Terça-feira, 8 de Julho de 2014

Problema 1. Seja $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ uma sequência infinita de inteiros positivos. Prove que existe um único inteiro $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problema 2. Seja $n \geq 2$ um inteiro. Considere um tabuleiro de xadrez $n \times n$ dividido em n^2 quadrados unitários. Uma configuração de n torres neste tabuleiro é dita *pacífica* se cada linha e cada coluna contém exatamente uma torre. Encontre o maior inteiro positivo k tal que, para qualquer configuração pacífica de n torres, podemos encontrar um quadrado $k \times k$ sem torres em qualquer um dos seus k^2 quadrados unitários.

Problema 3. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. O ponto H é o pé da perpendicular de A sobre BD. Os pontos S e T são escolhidos sobre os lados AB e AD, respectivamente, de modo que H esteja no interior do triângulo SCT e

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90° .$$

Prove que a reta BD é tangente à circunferência circunscrita ao triângulo TSH.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Quarta-feira, 9 de Julho de 2014

Problema 4. Os pontos P e Q encontram-se sobre o lado BC de um triângulo acutângulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Os pontos M e N encontram-se sobre as retas AP e AQ, respectivamente, de modo que P é o ponto médio de AM e Q é o ponto médio de AN. Prove que as retas BM e CN se intersectam sobre a circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Problema 5. Para cada inteiro positivo n, o Banco da Cidade do Cabo emite moedas de valor $\frac{1}{n}$. Dada uma coleção finita de tais moedas (de valores não necessariamente distintos) com valor total de no máximo $99 + \frac{1}{2}$, prove que é possível dividir esta coleção em 100 ou menos grupos de moedas, cada um com valor total de no máximo 1.

Problema 6. Um conjunto de retas no plano está em *posição geral* se não há duas paralelas nem três concorrentes no mesmo ponto. Um conjunto de retas em posição geral corta o plano em regiões, algumas com área finita, chamadas *regiões finitas*. Prove que, para todo n suficientemente grande, em qualquer conjunto de n retas em posição geral é possível pintar de azul pelo menos $\sqrt{n}$ dessas retas, de modo que nenhuma das suas regiões finitas tenha uma fronteira completamente azul.

Nota: Para resultados em que $\sqrt{n}$ é substituído por $c\sqrt{n}$ serão atribuídos pontos conforme o valor da constante c.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos