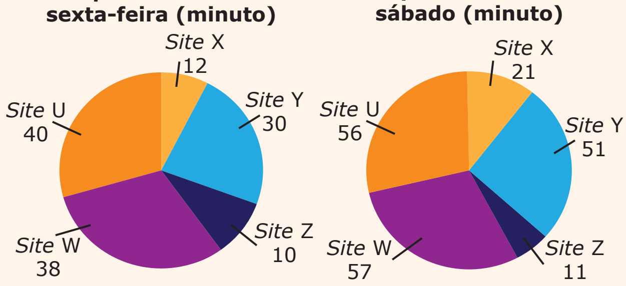
A) 10%.
B) 15%.
C) 20%.
D) 25%.
E) 36%.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. DKGI (Enem–2017) Quanto tempo você fica conectado à Internet? Para responder a essa pergunta, foi criado um miniaplicativo de computador que roda na área de trabalho, para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco *sites* visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado, nos cinco *sites* mais acessados. A seguir, temos os dados do miniaplicativo para esses dias.

Tempo de acesso na sexta-feira (minuto) | **Tempo de acesso no sábado (minuto)**



Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi no *site*

A) X.
B) Y.
C) Z.
D) W.
E) U.

02. (Enem–2017) Um atacadista compra de uma fábrica um produto por R$ 10,00 e repassa às lojas por um preço 50% superior. Para obterem um lucro suficiente com o produto, os lojistas fazem a revenda com acréscimo de preço de 100% do valor pelo qual compraram.

Qual é o preço final, em real, de um produto que passou pelas três etapas listadas?

A) 15,00
B) 20,00
C) 25,00
D) 30,00
E) 40,00

03. (Enem) Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90%, dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem **P** da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.
De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de **P** é:

A) [35; 63]
B) [40; 63]
C) [50; 70]
D) [50; 90]
E) [70; 90]

04. (Enem) O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: <www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (Adaptação).

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

A) R$ 900,00.
B) R$ 1 200,00.
C) R$ 2 100,00.
D) R$ 3 900,00.
E) R$ 5 100,00.

05. (Enem) A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: <www.arq.ufsc.br>. Acesso em: 03 mar. 2012.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%. Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em

A) 4%.
B) 20%.
C) 36%.
D) 64%.
E) 96%.

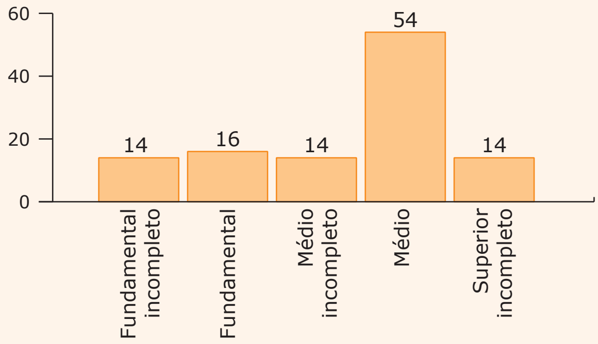
06. (Enem) Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3 800,00 gerado pela aplicação.
A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de

A) R$ 4 222,22.
B) R$ 4 523,80.
C) R$ 5 000,00.
D) R$ 13 300,00.
E) R$ 17 100,00.

MATEMÁTICA

07. (Enem) A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa a seguir, realizada com os jogadores profissionais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro.

Total: 112 jogadores



O GLOBO, 24 jul. 2005.

De acordo com esses dados, o percentual dos jogadores dos quatro clubes que concluíram o Ensino Médio é de, aproximadamente,

A) 14%. B) 48%. C) 54%. D) 60%. E) 68%.

08. (Enem) O tabagismo (vício em fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que 90% dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e 80% dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2 000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1 500 são casos diagnosticados de câncer, e 500 são casos diagnosticados de enfisema.

Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de fumantes desse grupo de 2 000 pessoas é, aproximadamente:

A) 740
B) 1 100
C) 1 310
D) 1 620
E) 1 750

09. (Enem) A capa de uma revista de grande circulação trazia a seguinte informação, relativa a uma reportagem daquela edição:

"O brasileiro diz que é feliz na cama, mas debaixo dos lençóis 47% não sentem vontade de fazer sexo."

O texto a seguir, no entanto, adaptado da mesma reportagem, mostra que o dado anterior está errado:

"Outro problema predominantemente feminino é a falta de desejo: 35% das mulheres não sentem nenhuma vontade de ter relações. Já entre os homens, apenas 12% se queixam de falta de desejo."

Considerando que o número de homens na população seja igual ao de mulheres, a porcentagem aproximada de brasileiros que não sentem vontade de fazer sexo, de acordo com a reportagem, é

A) 12%.
B) 24%.
C) 29%.
D) 35%.
E) 50%.

10. (Enem) Nas últimas eleições presidenciais de um determinado país, onde 9% dos eleitores votaram em branco e 11% anularam o voto, o vencedor obteve 51% dos votos válidos. Não são considerados válidos os votos em branco e nulos. Pode-se afirmar que o vencedor, de fato, obteve de todos os eleitores um percentual de votos da ordem de

A) 38%. B) 41%. C) 44%. D) 47%. E) 50%.

11. (Enem) O Brasil, em 1997, com cerca de $160 \cdot 10^6$ habitantes, apresentou um consumo de energia da ordem de 250 000 tep (tonelada equivalente de petróleo), proveniente de diversas fontes primárias. O grupo com renda familiar de mais de vinte salários mínimos representa 5% da população brasileira e utiliza cerca de 10% da energia total consumida no país. O grupo com renda familiar de até três salários mínimos representa 50% da população e consome 30% do total de energia. Com base nessas informações, pode-se concluir que o consumo médio de energia para um indivíduo do grupo de renda superior é **x** vezes maior do que para um indivíduo do grupo de renda inferior. O valor aproximado de **x** é:

A) 2,1 B) 3,3 C) 6,3 D) 10,5 E) 12,7

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. B	05. C	07. A
02. B	04. A	06. B	08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. C
- 03. C
- 04. 10%
- 05. D
- 06.
  - A) Escola A
  - B) R$ 3 564,00
- 07. B
- 08. A
- 09. D
- 10. C
- 11. D
- 12. Redução de 10% no preço de cada bala.
- 13. A
- 14. C

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. A	04. B	07. D	10. B
02. D	05. C	08. E	11. B
03. A	06. C	09. B	

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Juros Simples e Compostos

JUROS

Chamamos de juros a remuneração pelo uso de um certo capital aplicado por um determinado período. Por exemplo, suponhamos que uma pessoa adquira um empréstimo no valor de R$ 1 000,00, a ser pago em 30 dias. O credor, a título de compensação pelo tempo em que ficará sem o seu dinheiro, resolveu cobrar uma taxa de 5% do valor total. Esse percentual é chamado de juro dessa operação.

Há dois regimes básicos de juros: juros simples e juros compostos.

Juros simples

Em um regime de juros simples, a taxa de juros é calculada apenas em relação à quantidade inicial. Por exemplo, vamos imaginar que uma pessoa aplique um capital **C** a uma taxa de juros simples de 4% ao mês. Qual valor total essa pessoa possuirá ao final de cinco meses?

Temos que 4% de C = 0,04 . C. A cada mês, a pessoa ganhará esse valor. Ao final de 5 meses, essa pessoa terá ganhado, de juros, 5 . 0,04 . C = 0,2C. A quantia total que essa pessoa possui, denominada **montante**, é dada por C + 0,2C = 1,2C.

De maneira geral, os juros simples **J**, obtidos em uma aplicação de um capital **C**, durante um determinado período **t**, a uma taxa de juros **i**, são dados por:

$$\boxed{J = C \cdot i \cdot t}$$

OBSERVAÇÕES

- A taxa de juros **i** é dada na forma decimal. Por exemplo, se a taxa de juros é 3%, então i = 0,03.
- É fundamental que a taxa de juros **i** e o período **t** estejam em unidades compatíveis. Por exemplo, se temos uma taxa de 10% ao mês, é conveniente que o tempo na expressão seja representado em meses.

O montante **M** dessa aplicação é dado pela soma do capital inicial com os juros obtidos.

$$\boxed{M = C + J}$$

Juros compostos

Em um regime de juros compostos, a taxa de juros é calculada sobre o valor atualizado do capital, incidindo sobre a quantia do período imediatamente anterior. Essa é a modalidade de juros mais utilizada nas transações comerciais.

Vamos supor que uma pessoa tome emprestada uma quantia **C**, a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, durante três meses. Ao final desse período, qual será o valor total (montante) pago por essa pessoa?

Nesse caso, a taxa de juros incide sobre o valor atualizado. Portanto, trata-se de três aumentos sucessivos de 2%. Logo, o montante é igual a $1{,}02^3 \cdot C = 1{,}061 \cdot C$.

De modo geral, o montante **M** da aplicação de um capital **C**, a uma taxa de juros compostos **i**, por um período **t**, é dado pela expressão:

$$\boxed{M = C \cdot (1 + i)^t}$$

Nessa equação, a taxa de juros **i** é dada na forma decimal.

Amortização (valor presente e valor futuro)

No comércio moderno, é frequente a prática do pagamento de valores posteriores à compra com a inserção de juros. Essa conduta moderna gerou duas nomenclaturas para as quantidades, valor presente e valor futuro, que representam, respectivamente, a quantia no momento inicial da análise e a quantia a ser paga posteriormente. O valor futuro apresenta, em sua composição, o valor presente e os juros que foram embutidos na transação.

Sabe-se que os juros cobrados dependem da taxa pactuada, do prazo da transação e do valor presente. No exemplo a seguir, esses valores são representados, respectivamente, por **i**, **t** e $\mathbf{V_p}$.

Considere uma compra com pagamento para 1 mês com taxa de juros de 5% ao mês. O valor futuro a ser pago na transação será calculado a seguir.

Dados: $V_p = 500$, $i = 5\%$ a.m. e $t = 1$.

Valor futuro (V_f): V_p + 5% de V_p

$$V_f = V_p + \frac{5}{100}V_p = V_p\left(1+\frac{5}{100}\right) = 1{,}05\ V_p$$

$V_f = 1{,}05 \cdot 500 = 525$

O valor futuro será de 525 reais.

Observe que o valor futuro foi obtido multiplicando o valor presente por $\left(1+\frac{i}{100}\right) = \left(1+\frac{5}{100}\right) = 1{,}05$ (o coeficiente de aumento para o período e a taxa proposta).

Quando o pagamento de uma determinada transação é antecipado, deve-se garantir a retirada dos juros que foram embutidos previamente. Esse processo é chamado de **amortização**. Para essa retirada de juros, opera-se de forma inversa, ou seja, se para encontrar o valor futuro multiplicou-se o valor presente pelo coeficiente de aumento, para obter o valor presente, dado o valor futuro, divide-se este último pelo coeficiente de aumento. Observe a seguir essa relação para a taxa de i% por período, valor presente (V_p) e valor futuro para o período **t** $\left(V_{f_t}\right)$:

Período	Valor futuro para cada valor presente no período t $\left(V_{f_t}\right)$	Valor presente para cada valor futuro no período t
1	$V_{f_1} = V_p\left(1+\frac{i}{100}\right)^1$	$V_p = \dfrac{V_{f_1}}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^1}$
2	$V_{f_2} = V_p\left(1+\frac{i}{100}\right)^2$	$V_p = \dfrac{V_{f_2}}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}$
3	$V_{f_3} = V_p\left(1+\frac{i}{100}\right)^3$	$V_p = \dfrac{V_{f_3}}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^3}$
4	$V_{f_4} = V_p\left(1+\frac{i}{100}\right)^4$	$V_p = \dfrac{V_{f_4}}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^4}$
⋮	⋮	⋮
t	$V_{f_t} = V_p\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$	$V_p = \dfrac{V_{f_t}}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^t}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Um produto é vendido em uma loja a R$ 200,00 à vista ou em duas parcelas de R$ 110,00, sendo uma parcela no ato da compra e outra após 30 dias. Se um consumidor optar pela compra a prazo, qual será a taxa de juros mensal cobrada pela loja?

Resolução:

O preço à vista é igual a 200 reais. Se subtrairmos desse valor a entrada de 110 reais, o saldo devedor fica igual a 90 reais. Porém, após 30 dias, o consumidor vai pagar 110 reais (segunda parcela). Observe que ele está pagando 110 – 90 = 20 reais acima do valor devido. Esse valor se refere aos juros, que devem ser calculados em relação ao valor financiado, ou seja, 90 reais.

90 ________________ 100%

20 ________________ x

$$x = \frac{20 \cdot 100\%}{90} \Rightarrow$$

$x \cong 22{,}22\%$

02. (UFMT) Uma financiadora oferece empréstimo por um período de 4 meses, sob as seguintes condições:

I. Taxa de 11,4% ao mês, a juros simples.

II. Taxa de 10% ao mês, a juros compostos.

Uma pessoa fez um empréstimo de R$ 10 000,00 optando pela condição I. Em quantos reais os juros cobrados na condição I serão menores do que os cobrados na condição II?

Resolução:

Juros cobrados na condição I:

$J = 10\,000 \,.\, 0{,}114 \,.\, 4 = 4\,560$ reais

Juros cobrados na condição II:

$M = 10\,000.(1 + 0{,}1)^4 = 10\,000 \,.\, 1{,}1^4 =$
$10\,000 \,.\, 1{,}4641 = 14\,641$

$J = 14\,641 - 10\,000 = 4\,641$ reais

A diferença é dada por $4\,641 - 4\,560 = 81$.

Portanto, os juros da condição I serão menores em R$ 81,00.

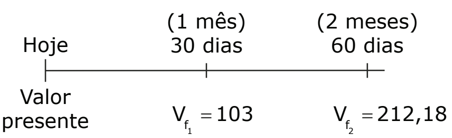
03. Uma pessoa compra um produto para sua residência de forma financiada, sendo as prestações dadas pelos valores da tabela e a taxa de juros cobrada de 3% ao mês.

1ª prestação 30 dias	R$ 103,00
2ª prestação 60 dias	R$ 212,18

Qual é o valor à vista (valor presente) do bem adquirido?

Resolução:

Observe a linha do tempo a seguir.



Para encontrar o valor presente, deve-se efetuar a amortização das quantias, ou seja, retirar dos valores futuros os juros embutidos em cada prestação e, assim, obter as partes correspondentes da prestação que compõem o valor presente.

Valor presente V_P

$$V_1 = \frac{V_{f_1}}{1 + \frac{3}{100}} = \frac{103}{1{,}03} = 100$$

$$V_2 = \frac{V_{f_2}}{\left(1 + \frac{3}{100}\right)^2} = \frac{212{,}18}{(1{,}03)^2} = 200$$

Logo, o valor do bem à vista será de 300 reais.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unimontes-MG–2015) Por não ter todo o dinheiro disponível, um estudante pagou mensalmente, pelo prazo de um ano, por um curso que, à vista, custaria R$ 2 000,00. Esse curso foi financiado a uma taxa de juros simples de 0,8% ao mês. O valor total pago pelo curso foi de

A) R$ 2 129,00.
B) R$ 2 192,00.
C) R$ 2 291,00.
D) R$ 2 219,00.

02. (Unimontes-MG–2015) Uma pessoa recebeu R$ 3 000,00 de juros por um capital que ficou emprestado por 5 meses, à taxa de juros de 0,6% ao mês. Se o regime adotado foi o de capitalização simples, o valor emprestado foi de

A) R$ 80 000,00.
B) R$ 150 000,00.
C) R$ 120 000,00.
D) R$ 100 000,00.

03. 5OP4 (UERJ–2017) Um capital de **C** reais foi investido a juros compostos de 10% ao mês e gerou, em três meses, um montante de R$ 53 240,00.

Calcule o valor, em reais, do capital inicial **C**.

04. YSVZ (CEFET-MG–2016) O pagamento de uma televisão foi feito, sem entrada, em 5 parcelas mensais iguais, corrigidas a juros simples pela taxa de 0,7% ao mês. Dessa forma, no final do período, o valor total pago, em percentual, será maior do que o inicial em:

A) 2,1
B) 3,5
C) 4,2
D) 7,3

05. ELAW (FGV–2015) Salomão aplicou R$ 15 000,00 durante um ano, à taxa de 8% ao ano.

Em seguida, aplicou o montante obtido por mais um ano, à taxa de 9% ao ano, obtendo, no final, um montante de **x** reais.
A soma dos algarismos de **x** é:

A) 27
B) 25
C) 23
D) 26
E) 24

06. CFPW (CEFET-RJ–2016) Marcelo comprou um móvel de R$ 1 000,00, de forma parcelada, com juros de 5% ao mês. Sabendo que Marcelo pagou R$ 400,00 no ato da compra e o restante um mês depois, qual foi o valor dessa segunda parcela, 30 dias após a compra?

07. 7E5M (CEFET-MG) Uma concessionária anunciou um veículo no valor de R$ 30 000,00 à vista. Após negociação, um cliente adquiriu o veículo pagando R$ 20 000,00 de entrada e R$ 11 200,00 após 30 dias. A taxa mensal de juros cobrada nessa venda foi de

A) 4%.
B) 6,6%.
C) 11,2%.
D) 12%.

08. RUPC (FGV-SP) No início do ano 2000, Alberto aplicou certa quantia a juros compostos, ganhando 20% ao ano. No início de 2009, seu montante era de R$ 5 160,00. Se ele deixar o dinheiro aplicado, nas mesmas condições, o juro recebido entre o início de 2010 e o início de 2011 será, aproximadamente, de

A) R$ 1 032,00.
B) R$ 1 341,00.
C) R$ 1 238,00.
D) R$ 1 135,00.
E) R$ 929,99.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UEPA–2015) Um agricultor financiou junto a uma cooperativa os insumos utilizados na lavoura em 2014. Pagou 20% do valor dos insumos no ato da compra, utilizando parte do lucro obtido no ano anterior, e financiou o restante em 10 meses a uma taxa de 2% ao mês a juros simples. Observou que havia gastado o montante de R$ 208 800,00 com a parte financiada. Neste caso, o valor financiado dos insumos pelo agricultor foi de

A) R$ 217 500,00.
B) R$ 174 000,00.
C) R$ 164 000,00.
D) R$ 144 500,00.
E) R$ 136 000,00.

02. V64Z (FGV-SP) Um capital de R$ 10 000,00, aplicado a juros compostos de 1,5% ao mês, será resgatado ao final de 1 ano e 8 meses no montante, em reais, aproximadamente igual a:

x	x^{10}
0,8500	0,197
0,9850	0,860
0,9985	0,985
1,0015	1,015
1,0150	1,160
1,1500	4,045

A) 11 605,00
B) 12 986,00
C) 13 456,00
D) 13 895,00
E) 14 216,00

03. (Unicamp-SP) Suponha que todos os preços venham subindo 30% ao mês nos últimos meses, e continuem nos próximos meses. Calcule:

A) Quanto custará, daqui a 60 dias, um objeto que hoje custa R$ 27 300,00?
B) Quanto custava esse mesmo objeto há um mês?

04. MNGD (FGV) Uma mercadoria é vendida com entrada de R$ 500,00 mais 2 parcelas fixas mensais de R$ 576,00. Sabendo-se que as parcelas embutem uma taxa de juros compostos de 20% ao mês, o preço à vista dessa mercadoria, em reais, é igual a:

A) 1 380,00
B) 1 390,00
C) 1 420,00
D) 1 440,00
E) 1 460,00

05. ECCF (ESPM-SP) O Sr. Paulo aplicou um certo capital à taxa de juros simples de 4% ao mês durante 3 meses. O montante dessa aplicação ele reaplicou à taxa de juros simples de 3% ao mês durante 9 meses. Se ele tivesse feito uma única aplicação desse capital a juros simples durante 1 ano, para obter o mesmo rendimento final, a taxa mensal deveria ser de

A) 3,28%.
B) 3,36%.
C) 3,43%.
D) 3,52%.

06. 6GI9 (UECE–2017) Bruno fez um empréstimo de R$ 1 000,00 a juros simples mensais de 10%. Dois meses após, pagou R$ 700,00 e, um mês depois desse pagamento, liquidou o débito. Este último pagamento, para liquidação do débito, foi de

A) R$ 550,00.
B) R$ 460,00.
C) R$ 490,00.
D) R$ 540,00.

07. (UECE) Renato contratou um empréstimo de R$ 1 400,00, para pagar um mês depois, com juros de 15% ao mês. Ao final do mês, não podendo pagar o total, deu por conta apenas R$ 750,00 e, para o restante, firmou um novo contrato nas mesmas bases do anterior, o qual foi pago integralmente um mês depois. O valor do último pagamento foi

A) R$ 889,00.
B) R$ 939,00.
C) R$ 989,00.
D) R$ 1 009,00.

08. ALFM (UFSM) Uma empresa de cartão de crédito opera com juros compostos de 6% ao mês. Um usuário dessa empresa contraiu uma dívida de R$ 2 000,00 e, durante 6 meses, não pôde efetuar o pagamento. Ao procurar a empresa para renegociar a dívida, a empresa propôs que seja quitada em uma única parcela, com juros simples de 5% ao mês, referente aos 6 meses de atraso.

Aceita a proposta, o total de juros pagos e o desconto obtido, em reais, são, respectivamente, iguais a

Dado: $(1{,}06)^6 = 1{,}4185$.

A) 600,00 e 117,00.
B) 600,00 e 120,00.
C) 600,00 e 237,00.
D) 720,00 e 117,00.
E) 720,00 e 120,00.

09. (UFU-MG–2015) Um financiamento de R$ 10 000,00 foi contratado a uma taxa de juros (compostos) de 3% ao mês. Ele será liquidado em duas parcelas iguais, a primeira vencendo em 60 dias e a segunda em 90 dias após a efetivação do contrato. O valor de cada parcela desse financiamento é, aproximadamente, igual a

Dados:

$(1+0{,}03)^1 = 1{,}03$	$(1+0{,}03)^2 = 1{,}0609$	$(1+0{,}03)^3 = 1{,}0927$
$\frac{1}{(1+0{,}03)^1} = 0{,}9709$	$\frac{1}{(1+0{,}03)^2} = 0{,}9426$	$\frac{1}{(1+0{,}03)^3} = 0{,}9151$

A) R$ 5 226,00.
B) R$ 5 383,00.
C) R$ 5 387,00.
D) R$ 5 282,00.

10. FAZX (FGV–2017) Certo capital foi aplicado em regime de juros compostos. Nos quatro primeiros meses, a taxa foi de 1% ao mês e, nos quatro meses seguintes, a taxa foi de 2% ao mês. Sabendo-se que, após os oito meses de aplicação, o montante resgatado foi de R$ 65 536,00, então o capital aplicado, em reais, foi aproximadamente igual a:

Dado: $65536 = 2^{16}$

A) $3{,}66^8$
B) $3{,}72^8$
C) $3{,}78^8$
D) $3{,}88^8$
E) $3{,}96^8$

11. MWQA (CEFET-MG) Uma pessoa investiu R$ 20 000,00 durante 3 meses em uma aplicação que lhe rendeu 2% no primeiro mês e 5% no segundo mês. No final do terceiro mês, o montante obtido foi suficiente para pagar uma dívida de R$ 22 000,00. Assim sendo, a taxa mínima de juros, no terceiro mês, para esse pagamento, em %, foi, aproximadamente, de:

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

12. (USF-SP–2017) Um senhor depositou R$ 1 200,00 na aplicação financeira A e R$ 1 300,00 na aplicação financeira B, em regime de juros simples. As aplicações estão no mesmo banco, com a mesma taxa de juros e durante o mesmo período de tempo.

Sabendo que ao final do período de capitalização as duas aplicações, juntas, renderam R$ 800,00, calcule quanto rendeu cada uma delas.

13. UWTU (Albert Einstein–2018) Um produto foi comprado em 2 parcelas, a primeira à vista e a segunda após 3 meses, de maneira que, sobre o saldo devedor, incidiram juros simples de 2% ao mês. Se o valor das 2 parcelas foi o mesmo, em relação ao preço do produto à vista, cada parcela corresponde à:

A) $\dfrac{51}{101}$
B) $\dfrac{53}{103}$
C) $\dfrac{55}{105}$
D) $\dfrac{57}{107}$

14. 05JE (UFMG) Um consumidor adquiriu determinado produto em um plano de pagamento de 12 parcelas mensais iguais de R$ 462,00, a uma taxa de juros de 5% ao mês. Ele pagou as 10 primeiras prestações no dia exato do vencimento de cada uma delas. Na data do vencimento da 11ª prestação, o consumidor decidiu quitar a última também, para liquidar sua dívida. Ele exigiu, então, que a última prestação fosse recalculada, para a retirada dos juros correspondentes ao mês antecipado, no que foi atendido. Depois de recalculado, o valor da última prestação passou a ser de

A) R$ 438,90.
B) R$ 441,10.
C) R$ 440,00.
D) R$ 444,00.

15. 61L3 (CEFET-MG–2015) Um homem solicitou a um Banco um empréstimo de R$ 600,00 para ser pago em dois meses, do seguinte modo: ao final do primeiro mês, usando a taxa de 5% a.m., calculou o saldo devedor e pagou uma parcela de R$ 330,00. O valor restante foi pago ao final do mês seguinte a uma taxa de 2% a.m. O valor total de juros pagos representa, em relação ao empréstimo inicial, um percentual de

A) 6%.
B) 7%.
C) 8%.
D) 9%.

16. QQMF (UEFS-BA–2015) Uma pessoa contraiu um empréstimo a juros compostos de 20% ao mês, durante os 2 primeiros meses, e 10% ao mês pelos 2 meses seguintes. Ao final desse período, conseguiu negociar o pagamento da dívida com um abatimento de 10%. O juro total pago foi de, aproximadamente,

A) 50%.
B) 54%.
C) 57%.
D) 60%.
E) 64%.

17. M1ZP (UNIR-RO) A Revista *Veja*, edição número 2 131, de 23/09/2009, publicou a seguinte reportagem:

"Depois de muito protelar, o governo finalmente anunciou as novas regras para a caderneta de poupança. Uma alíquota única de imposto de renda, de 22,5%, vai incidir sobre as cadernetas com saldo superior a 50 000 reais. A taxação será feita sobre o valor que exceder esse patamar [...]."

A partir dessas informações e admitindo que uma caderneta de poupança renda juros de 1% ao mês, e que fora realizada na poupança uma aplicação de 70 000 reais por um período de dois meses, é correto afirmar que o rendimento líquido obtido ao final desse período é

A) R$ 1 407,00.
B) R$ 1 005,00.
C) R$ 1 316,55.
D) R$ 914,54.
E) R$ 879,38.

18. E56J (FGV-SP) César aplicou R$ 10 000,00 num fundo de investimentos que rende juros compostos a uma certa taxa de juro anual positiva **i**. Após um ano, ele saca desse fundo R$ 7 000,00 e deixa o restante aplicado por mais um ano, quando verifica que o saldo é R$ 6 000,00. O valor de $(4i - 1)^2$ é:

A) 0,01
B) 0,02
C) 0,03
D) 0,04
E) 0,05

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 5SJ5 (Enem–2017) Um empréstimo foi feito à taxa mensal de i%, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a **P**.

O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é:

A) $P\left[1+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}\right]$

B) $P\left[1+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2i}{100}\right)}\right]$

C) $P\left[1+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}\right]$

D) $P\left[\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{3i}{100}\right)}\right]$

E) $P\left[\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^3}\right]$

MATEMÁTICA

02. (Enem–2015) Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.
Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de:

A) 2 075,00
B) 2 093,00
C) 2 138,00
D) 2 255,00
E) 2 300,00

03. (Enem) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

- Investimento **A**: 3% ao mês
- Investimento **B**: 36% ao ano
- Investimento **C**: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1,03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá

A) escolher qualquer um dos investimentos **A**, **B** ou **C**, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
B) escolher os investimentos **A** ou **C**, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
C) escolher o investimento **A**, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos **B** e **C**.
D) escolher o investimento **B**, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento **A** e de 18% do investimento **C**.
E) escolher o investimento **C**, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos **A** e **B**.

04. (Enem) Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (Certificado de Depósito Bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (Imposto de Renda)
Poupança	0,560	Isento
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

A) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.
B) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.
C) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.
D) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.
E) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. D
03. C = R$ 40 000,00
04. B
05. A
06. R$ 630,00
07. D
08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. C
03.
  A) R$ 46 137,00
  B) R$ 21 000,00
04. A
05. D
06. A
07. C
08. C
09. B
10. E
11. C
12. Financeira A: R$ 384,00
  Financeira B: R$ 416,00
13. B
14. C
15. A
16. C
17. C
18. D

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. D
03. C
04. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Estatística

INTRODUÇÃO

A Estatística, objeto de estudo deste módulo, é a área da Matemática que tem por objetivo coletar, organizar, analisar e interpretar dados experimentais. Os conceitos estatísticos têm influenciado largamente a maioria dos ramos do conhecimento humano, seja para determinar índices de inflação ou desemprego, comumente divulgados, seja para fornecer informações à Medicina que possibilitem combater uma determinada doença.

DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS

Após um levantamento estatístico, os dados coletados podem ser organizados em uma tabela ou em um gráfico de distribuição de frequências. São mais utilizados os gráficos de barras, de colunas ou de setores.

Exemplo

Um dado foi lançado 50 vezes. A tabela e os gráficos a seguir mostram os seis resultados possíveis e as suas respectivas frequências de ocorrências.

Tabela:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Frequência absoluta	7	9	8	7	9	10
Frequência relativa	$\frac{7}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{10}{50}$

Como mostrado na tabela anterior, a frequência relativa é obtida dividindo-se a frequência absoluta pelo total de observações. Por exemplo, o resultado 6 apareceu em 10 das 50 repetições, portanto sua frequência relativa é $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ ou 0,2 ou 20%.

Gráficos:

Gráfico de colunas

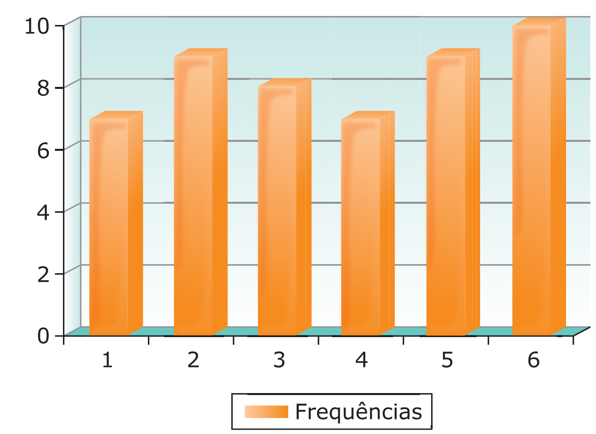
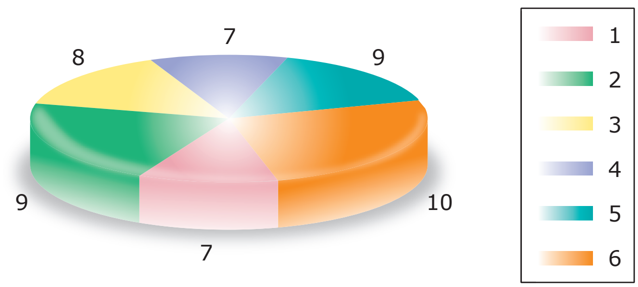


Gráfico de setor



MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Média aritmética

Dados **n** elementos, calculamos a média aritmética dividindo a soma desses elementos pela quantidade **n**.

Mediana

Mediana é o valor que ocupa a posição central em um conjunto ordenado. Se o número de elementos do conjunto for par, a mediana será a média aritmética dos dois valores centrais.

Moda

É o valor que apresenta maior frequência em um conjunto (aparece um maior número de vezes).

Exemplo

Calcular a média aritmética, a mediana e a moda da seguinte distribuição de notas de uma turma.

Aluno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nota	4,0	7,0	5,0	8,0	7,5	10	6,5	8,0	6,5	5,5

Pela definição, a média aritmética **A** das notas é dada por:

$$A = \frac{4+7+5+8+7{,}5+10+6{,}5+8+6{,}5+5{,}5}{10} \Rightarrow$$

$A = 6{,}8$

O conjunto ordenado **C** das notas dos alunos é:

$$C = \{4{,}0;\ 5{,}0;\ 5{,}5;\ 6{,}5;\ \overbrace{6{,}5;\ 7{,}0}^{\text{Termos centrais}};\ 7{,}5;\ 8{,}0;\ 8{,}0;\ 10\}$$

Como o número de elementos é par, então a mediana **m** das notas é:

$$m = \frac{6{,}5+7{,}0}{2} \Rightarrow m = 6{,}75$$

As modas das notas são 6,5 e 8,0, pois esses valores aparecem com maior frequência que os demais.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Fornecem informações a respeito da concentração dos valores estudados em torno das medidas de tendência central.

Amplitude

É a diferença entre o maior e o menor valor de um dado conjunto.

Desvio

É a diferença entre um valor qualquer (x_i) e a média aritmética (A) do conjunto.

$$\boxed{d_i = x_i - A}$$

Variância

É a média aritmética dos quadrados dos desvios.

$$\boxed{V = \frac{d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2}{n}}$$

Desvio padrão

É a raiz quadrada da variância.

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V}}$$

Exemplo

Sobre a distribuição dos lucros de uma empresa nos quatro primeiros meses, representada na tabela a seguir, calcular:

A) a amplitude.

B) os desvios de cada mês.

C) a variância.

D) o desvio padrão.

Mês	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril
Lucro (R$)	10 000	30 000	90 000	30 000

Pelas definições:

A) A amplitude **a** é dada por:

$a = 90\ 000 - 10\ 000 = 80\ 000$ reais

B) Para calcular o desvio, precisamos antes calcular a média aritmética **A** dos lucros.

$$A = \frac{10\ 000 + 30\ 000 + 90\ 000 + 30\ 000}{4} \Rightarrow$$

$A = 40\ 000$

Assim, os desvios d_J, d_F, d_M e d_A são dados por:

$d_J = 10\ 000 - 40\ 000 = -30\ 000$ reais

$d_F = 30\ 000 - 40\ 000 = -10\ 000$ reais

$d_M = 90\ 000 - 40\ 000 = 50\ 000$ reais

$d_A = 30\ 000 - 40\ 000 = -10\ 000$ reais

C) A variância **V** é dada por:

$$V = \frac{(-30\ 000)^2 + (-10\ 000)^2 + (50\ 000)^2 + (-10\ 000)^2}{4} \Rightarrow$$

$V = 900\ 000\ 000$ reais ao quadrado

D) O desvio padrão σ é dado por:

$\sigma = \sqrt{900\ 000\ 000} = 30\ 000$ reais

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFJF-MG) Um professor de Física aplicou uma prova, valendo 100 pontos, para seus 22 alunos e obteve, como resultado, a distribuição das notas vista no quadro seguinte:

40	20	10	20	70	60
90	80	30	50	50	70
50	20	50	50	10	40
30	20	60	60		

Faça os tratamentos de dados solicitados a seguir.

A) Determinar a frequência relativa da moda.

B) Esboçar um gráfico com as frequências absolutas de todas as notas.

C) Determinar a mediana dos valores da segunda linha do quadro apresentado.

Resolução:

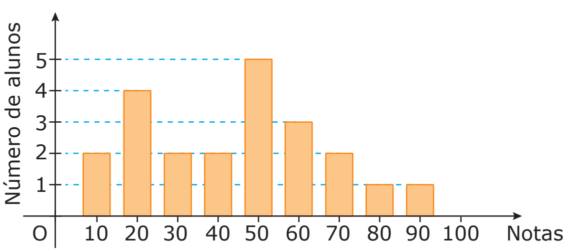
A)

Resultado	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Frequência absoluta	2	4	2	2	5	3	2	1	1

A moda das notas é 50, e a frequência absoluta destas é 5.

Logo, a frequência relativa da moda é $\frac{5}{22} \cong 22{,}7\%$.

B) O gráfico de colunas com as frequências absolutas de todas as notas é:



C) Na segunda linha, temos, em ordem crescente, a seguinte sequência de notas: 30, 50, 50, 70, 80, 90.

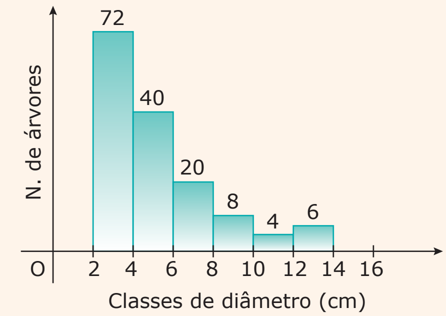
Se temos um número par de termos, então a mediana **m** será a média aritmética dos dois valores centrais.

Assim, $m = \frac{50 + 70}{2} \Rightarrow m = 60$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFLA-MG) A idade de uma árvore pode ser avaliada pela medida do diâmetro de seu tronco. A construção de diagramas indicando a distribuição em intervalos de classe para o diâmetro é uma forma de analisar a estrutura etária de uma população de árvores. O gráfico a seguir mostra a distribuição das classes de diâmetro para a espécie arbórea *Xylopia aromatica*.



Considerando esses dados, quantas árvores possuem troncos com diâmetro não inferior a 8 cm?

A) 8 árvores
B) 140 árvores
C) 4 árvores
D) 18 árvores
E) 10 árvores

02. (UEG-GO) A professora Maria Paula registrou as notas de sete alunos, obtendo os seguintes valores: 2, 7, 5, 3, 4, 7 e 8. A mediana e a moda das notas desses alunos são, respectivamente:

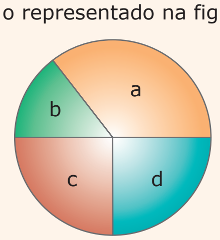
A) 3 e 7.

B) 3 e 8.

C) 5 e 7.

D) 5 e 8.

03. S1IE (UFRGS-RS) Os resultados de uma pesquisa de opinião foram divulgados utilizando um gráfico de setores circulares, como o representado na figura a seguir:



Ao setor **a** estão associadas 35% das respostas, ao setor **b**, 270 respostas e aos setores **c** e **d**, um mesmo número de respostas. Esse número é:

A) 45

B) 90

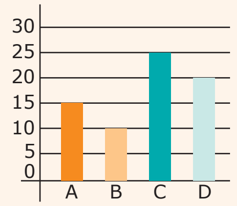
C) 180

D) 450

E) 900

MATEMÁTICA

04. OYN7 (UFG-GO) O gráfico a seguir indica a preferência dos alunos de uma escola por apenas uma das revistas A, B, C ou D.



De acordo com as informações apresentadas nesse gráfico, o número de alunos que preferem a revista D é

A) menor que a metade dos que preferem as revistas B ou C.

B) maior que a metade do total de alunos da escola.

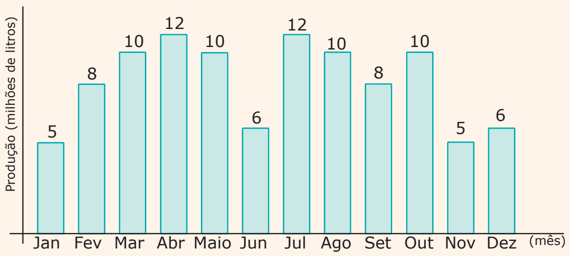
C) igual à soma dos que preferem as revistas A ou B.

D) igual à média aritmética dos que preferem as revistas A ou C.

E) dez vezes maior do que aqueles que preferem a revista B.

05. 6RXD (UFSM-RS) O uso de biodiesel gera uma série de efeitos ambientais, tais como a redução da emissão de gases do efeito estufa e a diminuição da poluição atmosférica.

