MESTRES DA MATEMÁTICA

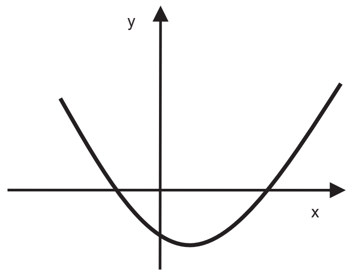
Função Quadrática

FUNÇÃO QUADRÁTICA

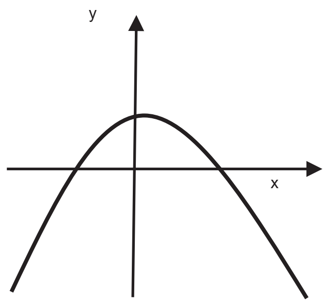
1) Definição: Sejam a, b e c números reais, com $a \neq 0$, chamamos de função polinomial do 2º grau ou função quadrática, a toda função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, representada por $f(x) = ax^2 + b\,x + c$.

2) Gráfico: O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Se a > 0, a concavidade da parábola está voltada para cima e a função admite mínimo.



Se a < 0, a concavidade da parábola está voltada para baixo e a função admite máximo.



3) Interseção com os eixos coordenados: Graficamente, as interseções da parábola com o eixo x evidenciam as raízes reais da função e a interseção com o eixo y é o ponto de coordenadas (0, c).

4) Raízes: Chama-se raiz ou zero da função do 2º grau aos elementos do domínio da função que possuem imagem nula, ou seja, todos os valores de *x* para os quais teremos $f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$.

Uma forma de encontrar as raízes da função do 2º grau é usar a fórmula de Báskara.

$$\begin{cases} a\,x^2 + bx + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \quad (*)$$

O número de raízes de uma função do 2º grau será determinado pelo valor do discriminante Δ (delta) da função.

- Se $\Delta > 0 \Rightarrow$ a função apresenta duas raízes reais e distintas.
- Se $\Delta = 0 \Rightarrow$ a função apresenta duas raízes reais e iguais ou podemos dizer que a função apresenta uma raiz dupla.
- Se $\Delta < 0 \Rightarrow$ a função não apresenta raízes reais.

OBS: Relação de Girard

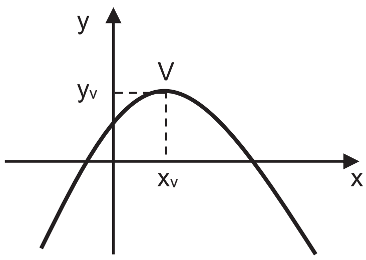
As relações de Soma e Produto das raízes das raízes da equação do segundo grau são conhecidas como relações de Girard, sendo $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$, essas relações são dadas por $\begin{cases} \text{Soma} = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \text{Produto} = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

5) Forma fatorada da função do 2º grau.

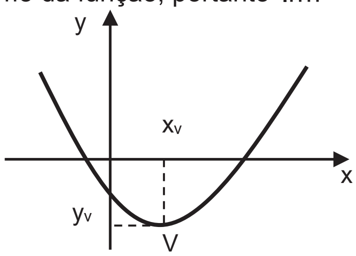
Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + b\,x + c$ que possua raízes reais x_1 e x_2 pode ser escrita como um produto de duas funções do 1º grau: $f(x) = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$.

6) Vértice da Parábola: $V = (x_v, y_v)$, onde temos $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = f(x_v) = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

1º caso: Se a < 0, y_v é o valor máximo da função, portanto $\text{Im}f = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \leq y_v\}$.



2º caso: Se a > 0, y_v é o valor mínimo da função, portanto $\text{Im}f = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq y_v\}$

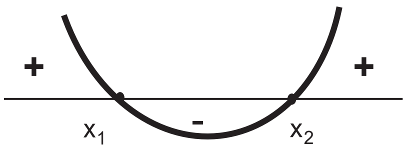


OBS: $\begin{cases} x_v \text{ é o valor de x que faz a função assumir o máximo ou o mínimo} \\ y_v \text{ é o valor máximo ou mínimo assumido pela função} \end{cases}$

7) Estudo de sinal da função do 2º grau

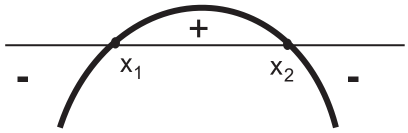
1º caso: $y = ax^2 + bx + c$, $\Delta > 0$ (duas raízes reais e distintas).

a) a > 0



$$\begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \\ f(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \\ f(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

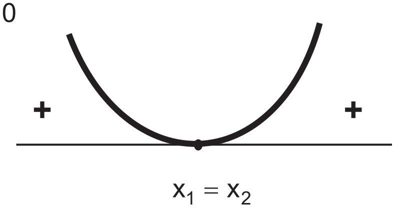
b) a < 0



$$\begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \\ f(x) < 0 \Leftrightarrow x < x_1 \text{ ou } x > x_2 \\ f(x) > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

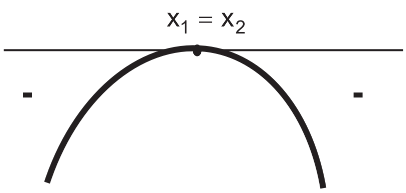
2º caso: $y = ax^2 + bx + c$, $\Delta = 0$ (uma raiz dupla)

a) a > 0



$$\begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = x_2 \\ f(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq x_1 \end{cases}$$

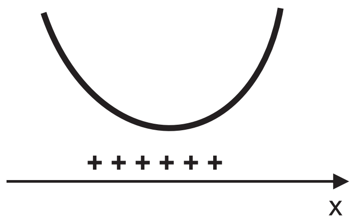
b) a > 0



$$\begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = x_2 \\ f(x) < 0 \Leftrightarrow x \neq x_1 \end{cases}$$

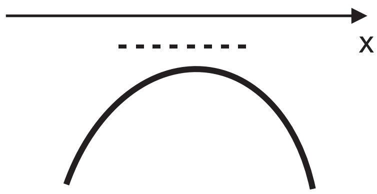
3º caso: $y = ax^2 + bx + c$, $\Delta < 0$ (a função nunca se anula).

a) a > 0



$f(x) > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) a < 0



$f(x) < 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

OBS: Demonstração da fórmula de Báskara:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = \Delta$

$$\Rightarrow (2ax + b)^2 = \Delta \Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$