O gráfico mostra a produção de biodiesel (em milhões de litros) em uma usina, durante o período de um ano.



De acordo com os dados, a média, a mediana e a moda (em milhões de litros) são, respectivamente, iguais a

A) 8,5; 10 e 9.

B) 8; 9 e 10.

C) 8; 9,5 e 8.

D) 8,5; 9 e 10.

E) 8,5; 9,5 e 10.

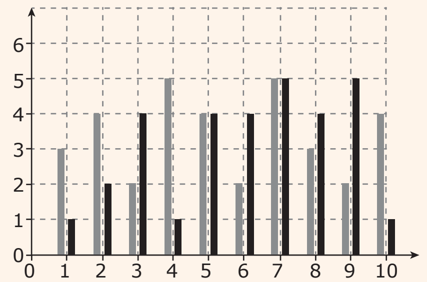
06. G2T2 (UFU-MG) Uma pesquisa com 27 crianças, realizada por psicólogos em um ambiente hospitalar, avalia a redução dos custos hospitalares mensais individuais em função do bem-estar emocional promovido pela vivência de atividades artísticas.

Redução do custo mensal (por criança) em reais	Número de crianças
700,00	8
900,00	5
1 400,00	1
2 000,00	7
2 400,00	5
3 000,00	1

Com base nos dados descritos na tabela, a soma da média aritmética e da mediana correspondente à distribuição de redução dos custos mencionada é igual a:

A) 2 900 B) 3 400 C) 3 200 D) 3 700

07. PWAP (Insper-SP–2015) O gráfico a seguir representa o número de gols marcados (barras em cinza) e o número de gols sofridos (barras em preto) por uma equipe de futebol de salão nos 10 jogos de um campeonato.



Em cada partida, o saldo de gols da equipe é dado pela diferença entre os gols marcados e os gols sofridos. A média dos saldos de gols da equipe nesses dez jogos é igual a:

A) −0,3
B) −0,1
C) 0
D) 0,1
E) 0,3

08. (UFPR–2018) Leonardo fez uma pesquisa sobre o preço da jarra de suco de laranja em algumas lanchonetes da região e obteve os seguintes valores:

Lanchonete	Preço
A	R$ 10,75
B	R$ 6,00
C	R$ 9,50
D	R$ 11,00
E	R$ 5,25
F	R$ 7,00
G	R$10,50
H	R$ 8,00

A) Calcule a média e a mediana dos preços apresentados na tabela.

B) Leonardo decidiu acrescentar duas lanchonetes em sua pesquisa. Ao considerar todos os 10 estabelecimentos, a média de preços passou a ser de R$ 8,45. Sabendo que essas duas novas lanchonetes cobram o mesmo preço pela jarra de suco, calcule esse valor.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UPE–2016) Preocupada com o hábito de leitura na escola onde trabalha, uma bibliotecária aplicou uma pesquisa, num grupo de 200 estudantes escolhidos de forma aleatória, sobre a quantidade de livros que cada aluno havia solicitado por empréstimo no primeiro semestre de 2015. Os dados coletados na pesquisa estão apresentados na tabela a seguir:

Livros emprestados por aluno	
Número de livros	**Número de alunos**
3	90
2	55
1	30
0	25
Total	200

Para esses dados, a média, a moda e a mediana são respectivamente:

A) 1,50; 2,00; 3,00
B) 1,50; 3,50; 2,00
C) 1,50; 3,00; 3,00
D) 2,05; 3,00; 2,00
E) 2,05; 3,00; 3,00

02. XQ8B

(UFU-MG) Uma empresa seleciona 16 funcionários fumantes e promove um ciclo de palestras com eles para esclarecimentos sobre os efeitos prejudiciais do cigarro à saúde. Após essas palestras, são coletados dados sobre a quantidade de cigarros que cada um desses fumantes está consumindo diariamente. Tais dados são expressos da seguinte maneira:

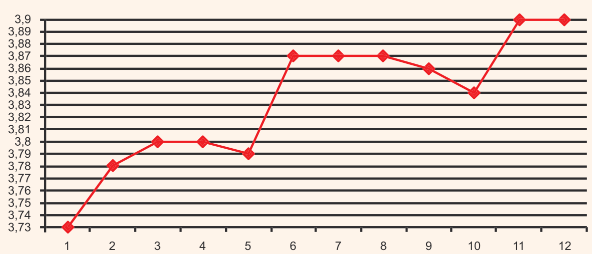
10, 1, 10, 11, 13, 10, 34, 13, 13, 12, 12, 11, 13, 11, 12, 12

Os dados 1 e 34 são chamados discrepantes, pois são dados muito menores ou muito maiores que a maioria dos dados obtidos. Segundo essa coleta de dados, pode-se afirmar que

A) os cálculos da média, da mediana e da moda não sofrem influência dos dados discrepantes.
B) o cálculo da mediana sofre influência dos dados discrepantes que surgiram.
C) o cálculo da moda sofre influência dos dados discrepantes que surgiram.
D) o cálculo da média sofre influência dos dados discrepantes que surgiram.

03. MDØ8

(UFJF-MG–2016) O gráfico a seguir apresenta a variação da cotação do dólar dos EUA em 12 dias úteis seguidos do mês de setembro de 2015.



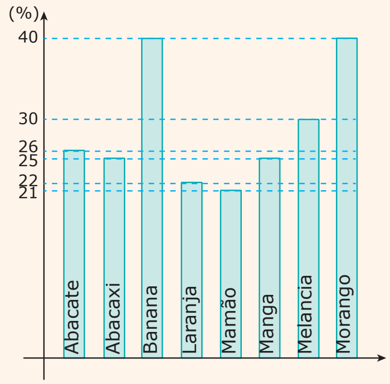
Disponível em: <http://www4.bcb.gov.br/pec/taxas/port/ptaxnpes.asp?id=txctacao>. Acesso em: 01 out. 2015 (Adaptação).

Calculando a média, a moda e a mediana da amostra de cotações do dólar nesse período, podemos afirmar que:

A) Média < Mediana < Moda
B) Média < Moda = Mediana
C) Mediana < Média < Moda
D) Mediana < Moda < Média
E) Moda = Mediana < Média

04. IØGK

(UFSM-RS–2015) O Brasil é o quarto produtor mundial de alimentos, produzindo mais do que o necessário para alimentar sua população. Entretanto, grande parte da produção é desperdiçada.
O gráfico mostra o percentual do desperdício de frutas nas feiras do estado de São Paulo.



Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?uwXcErXvp1E>. Acesso em: 10 set. 2014 (Adaptação).

Considerando os dados do gráfico, a média aritmética, a moda e a mediana são, respectivamente,

A) 28,625; 25 e 40; 25,5.
B) 28,625; 25 e 40; 26.
C) 28,625; 40; 26.
D) 20,5; 25 e 40; 25,5.
E) 20,5; 40; 25,5.

05.

(EPCAR-MG–2017) As notas de oito alunos numa prova de matemática foram escritas pelo professor numa tabela como a que segue:

Aluno	A	B	C	D	E	F	G	H
Nota	6,5	10	8	9,4	8	6,4	x	7,4

Sabe-se que a média aritmética dessas notas é 8,2. Considerando as notas dos oito alunos, é correto afirmar que a nota do aluno G é

A) igual à moda.
B) inferior a 9,8.
C) superior à mediana.
D) inferior à média aritmética das outras sete notas.

06. XFGØ

(UPE–2016) Ao realizar o levantamento das famílias de uma pequena cidade do interior, cujos filhos são beneficiários de algum programa social, um pesquisador obteve os seguintes dados:

Beneficiados em Programa Social	
Número de filhos	**Quantidade de famílias**
5	03
4	07
3	21
2	28
1	23
0	18
	Total: 100

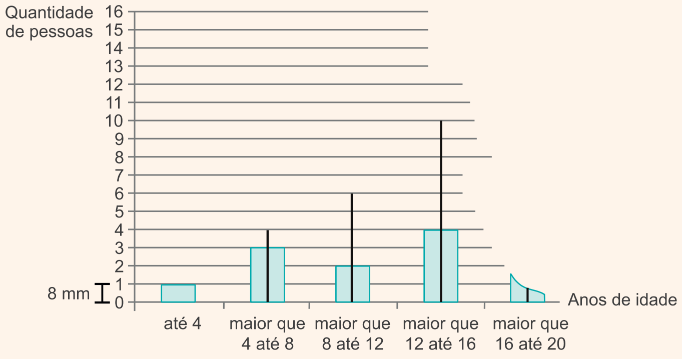
Com base nessas informações, é correto afirmar que o desvio-padrão do número de filhos dessa amostra é de, aproximadamente,

A) 1,4
B) 1,8
C) 2,0
D) 2,5
E) 6,7

MATEMÁTICA

07. 9ITX

(FGV) O gráfico de barras indica como informação principal o número de pessoas atendidas em um pronto-socorro, por faixa etária, em um determinado dia. Outra informação apresentada no gráfico, por meio das linhas verticais, é a frequência acumulada. Em virtude de um rasgo na folha em que o gráfico estava desenhado, as informações referentes à última barra, e apenas elas, foram perdidas, como se vê na figura.



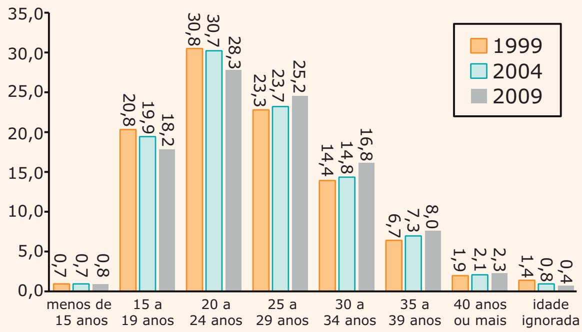
A média de idade do total de pessoas de 0 a 20 anos que frequentou o pronto-socorro nesse dia foi 12,4 anos. Nessas condições, na folha intacta do gráfico original, o comprimento da linha vertical posicionada na última barra, que indica a frequência acumulada até 20 anos de idade, em centímetros, era igual a:

A) 8,8
B) 9,6
C) 10,4
D) 11,2
E) 12,0

08. GM9T

(FUVEST-SP–2015) Examine o gráfico.

PORCENTAGEM DE REGISTROS DE NASCIMENTOS DO ANO POR GRUPOS DE IDADES DA MÃE
BRASIL - 1999 / 2004 / 2009



IBGE. Diretora de Pesquisa, Coordenação de População e Indicadores Sociais, Estatísticas do Registro Civil, 1999/2004/2009. (Adaptação).

Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar corretamente que a idade

A) mediana das mães das crianças nascidas em 2009 foi maior que 27 anos.
B) mediana das mães das crianças nascidas em 2009 foi menor que 23 anos.
C) mediana das mães das crianças nascidas em 1999 foi maior que 25 anos.
D) média das mães das crianças nascidas em 2004 foi maior que 22 anos.
E) média das mães das crianças nascidas em 1999 foi menor que 21 anos.

09.

(UPE) Numa competição esportiva, cinco atletas estão disputando as três primeiras colocações da prova de salto em distância. A classificação será pela ordem decrescente da média aritmética de pontos obtidos por eles, após três saltos consecutivos na prova. Em caso de empate, o critério adotado será a ordem crescente do valor da variância. A pontuação de cada atleta está apresentada na tabela a seguir:

Atleta	Pontuação 1º salto	Pontuação 2º salto	Pontuação 3º salto
A	6	6	6
B	7	3	8
C	5	7	6
D	4	6	8
E	5	8	5

Com base nas informações apresentadas, o primeiro, o segundo e o terceiro lugares dessa prova foram ocupados, respectivamente, pelos atletas

A) A; C; E.
B) B; D; E.
C) E; D; B.
D) B; D; C.
E) A; B; D.

10. 6DQ3

(UPE–2015) A taxa anual de juros básicos (Taxa Selic), determinada pelo governo brasileiro, é aplicável no pagamento, restituição, compensação ou reembolso de tributos federais. Na tabela a seguir, temos a evolução da Taxa Selic nos últimos 10 anos, nos cinco primeiros meses de cada ano.

Mês / Ano	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
2005	1,38%	1,22%	1,53%	1,41%	1,50%
2006	1,43%	1,15%	1,42%	1,08%	1,28%
2007	1,08%	0,87%	1,05%	0,94%	1,03%
2008	0,93%	0,80%	0,84%	0,90%	0,88%
2009	1,05%	0,86%	0,97%	0,84%	0,77%
2010	0,66%	0,59%	0,76%	0,67%	0,75%
2011	0,86%	0,84%	0,92%	0,84%	0,99%
2012	0,89%	0,75%	0,82%	0,71%	0,74%
2013	0,60%	0,49%	0,55%	0,61%	0,60%
2014	0,85%	0,79%	0,77%	0,82%	0,87%

Com base nessas informações, analise as sentenças a seguir:

I. A taxa média do mês de fevereiro nos últimos 10 anos ficou acima de 1%.

II. A taxa modal dos cinco primeiros meses do ano de 2013 foi de 0,60%.

III. A taxa mediana do mês de março nos últimos 10 anos é de 0,88%.

IV. A taxa média dos cinco primeiros meses de 2007 foi de 1,05%.

Está correto o que se afirma, apenas, em

A) I, II e III.

B) II, III e IV.

C) I, III e IV.

D) I e IV.

E) II e III.

11. EØ54 (FGV) Ao conjunto {5, 6, 10, 11} inclui-se um número natural **n**, diferente dos quatro números que compõem esse conjunto. Se a média aritmética dos cinco elementos do novo conjunto é igual a sua mediana, então, a soma de todos os possíveis valores de **n** é igual a:

A) 20

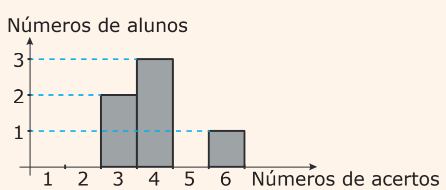
B) 22

C) 23

D) 24

E) 26

12. SG8Ø (EPCAR-MG–2016) Um cursinho de inglês avaliou uma turma completa sendo que parte dos alunos fez a avaliação A, cujo resultado está indicado no gráfico a seguir.



Os demais alunos fizeram a avaliação B e todos tiveram 4 acertos. Assim, o desvio padrão obtido a partir do gráfico acima ficou reduzido à metade ao ser apurado o resultado da turma inteira.

Essa turma do cursinho de inglês tem

A) mais de 23 alunos.

B) menos de 20 alunos.

C) 21 alunos.

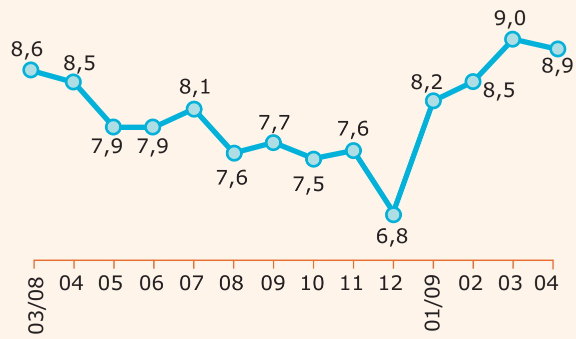
D) 22 alunos.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. FLLM (Enem–2017) O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

Taxa de desemprego



IBGE. *Pesquisa mensal de emprego*. Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 30 jul. 2012 (Adaptação).

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

A) 8,1%.

B) 8,0%.

C) 7,9%.

D) 7,7%.

E) 7,6%.

02. (Enem–2017) Passar trote nos telefones de emergência da Polícia Militar, Corpo de Bombeiros e Serviço de Atendimento Móvel de Urgência (Samu) pode resultar em multa para o dono do telefone de onde partiu a ligação. Para exemplificar a seriedade dessa questão, em uma cidade brasileira, um jornal local publicou a tabela a seguir, mostrando o número de trotes telefônicos recebidos pelos bombeiros da cidade, ao longo de um semestre.

Meses	Trotes
Jan	18
Fev	20
Mar	30
Abr	16
Maio	14
Jun	16

Qual o valor mediano da quantidade de trotes recebidos nesse semestre?

A) 16

B) 17

C) 18

D) 19

E) 23

MATEMÁTICA

03. (Enem–2016) Uma pessoa está disputando um processo de seleção para uma vaga de emprego em um escritório. Em uma das etapas desse processo, ela tem de digitar oito textos. A quantidade de erros dessa pessoa, em cada um dos textos digitados, é dada na tabela.

Texto	Número de erros
I	2
II	0
III	2
IV	2
V	6
VI	3
VII	4
VIII	5

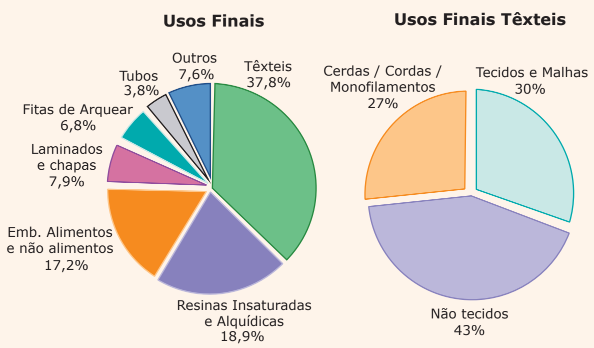
Nessa etapa do processo de seleção, os candidatos serão avaliados pelo valor da mediana do número de erros.

A mediana dos números de erros cometidos por essa pessoa é igual a:

A) 2,0
C) 3,0
E) 4,0
B) 2,5
D) 3,5

04. (Enem–2015) O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).

PET reciclado – 2010



Disponível em: <www.abipet.org.br>. Acesso em: 12 jul. 2012 (Adaptação).

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de:

A) 16,0
C) 32,0
E) 106,6
B) 22,9
D) 84,6

05. (Enem) Os candidatos **K**, **L**, **M**, **N** e **P** estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de Português, Matemática, Direito e Informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

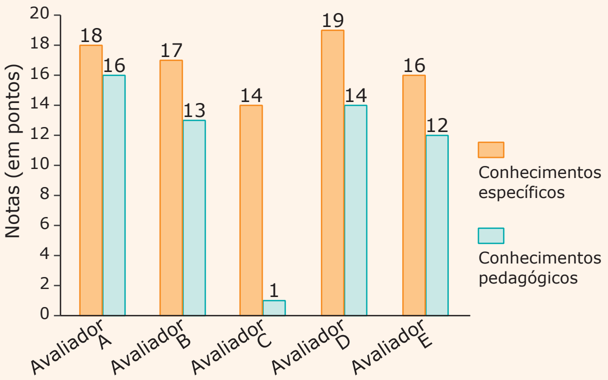
Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior.

O candidato aprovado será:

A) K
C) M
E) P
B) L
D) N

06. (Enem) As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribui duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.

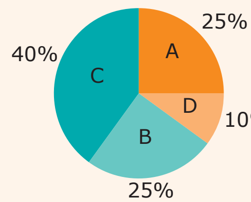


Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

A) 0,25 ponto maior.
D) 1,25 ponto maior.
B) 1,00 ponto maior.
E) 2,00 pontos menor.
C) 1,00 ponto menor.

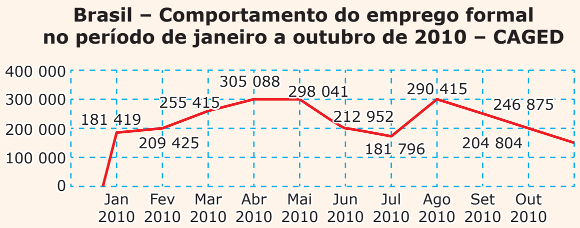
07. (Enem) Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R$ 200,00; B = R$ 300,00; C = R$ 400,00 e D = R$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é:

A) 300,00
C) 350,00
E) 400,00
B) 345,00
D) 375,00

08. (Enem) O gráfico apresenta o comportamento do emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.



Disponível em: <www.mte.gov.br>.
Acesso em: 28 fev. 2012 (Adaptação).

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é:

A) 212 952
B) 229 913
C) 240 621
D) 255 496
E) 298 041

09. (Enem) Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de suas propriedades. Os talhões têm a mesma área de 30 000 m² e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10 000 m²).

A variância das produções dos talhões expressa em (sacas/hectare)² é:

A) 20,25
B) 4,50
C) 0,71
D) 0,50
E) 0,25

10. (Enem) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

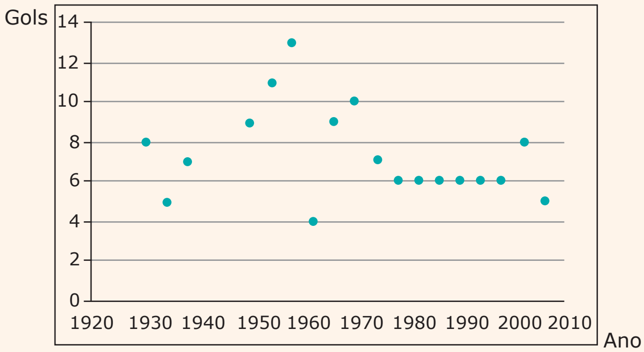
Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

A) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.
B) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.
C) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.
D) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.
E) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.

11. (Enem) O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006.

Quantidades de gols dos artilheiros das Copas do Mundo



Disponível em: <http://www.suapesquisa.com>.
Acesso em: 23 abr. 2010 (Adaptação).

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?

A) 6 gols.
B) 6,5 gols.
C) 7 gols.
D) 7,3 gols.
E) 8,5 gols.

12. (Enem) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para a classificação no concurso, o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos gerais	Média	Mediana	Desvio padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

A) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
B) Marco, pois obteve menor desvio padrão.
C) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
D) Paulo, pois obteve maior mediana.
E) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

13. (Enem) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se **X**, **Y** e **Z** são, respectivamente, a média, a mediana e a moda dessa distribuição, então:

A) $X = Y < Z$
B) $Z < X = Y$
C) $Y < Z < X$
D) $Z < X < Y$
E) $Z < Y < X$

14. (Enem) Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas.

Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)

Equipes	Média	Moda	Desvio padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe:

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

15. (Enem) Depois de jogar um dado em forma de cubo e de faces numeradas de 1 a 6, por 10 vezes consecutivas, e anotar o número obtido em cada jogada, construiu-se a seguinte tabela de distribuição de frequências.

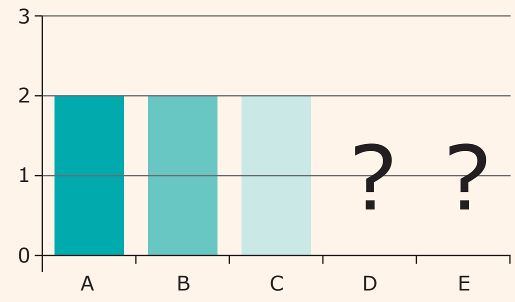
Número obtido	Frequência
1	4
2	1
4	2
5	2
6	1

A média, mediana e moda dessa distribuição de frequências são, respectivamente:

A) 3, 2 e 1.
B) 3, 3 e 1.
C) 3, 4 e 2.
D) 5, 4 e 2.
E) 6, 2 e 4.

16. (Enem) Cinco equipes, **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, disputaram uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi de 2 pontos. As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir; entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe **D** e da equipe **E**.

Pontuação da gincana



Mesmo sem aparecer as notas das equipes **D** e **E**, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente,

A) 1,5 e 2,0.
B) 2,0 e 1,5.
C) 2,0 e 2,0.
D) 2,0 e 3,0.
E) 3,0 e 2,0.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. C
- 03. D
- 04. D
- 05. D
- 06. A
- 07. E
- 08.
  - A) Média = 8,5
    Mediana = 8,75
  - B) R$ 8,25

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. D	04. A	07. E	10. E
02. D	05. C	08. D	11. E
03. A	06. A	09. A	12. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. B	05. D	09. E	13. E
02. B	06. B	10. B	14. C
03. B	07. C	11. B	15. B
04. C	08. B	12. B	16. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %