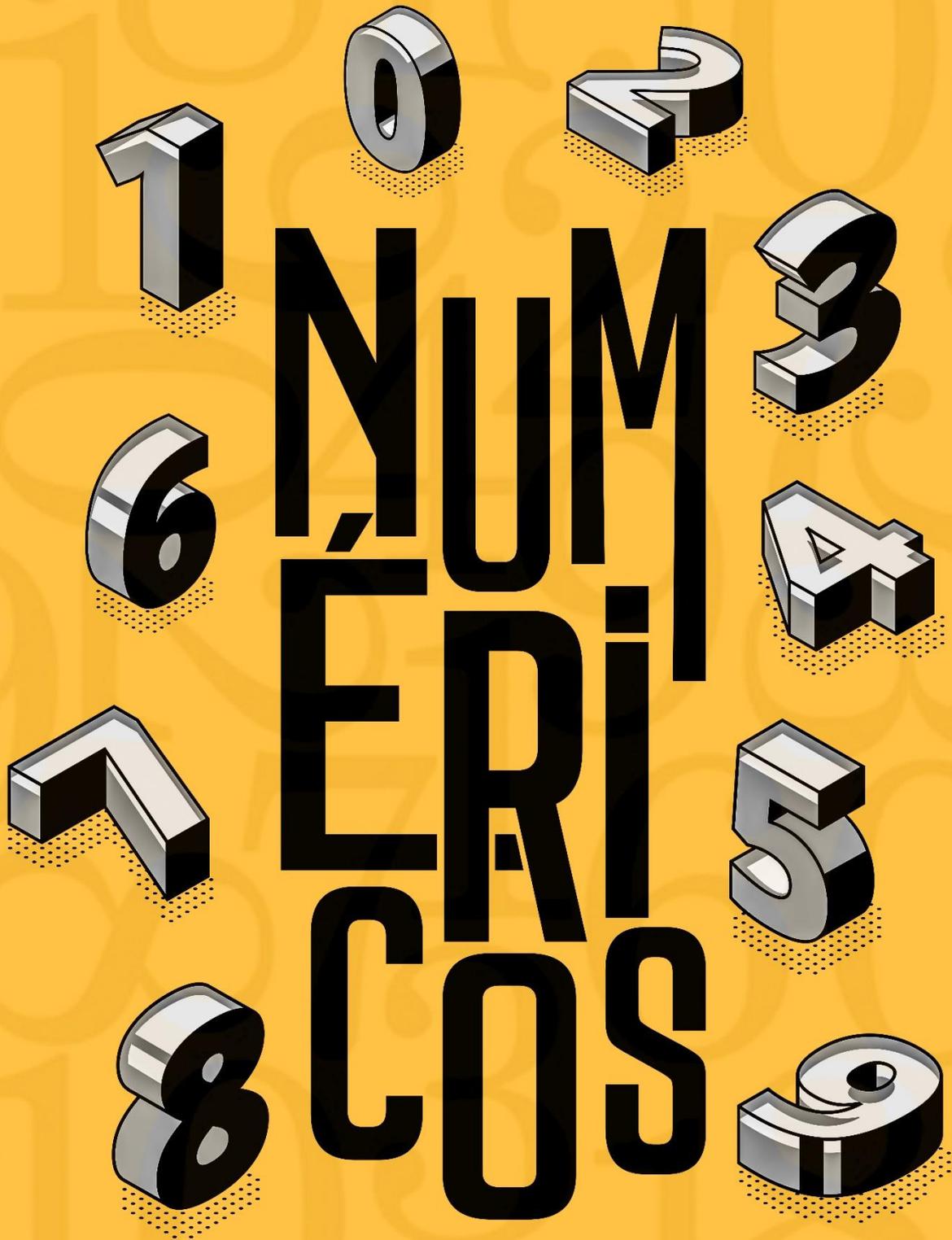
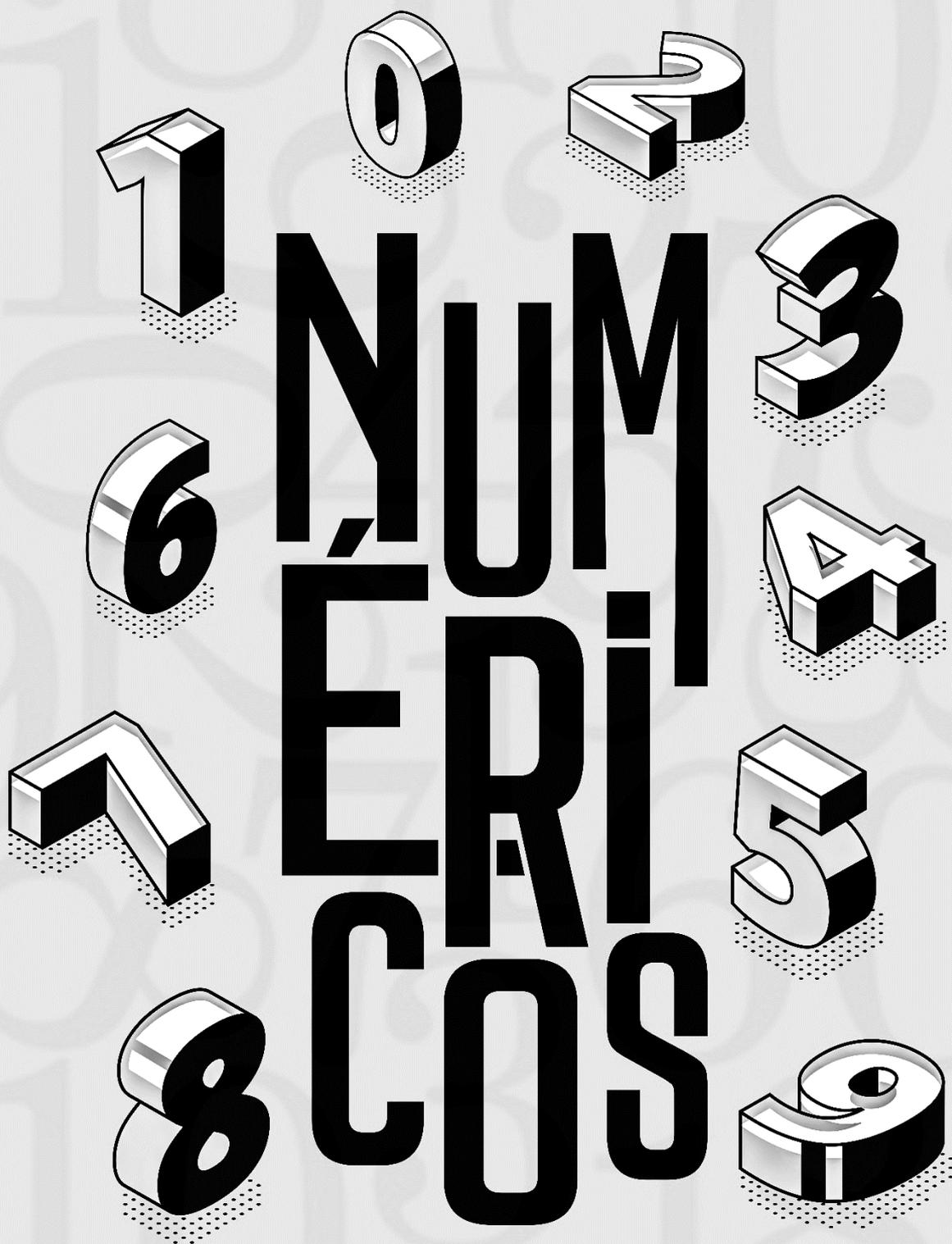


# CONHECIMENTOS





# CONHECIMENTOS





# SUMÁRIO

## CONJUNTOS ..... 09

|  |    |
|--|----|
| REGIÕES DO DIAGRAMA PARA DOIS CONJUNTOS .....    | 09 |
| BOTA E TIRA PARA DOIS CONJUNTOS .....            | 14 |
| QUESTÕES - DOIS CONJUNTOS .....                  | 16 |
| REGIÕES DO DIAGRAMA PARA TRÊS CONJUNTOS .....    | 29 |
| BOTA E TIRA PARA TRÊS CONJUNTOS .....            | 33 |
| QUESTÕES - BOTA E TIRA PARA TRÊS CONJUNTOS ..... | 36 |
| PREENCHENDO O DIAGRAMA PARA TRÊS CONJUNTOS ..... | 47 |
| DIAGRAMA MATRICIAL E FLUXOGRAMA .....            | 59 |
| QUESTÕES - DIAGRAMA MATRICIAL E FLUXOGRAMA ..... | 63 |
| GABARITO - CONJUNTOS .....                       | 66 |

## RAZÃO, PROPORÇÃO, REGRA DE TRÊS E ESCALAS ..... 69

|  |     |
|--|-----|
| RAZÃO .....  | 69  |
| RAZÕES IMPORTANTES .....                                   | 70  |
| QUESTÕES - RAZÃO .....                                     | 72  |
| PROPORÇÃO .....  | 85  |
| GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS .....                  | 85  |
| GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS .....                 | 88  |
| QUESTÕES - GRANDEZAS PROPORCIONAIS .....                   | 90  |
| DIVISÕES PROPORCIONAIS .....                               | 97  |
| QUESTÕES - DIVISÕES PROPORCIONAIS .....                    | 99  |
| REGRA DE TRÊS SIMPLES .....                                | 102 |
| REGRA DE TRÊS COMPOSTA .....                               | 103 |
| QUESTÕES - REGRA DE TRÊS .....                             | 106 |
| TRABALHO HARMÔNICO - PROBLEMAS COM TORNEIRAS .....         | 121 |
| QUESTÕES - PROBLEMAS COM TORNEIRAS .....                   | 125 |
| ESCALAS .....  | 129 |
| QUESTÕES - ESCALAS .....                                   | 133 |
| GABARITO - RAZÃO, PROPORÇÃO, REGRA DE TRÊS E ESCALAS ..... | 141 |

## PORCENTAGEM ..... 145

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| INTRODUÇÃO .....             | 145 |
| AUMENTOS PERCENTUAIS .....   | 148 |
| REDUÇÕES PERCENTUAIS .....   | 153 |
| QUESTÕES - PORCENTAGEM ..... | 157 |
| GABARITO - PORCENTAGEM ..... | 192 |



 /anderson\_gleryston  /andersonglerystonmatematica

 Anderson Gleryston Matemática

# SUMÁRIO

## PROGRESSÃO ARITMÉTICA ..... 195

|   |     |
|---|-----|
| DEFINIÇÃO .....                             | 195 |
| TERMO GERAL DA P.A. ....                    | 196 |
| QUESTÕES - TERMO GERAL DA P.A. ....         | 199 |
| SOMA DOS TERMOS DE UMA P.A. ....            | 207 |
| QUESTÕES - SOMA DOS TERMOS DE UMA P.A. .... | 211 |
| GABARITO - PROGRESSÃO ARITMÉTICA .....      | 221 |

## PROGRESSÃO GEOMÉTRICA ..... 225

|   |     |
|---|-----|
| DEFINIÇÃO .....                                       | 225 |
| TERMO GERAL DA P.G. ....                              | 227 |
| QUESTÕES - TERMO GERAL DA P.G. ....                   | 230 |
| SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. ....                      | 239 |
| QUESTÕES - SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. ....           | 242 |
| SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. INFINITA .....            | 247 |
| QUESTÕES - SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. INFINITA ..... | 250 |
| GABARITO - PROGRESSÃO GEOMÉTRICA .....                | 255 |

## MATEMÁTICA FINANCEIRA ..... 259

|  |     |
|--|-----|
| CONCEITOS INICIAIS .....               | 259 |
| JUROS SIMPLES .....                    | 260 |
| QUESTÕES - JUROS SIMPLES .....         | 262 |
| JUROS COMPOSTOS .....                  | 268 |
| QUESTÕES JUROS COMPOSTOS .....         | 270 |
| GABARITO - MATEMÁTICA FINANCEIRA ..... | 278 |

## MMC E MDC ..... 281

|  |     |
|--|-----|
| MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM .....            | 281 |
| QUESTÕES - MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM ..... | 283 |
| MÁXIMO DIVISOR COMUM .....             | 286 |
| QUESTÕES - MÁXIMO DIVISOR COMUM .....  | 288 |
| GABARITO - MMC E MDC .....             | 291 |



 /anderson\_gleryston  /andersonglerystonmatematica

 Anderson Gleryston Matemática

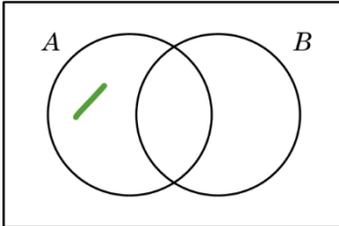
# CONJUNTOS



**A**NDERSON  
MATEMÁTICA

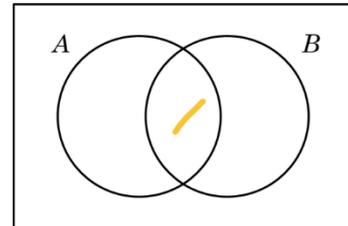


Antes de iniciarmos com as operações entre conjuntos, seria interessante conhecer um pouco sobre as regiões do diagrama de EULER-VENN, as famosas “bolinhas”. Neste momento, nos dedicaremos às regiões encontradas quando analisamos dois conjuntos: A e B.



Esta região em verde representa os elementos que estão **SOMENTE** em A. Estar somente em A significa estar em A e não pertencer a conjunto algum além de A, significa estar em A e não estar em B. Esta região é simbolizada pela operação matemática  $(A - B)$ .

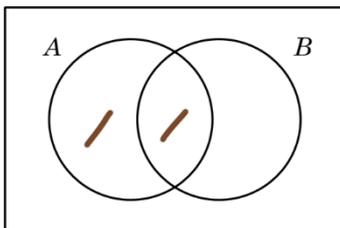
A região em amarelo representa os elementos que estão no conjunto A e também estão no conjunto B. Esta região também é chamada de interseção dos conjuntos A e B, simbolizada por  $(A \cap B)$ .



Atenção

Muitos alunos confundem estar em A com estar **SOMENTE** em A. Quando dizemos que um elemento está em A, não excluimos a possibilidade de ele estar em outro lugar além de A. Quando dizemos que um elemento está somente em A, ele deve pertencer somente à A, não estando em qualquer outro conjunto.

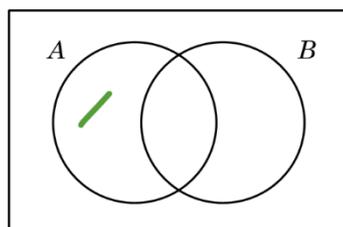
Observe a ilustração abaixo:



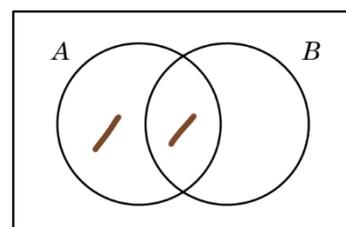
As duas regiões em marrom juntas representam os elementos que estão em A. A região marrom mais à esquerda representa os elementos que estão somente em A, já a região marrom que está mais à direita representa os elementos que estão em A e que também estão em B. Perceba que, o fato de estar em A, não exclui a possibilidade de estar em B.

Sintetizando, existe uma sutil diferença entre estar em A e estar somente em A. E é importante que você memorize isso!

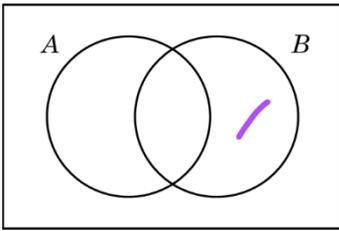
Somente em A:



Em A:

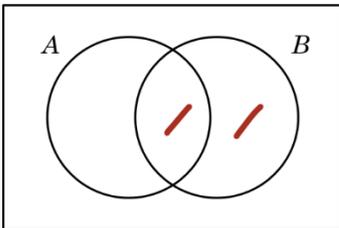
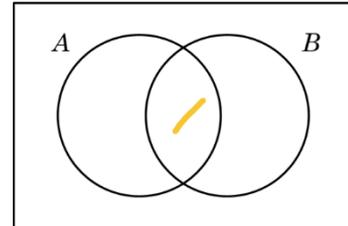


Do mesmo modo, vamos analisar o conjunto B:



Em lilás, temos os elementos que estão somente em B, ou do mesmo modo, os elementos que estão em B mas não estão em A, ou ainda, os elementos que estão apenas em B e não pertencem a qualquer outro conjunto, essas três frases constituem maneiras diferentes de dizer a mesma coisa. Esta região é simbolizada por  $(B - A)$ .

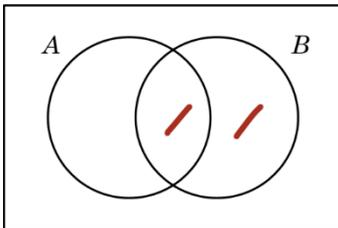
Já em amarelo, temos os elementos que estão em B e também estão em A, ou seja, que estão na interseção dos conjuntos A e B.



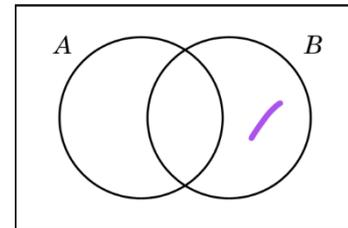
As duas regiões em vermelho juntas representam os elementos que estão em B. A região vermelha mais à direita representa os elementos que estão somente em B, já a região vermelha que está mais à esquerda representa os elementos que estão em B e que também estão em A. Perceba que, o fato de estar em B, não exclui a possibilidade de estar em A.

Resumindo,

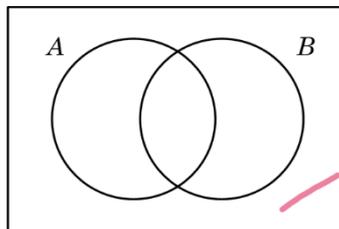
Em B:



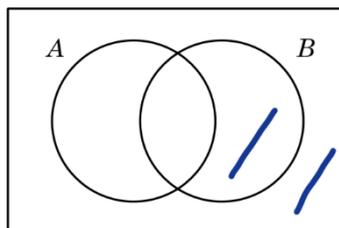
Somente em B:



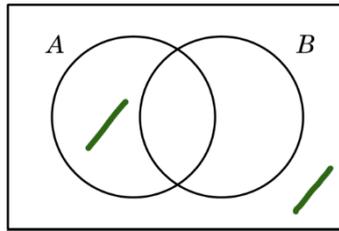
A região em rosa, abaixo, representa os elementos que não estão em A nem estão em B:



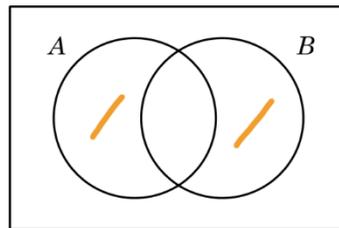
É importante saber a região que representa os elementos que não estão em A:



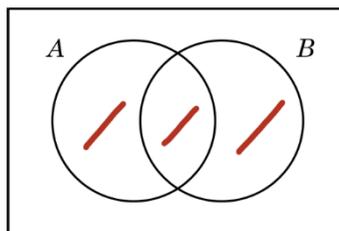
Conheça também a região que representa os elementos que não estão em B:



A região alaranjada abaixo também é superimportante, ela representa o ou A ou B, também chamada de disjunção exclusiva. Ela contém os elementos que estão somente em A, juntamente com os elementos que estão somente em B. A disjunção exclusiva **NÃO** permite que tenhamos elementos que estão nos dois conjuntos ao mesmo tempo, ela exige **EXCLUSIVIDADE**, tem que estar só em um ou só no outro, não pode estar nos dois ao mesmo tempo.

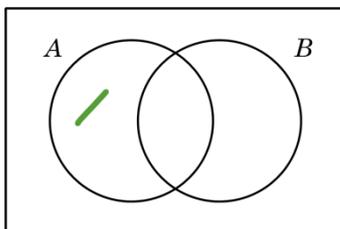


Finalmente, temos a região da união A ou B, simbolizada por  $A \cup B$ , também chamada de disjunção:

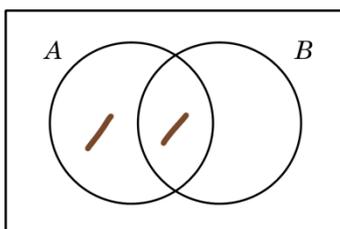


Aqui, não há exclusividade, os elementos podem estar só em A, podem estar só em B como também podem estar nos dois ao mesmo tempo. Toda a região em vermelho acima é dita união dos conjuntos A e B.

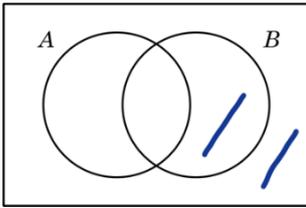
Foram muitas regiões! Que tal darmos uma parada para revisar? Anote aí em cada figura o nome da região que ela representa! E quando você estiver seguro, dominando todas, aí é hora de passar adiante.



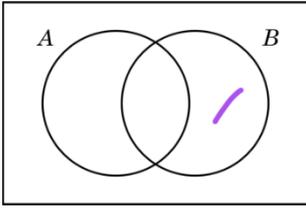
-----



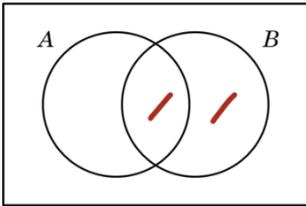
-----



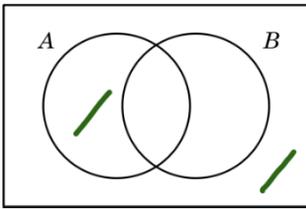
-----



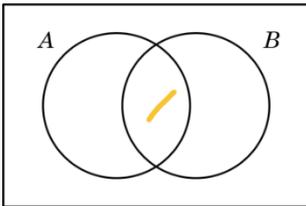
-----



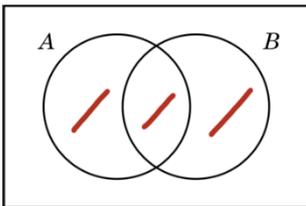
-----



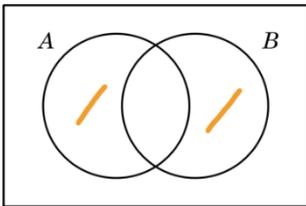
-----



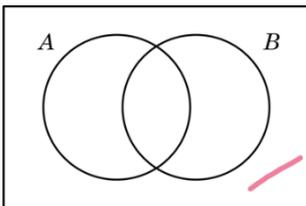
-----



-----



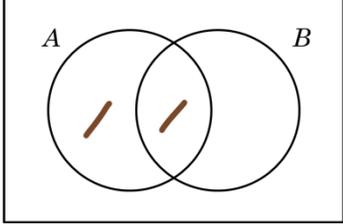
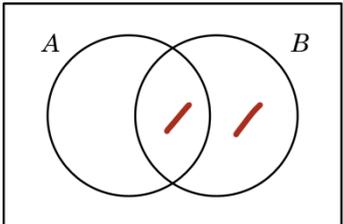
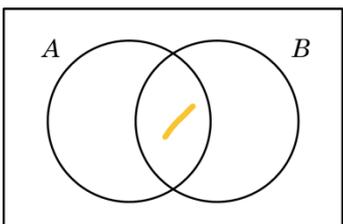
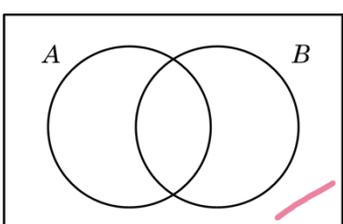
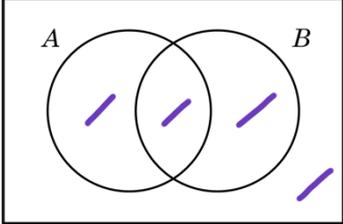
-----



-----

Pronto para seguir adiante?

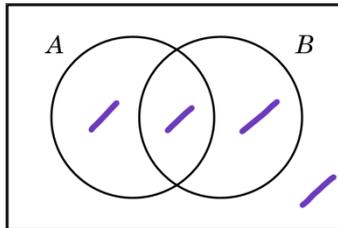
Vou te apresentar uma técnica incrível de resolução de questões com dois conjuntos, mas para aplicá-la, você deve identificar as seguintes regiões:

| Região | Diagrama   |
|--------|--|
| A      |    |
| B      |    |
| A e B  |   |
| Nenhum |  |
| Total  |  |

A técnica que vamos aprender agora foi carinhosamente chamada de “BOTA E TIRA”, ela foi inspirada no Princípio da Inclusão/Exclusão.

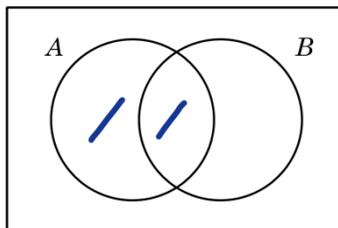
**BOTA E TIRA PARA DOIS CONJUNTOS**

Dada uma situação problema com dois conjuntos, como saber o total de elementos envolvidos?

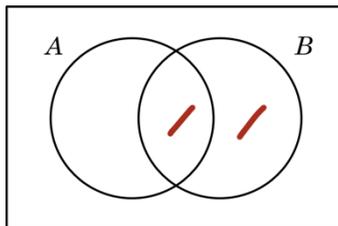


Para chegarmos ao total, cada uma das regiões em roxo acima deve ser contada uma única vez!

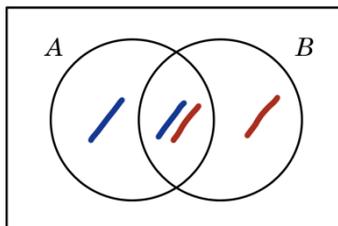
E, para tanto, primeiramente BOTE todos os elementos do conjunto A, que aqui estão representados em azul:



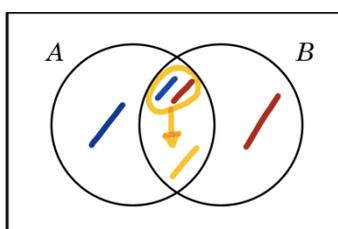
Agora BOTE todos os elementos do conjunto B, que aqui estão representados em vermelho:



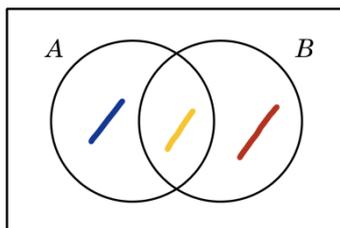
Perceba que quando BOTAMOS tudo que está em A e tudo que está em B, a parte do meio acabou sendo contada duas vezes. Lembre-se que a região repetida contém os elementos que estão em A e B, a interseção.



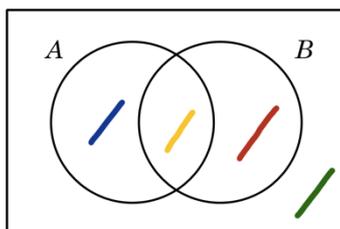
Não podemos contar a interseção duas vezes, Para que não haja a duplicidade da interseção, devemos reTIRÁ-la! O fato de termos que TIRAR a interseção não é porque ela não pode aparecer, o problema é estar aparecendo duas vezes!



Após TIRAR a interseção, temos a região do meio sendo contada uma única vez.



Falta BOTAR os elementos que não estão em A nem em B para chegarmos ao total:



Agora sim, chegamos ao total! Vamos recapitular?

- BOTA tudo que está em A;
- BOTA tudo que está em B;
- TIRA o que está em A e B;
- BOTA o que não está em A nem em B;
- IGUALA ao total.

É daí que vem a expressão BOTA e TIRA!

| REGIÃO | AÇÃO   | CONTA |
|--------|--------|-------|
| A      | BOTA   | +     |
| B      | BOTA   | +     |
| A e B  | TIRA   | -     |
| NENHUM | BOTA   | +     |
| TOTAL  | IGUALA | =     |

Vamos ver como aplicar esta técnica em algumas questões e evitar o preenchimento das “bolinhas”? As questões 01, 04 e 14 estão resolvidas! Leia e veja como funciona a técnica para que você possa exercitar!

Inicialmente, resolva as questões: 02, 03, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39a, 40, 41, 42 e 43.

Vale lembrar que a técnica é aplicável quando as regiões mencionadas são identificadas. Em casos em que as regiões não estiverem bem definidas ou que o comando nos levar a uma região que não está bem definida, temos que recorrer ao diagrama de Euler-Venn e preencher as bolinhas. A questão 24 está resolvida para que você veja como funciona! As questões 25, 27, 28, 29, 30, 31, 33 e 39b são para que você possa treinar o preenchimento do diagrama.

**QUESTÕES - DOIS CONJUNTOS**

1. (IFAL 2018) Em uma pesquisa realizada com estuantes do IFAL, verificou-se que 100 alunos gostam de estudar português, 150 alunos gostam de estudar matemática, 20 alunos gostam de estudar as duas disciplinas e 110 não gostam de nenhuma das duas.

Quantos foram os estudantes entrevistados?

- A** 330.
- B** 340.
- C** 350.
- D** 360.
- E** 380.

**SOLUÇÃO**

O primeiro passo para aplicar a técnica é identificar as regiões:

| REGIÃO | DESCRIÇÃO              | VALORES | CONTA |
|--------|------------------------|---------|-------|
| A      | Português              | 100     | +     |
| B      | Matemática             | 150     | +     |
| A e B  | Português e Matemática | 20      | -     |
| NENHUM | Nenhuma das duas       | 110     | +     |
| TOTAL  |                        | ?       | =     |

Identificadas as regiões, é só montar a equação:

$$\text{TOTAL} = 100 + 150 - 20 + 110 = 340$$

Alternativa B.

2. (IFSUL 2017) Em uma consulta à comunidade acadêmica sobre a necessidade de melhorias na área física de um determinado campus do IFSul, foi obtido o seguinte resultado:

- 538 sugerem reformas nas salas de aula.
- 582 sugerem reformas na biblioteca.
- 350 sugerem reformas nas salas de aula e na biblioteca.
- 110 sugerem reformas em outras instalações.

Quantas pessoas foram entrevistadas nessa consulta?

- A** 770
- B** 880
- C** 1120
- D** 1580

3. (Fatec 2017) Uma pesquisa foi realizada com alguns alunos da Fatec São Paulo sobre a participação em um Projeto de Iniciação Científica (PIC) e a participação na reunião anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC).

Dos 75 alunos entrevistados:

17 não participaram de nenhuma dessas duas atividades;

36 participaram da reunião da SBPC e

42 participaram do PIC.

Nessas condições, o número de alunos entrevistados que participaram do PIC e da reunião da SBPC é

- A** 10
- B** 12
- C** 16
- D** 20
- E** 22

4. (Feevale 2017) Um grupo de 33 pais de crianças pré-adolescentes se reuniu para discutir de quem é a tarefa de abordar a educação sexual de seus filhos. Nesse grupo, 30 pais têm a opinião de que essa educação deve ser dada pela família, e 28 pais pensam que é uma missão para a escola.

Considerando que todos opinaram, quantos pais desse grupo concordam que é um dever da família e da escola juntas?

- A 2 pais
- B 25 pais
- C 33 pais
- D 58 pais
- E 91 pais

### SOLUÇÃO

O primeiro passo para aplicar a técnica é identificar as regiões:

| REGIÃO | DESCRIÇÃO        | VALORES | CONTA |
|--------|------------------|---------|-------|
| A      | Família          | 30      | +     |
| B      | Escola           | 28      | +     |
| A e B  | Família e Escola | x       | -     |
| NENHUM | Nenhuma das duas | 0       | +     |
| TOTAL  |                  | 33      | =     |

Montando a equação, temos:

$$\begin{aligned}30 + 28 - x + 0 &= 33 \\58 - x &= 33 \\x &= 58 - 33 \\x &= 25\end{aligned}$$

Alternativa B.

5. (IFSP 2012) Em um restaurante de uma empresa fez-se uma pesquisa para saber qual a sobremesa preferida dos funcionários: pudim ou gelatina. Cada funcionário poderia indicar que gosta das duas sobremesas, de apenas uma, ou de nenhuma das duas. Do total de pesquisados, 21 declararam que gostam de pudim, 29 gostam de gelatina, 10 gostam dessas duas sobremesas e 12 não gostam de nenhuma dessas duas sobremesas.

Pode-se então afirmar que o número de pesquisados foi

- A 52.
- B 62.
- C 72.
- D 82.
- E 92.

6. (IFSP 2016) A empresa *The Sound of Perseverance*, originalmente instalada na região centro-oeste do País, está abrindo mais duas filiais: uma no estado do Paraná e outra no estado de Minas Gerais. No entanto, as duas novas filiais necessitarão de mão de obra qualificada, e a alguns funcionários foi oferecida a oportunidade de escolher onde desejariam trabalhar, de forma que 36 funcionários escolheram a filial do Paraná, 30 escolheram a filial de Minas Gerais, enquanto 22 funcionários mostraram-se indiferentes quanto ao destino de transferência.

De acordo com as informações oferecidas, assinale a alternativa que apresenta a quantidade total de funcionários que a empresa transferiu.

- A 88 funcionários.
- B 66 funcionários.
- C 58 funcionários.
- D 52 funcionários.
- E 44 funcionários.

7. (Uel 2008) Um instituto de pesquisas entrevistou 1.000 indivíduos, perguntando sobre sua rejeição aos partidos A e B. Verificou-se que 600 pessoas rejeitavam o partido A; que 500 pessoas rejeitavam o partido B e que 200 pessoas não tem rejeição alguma.

O número de indivíduos que rejeitam os dois partidos é:

- A 120 pessoas.
- B 200 pessoas.
- C 250 pessoas.
- D 300 pessoas.
- E 800 pessoas.

8. (IFPE 2016) Em uma cooperativa de agricultores do município de Vitória de Santo Antão, foi realizada uma consulta em relação ao cultivo da cultura da cana-de-açúcar e do algodão. Constatou-se que 125 associados cultivam a cana-de-açúcar, 85 cultivam o algodão e 45 cultivam ambos.

Sabendo que todos os cooperativados cultivam pelo menos uma dessas duas culturas, qual é o número de agricultores da cooperativa?

- A 210
- B 255
- C 165
- D 125
- E 45

9. (UFPB 2007) Os 40 alunos de uma turma da 4ª série de uma escola de Ensino Fundamental foram a um supermercado fazer compras. Após 30 minutos no supermercado, a professora reuniu os alunos e percebeu que exatamente:

- 19 alunos compraram biscoitos.
- 24 alunos compraram refrigerantes.
- 7 alunos não compraram biscoitos nem refrigerantes.

O número de alunos que compraram biscoitos e refrigerantes foi:

- A 17
- B 15
- C 12
- D 10
- E 7

10. Num jogo exibição entre o Chicago Bulls e o Los Angeles Lakers, realizado no Maracanãzinho, 62.984 espectadores torciam pelo Chicago Bulls, 49.296 torciam pelo Los Angeles Lakers e 26.830 torciam pelos dois times.

Sabendo-se que todos os espectadores torciam por, pelo menos, um dos times acima mencionados, quantos torcedores assistiram ao jogo?

11. (IFSP 2014) Uma empresa decidiu realizar uma pesquisa de mercado para o lançamento de um novo produto. Aos consumidores foi perguntado o que é levado em consideração na hora de comprar um produto: preço (P) e/ou qualidade (Q).

Cada consumidor entrevistado poderia escolher mais de um item da pesquisa como mostra a tabela a seguir:

| Característica do Produto | Número de Votos |
|---------------------------|-----------------|
| P                         | 60              |
| Q                         | 45              |
| P e Q                     | 35              |

Admitindo que todos os que foram entrevistados escolheram pelo menos um dos itens da pesquisa, o número de consumidores entrevistados foi de

- A 60.
- B 65.
- C 70.
- D 75.
- E 80.

12. (IFPE 2012) Alberto e Daniel são amigos e colecionadores de selos. Eles começaram a colecionar selos ao mesmo tempo. Alberto já está com 32 selos, enquanto Daniel tem 17.

Sabendo que eles têm 8 selos em comum, quantos selos diferentes eles têm juntos?

- A 41
- B 42
- C 45
- D 48
- E 49

13. (PUCRJ 2015) Uma pesquisa realizada com 245 atletas, sobre as atividades praticadas nos seus treinamentos, constatou que 135 desses atletas praticam natação, 200 praticam corrida e 40 não utilizavam nenhuma das duas modalidades no seu treinamento.

Então, o número de atletas que praticam natação e corrida é:

- A 70
- B 95
- C 110
- D 125
- E 130

|           |
|-----------|
| Anotações |
|-----------|

14. (PUCRJ 2007) Uma prova com duas questões foi dada a uma classe de quarenta alunos. Dez alunos acertaram as duas questões, 25 acertaram a primeira e 20 acertaram a segunda questão.

Quantos alunos erraram as duas questões?

- A 40
- B 10
- C Nenhum
- D 8
- E 5

**SOLUÇÃO**

O primeiro passo para aplicar a técnica é identificar as regiões:

| REGIÃO | DESCRIÇÃO        | VALORES | CONTA |
|--------|------------------|---------|-------|
| A      | Primeira         | 25      | +     |
| B      | Segunda          | 20      | +     |
| A e B  | As duas          | 10      | -     |
| NENHUM | Nenhuma das duas | x       | +     |
| TOTAL  |                  | 40      | =     |

Montando a equação, temos:

$$\begin{aligned}
 25 + 20 - 10 + x &= 40 \\
 35 + x &= 40 \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

Alternativa E.

15. (CFTMG 2007) Numa classe de 30 alunos, 16 gostam de Matemática e 20 de História.

O número de alunos que gostam de Matemática e História é

- A no máximo 6
- B no mínimo 6
- C 10
- D 16

16. (Enem cancelado 2009) Uma pesquisa foi realizada para tentar descobrir, do ponto de vista das mulheres, qual é o perfil da parceira ideal procurada pelo homem do séc. XXI. Alguns resultados estão apresentados no quadro abaixo.

| O QUE AS MULHERES PENSAM QUE OS HOMENS PREFEREM                                     |   |
|---|---|
| <b>72%</b><br>das mulheres têm certeza de que os homens odeiam ir ao shopping       | <b>65%</b><br>pensam que os homens preferem mulheres que façam todas as tarefas da casa             |
| No entanto, apenas <b>39%</b><br>dos homens disseram achar a atividade insuportável | No entanto, <b>84%</b><br>deles disseram acreditar que as tarefas devem ser divididas entre o casal |

*Correio Braziliense, 29 jun. 2008 (adaptado).*

Se a pesquisa foi realizada com 300 mulheres, então a quantidade delas que acredita que os homens odeiam ir ao shopping e pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa é

- A inferior a 80.
- B superior a 80 e inferior a 100.
- C superior a 100 e inferior a 120.
- D superior a 120 e inferior a 140.
- E superior a 140.

17. (CFTMG 2006) Um estudo de grupos sanguíneos, realizado com 1200 homens e 800 mulheres, revelou que 1080 pessoas tinham o antígeno A, 900 o antígeno B e 500 nenhum dos dois antígenos.

Se o resultado da pesquisa é proporcional ao número de homens e mulheres, a quantidade de mulheres que possui os antígenos A e B é

- A 176
- B 184
- C 192
- D 198

18. (Uerj 2015) Em uma escola circulam dois jornais: *Correio do Grêmio* e *O Estudante*. Em relação à leitura desses jornais, por parte dos 840 alunos da escola, sabe-se que:

- 10% não leem esses jornais;
- 520 leem o jornal *O Estudante*;
- 440 leem o jornal *Correio do Grêmio*.

Calcule o número total de alunos do colégio que leem os dois jornais.

19. (ESPM 2010) Numa empresa multinacional, sabe-se que 60% dos funcionários falam inglês, 45% falam espanhol e 30% deles não falam nenhuma daquelas línguas.

Se exatamente 49 funcionários falam inglês e espanhol, podemos concluir que o número de funcionários dessa empresa é igual a:

- A 180
- B 140
- C 210
- D 165
- E 127

20. (IMED 2015) Dos 500 alunos matriculados em uma escola, constatou-se que:

- 40% do total frequenta oficinas de xadrez;
- 35% do total frequenta oficinas de robótica;
- 75 alunos cursam, simultaneamente, xadrez e robótica;
- x alunos cursam outras oficinas.

Com base nessas informações, o número de alunos que frequentam outras oficinas é:

- A 75
- B 100
- C 125
- D 200
- E 300

21. (UERN 2015) Uma empresa de *software* aloca seus funcionários em duas equipes de trabalho: manutenção e atendimento. Sabe-se que 80% de seus funcionários trabalham na equipe de manutenção e 35% na equipe de atendimento.

Sabendo-se que essa empresa possui 500 funcionários e que um funcionário não precisa necessariamente trabalhar em uma única equipe, então o número de funcionários que trabalham nas equipes de atendimento e de manutenção é

- A 50
- B 60
- C 65
- D 75

22. (UERJ 2017) Crianças de uma escola participaram de uma campanha de vacinação contra a paralisia infantil e o sarampo. Após a campanha, verificou-se que 80% das crianças receberam a vacina contra a paralisia, 90% receberam a vacina contra o sarampo, e 5% não receberam nem uma, nem outra.

Determine o percentual de crianças dessa escola que receberam as duas vacinas.

23. (ESPM 2016) Em uma aula de Matemática, o professor propôs 2 problemas para serem resolvidos pela turma. 76% dos alunos resolveram o primeiro problema, 48% resolveram o segundo e 20% dos alunos não conseguiram resolver nenhum dos dois.

Se apenas 22 alunos resolveram os dois problemas, pode-se concluir que o número de alunos dessa classe é:

- A maior do que 60
- B menor do que 50
- C múltiplo de 10
- D múltiplo de 7
- E ímpar

24. (UECE 2015) Em um grupo de 300 alunos de línguas estrangeiras, 174 alunos estudam inglês e 186 alunos estudam chinês.

Se, neste grupo, ninguém estuda outro idioma além do inglês e do chinês, o número de alunos deste grupo que se dedicam ao estudo de apenas um idioma é

- A 236
- B 240
- C 244
- D 246

SOLUÇÃO

Nesta questão podemos usar o BOTA e TIRA para descobrir a interseção, os alunos que estudam inglês e chinês:

| REGIÃO | DESCRIÇÃO        | VALORES | CONTA |
|--------|------------------|---------|-------|
| A      | Inglês           | 174     | +     |
| B      | Chinês           | 186     | +     |
| A e B  | Inglês e Chinês  | x       | -     |
| NENHUM | Nenhuma das duas | 0       | +     |
| TOTAL  |                  | 300     | =     |

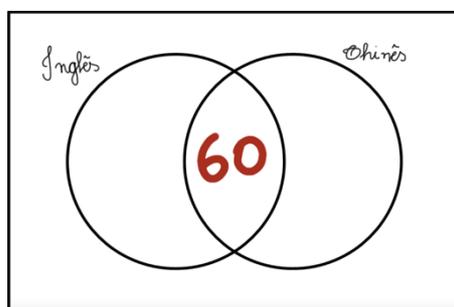
Montando a equação, temos:

$$174 + 186 - x + 0 = 300$$

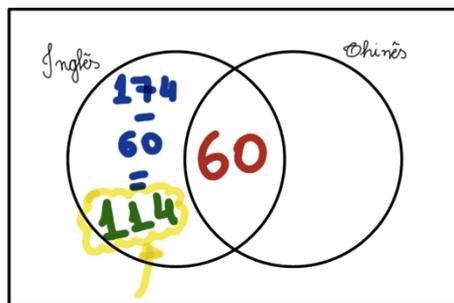
$$360 - x = 300$$

$$x = 60$$

Sabemos agora que 60 alunos estudam ambos os idiomas, isso nos dará agilidade de preencher o diagrama. Começamos preenchendo a interseção:

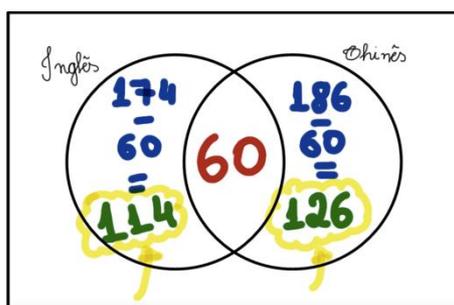


Agora, preencha a quantidade de alunos que estudam Inglês (174), não esqueça de descontar os 60 que já estão na interseção.



114 alunos estudam apenas Inglês.

Agora, preencha a quantidade de alunos que estudam Chinês, não esqueça de descontar os 60 que já estão na interseção.



126 alunos estudam apenas Chinês.

O enunciado requer a quantidade de aluno que se dedica ao estudo de apenas um idioma, ou seja, ou estudam apenas Inglês ou estudam apenas Chinês, o conectivo em questão é o "...OU...OU", que requer exclusividade, não podendo estudar os dois idiomas ao mesmo tempo.

$$114 + 126 = 240.$$

Alternativa B.

Uma outra maneira de resolver essa questão é retirar do total 300 aqueles que estudam dois idiomas ao mesmo tempo 60.

$$300 - 60 = 240.$$

Deste último modo, evitaríamos o preenchimento do diagrama.

25. (UECE 2014) Uma pesquisa com todos os trabalhadores da FABRITEC, na qual foram formuladas duas perguntas, revelou os seguintes números:

205 responderam à primeira pergunta;  
205 responderam à segunda pergunta;  
210 responderam somente a uma das perguntas;  
um terço dos trabalhadores não quis participar da entrevista.

Com estes dados, pode-se concluir corretamente que o número de trabalhadores da FABRITEC é

- A** 465.
- B** 495.
- C** 525.
- D** 555.

26. (UERN 2012) Numa festa foram servidos dois tipos de salgados: um de queijo e outro de frango. Considere que 15 pessoas comeram os dois salgados, 45 não comeram o salgado de queijo, 50 não comeram o salgado de frango e 70 pessoas comeram pelo menos um dos dois salgados.

O número de pessoas presentes nesta festa que não comeram nenhum dos dois salgados foi

- A** 18.
- B** 20.
- C** 10.
- D** 15.

27. (IFSP 2012) Em uma determinada empresa, os trabalhadores devem se especializar em pelo menos uma língua estrangeira, francês ou inglês. Em uma turma de 76 trabalhadores, têm-se:

- 49 que optaram somente pela língua inglesa;
- 12 que optaram em se especializar nas duas línguas estrangeiras.

O número de trabalhadores que optaram por se especializar em língua francesa foi

- A** 15.
- B** 27.
- C** 39.
- D** 44.
- E** 64.

28. (UFT 2011) Uma Instituição de Ensino Superior oferece os cursos A e B. Em seu processo seletivo o candidato pode optar por inscrever-se nos dois cursos ou apenas em um curso. Ao final, o número de inscrições por curso e o número total de candidatos inscritos pode ser observado no quadro que segue:

| Número de Inscrições no Curso A | Número de Inscrições no Curso B | Número total de candidatos inscritos |
|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| 480                             | 392                             | 560                                  |

Com base nas informações acima e nas possibilidades de inscrições, pode se afirmar que o número de candidatos que optaram por inscrever-se somente no curso A foi:

- A** 80
- B** 168
- C** 312
- D** 480
- E** 560

29. (UFPB 2010) Antes da realização de uma campanha de conscientização de qualidade de vida, a Secretaria de Saúde de um município fez algumas observações de campo e notou que dos 300 indivíduos analisados 130 eram tabagistas, 150 eram alcoólatras e 40 tinham esses dois vícios. Após a campanha, o número de pessoas que apresentaram, pelo menos, um dos dois vícios sofreu uma redução de 20 %.

Com base nessas informações, é correto afirmar que, com essa redução, o número de pessoas sem qualquer um desses vícios passou a ser:

- A** 102
- B** 106
- C** 104
- D** 108
- E** 110

30. (Fatec 2013) Em uma pesquisa de mercado sobre o uso de notebooks e tablets foram obtidos, entre os indivíduos pesquisados, os seguintes resultados:

- 55 usam notebook;
- 45 usam tablet, e
- 27 usam apenas notebook.

Sabendo que todos os pesquisados utilizam pelo menos um desses dois equipamentos, então, dentre os pesquisados, o número dos que usam apenas tablet é

- A** 8
- B** 17
- C** 27
- D** 36
- E** 45

31. (Fac. Albert Einstein - Medicina 2018) Um grupo de 180 turistas estão hospedados em um mesmo hotel no estado de São Paulo. As regiões Norte, Sul e Sudeste são as regiões do Brasil que já foram visitadas por pelo menos um desses turistas. Desses turistas, 89 já estiveram na Região Sul e 78 já estiveram na Região Norte.

Sabendo que 33 desses turistas só conhecem a Região Sudeste, o número desses turistas que já estiveram nas Regiões Norte e Sul é

- A** 10
- B** 13
- C** 17
- D** 20

32. (Unicamp 2017) Sabe-se que, em um grupo de 10 pessoas, o livro A foi lido por 5 pessoas e o livro B foi lido por 4 pessoas.

Podemos afirmar corretamente que, nesse grupo,

- A** pelo menos uma pessoa leu os dois livros.
- B** nenhuma pessoa leu os dois livros.
- C** pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.
- D** todas as pessoas leram pelo menos um dos dois livros.

33. (PUCRJ 2017) Em uma pesquisa, constatou-se que, das 345 pessoas de um determinado local, 195 jogavam tênis, 105 jogavam tênis e vôlei, e 80 não jogavam nem vôlei nem tênis.

Qual é o número de pessoas que jogavam vôlei e não jogavam tênis?

- A** 70
- B** 75
- C** 105
- D** 180
- E** 195

34. (UFF 2006) Dentre as espécies ameaçadas de extinção na fauna brasileira, há algumas que vivem somente na Mata Atlântica, outras que vivem somente fora da Mata Atlântica e, há ainda, aquelas que vivem tanto na Mata Atlântica como fora dela. Em 2003, a revista Terra publicou alguns dados sobre espécies em extinção na fauna brasileira: havia 160 espécies de aves, 16 de anfíbios, 20 de répteis e 69 de mamíferos, todas ameaçadas de extinção. Dessas espécies, 175 viviam somente na Mata Atlântica e 75 viviam somente fora da Mata Atlântica.

Conclui-se que, em 2003, o número de espécies ameaçadas de extinção na fauna brasileira, citadas pela revista Terra, que viviam tanto na Mata Atlântica como fora dela, corresponde a:

- A** 0
- B** 5
- C** 10
- D** 15
- E** 20

35. (PUCRJ 2006) Numa cidade de 100.000 habitantes, 30.000 são flamenguistas, 12.000 são flamenguistas e corintianos ao mesmo tempo, e o número de habitantes que não são nem flamenguistas nem corintianos é de 39.000.

Então o número de corintianos é:

- A** 45.000.
- B** 35.000.
- C** 55.000.
- D** 85.000.
- E** 43.000.

36. (UFPE 2003) Numa pesquisa de mercado, foram entrevistados consumidores sobre suas preferências em relação aos produtos A e B. Os resultados da pesquisa indicaram que 310 pessoas compram o produto A; 220 pessoas compram o produto B; 110 pessoas compram os produtos A e B e 510 pessoas não compram nenhum dos dois produtos.

Indique o número de consumidores entrevistados.

37. (UFRN 2001) Uma pesquisa de opinião, realizada num bairro de Natal, apresentou o resultado seguinte: 65% dos entrevistados frequentavam a praia de Ponta Negra, 55% frequentavam a praia do Meio e 15% não iam à praia.

De acordo com essa pesquisa, o percentual dos entrevistados que frequentavam ambas as praias era de:

- A 20%
- B 35%
- C 40%
- D 25%

38. (UERJ 2001) Um grupo de alunos de uma escola deveria visitar o Museu de Ciência e o Museu de História da cidade. Quarenta e oito alunos foram visitar pelo menos um desses museus. 20% dos que foram ao de Ciência visitaram o de História e 25% dos que foram ao de História visitaram também o de Ciência.

Calcule o número de alunos que visitaram os dois museus.

39. (Unesp 2000) Numa cidade com 30000 domicílios, 10000 domicílios recebem regularmente o jornal da loja de eletrodomésticos X, 8000 recebem regularmente o jornal do supermercado Y e metade do número de domicílios não recebe nenhum dos dois jornais. Determine:

- a) o número de domicílios que recebem os dois jornais.
- b) a probabilidade de um domicílio da cidade, escolhido ao acaso, receber o jornal da loja de eletrodomésticos X e não receber o jornal do supermercado Y.

40. (UFAL 1999) Em uma escola, foi feita uma pesquisa entre 320 alunos para verificar quantos falam inglês ou espanhol.

O resultado foi o seguinte:

- 45 não falam esses idiomas
- 250 falam inglês
- 180 falam espanhol

Quantos dos alunos entrevistados falam esses dois idiomas?

41. (PUCMG 1997) Em uma empresa, 60% dos funcionários leem a revista A, 80% leem a revista B, e todo funcionário é leitor de pelo menos uma dessas revistas.

O percentual de funcionários que leem as duas revistas é:

- A** 20%
- B** 40%
- C** 60%
- D** 75%
- E** 140%

42. (UNESP 1995) Uma pesquisa sobre os grupos sanguíneos ABO, na qual foram testadas 6000 pessoas de uma mesma raça, revelou que 2527 têm o antígeno A, 2234 o antígeno B e 1846 não têm nenhum antígeno.

Nessas condições, qual é a probabilidade de que uma dessas pessoas, escolhida aleatoriamente, tenha os dois antígenos?

43. (Unesp 1990) Numa classe de 30 alunos, 16 alunos gostam de Matemática e 20 de História.

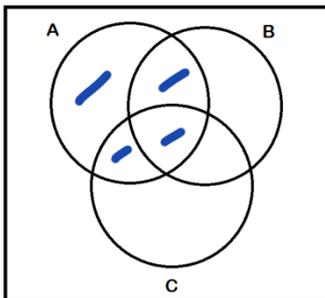
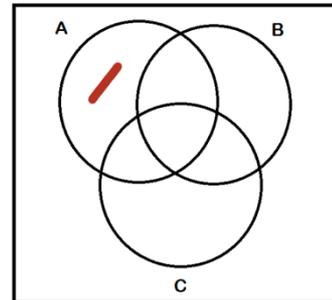
O número de alunos desta classe que gostam de Matemática e de História é:

- A** exatamente 16
- B** exatamente 10
- C** no máximo 6
- D** no mínimo 6
- E** exatamente 18

**REGIÕES DO DIAGRAMA PARA TRÊS CONJUNTOS**

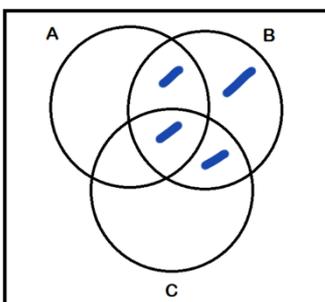
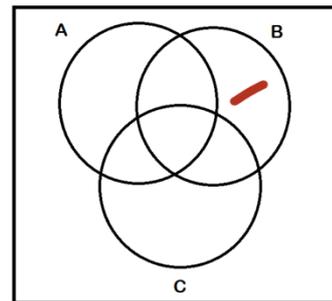
Da mesma maneira que iniciamos a aula de dois conjuntos conhecendo as regiões do diagrama de Euler-Venn, vamos fazer para os três conjuntos A, B e C:

Vamos começar com a região que representa os elementos que estão somente em A, esta região contém os elementos que estão em A, mas não estão em B nem em C. Os elementos são exclusivos de A, não pertencem a mais ninguém além de A. Ela está representada em vermelho.



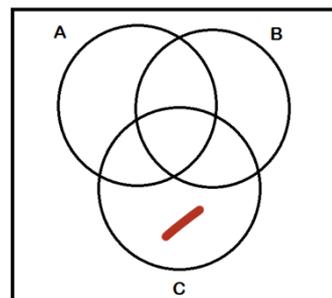
Cuidado para não confundir a região que representa os elementos que estão “somente em A” com a região que representa os elementos que estão “em A”. A região que representa os elementos que estão em A é composta por outras quatro regiões que estão demarcadas em azul ao lado. Aqui não há exclusividade, o fato de estar em A não impede que o elemento esteja em outros conjuntos. Estando em A, ele pode estar em B ou em C, ou até em B e em C.

A região ao lado representa os elementos que estão somente em B, esta região contém os elementos que estão em B, mas não estão em A nem em C. Os elementos são exclusivos de B, não pertencem a mais ninguém além de B. Cuidado, também, para não confundir a região que representa os elementos que estão “somente em B” com a região que representa os elementos que estão “em B”.

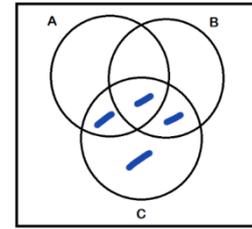


A região que representa os elementos que estão em B é composta por outras quatro regiões que estão demarcadas em azul acima. Aqui não há exclusividade, o fato de estar em B não impede que o elemento esteja em outros conjuntos. Estando em B, ele pode estar em A ou em C, ou até em A e em C.

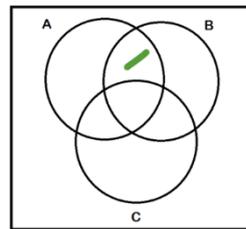
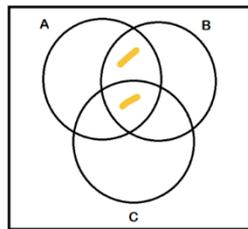
Já a região ao lado representa os elementos que estão somente em C, esta região contém os elementos que estão em C, mas não estão em A nem em B. Os elementos são exclusivos de C, não pertencem a mais ninguém além de C. Finalmente, cuidado para não confundir a região que representa os elementos que estão “somente em C” com a região que representa os elementos que estão “em C”.



A região que representa os elementos que estão em C é composta por outras quatro regiões que estão demarcadas em azul acima. Aqui não há exclusividade, o fato de estar em C não impede que o elemento esteja em outros conjuntos. Estando em C, ele pode estar em B ou em A, ou até em B e em A.



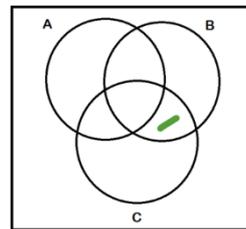
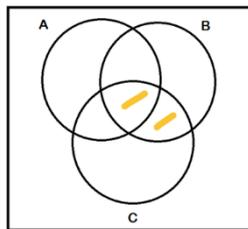
Já que você conhece a diferença entre estar em um conjunto e estar somente em um conjunto, vamos analisar outras regiões. Duas regiões que também causam muita confusão são as seguintes:



Você sabe distinguir entre a região em amarelo da que está em verde?

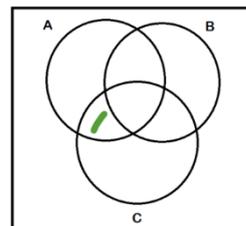
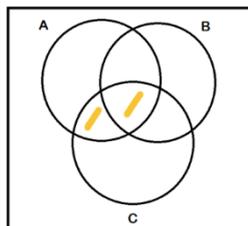
A região em amarelo contém os elementos que estão “em A e em B”, ela também é chamada de interseção entre A e B ( $A \cap B$ ), a região em verde contém os elementos que estão “somente em A e em B”. Mas, qual a diferença? Na região verde, estão os elementos que são exclusivos de A e B, eles estão em A e em B mas não estão em C. Já na região amarela, o fato de estar em A e B não os impede de estar em C também. Enfim, a diferença está na exclusividade. A região verde está apenas em A e B e a região amarela está em A e B.

Use a mesma ideia para as regiões a seguir:



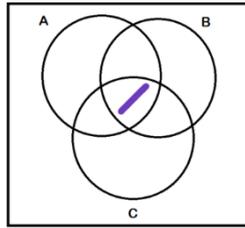
A região em amarelo contém os elementos que estão “em B e em C”, ela também é chamada de interseção entre B e C ( $B \cap C$ ), a região em verde contém os elementos que estão “somente em B e em C”. Mas, qual a diferença? Na região verde, estão os elementos que são exclusivos de B e C, eles estão em B e em C mas não estão em A. Já na região amarela, o fato de estar em B e C não os impede de estar em A também. Enfim, a diferença está na exclusividade. A região verde está apenas em B e C e a região amarela está em B e C.

Aproveitando ainda o mesmo raciocínio,

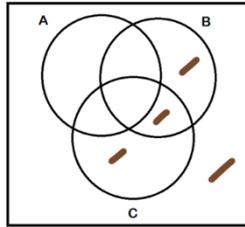


A região em amarelo contém os elementos que estão “em A e em C”, ela também é chamada de interseção entre A e C ( $A \cap C$ ), a região em verde contém os elementos que estão “somente em A e em C”. Mas, qual a diferença? Na região verde, estão os elementos que são exclusivos de A e C, eles estão em A e em C mas não estão em B. Já na região amarela, o fato de estar em A e C não os impede de estar em B também. Enfim, a diferença está na exclusividade. A região verde está apenas em A e C e a região amarela está em A e C.

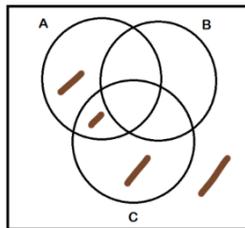
A região em roxo a seguir representa os elementos que estão tanto em A, quanto em B, quanto em C e isso ao mesmo tempo. Ela é denominada interseção de A, B e C ( $A \cap B \cap C$ ).



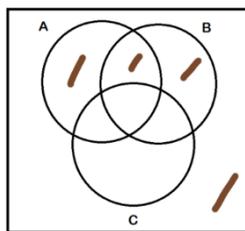
A seguir, a região em marrom representa os elementos que não estão em A. Eles podem até estar em B, ou estar em C, ou estar nos dois, ou até em nenhum, mas com certeza, eles não estão em A.



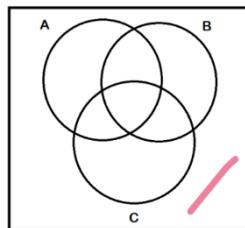
Do mesmo modo, a região marrom abaixo representa os elementos que não estão em B. Eles podem até estar em A, ou estar em C, ou estar nos dois, ou até em nenhum, mas com certeza, eles não estão em B.



Finalmente, a região marrom abaixo representa os elementos que não estão em C. Eles podem até estar em A, ou estar em B, ou estar nos dois, ou até em nenhum, mas com certeza, eles não estão em C.

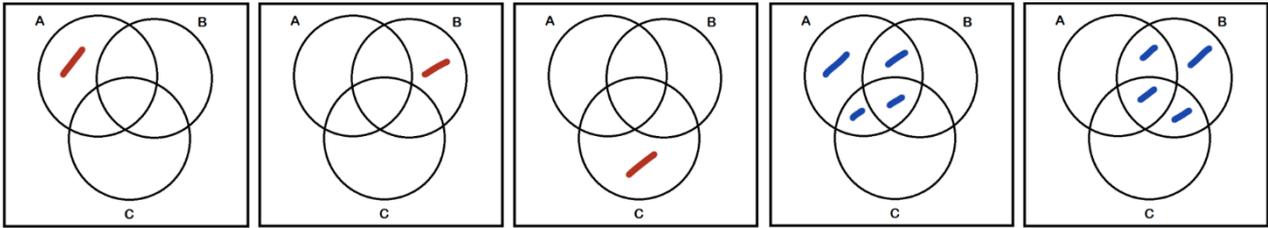


Por último, mais não menos importante, conheçamos a região em rosa que representa os elementos que não estão em A, nem em B e nem em C:

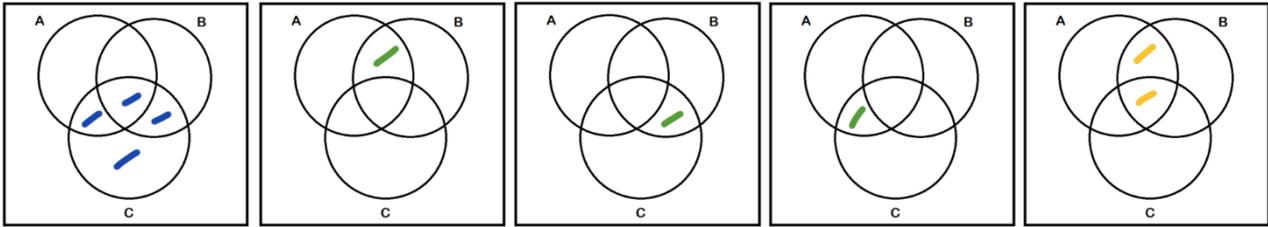


Vamos dar uma revisada nas regiões?

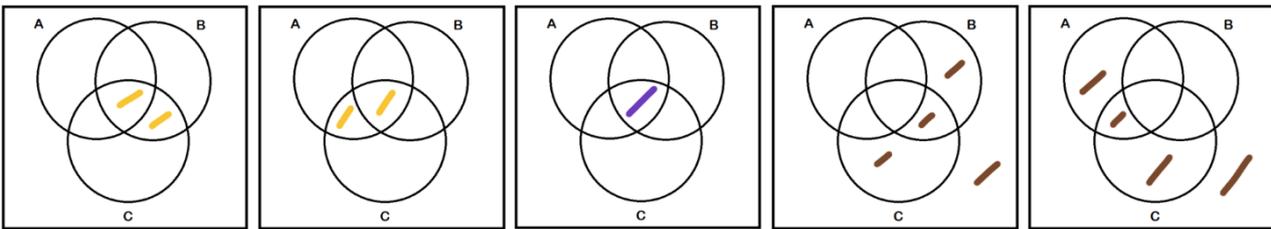
Escreva abaixo de cada imagem o nome da região correspondente:



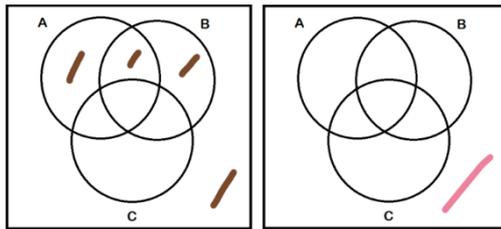
-----



-----



-----

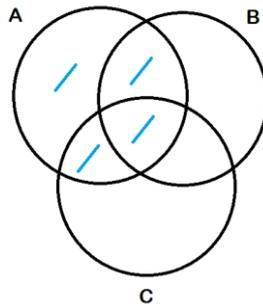


-----

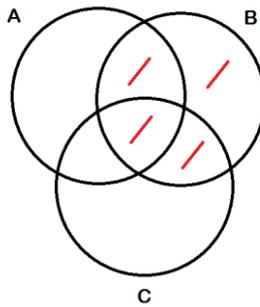
Pronto para seguir em frente? Conhecidas as regiões, vamos ver como funciona o BOTA e TIRA para três conjuntos.

**BOTA E TIRA PARA TRÊS CONJUNTOS**

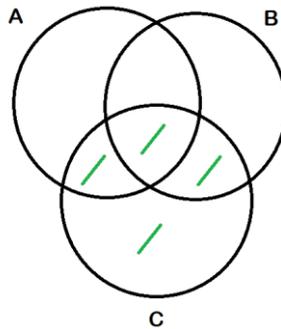
Primeiramente BOTE todos os elementos do conjunto A, que aqui estão representados em azul:



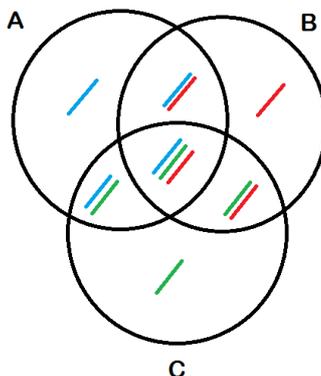
Agora adicione todos os elementos do conjunto B, que aqui estão representados em vermelho:



Adicione também todos os elementos do conjunto C, que estão representados em verde:

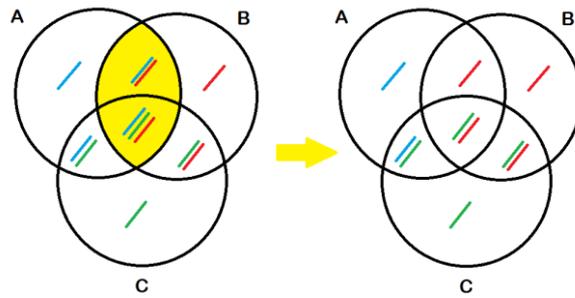


Esse caso é um pouco mais delicado. Perceba que algumas partes são contadas duas vezes, enquanto uma parte é contada três vezes.



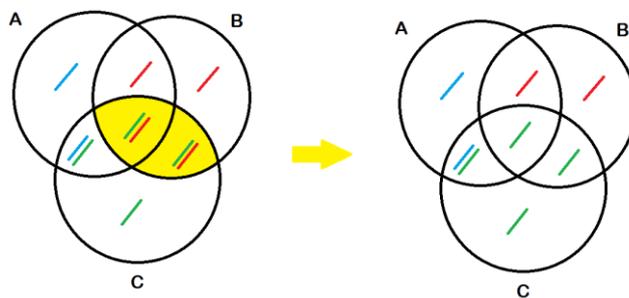
O nosso objetivo é contar cada região uma única vez, será necessário TIRAR as interseções dos conjuntos para que possamos chegar ao total sem repetir as regiões.

Começaremos retirando os elementos que estão em A e B, a interseção  $A \cap B$ , região representada em amarelo.



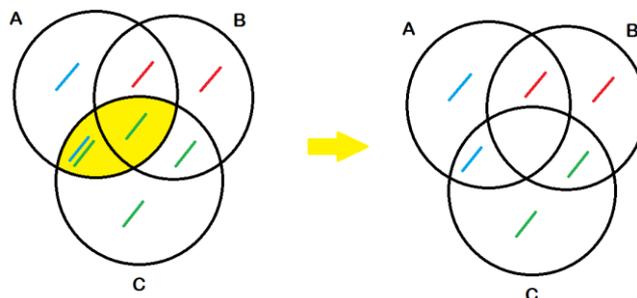
Note que retiramos uma barrinha em cada região demarcada.

Retiremos agora os elementos que estão em B e C, a interseção  $B \cap C$ .

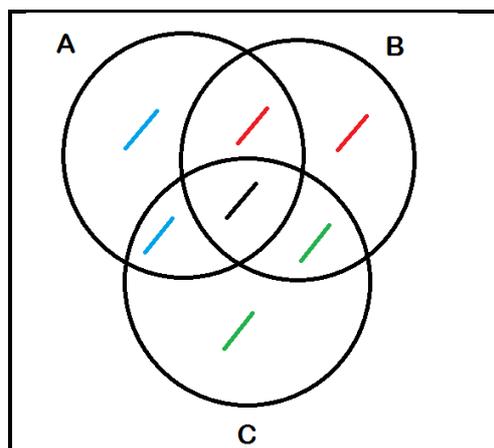


Novamente retiramos uma barrinha em cada região demarcada.

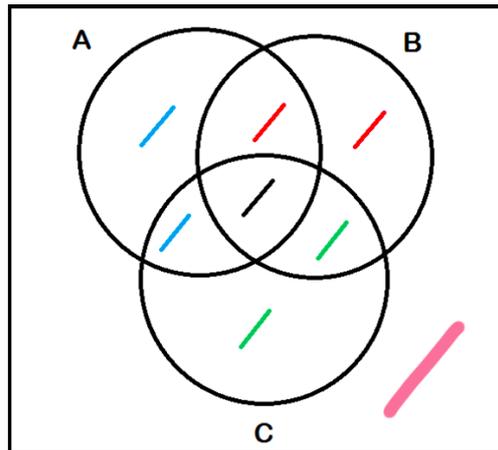
Retiremos agora os elementos que estão em A e C, a interseção  $A \cap C$ .



Ao retirarmos as interseções de A e B, B e C e A e C, a região mais central, que representa os elementos que estão tanto em A, quanto em B, quanto em C, a interseção de A, B e C ( $A \cap B \cap C$ ) deixou de ser contada, logo devemos BOTÁ-la novamente.



Por fim, BOTE a região que não está em nenhum conjunto para que cheguemos ao total!



Vamos recapitular?

- BOTA o que está em A;
- BOTA o que está em B;
- BOTA o que está em C;
- TIRA o que está em A e B;
- TIRA o que está em B e C;
- TIRA o que está em A e C;
- BOTA o que está em A, B e C;
- BOTA o que está em NENHUM;
- IGUALA ao TOTAL.

| REGIÃO   | AÇÃO   | CONTA |
|----------|--------|-------|
| A        | BOTA   | +     |
| B        | BOTA   | +     |
| C        | BOTA   | +     |
| A e B    | TIRA   | -     |
| B e C    | TIRA   | -     |
| A e C    | TIRA   | -     |
| A, B e C | BOTA   | +     |
| NENHUM   | BOTA   | +     |
| TOTAL    | IGUALA | =     |

As regiões mencionadas acima devem ser identificadas para que possamos aplicar o BOTA e TIRA. Vamos ver como aplicar esta técnica em algumas questões e evitar o preenchimento das “bolinhas”? As questões 02 e 03 estão resolvidas para que você tenha um modelo. Dê uma lida e logo em seguida, pratique resolvendo as demais questões!

**QUESTÕES - BOTA E TIRA PARA TRÊS CONJUNTOS**

44. (Fuvest 2018) Dentre os candidatos que fizeram provas de matemática, português e inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe-se que:

- I. 14 não obtiveram nota mínima em matemática;
- II. 16 não obtiveram nota mínima em português;
- III. 12 não obtiveram nota mínima em inglês;
- IV. 5 não obtiveram nota mínima em matemática e em português;
- V. 3 não obtiveram nota mínima em matemática e em inglês;
- VI. 7 não obtiveram nota mínima em português e em inglês e
- VII. 2 não obtiveram nota mínima em português, matemática e inglês.

A quantidade de candidatos que participaram do concurso foi

- A** 44
- B** 46
- C** 47
- D** 48
- E** 49

45. (IFSUL 2017) Analisando os conteúdos nos quais os alunos possuem maiores dificuldades de aprendizagem em uma escola com 500 alunos, percebeu-se que: 208 têm dificuldades de aprendizagem em matemática; 198, em português; 154, em física; 62, em matemática e física; 38, em português e física; 52, em matemática e português e 20 têm dificuldades nas três disciplinas.

Por esse viés, o número de alunos que não tem dificuldades em nenhuma dessas disciplinas é de

- A** 92 alunos.
- B** 72 alunos.
- C** 60 alunos.
- D** 20 alunos.

**SOLUÇÃO**

Vamos identificar as regiões:

| REGIÃO   | DESCRIÇÃO                      | VALOR | CONTA |
|----------|--------------------------------|-------|-------|
| A        | Matemática                     | 208   | +     |
| B        | Português                      | 198   | +     |
| C        | Física                         | 154   | +     |
| A e B    | Matemática e Português         | 52    | -     |
| B e C    | Português e Física             | 38    | -     |
| A e C    | Matemática e Física            | 62    | -     |
| A, B e C | Matemática, Português e Física | 20    | +     |
| NENHUM   | Nenhuma                        | x     | +     |
| TOTAL    |                                | 500   | =     |

Montando a equação com o BOTA e TIRA, temos:

$$\begin{aligned}
 208 + 198 + 154 - 52 - 38 - 62 + 20 + x &= 500 \\
 428 + x &= 500 \\
 x &= 72
 \end{aligned}$$

Alternativa B.

46. (IFSUL 2017) Em uma enquete no centro olímpico, foram entrevistados alguns atletas e verificou-se que 300 praticam natação, 250 praticam atletismo e 200 praticam esgrima. Além disso, 70 atletas praticam natação e atletismo, 65 praticam natação e esgrima e 105 praticam atletismo e esgrima, 40 praticam os três esportes e 150 não praticam nenhum dos três esportes citados.

Nessas condições, o número de atletas entrevistados foi

- A** 1180
- B** 1030
- C** 700
- D** 800

**SOLUÇÃO**

Vamos identificar as regiões:

| REGIÃO   | DESCRIÇÃO           | VALOR | CONTA |
|----------|---------------------|-------|-------|
| A        | Natação             | 300   | +     |
| B        | Atletismo           | 250   | +     |
| C        | Esgrima             | 200   | +     |
| A e B    | Natação e Atletismo | 70    | -     |
| B e C    | Atletismo e Esgrima | 105   | -     |
| A e C    | Natação e Esgrima   | 65    | -     |
| A, B e C | Os três esportes    | 40    | +     |
| NENHUM   | Nenhum              | 150   | +     |
| TOTAL    |                     | x     | =     |

Montando a equação com o BOTA e TIRA, temos:

$$300 + 250 + 200 - 70 - 105 - 65 + 40 + 150 = x$$

$$x = 700$$

Alternativa C.

47. (IFPE 2017) No IFPE *Campus* Olinda foi feita uma pesquisa com alguns alunos do curso de computação gráfica a respeito do domínio sobre três aplicativos. As repostas foram as seguintes:

- 78 dominam o Word;
- 84 dominam o Excel;
- 65 dominam o Powerpoint;
- 61 dominam o Word e Excel;
- 53 dominam o Excel e Powerpoint;
- 45 dominam o Word e Powerpoint;
- 40 dominam os três aplicativos;
- 03 não dominam aplicativo algum.

Com base nas informações acima, o número de estudantes do curso de computação gráfica que responderam a essa pesquisa é

- A** 112
- B** 227
- C** 230
- D** 111
- E** 129

48. (IFSUL 2016) No texto “Somos todos estrangeiros”, de Diana Corso, a autora afirma que convivemos “com as diferentes cores de pele, interpretações dos gêneros, formas de amar e casar, vestimentas, religiões ou a falta delas, línguas” e isso pode levar a atitudes discriminatórias. Para investigar a realidade do preconceito nas escolas, realizou-se uma pesquisa sobre atitudes discriminatórias com um certo número de alunos, cujas respostas são apresentadas na tabela.

| Atitude Discriminatória             | Número de Alunos |
|-------------------------------------|------------------|
| Gênero                              | 148              |
| Deficiência                         | 118              |
| Étnico-racial                       | 108              |
| Gênero e deficiência                | 36               |
| Gênero e étnico-racial              | 42               |
| Deficiência e étnico-racial         | 30               |
| Gênero, deficiência e étnico-racial | 24               |
| Outra                               | 18               |

O número de entrevistados foi de

- A 576
- B 444
- C 308
- D 290

49. (UFPA 2016) Em uma turma de cinquenta alunos de Medicina, há dezoito cursando Anatomia, quinze cursando Citologia e treze cursando Biofísica. Seis alunos cursam simultaneamente Anatomia e Citologia, cinco cursam simultaneamente Citologia e Biofísica e quatro cursam simultaneamente Anatomia e Biofísica. Dezesseis alunos não cursam nenhuma destas disciplinas.

O número de alunos que cursam, simultaneamente, exatamente duas disciplinas é

- A 31
- B 15
- C 12
- D 8
- E 6

50. (IFAL 2016) Em uma enquete, realizada com 2016 candidatos a uma das vagas nos cursos do IFAL, para saber em quais matérias, entre Matemática, Física e Química, eles sentiam mais dificuldade, obteve-se o seguinte resultado: 920 sentiam dificuldade em Matemática, 720 em Física, 560 em Química, 400 em Matemática e Física, 360 em Matemática e Química, 320 em Física e Química e 200 nas três matérias.

O número de candidatos que afirmaram não ter dificuldade em nenhuma matéria é

- A 136
- B 336
- C 416
- D 576
- E 696

51. (IFPE 2016) Com o objetivo de realizar um levantamento sobre o número de professores afastados para cursos de capacitação do *campus* Vitória de Santo Antão, verificou-se que, de um total de 88 professores na instituição,

45 professores lecionam no Ensino Integrado;  
35 professores lecionam no Ensino Superior;  
30 professores lecionam no Ensino Subsequente;  
15 professores lecionam no Integrado e Superior;  
10 professores lecionam no Integrado e Subsequente;  
10 professores lecionam no Superior e Subsequente;  
5 professores lecionam no Integrado, Superior e Subsequente.

Sabe-se que o *campus* Vitória de Santo Antão apenas oferece essas três modalidades de ensino e que todos os professores que não estão afastados lecionam em, pelo menos, uma das três modalidades.

Com base nestas informações, conclui-se que o número de professores que não estão lecionando em nenhuma das três modalidades por estarem afastados para curso de capacitação é

- A 20
- B 16
- C 12
- D 8
- E 10

52. (PUCPR 2015) Em uma enquete, com 500 estudantes, sobre a preferência de cada um com três tipos diferentes de sucos (laranja, manga e acerola), chegou-se ao seguinte resultado: 300 estudantes gostam do suco de laranja; 200 gostam do suco de manga; 150 gostam do suco de acerola; 75 gostam dos sucos de laranja e acerola; 100 gostam dos sucos de laranja e manga; 10 gostam dos três sucos e 65 não gostam de nenhum dos três sucos.

O número de alunos que gosta dos sucos de manga e acerola é:

- A 40
- B 60
- C 120
- D 50
- E 100

53. (UECE 2015) No colégio municipal, em uma turma com 40 alunos, 14 gostam de Matemática, 16 gostam de Física, 12 gostam de Química, 7 gostam de Matemática e Física, 8 gostam de Física e Química, 5 gostam de Matemática e Química e 4 gostam das três matérias.

Nessa turma, o número de alunos que não gostam de nenhuma das três disciplinas é

- A 6
- B 9
- C 12
- D 14

54. (UEMG 2015) Em uma enquete sobre a leitura dos livros selecionados para o processo seletivo, numa universidade de determinada cidade, foram entrevistados 1200 candidatos. 563 destes leram "Você Verá", de Luiz Vilela; 861 leram "O tempo é um rio que corre", de Lya Luft; 151 leram "Exílio", também de Lya Luft; 365 leram "Você Verá" e "O tempo é um rio que corre"; 37 leram "Exílio" e "O tempo é um rio que corre"; 61 leram "Você Verá" e "Exílio"; 25 candidatos leram as três obras e 63 não as leram.

A quantidade de candidatos que leram apenas "O tempo é um rio que corre" equivale a

- A 434
- B 484
- C 454
- D 424

55. (UEPA 2015) De acordo com a reportagem da Revista VEJA (edição 2341), é possível fazer gratuitamente curso de graduação pela Internet. Dentre os ofertados temos os cursos de Administração (bacharelado), Sistemas de Computação (Tecnólogo) e Pedagogia (licenciatura). Uma pesquisa realizada com 1.800 jovens brasileiros sobre quais dos cursos ofertados gostariam de fazer, constatou que 800 optaram pelo curso de Administração; 600 optaram pelo curso de Sistemas de Computação; 500 optaram pelo curso de Pedagogia; 300 afirmaram que fariam Administração e Sistemas de Computação; 250 fariam Administração e Pedagogia; 150 fariam Sistemas de Computação e Pedagogia e 100 dos jovens entrevistados afirmaram que fariam os três cursos.

Considerando os resultados dessa pesquisa, o número de jovens que não fariam nenhum dos cursos elencados é:

- A 150
- B 250
- C 350
- D 400
- E 500

56. (ESPCEX - AMAN 2014) Uma determinada empresa de biscoitos realizou uma pesquisa sobre a preferência de seus consumidores em relação a seus três produtos: biscoitos *cream cracker*, *wafer* e recheados. Os resultados indicaram que:

- 65 pessoas compram *cream crackers*.
- 85 pessoas compram *wafers*.
- 170 pessoas compram biscoitos recheados.
- 20 pessoas compram *wafers*, *cream crackers* e recheados.
- 50 pessoas compram *cream crackers* e recheados.
- 30 pessoas compram *cream crackers* e *wafers*.
- 60 pessoas compram *wafers* e recheados.
- 50 pessoas não compram biscoitos dessa empresa.

Determine quantas pessoas responderam a essa pesquisa.

- A 200
- B 250
- C 320
- D 370
- E 530

57. (IFCE 2014) Uma pesquisa de mercado foi realizada, para verificar a preferência sobre três produtos, A, B e C. 1.200 pessoas foram entrevistadas. Os resultados foram os seguintes: 370 pessoas das entrevistadas gostam do produto A, 300 preferem o produto B e 360, o produto C. Desse total, 100 pessoas preferem A e B, 60, os produtos B e C, 30 os produtos A e C e 20 pessoas preferem os 3 produtos.

Com base nesses dados, os que não opinaram por nenhum produto foram

- A 330.
- B 340.
- C 360.
- D 370.
- E 380.

58. (UERN 2013) Em um vestibular para ingresso no curso de engenharia de uma determinada universidade, foi analisado o desempenho dos 1472 vestibulandos nas provas de Português, Matemática e Física, obtendo-se o seguinte resultado:

- 254 candidatos foram aprovados somente em Português;
- 296 candidatos foram aprovados somente em Matemática;
- 270 candidatos foram aprovados somente em Física;
- 214 candidatos foram aprovados em Português e Física;
- 316 candidatos foram aprovados em Matemática e Física;
- 220 candidatos foram aprovados em Português e Matemática;
- 142 candidatos foram reprovados nas três disciplinas.

O número de alunos aprovados nas três disciplinas, e, portanto, aptos a ingressarem no curso de engenharia, é

- A** 98.
- B** 110.
- C** 120.
- D** 142.

59. (UEPA 2012) Uma ONG Antidrogas realizou uma pesquisa sobre o uso de drogas em uma cidade com 200 mil habitantes adultos. Os resultados mostraram que 11% dos entrevistados que vivem na cidade pesquisada são dependentes de álcool, 9% são dependentes de tabaco, 5% são dependentes de cocaína, 4% são dependentes de álcool e tabaco, 3% são dependentes de tabaco e cocaína, 2% são dependentes de álcool e cocaína e 1% dependente das três drogas mencionadas na pesquisa.

O número de habitantes que não usa nenhum tipo de droga mencionada na pesquisa é:

- A** 146.000
- B** 150.000
- C** 158.000
- D** 160.000
- E** 166.000

60. (UTFPR 2012) Numa cidade existem três *shoppings*: “X”, “Y” e “Z”. Foi feita uma entrevista com as pessoas para saber sobre o hábito delas frequentarem esses *shoppings* e obteve-se o seguinte resultado, disposto na tabela abaixo:

| <i>Shopping</i> | Pessoas |
|-----------------|---------|
| X               | 220     |
| Y               | 226     |
| Z               | 226     |
| X e Y           | 120     |
| X e Z           | 130     |
| Y e Z           | 110     |
| X, Y e Z        | 70      |
| Nenhum dos três | 100     |

Quantas pessoas entrevistadas não frequentam o *shopping* “X”?

- A** 552.
- B** 276.
- C** 262.
- D** 130.
- E** 100.

61. (CFTRJ 2012) Uma das grandes paixões dos cariocas é o desfile de escolas de samba. Foram entrevistados alguns foliões com a seguinte pergunta: "Em qual ou quais escolas você irá desfilar em 2012?", e os entrevistadores chegaram a algumas conclusões, de acordo com a tabela:

| Escola de samba                | Número de foliões |
|--------------------------------|-------------------|
| Mangueira                      | 1500              |
| Portela                        | 1200              |
| Salgueiro                      | 800               |
| Mangueira e Portela            | 600               |
| Portela e Salgueiro            | 400               |
| Mangueira e Salgueiro          | 200               |
| Mangueira, Portela e Salgueiro | 150               |
| Nenhuma das três               | 700               |

- a) Quantos foliões foram entrevistados?  
b) Quantos, dentre os entrevistados, não pretendem desfilar na Salgueiro?

62. (CFTMG 2011) Numa pesquisa com 2000 pessoas no Bairro Nova Cintra sobre a audiência de três programas de TV, obteve-se o seguinte resultado:

| Programas | Nº de telespectadores |
|-----------|-----------------------|
| A         | 1220                  |
| B         | 400                   |
| C         | 1080                  |
| A e B     | 220                   |
| A e C     | 800                   |
| B e C     | 180                   |
| A, B e C  | 100                   |

Analisando os resultados, a porcentagem de telespectadores que não assistem a nenhum desses programas é

- Ⓐ 5%  
Ⓑ 10%  
Ⓒ 20%  
Ⓓ 30%

63. (UEL 2011) Num dado momento, três canais de TV tinham, em sua programação, novelas em seus horários nobres: a novela A no canal A, a novela B no canal B e a novela C no canal C. Numa pesquisa com 3000 pessoas, perguntou-se quais novelas agradavam. A tabela a seguir indica o número de telespectadores que designaram as novelas como agradáveis.

| Novelas  | Número de telespectadores |
|----------|---------------------------|
| A        | 1450                      |
| B        | 1150                      |
| C        | 900                       |
| A e B    | 350                       |
| A e C    | 400                       |
| B e C    | 300                       |
| A, B e C | 100                       |

Quantos telespectadores entrevistados não acham agradável nenhuma das três novelas?

- Ⓐ 300 telespectadores.  
Ⓑ 370 telespectadores.  
Ⓒ 450 telespectadores.  
Ⓓ 470 telespectadores.  
Ⓔ 500 telespectadores.

64. (CFTMG 2010) Uma enquete intitulada "O que mais falta no seu celular?" foi realizada em um site da internet, apresentando o seguinte resultado:

| ITENS DO CELULAR         | N.º DE INTERNAUTAS |
|--------------------------|--------------------|
| TV                       | 97                 |
| Touch Screen             | 44                 |
| WIFI                     | 37                 |
| TV e Touch Screen        | 10                 |
| WIFI e Touch Screen      | 15                 |
| WIFI e TV                | 18                 |
| WIFI e TV e Touch Screen | 5                  |
| Nenhum                   | 15                 |

O número de internautas que responderam a essa enquete foi

- A 130
- B 148
- C 155
- D 163

65. (PUCPR 2010) As pessoas atendidas em uma unidade de saúde apresentaram os seguintes sintomas: febre alta, dores no corpo e dores de cabeça. Os dados foram tabulados conforme quadro a seguir:

| Sintomas                      | Número de pacientes |
|-------------------------------|---------------------|
| Febre                         | 22                  |
| Dor no corpo                  | 16                  |
| Náuseas                       | 24                  |
| Febre e dor no corpo          | 10                  |
| Dor no corpo e náuseas        | 10                  |
| Náuseas e febre               | 8                   |
| Febre, dor no corpo e náuseas | 6                   |

Determine o número de pacientes atendidos no posto de saúde.

- A 62 pessoas.
- B 68 pessoas.
- C 40 pessoas.
- D 86 pessoas.
- E 42 pessoas.

66. (UFPA 2008) Feita uma pesquisa entre 100 alunos, do ensino médio, acerca das disciplinas português, geografia e história, constatou-se que 65 gostam de português, 60 gostam de geografia, 50 gostam de história, 35 gostam de português e geografia, 30 gostam de geografia e história, 20 gostam de história e português e 10 gostam dessas três disciplinas.

O número de alunos que não gosta de nenhuma dessas disciplinas é

- A 0
- B 5
- C 10
- D 15
- E 20

67. (UFMG 2007) Uma escola realizou uma pesquisa sobre os hábitos alimentares de seus alunos. Alguns resultados dessa pesquisa foram:

- 82% do total de entrevistados gostam de chocolate;
- 78% do total de entrevistados gostam de pizza; e
- 75% do total de entrevistados gostam de batata frita.

Então, é correto afirmar que, no total de alunos entrevistados, a porcentagem dos que gostam, ao mesmo tempo, de chocolate, de pizza e de batata frita é, pelo menos, de

- A** 25%.
- B** 30%.
- C** 35%.
- D** 40%.

68. (CFTMG 2005) Um instituto de opinião pública pesquisou 800 alunos de uma faculdade sobre a preferência pela leitura das revistas A, B e C, obtendo o seguinte resultado:

| Revistas preferidas | Número de leitores |
|---------------------|--------------------|
| A                   | 280                |
| B                   | 350                |
| C                   | 400                |
| A e B               | 90                 |
| A e C               | 110                |
| B e C               | 100                |

O número de leitores das três revistas é

- A** 50
- B** 60
- C** 70
- D** 80

69. (Enem 2004) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas.

Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que  $C_1$  e  $C_2$  terão 10 páginas em comum;  $C_1$  e  $C_3$  terão 6 páginas em comum;  $C_2$  e  $C_3$  terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em  $C_1$ .

Efetuada os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a

- A** 135
- B** 126
- C** 118
- D** 114
- E** 110

70. (CFTMG 2004) 300 alunos de uma escola foram entrevistados a respeito de três frutos: mamão, maçã e abacaxi. O resultado foi o seguinte: 160 disseram que gostam de comer mamão; 120 gostam de comer maçã; 90 gostam de comer abacaxi; 30 gostam de comer mamão e maçã; 40 gostam de comer mamão e abacaxi; 50 gostam de comer maçã e abacaxi e 10 gostam de comer os três frutos.

Dos alunos entrevistados, quantos não gostavam de comer nenhum dos frutos?

- A 80
- B 60
- C 55
- D menos de 50

71. (UFMG 2003) Em uma pesquisa de opinião, foram obtidos estes dados:

- 40% dos entrevistados leem o jornal A.
- 55% dos entrevistados leem o jornal B.
- 35% dos entrevistados leem o jornal C.
- 12% dos entrevistados leem os jornais A e B.
- 15% dos entrevistados leem os jornais A e C.
- 19% dos entrevistados leem os jornais B e C.
- 7% dos entrevistados leem os três jornais.
- 135 pessoas entrevistadas não leem nenhum dos três jornais.

Considerando-se esses dados, é CORRETO afirmar que o número total de entrevistados foi

- A 1 200.
- B 1 500.
- C 1 250.
- D 1 350.

72. (UFJF 2003) Uma pesquisa realizada com os alunos do ensino médio de um colégio indicou que 221 alunos gostam da área de saúde, 244 da área de exatas, 176 da área de humanas, 36 da área de humanas e de exatas, 33 da área de humanas e de saúde, 14 da área de saúde e de exatas e 6 gostam das três áreas.

O número de alunos que gostam apenas de uma das três áreas é:

- A 487.
- B 493.
- C 564.
- D 641.
- E 730.

73. (UERJ 2002) Em um posto de saúde foram atendidas, em determinado dia, 160 pessoas com a mesma doença, apresentando, pelo menos, os sintomas diarreia, febre ou dor no corpo, isoladamente ou não. A partir dos dados registrados nas fichas de atendimento dessas pessoas, foi elaborada a tabela a seguir.

| SINTOMAS                       | FREQUÊNCIA |
|--------------------------------|------------|
| diarreia                       | 62         |
| febre                          | 62         |
| dor no corpo                   | 72         |
| diarreia e febre               | 14         |
| diarreia e dor no corpo        | 8          |
| febre e dor no corpo           | 20         |
| diarreia, febre e dor no corpo | X          |

Na tabela, X corresponde ao número de pessoas que apresentaram, ao mesmo tempo, os três sintomas.

Pode-se concluir que X é igual a:

- A** 6
- B** 8
- C** 10
- D** 12

Agora que você está acostumado com o BOTA e TIRA, aposto que você quer evitar o preenchimento do diagrama a todo custo. No entanto, existem dois casos principais em que você necessita do preenchimento:

1º Caso - Você consegue identificar as regiões do BOTA e TIRA, mas a pergunta se refere a uma região que não está entre elas. Vejamos um exemplo:

(UFPA 2016) Em uma turma de cinquenta alunos de Medicina, há dezoito cursando Anatomia, quinze cursando Citologia e treze cursando Biofísica. Seis alunos cursam simultaneamente Anatomia e Citologia, cinco cursam simultaneamente Citologia e Biofísica e quatro cursam simultaneamente Anatomia e Biofísica. Dezesesseis alunos não cursam nenhuma destas disciplinas.

O número de alunos que cursam, simultaneamente, exatamente duas disciplinas é

- A** 31
- B** 15
- C** 12
- D** 8
- E** 6

**RESOLUÇÃO**

Perceba que as regiões do BOTA e TIRA estão bem definidas:

| REGIÃO   | DESCRIÇÃO             | VALOR | CONTA |
|----------|-----------------------|-------|-------|
| A        | Anatomia              | 18    | +     |
| B        | Biofísica             | 13    | +     |
| C        | Citologia             | 15    | +     |
| A e B    | Anatomia e Biofísica  | 4     | -     |
| B e C    | Biofísica e Citologia | 5     | -     |
| A e C    | Anatomia e Citologia  | 6     | -     |
| A, B e C | As três               | x     | +     |
| NENHUM   | Nenhuma               | 16    | +     |
| TOTAL    |                       | 50    | =     |

Porém, o comando refere-se ao número de alunos que cursam, simultaneamente, **exatamente duas disciplinas**. Região esta que não está bem definida. Podemos até utilizar o BOTA e TIRA para descobrirmos a quantidade de alunos que cursam Anatomia, Citologia e Biofísica, e facilitar o preenchimento. Mas precisamos usar o diagrama de Euler-Venn para descobrirmos quantos alunos cursam exatamente duas disciplinas.

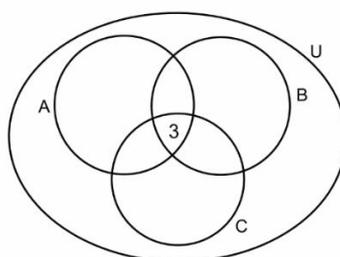
Aplicando o BOTA e TIRA:

$$18 + 13 + 15 - 4 - 5 - 6 + x + 16 = 50$$

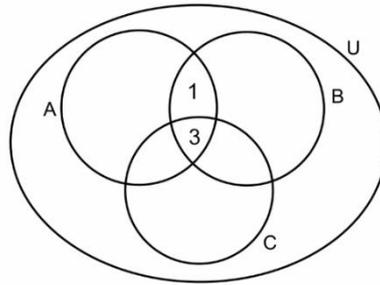
$$47 + x = 50$$

$$x = 3$$

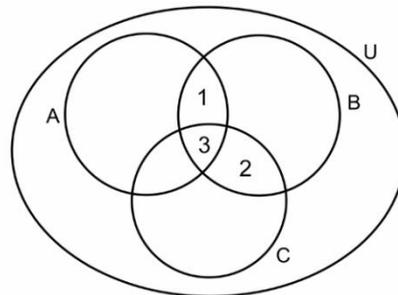
Inicialmente, preenchamos a interseção mais específica  $A \cap B \cap C$ , em que A representa Anatomia, B, Biofísica e C, Citologia. Sabe-se que 3 alunos cursam as três disciplinas, logo:



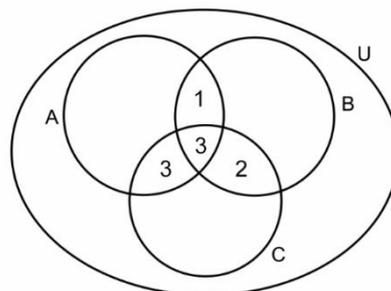
Em seguida preenchemos  $A \cap B$ , que corresponde a 4 alunos. Não esqueça de descontar o 3 que já consta no preenchimento.



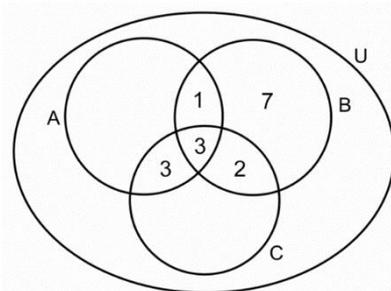
Agora, preenchemos  $C \cap B$ , que corresponde a 5 alunos. Mais uma vez, não esqueça de descontar o 3 que já consta no preenchimento.



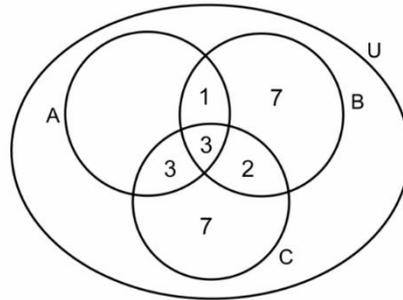
Analogamente, preenchemos  $A \cap C$ , que corresponde a 6 alunos. Sei que você vai lembrar de descontar o 3 que já consta no preenchimento! 😊



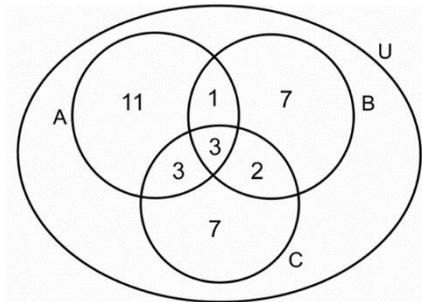
Chegou a hora de preenchermos o B, que corresponde a 13. Perceba que no conjunto B, já temos  $1 + 3 + 2 = 6$  alunos. Portanto, faltam 7 para chegar nos 13.



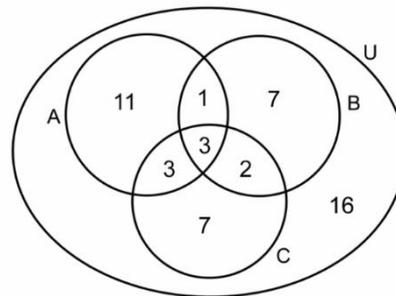
Perceba que em C já estão 8 (3 + 3 + 2) alunos. Faltam 7 para completar os 15.



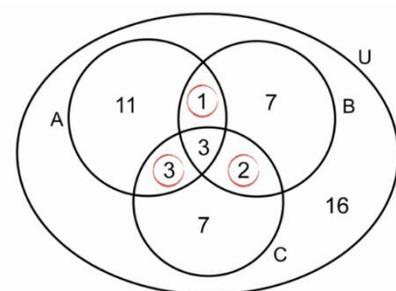
Perceba que em A já estão 7 (1 + 3 + 3) alunos. Faltam 11 para completar os 18.



Finalmente, 16 alunos não cursam qualquer das disciplinas.



O diagrama foi totalmente preenchido para que você saiba como fazê-lo, mas é muito importante que identifiquemos a região que o comando exige. Nessa questão em específico, a região desejada é



Logo, o preenchimento poderia ter sido finalizado ao obter tais regiões.

$1 + 3 + 2 = 6$  alunos cursam exatamente duas disciplinas.

Alternativa E.

2° Caso - Você não consegue identificar todas as regiões do BOTA e TIRA, nesse caso, não dá pra aplicar o BOTA e TIRA, tem que preencher mesmo... Vejamos um exemplo:

(UEFS 2016) Em um grupo de 30 jovens, 2 já assistiram a todos os filmes X, Y e Z e 10 ainda não viram nenhum. Dos 14 que viram Y, 5 também assistiram a X, e 6 também viram Z. Ao todo, 11 jovens assistiram a X.

Com relação aos filmes assistidos, nesse grupo,

- Ⓐ ninguém assistiu apenas a X.
- Ⓑ ninguém assistiu apenas a Z.
- Ⓒ alguém assistiu a Z, mas não viu Y.
- Ⓓ nem todos os que assistiram a Z viram Y.
- Ⓔ todos os que assistiram a X também viram Z.

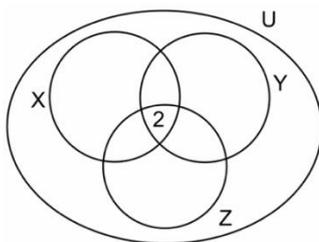
### RESOLUÇÃO

Nesse exemplo, algumas regiões não estão bem definidas.

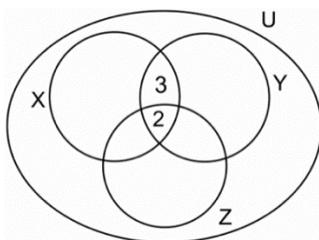
| REGIÃO   | DESCRIÇÃO    | VALOR | CONTA |
|----------|--------------|-------|-------|
| A        | Filme X      | 11    | +     |
| B        | Filme Y      | 14    | +     |
| C        | Filme Z      |       | +     |
| A e B    | Filmes X e Y | 5     | -     |
| B e C    | Filmes Y e Z | 6     | -     |
| A e C    | Filmes X e Z |       | -     |
| A, B e C | Os três      | 2     | +     |
| NENHUM   | Nenhum       | 10    | +     |
| TOTAL    |              | 30    | =     |

Perceba que duas regiões não foram identificadas... Quantos assistiram ao filme Z? Quantos assistiram aos filmes X e Z? Não sabemos. Por não estarem bem definidas, devemos utilizar o diagrama de Venn.

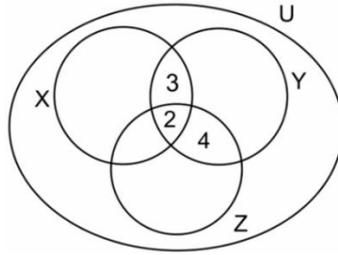
Inicialmente, preenchamos a interseção mais específica  $X \cap Y \cap Z$ , 2 já assistiram a todos os filmes X, Y e Z:



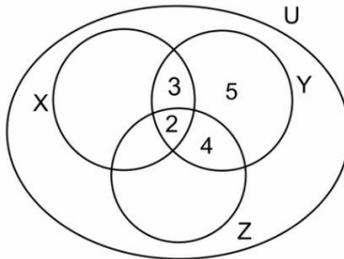
Em seguida, usaremos a informação que dos 14 que viram Y, 5 também assistiram a X, isso quer dizer que 5 assistiram a X e Y. Ao preencher a interseção  $X \cap Y$ , não esqueça de subtrair os 2 que já constam no preenchimento.



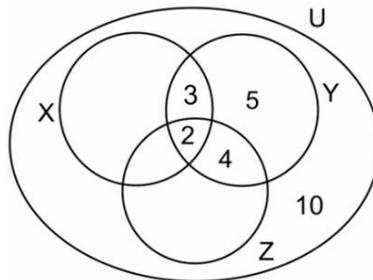
Agora, usaremos a informação que dos 14 que viram Y, 6 também viram Z. Isso quer dizer que 6 assistiram a Y e Z. Ao preencher a interseção Y e Z, não esqueça de subtrair os 2 que já constam no preenchimento.



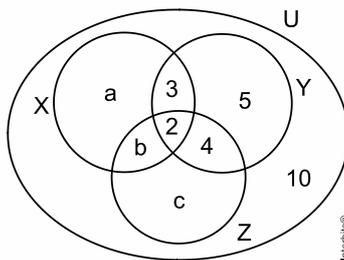
Podemos preencher o próprio Y, que foi assistido por 14 pessoas. Não esqueça de subtrair as 9 ( $3 + 2 + 4$ ) que já constam no preenchimento.



Sabe-se também que 10 ainda não viram nenhum filme.



Finalmente, preenchemos as regiões que não temos informações com a, b e c.



Sabendo que 11 jovens assistiram a X,  $a + b + 3 + 2 = 11$  e que 30 jovens foram consultados, temos  $11 + 5 + 4 + c + 10 = 30$ , o que indica que  $c = 0$ .

Portanto, ninguém assistiu apenas ao filme Z.

Alternativa B.

Vamos exercitar?

74. (UEFS 2018) Em uma empresa com 33 funcionários, 22 são fluentes em italiano, 14 são fluentes em alemão e 27 são fluentes em francês. Sabe-se que todos os funcionários são fluentes em pelo menos uma dessas línguas e que, no total, 18 desses funcionários são fluentes em exatamente duas dessas línguas.

O número de funcionários nessa empresa que são fluentes nessas três línguas é

- A** 2
- B** 3
- C** 4
- D** 5
- E** 6

75. (Mackenzie 2018) Em uma pesquisa com 120 pessoas, verificou-se que

65 assistem ao noticiário A  
45 assistem ao noticiário B  
42 assistem ao noticiário C  
20 assistem ao noticiário A e ao noticiário B  
25 assistem ao noticiário A e ao noticiário C  
15 assistem ao noticiário B e ao noticiário C  
8 assistem aos três noticiários.

Então o número de pessoas que assistem somente a um noticiário é

- A** 7
- B** 8
- C** 14
- D** 28
- E** 56

76. (IFAL 2017) Em um certo grupo de pessoas, 40 falam inglês, 32 falam espanhol, 20 falam francês, 12 falam inglês e espanhol, 8 falam inglês e francês, 6 falam espanhol e francês, 2 falam as 3 línguas e 12 não falam nenhuma das línguas.

Escolhendo aleatoriamente uma pessoa desse grupo, qual a probabilidade de essa pessoa falar espanhol ou francês?

- A** 7,5%
- B** 40%
- C** 50%
- D** 57,5%
- E** 67,5%

77. (UDESC 2017) Uma pesquisa sobre os fatores que influenciam na escolha de um livro para leitura foi realizada em um grupo de 80 pessoas. Elas foram questionadas se na hora de escolher um livro levavam em consideração o gênero de sua preferência, a indicação de amigos ou as listas dos mais vendidos, sendo que poderiam optar por uma, duas ou as três opções. Ninguém respondeu ser influenciado apenas por listas dos mais vendidos, mas 20 pessoas responderam levar esse fator em consideração. Além disso, 28 responderam considerar apenas o gênero de sua preferência, enquanto 5 disseram que as três opções influenciam suas decisões.

Sabendo, ainda, que o número de pessoas que se baseiam apenas nas indicações dos amigos é igual aos que disseram levar em consideração apenas as indicações dos amigos e o gênero de sua preferência, então pode-se afirmar que a quantidade de pessoas que seguem apenas as indicações de amigos é:

- A 13
- B 10
- C 16
- D 32
- E 8

78. (FGVRJ 2016) Em uma pesquisa para estudar a incidência de três fatores de risco (A, B e C) para doenças cardíacas em homens, verificou-se que, do total da população investigada,

15% da população apresentava apenas o fator A;  
15% da população apresentava apenas o fator B;  
15% da população apresentava apenas o fator C;  
10% da população apresentava apenas os fatores A e B;  
10% da população apresentava apenas os fatores A e C;  
10% da população apresentava apenas os fatores B e C;  
em 5% da população os três fatores de risco ocorriam simultaneamente.

Da população investigada, entre aqueles que não apresentavam o fator de risco A, a porcentagem dos que não apresentavam nenhum dos três fatores de risco é, aproximadamente,

- A 20%
- B 50%
- C 25%
- D 66%
- E 33%

79. (UFJF 1 2016) Uma agência de viagens oferece aos seus primeiros clientes, na primeira semana do ano, três pacotes promocionais: Básico, Padrão e Luxo. No regulamento da promoção há uma cláusula que não permite que o cliente que opte por apenas 2 pacotes, simultaneamente, adquira os pacotes Padrão e Luxo. No final da semana, constatou-se que:

- 37 clientes ficaram com pelo menos um dos pacotes promocionais;
- 13 clientes adquiriram, simultaneamente, os pacotes Básico e Padrão;
- 19 clientes ficaram com apenas um pacote.

A quantidade de clientes que adquiriram, simultaneamente, apenas os pacotes Básico e Luxo foi de:

- A 5
- B 6
- C 18
- D 24
- E 32

80. Numa creche com 32 crianças:

- 5 crianças moram na Tijuca, vão de ônibus e jantam na creche.
- 3 crianças moram na Tijuca, vão de ônibus, mas não jantam na creche.
- 9 crianças não moram na Tijuca, não vão de ônibus e não jantam na creche.
- 11 crianças moram na Tijuca e jantam na creche.
- 16 crianças moram na Tijuca.
- 9 crianças vão de ônibus e jantam na creche.
- 13 crianças vão de ônibus.

Quantas crianças jantam na creche?

- A** 11
- B** 15
- C** 17
- D** 18

81. (UEPG 2016) Interessado em lançar os modelos A, B e C de sandálias, em uma determinada região do estado, foi realizada uma pesquisa sobre a preferência de compra dos moradores, a qual apresentou os seguintes resultados:

- 600 moradores comprariam apenas o modelo A;
- 1.000 moradores comprariam apenas o modelo B;
- 1.400 moradores comprariam apenas o modelo C;
- 100 moradores comprariam apenas os modelos A e B;
- 200 moradores comprariam apenas os modelos A e C;
- 300 moradores comprariam apenas os modelos B e C;
- 100 moradores comprariam qualquer um dos três modelos;
- 1.300 moradores não comprariam nenhum dos três modelos.

A partir do que foi exposto, assinale as alternativas corretas.

- A** O modelo A tem a preferência de menos que 17% dos moradores.
- B** 70% dos moradores não comprariam o modelo B.
- C** 14% dos moradores comprariam pelo menos dois dos modelos oferecidos.
- D** Mais do que 50% dos moradores não comprariam os modelos A ou C.
- E** O modelo C é o de maior preferência.

82. (IFSUL 2016) Em um grupo de 60 jovens praticantes de vôlei, basquete e futsal, sabe-se que:

- 03 praticam os três esportes citados,
- 01 não pratica nenhum esporte,
- 07 jogam vôlei e basquete,
- 25 jogam vôlei,
- 27 praticam basquete,
- 10 praticam basquete e futsal,
- 30 jogam futsal,
- 08 praticam vôlei e futsal.

Quantos jovens praticam apenas dois esportes?

- A** 16
- B** 17
- C** 19
- D** 25

83. (UFJF 2015) Num certo sábado, uma casa de shows teve três fontes de faturamento: entradas, bebidas e comidas. O gerente da casa levantou as seguintes informações:

- 53% do faturamento foi relativo às entradas vendidas;
- 58% do faturamento resultou das bebidas vendidas;
- 17% do faturamento foi relativo ao consumo de comida;
- 13% do faturamento resultou das entradas e bebidas vendidas;
- 10% do faturamento foi relativo às entradas e comidas vendidas;
- 5% do faturamento resultou das entradas, bebidas e comidas vendidas;
- 2% do faturamento foi relativo apenas ao consumo de comidas.

Sabendo que, naquele sábado, essa casa de shows faturou R\$ 200.000,00 o faturamento devido, unicamente, a bebidas foi de:

- A** R\$ 90.000,00
- B** R\$ 80.000,00
- C** R\$ 70.000,00
- D** R\$ 16.000,00
- E** R\$ 10.000,00

84. (UEPA 2014) Uma pesquisa foi realizada com 200 pacientes em diversos consultórios médicos quanto ao uso dos seguintes aplicativos para celulares: A - Informações sobre alimentação, B - Registro de níveis de estresse físico e psicológico e C - Controle do horário da medicação. Essa pesquisa revela que apenas 10% dos entrevistados não fazem uso de nenhum dos aplicativos; 30% dos entrevistados utilizam apenas o aplicativo A; 10 pacientes utilizam apenas o aplicativo B;  $\frac{1}{4}$  dos pacientes utilizam apenas o aplicativo C e 36 pacientes fazem uso dos três aplicativos.

Texto Adaptado: *Revista Época*, n° 795.

Sabe-se que a quantidade de pacientes que utilizam apenas os aplicativos A e B, A e C e B e C é a mesma, portanto, o número de pacientes entrevistados que fazem uso de pelo menos dois desses aplicativos é:

- A** 21.
- B** 30.
- C** 36.
- D** 48.
- E** 60.

85. (UDESC 2014) Um evento cultural ofereceu três atrações ao público: uma apresentação de dança, uma sessão de cinema e uma peça de teatro. O público total de participantes que assistiu a pelo menos uma das atrações foi de 200 pessoas. Sabe-se, também, que 115 pessoas compareceram ao cinema, 95 à dança e 90 ao teatro. Além disso, constatou-se que 40% dos que foram ao teatro não foram ao cinema, sendo que destes 25% foram apenas ao teatro. Outra informação levantada pela organização do evento foi que o público que assistiu a mais de uma atração é igual ao dobro dos que assistiram somente à apresentação de dança.

Se apenas 2 pessoas compareceram a todas as atrações, então a quantidade de pessoas que assistiu a somente uma das atrações é:

- A** 102
- B** 114
- C** 98
- D** 120
- E** 152

86. Através de uma pesquisa sobre a frequência de uso das especialidades de ortopedia, dermatologia e pediatria, oferecidas numa dada clínica infantil, constatou-se que:

- 15 pacientes já fizeram consulta com a ortopedia e dermatologia, mas nunca utilizaram a pediatria.
- 30 pacientes já fizeram consulta com a ortopedia e a pediatria.
- 20 pacientes já fizeram consulta com a ortopedia, dermatologia e com a pediatria.
- 265 utilizaram a dermatologia.
- 180 utilizaram apenas a dermatologia.
- 145 já fizeram consulta com a ortopedia.

Sabendo que a clínica tem o registro de 605 pacientes, quantos deles utilizaram apenas a pediatria?

87. (PUCRS 2013) O número de alunos matriculados nas disciplinas Álgebra A, Cálculo II e Geometria Analítica é 120. Constatou-se que 6 deles cursam simultaneamente Cálculo II e Geometria Analítica e que 40 cursam somente Geometria Analítica. Os alunos matriculados em Álgebra A não cursam Cálculo II nem Geometria Analítica.

Sabendo que a turma de Cálculo II tem 60 alunos, então o número de estudantes em Álgebra A é

- Ⓐ 8
- Ⓑ 14
- Ⓒ 20
- Ⓓ 26
- Ⓔ 32

88. (UDESC 2012) Uma das últimas febres da internet são os sites de compras coletivas, que fazem a intermediação entre anunciantes e consumidor final, oferecendo cupons com grande percentual de descontos na compra de produtos e/ou serviços. O gestor de um destes sites, preocupado em acompanhar essa tendência e ao mesmo tempo oferecer novas opções para seus clientes, tabulou os dados referentes aos negócios realizados por sua empresa durante o ano de 2011. De posse desses dados, ele (gestor) percebeu que em seu site foram ofertados cupons apenas nas seguintes categorias: Gastronomia, Entretenimento e Saúde & Beleza. Além disso, considerando apenas os cinco mil clientes cadastrados que efetuaram a compra de pelo menos uma oferta do seu site, o gestor notou que 52% destes adquiriram cupons do segmento Gastronomia, enquanto 46% aderiram a ofertas de Saúde & Beleza e 44% compraram itens relacionados a Entretenimento. O gestor notou também que apenas 300 clientes compraram cupons dos três segmentos disponíveis, enquanto que 800 clientes adquiriram ofertas de Gastronomia e Entretenimento e 700 compraram itens de Gastronomia e Saúde & Beleza.

Então a soma do número de clientes deste site que comprou ofertas relacionadas, exatamente, a um dos três segmentos disponíveis, é:

- Ⓐ 3800
- Ⓑ 2600
- Ⓒ 3200
- Ⓓ 2200
- Ⓔ 3000

89. (UESC 2011) Ao se aproximar a data de realização de certo concurso, uma escola que se dedica a preparar candidatos a cargos públicos deu três aulas de revisão intensiva para seus alunos.

- Do total  $T$  de alunos, sabe-se que 80 compareceram à primeira aula, 85, à segunda e 65 compareceram à terceira aula de revisão.
- Dos alunos que assistiram à primeira aula, 36 não retornaram para as duas aulas seguintes, 15 retornaram apenas para a segunda e 20 compareceram às três aulas.
- Dos alunos que não estavam presentes na primeira aula, 30 compareceram à segunda e à terceira aulas.

Com base nessas informações, se  $\frac{1}{3}$  do total de alunos não compareceu às aulas de revisão, então o valor de  $T$  é

- A** 165
- B** 191
- C** 204
- D** 230
- E** 345

90. (IFAL 2011) Num grupo de 142 pessoas, foi feita uma pesquisa sobre três programas de televisão A, B e C e constatou-se que:

- 40 não assistem a nenhum dos três programas;
- 103 não assistem ao programa C;
- 25 só assistem ao programa B;
- 13 assistem aos programas A e B;
- O número de pessoas que assistem somente aos programas B e C é a metade do número de pessoas que assistem somente A e B;
- 25 só assistem a 2 programas;
- 72 só assistem a um dos programas.

Pode-se concluir que o número de pessoas que assistem

- A** ao programa A é 30.
- B** aos programas A e C é 13.
- C** ao programa C é 39.
- D** aos programas A ou B é 63.
- E** aos três programas é 6.

91. (UFPB 2011) Uma escola de línguas estrangeiras sorteou uma bolsa de estudos entre 20 alunos de escola pública que demonstraram ter algum conhecimento de, pelo menos, um dos idiomas: inglês, espanhol e francês. Sobre os alunos sorteados sabe-se que:

- 9 demonstraram ter algum conhecimento de espanhol;
- 8 demonstraram ter algum conhecimento de francês;
- 14 demonstraram ter algum conhecimento de inglês;
- 4 demonstraram ter algum conhecimento de espanhol e de francês;
- 5 demonstraram ter algum conhecimento de espanhol e de inglês;
- 3 demonstraram ter algum conhecimento de francês e de inglês;
- 1 demonstrou ter algum conhecimento dos três idiomas citados.

Com base nas informações apresentadas, identifique as afirmativas corretas:

- A** A probabilidade de o aluno sorteado ter conhecimento apenas de espanhol é de 5%.
- B** A probabilidade de o aluno sorteado ter apenas conhecimento de francês e de inglês é de 10%.
- C** A probabilidade de o aluno sorteado não ter conhecimento de inglês é de 30%.
- D** A probabilidade de o aluno sorteado ter conhecimento apenas de inglês é de 35%.
- E** A probabilidade de o aluno com conhecimento apenas de espanhol ter sido sorteado é maior que a probabilidade do aluno com conhecimento apenas de francês.

92. (PUCRJ 2008) Um trem viajava com 242 passageiros, dos quais:

- 96 eram brasileiros,
- 64 eram homens,
- 47 eram fumantes,
- 51 eram homens brasileiros,
- 25 eram homens fumantes,
- 36 eram brasileiros fumantes,
- 20 eram homens brasileiros fumantes.

Calcule:

- a) o número de mulheres brasileiras não fumantes;
- b) o número de homens fumantes não brasileiros;
- c) o número de mulheres não brasileiras, não fumantes.

93. (UFMG 2006) Uma pesquisa foi feita com um grupo de pessoas que frequentam, pelo menos, uma das três livrarias, A, B e C. Foram obtidos os seguintes dados:

- das 90 pessoas que frequentam a Livraria A, 28 não frequentam as demais;
- das 84 pessoas que frequentam a Livraria B, 26 não frequentam as demais;
- das 86 pessoas que frequentam a Livraria C, 24 não frequentam as demais;
- oito pessoas frequentam as três livrarias.

- a) Determine o número de pessoas que frequentam apenas uma das livrarias.
- b) Determine o número de pessoas que frequentam, pelo menos, duas livrarias.
- c) Determine o número total de pessoas ouvidas nessa pesquisa.

Nas aulas anteriores, conhecemos uma técnica impressionante chamada BOTA e TIRA. A técnica consistia em adicionar os elementos dos conjuntos e retirar as interseções que se repetiam, a chave desse processo é “brincar” com as interseções (elementos que estão nos dois conjuntos ao mesmo tempo). Mas e quando isso não é possível?

Por exemplo, se perguntássemos a um grupo de amigos, quem é casado? Alguns levantariam as mãos. Se perguntássemos, quem é solteiro? Outros levantariam as mãos. Espera-se que ninguém levante a mão em resposta às duas perguntas ao mesmo tempo, como pode uma pessoa ser casada e solteira ao mesmo tempo. Não há interseção entre o conjunto dos solteiros e o conjunto dos casados! Ou pelo menos, não deveria haver! Kkkkkk (Briancadeira) Nesse caso, em que não há interseção entre os conjuntos, não dá para aplicar o BOTA e TIRA, já que não há interseção para TIRAR!

Algo parecido vai acontecer se formos analisar os conjuntos “tem filho” e “não tem filho”, qual a interseção entre esses dois conjuntos? Como pode uma pessoa ter e não ter filho ao mesmo tempo? Não há interseção entre esses conjuntos.

E se analisássemos os conjuntos “nasceu no Brasil” e “não nasceu no Brasil”? Como pode uma pessoa ter nascido e não ter nascido no Brasil ao mesmo tempo? Não há interseção entre esses conjuntos.

Em casos como estes, estamos delimitando uma única escolha para os pares de opções dadas ao elemento, ou ele pertence ao conjunto solteiro, ou ao casado. Ou ele pertence ao conjunto tem filho ou ao não tem filho, ou ele pertence ao nasceu no Brasil ou ao não nasceu no Brasil. Não há como estar nos dois conjuntos ao mesmo tempo. É aí que teremos que lançar mão do diagrama matricial ou fluxograma, que será explicado na questão a seguir:

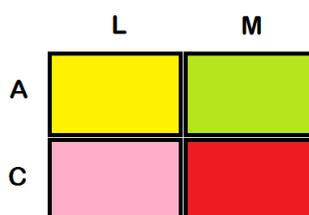
(UERJ 2003) Considere um grupo de 50 pessoas que foram identificadas em relação a duas categorias: quanto à cor dos cabelos, ou loiras ou morenas; quanto à cor dos olhos, ou azuis ou castanhos. De acordo com essa identificação, sabe-se que 14 pessoas no grupo são loiras com olhos azuis, que 31 pessoas são morenas e que 18 pessoas têm olhos castanhos.

O número de pessoas morenas com olhos castanhos é

- A 5
- B 13
- C 14
- D 18
- E 31

**RESOLUÇÃO**

Perceba que com as considerações dadas no enunciado, não existem mulheres loiras e morenas ao mesmo tempo, ou seja, não existe intersecção entre esses conjuntos. O mesmo acontece para os olhos, não podemos ter olhos castanhos e azuis ao mesmo tempo. Diante do exposto nossa saída é aderir ao diagrama matricial ou fluxograma, iniciaremos com o Diagrama Matricial, e logo em seguida, falaremos sobre o fluxograma.



A região amarela representa as mulheres L (loiras) de olhos A (azuis), a região rosa representa as mulheres L (loiras) de olhos C (castanhos), a região verde representa as M (morenas) de olhos A (azuis) e a vermelha as M (morenas) de olhos C (castanhos).

Veja, no enunciado, que temos um total de 50 pessoas, que estarão distribuídas entre as quatro regiões.

14 pessoas são loiras dos olhos azuis, região amarela preenchida!

|   | L  | M |
|---|----|---|
| A | 14 |   |
| C |    |   |

31 pessoas são morenas. Essa informação é imprescindível! Não há intersecção entre loiras e morenas. Se existem 31 morenas obrigatoriamente o que falta para completar 50 deve ser de loiras, que no caso, são 19 loiras. ( $31 + 19 = 50$ )

Dessas 19 loiras que existem, 14 já possuem olhos azuis, portanto, 5 (o que falta para completar 19) devem ter os olhos castanhos. Região rosa preenchida!

|   | L  | M |
|---|----|---|
| A | 14 |   |
| C | 5  |   |

18 pessoas tem olhos castanhos. Perceba que 5 dessas 18 já são loiras, logo 13 são morenas. Região vermelha preenchida!

|   | L  | M  |
|---|----|----|
| A | 14 |    |
| C | 5  | 13 |

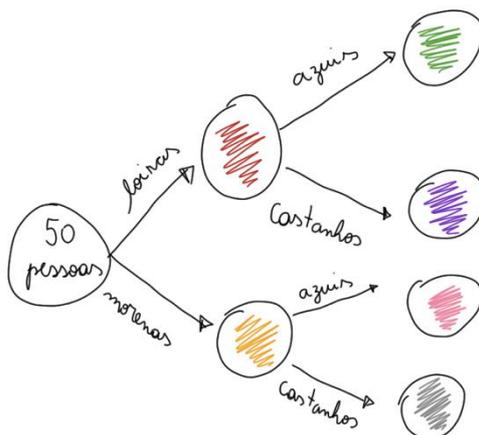
Finalmente, como são 31 morenas e 13 delas têm olhos castanhos, 18 possuem olhos azuis. Região verde preenchida!

|   | L  | M  |
|---|----|----|
| A | 14 | 18 |
| C | 5  | 13 |

Preenchemos totalmente o diagrama matricial. Veja que o enunciado objetiva a região vermelha, portanto, 13 mulheres são morenas e possuem olhos castanhos.

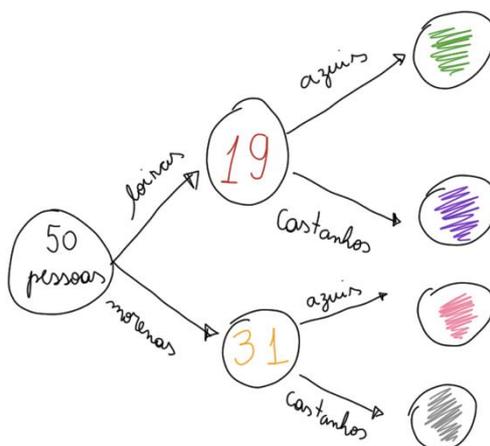
Alternativa B.

Outra maneira de resolver é utilizando o fluxograma:

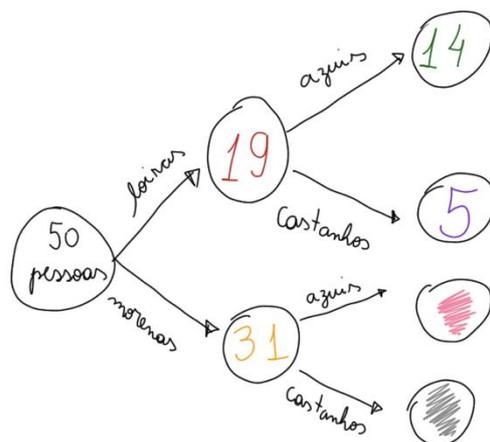


O fluxograma consiste no esquema acima, que inicialmente, dividimos as 50 pessoas em dois conjuntos, ou loiras ou morenas, em seguida, cada um dos dois conjuntos é dividido em outros dois, ou em olhos azuis ou em olhos castanhos. A região em **vermelho** representa todas as loiras enquanto que a em **amarelo** representa todas as morenas. A região em **verde** representa as loiras de olhos azuis, a região em **roxo** representa as loiras de olhos castanhos, a região em **rosa** representa as morenas com olhos azuis e, finalmente, a **cinza** representa as morenas de olhos castanhos.

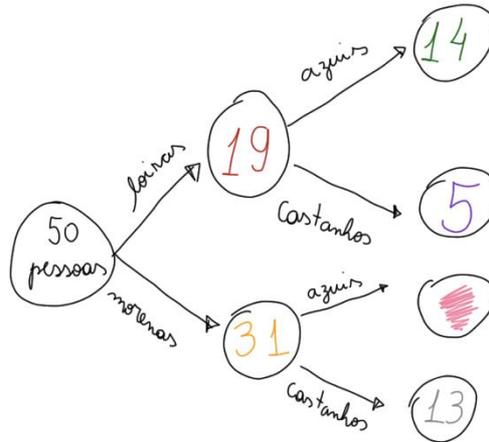
A primeira informação que usaremos é o fato de haver 31 morenas, com isso conseguimos preencher já duas regiões, morenas e loiras, uma vez que o total de pessoas é 50, se existem 31 morenas, com certeza as outras 19 são loiras ( $31 + 19 = 50$ ).



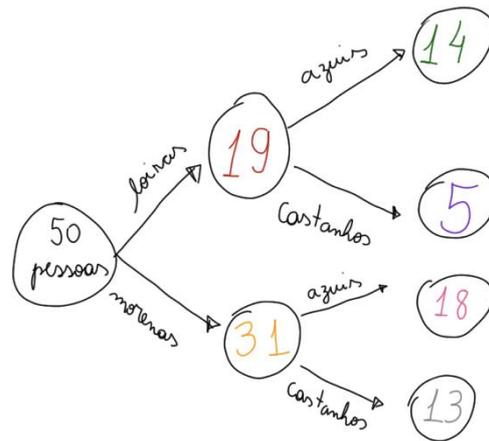
Agora use a informação de que 14 pessoas do grupo são loiras de olhos azuis para preencher as regiões verde e roxa. Das 19 loiras, se 14 possuem olhos azuis, 5 possuem olhos castanhos ( $14 + 5 = 19$ ).



Agora, atente para o fato de que 18 pessoas possuem olhos castanhos, não sabemos se elas são loiras ou morenas, mas sabemos que elas possuem olhos castanhos. Pelo fluxograma, sabemos que já existem 5 loiras com olhos castanhos, logo as outras 13 são morenas. ( $5 + 13 = 18$ ).



Só falta preencher a região rosa, do grupo das 31 morenas, 13 já possuem olhos castanhos, então, as outras 18 possuem olhos azuis ( $13 + 18 = 31$ ).



O nosso interesse era na região cinza, as morenas de olhos castanhos, no entanto, preenchemos todas as regiões para que pudéssemos compreender o funcionamento do fluxograma. Portanto, 13 mulheres são morenas olhos castanhos.

Alternativa B.

Vamos exercitar?

**QUESTÕES - DIAGRAMA MATRICIAL E FLUXOGRAMA**

94. (UECE 2018) Em um grupo de 200 estudantes, 98 são mulheres das quais apenas 60 não estudam comunicação.

Se do total de estudantes do grupo somente 60 estudam comunicação, o número de homens que não estudam esta disciplina é

- A 60
- B 80
- C 85
- D 75

95. (Enem 2010) Para verificar e analisar o grau de eficiência de um teste que poderia ajudar no retrocesso de uma doença numa comunidade, uma equipe de biólogos aplicou-o em um grupo de 500 ratos, para detectar a presença dessa doença. Porém, o teste não é totalmente eficaz podendo existir ratos saudáveis com resultado positivo e ratos doentes com resultado negativo. Sabe-se, ainda, que 100 ratos possuem a doença, 20 ratos são saudáveis com resultado positivo e 40 ratos são doentes com resultado negativo.

Um rato foi escolhido ao acaso, e verificou-se que o seu resultado deu negativo. A probabilidade de esse rato ser saudável é

- A  $1/5$
- B  $4/5$
- C  $19/21$
- D  $19/25$
- E  $21/25$

96. (CEFET MG 2013) Em uma enquete realizada com pessoas de idade superior a 30 anos, pesquisou-se as que estavam casadas ou não, se tinham ou não filhos. Constatou-se que 45 pessoas não eram casadas, 49 não tinham filhos, e 99 estavam casadas e com filhos.

Sabendo-se que 180 pessoas responderam a essa enquete, o número das que se declararam não casadas e sem filhos foi de

- A 13.
- B 23.
- C 27.
- D 32.
- E 36.

97. (CFTCE 2005) Numa escola mista, existem 30 meninas, 21 crianças ruivas, 13 meninos não ruivos e 4 meninas ruivas.

Existem na escola \_\_\_\_\_ meninos.

- A 30
- B 34
- C 40
- D 60
- E 68

98. (CPS 2005) Numa pesquisa realizada com todos os pacientes de um hospital os resultados foram: 50 homens, 26 pacientes tuberculosos, 14 homens tuberculosos e 28 mulheres não tuberculosas.

O número de pacientes pesquisados foi

- A 118
- B 110
- C 104
- D 90
- E 78

99. (Mackenzie 1999) Num grupo constituído de  $K$  pessoas, das quais 14 jogam xadrez, 40 são homens.

Se 20% dos homens jogam xadrez e 80% das mulheres não jogam xadrez, então o valor de  $K$  é:

- A 62
- B 70
- C 78
- D 84
- E 90

100. (PUCCAMP 1997) Numa escola de música, 65% das pessoas matriculadas estudam teclado e as restantes estudam violão. Sabe-se que 60% das pessoas matriculadas são do sexo masculino e que as do sexo feminino que estudam violão são apenas 5% do total.

Nessas condições, escolhendo-se uma matrícula ao acaso qual é a probabilidade de ser a de uma pessoa do sexo masculino e estudante de teclado?

- A  $2/5$
- B  $3/10$
- C  $1/4$
- D  $1/5$
- E  $1/10$

101. (UNIRIO 1997) Tendo sido feito o levantamento estatístico dos resultados do CENSO POPULACIONAL 96 em uma cidade, descobriu-se, sobre a população, que:

- I - 44% têm idade superior a 30 anos;
- II - 68% são homens;
- III - 37% são homens com mais de 30 anos;
- IV - 25% são homens solteiros;
- V - 4% são homens solteiros com mais de 30 anos;
- VI - 45% são indivíduos solteiros;
- VII - 6% são indivíduos solteiros com mais de 30 anos.

Com base nos dados anteriores, pode-se afirmar que a porcentagem da população desta cidade que representa as mulheres casadas com idade igual ou inferior a 30 anos é de:

- A 6%
- B 7%
- C 8%
- D 9%
- E 10%

102. (UNIRIO 1996) Um engenheiro, ao fazer o levantamento do quadro de pessoal de uma fábrica, obteve os seguintes dados:

- 28% dos funcionários são mulheres;
- $\frac{1}{6}$  dos homens são menores de idade;
- 85% dos funcionários são maiores de idade.

Qual é a porcentagem dos menores de idade que são mulheres?

- A** 30%
- B** 28%
- C** 25%
- D** 23%
- E** 20%

103. (FGV 1995) Em certo ano, ao analisar os dados dos candidatos ao Concurso Vestibular para o Curso de Graduação em Administração, nas modalidades Administração de Empresas e Administração Pública, concluiu-se que

- \* 80% do número total de candidatos optaram pela modalidade Administração de Empresas
- \* 70% do número total de candidatos eram do sexo masculino
- \* 50% do número de candidatos à modalidade Administração Pública eram do sexo masculino
- \* 500 mulheres optaram pela modalidade Administração Pública

O número de candidatos do sexo masculino à modalidade Administração de Empresas foi

- A** 4 000
- B** 3 500
- C** 3 000
- D** 1 500
- E** 1 000

**GABARITO**

| QUESTÃO | ALTERNATIVA        |
|---------|--------------------|
| 01      | B                  |
| 02      | B                  |
| 03      | D                  |
| 04      | B                  |
| 05      | A                  |
| 06      | E                  |
| 07      | D                  |
| 08      | C                  |
| 09      | D                  |
| 10      | 85.450             |
| 11      | C                  |
| 12      | A                  |
| 13      | E                  |
| 14      | E                  |
| 15      | B                  |
| 16      | C                  |
| 17      | C                  |
| 18      | 204                |
| 19      | B                  |
| 20      | D                  |
| 21      | D                  |
| 22      | 75%                |
| 23      | C                  |
| 24      | B                  |
| 25      | A                  |
| 26      | B                  |
| 27      | B                  |
| 28      | B                  |
| 29      | D                  |
| 30      | B                  |
| 31      | D                  |
| 32      | C                  |
| 33      | A                  |
| 34      | D                  |
| 35      | E                  |
| 36      | 930                |
| 37      | B                  |
| 38      | 6                  |
| 39      | a) 3000<br>b) 7/30 |
| 40      | 155                |
| 41      | B                  |
| 42      | 607/6000           |
| 43      | D                  |
| 44      | E                  |
| 45      | B                  |
| 46      | C                  |
| 47      | D                  |
| 48      | C                  |
| 49      | E                  |
| 50      | E                  |
| 51      | D                  |
| 52      | D                  |

|     |                          |
|-----|--------------------------|
| 53  | D                        |
| 54  | B                        |
| 55  | E                        |
| 56  | B                        |
| 57  | B                        |
| 58  | C                        |
| 59  | E                        |
| 60  | C                        |
| 61  | a) 3150<br>b) 2350       |
| 62  | C                        |
| 63  | C                        |
| 64  | C                        |
| 65  | C                        |
| 66  | A                        |
| 67  | C                        |
| 68  | C                        |
| 69  | C                        |
| 70  | D                        |
| 71  | B                        |
| 72  | B                        |
| 73  | A                        |
| 74  | E                        |
| 75  | E                        |
| 76  | D                        |
| 77  | C                        |
| 78  | E                        |
| 79  | A                        |
| 80  | C                        |
| 81  | B, C e E                 |
| 82  | A                        |
| 83  | B                        |
| 84  | E                        |
| 85  | A                        |
| 86  | 230                      |
| 87  | C                        |
| 88  | C                        |
| 89  | C                        |
| 90  | C                        |
| 91  | VVVVF                    |
| 92  | a) 29<br>b) 5<br>c) 127  |
| 93  | a) 78<br>b) 87<br>c) 165 |
| 94  | B                        |
| 95  | C                        |
| 96  | A                        |
| 97  | A                        |
| 98  | D                        |
| 99  | B                        |
| 100 | B                        |
| 101 | B                        |
| 102 | E                        |
| 103 | C                        |

# RAZÃO, PROPORÇÃO REGRA DE TRÊS E ESCALAS



**A**NDERSON  
MATEMÁTICA



**RAZÃO**

A palavra "razão" vem do latim *ratio*, e significa ratear, dividir. Em matemática, quando queremos comparar dois valores, duas quantidades, duas medidas ou até duas grandezas, estamos determinando uma relação entre dois números que os representam. Caso essa relação seja determinada por uma divisão, a chamamos de razão.

As maneiras mais utilizadas para expressar a razão entre dois números A e B são:

- $\frac{A}{B}$
- $A/B$
- $A: B$

O A da razão, que ocupa o numerador da fração é chamado de antecedente, já o B, que fica no denominador, é chamado de conseqüente. A razão é dada pela divisão do antecedente pelo conseqüente.

Vimos que a razão é utilizada para comparações, a seguir, analisaremos alguns exemplo de como podemos utilizar razões em nossas comparações:

Se quisermos saber quantas vezes o número 24 é maior do que 3, basta fazermos a razão de 24 por 3:

$$\frac{24}{3} = 24/3 = 24:3 = 8$$

Podemos ler a razão entre 24 e 3 como sendo 24 sobre 3, 24 está para 3, ou ainda de 24 para três. Como a razão de 24 para 3 deu igual a 8, dizemos que o 24 é 8 vezes maior do que 3. Como havíamos dito, a razão serve para comparar números.

Por outro lado, levando em consideração um suco instantâneo, se em uma determinada situação a razão entre a quantidade de pó e água utilizados seja 1:20, teremos que para cada quantidade de pó, a quantidade de água será 20 vezes, ou ainda, a quantidade de pó é 1/20 da quantidade de água utilizada.



**CUIDADO!** A quantidade de pó não é 1/20 do total, é 1/20 da quantidade de água. Para cada parte de pó, temos 20 partes de água. Isso indica que o suco é composto por 21 partes. Uma delas é de pó e as outras vinte são de água. Daí, mesmo a razão entre pó e água sendo 1/20, o pó representa 1/21 do suco e a água representa 20/21 do suco.

**Ex.: Qual é o automóvel mais econômico? O de Carolina, que consome 24 litros de gasolina para percorrer 240 km ou o de Fernando, que percorre 180 km com 20 litros de gasolina?**

Para saber qual o carro mais econômico precisamos saber o quanto cada carro consome. Mas como calcular o consumo? O consumo é uma razão. É a comparação de quantos quilômetros são percorridos com quantos litros são necessários para percorrê-los.

Para o automóvel de Carolina:

$$\frac{N^{\circ} \text{ de km}}{N^{\circ} \text{ de litros}} = \frac{240 \text{ km}}{24 \text{ l}} = 10 \text{ km/l}$$

Isso significa que, em média, o automóvel de Carolina percorre 10 km para cada litro de combustível consumido.

Para o automóvel de Fernando:

$$\frac{N^{\circ} \text{ de km}}{N^{\circ} \text{ de litros}} = \frac{180 \text{ km}}{20 \text{ l}} = 9 \text{ km/l}$$

Isso significa que, em média, o automóvel de Fernando percorre 9 km para cada litro de combustível consumido.

O automóvel mais econômico é o que consegue percorrer uma distância maior com uma mesma quantidade de combustível. Logo o carro de Carolina é mais econômico do que o de Fernando.

**Ex.:** A razão entre duas grandezas é o quociente entre elas. Assim, por exemplo, se numa festa compareceram 20 homens e 30 mulheres, dizemos que:

A razão entre o número de homens e o de mulheres na festa é:

$$\frac{N^{\circ} \text{ de homens}}{N^{\circ} \text{ de mulheres}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Isso significa que para cada 2 homens existem 3 mulheres.

A razão entre o número de mulheres e o total de pessoas na festa é:

$$\frac{N^{\circ} \text{ de mulheres}}{N^{\circ} \text{ total de pessoas}} = \frac{30}{30 + 20} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

Isso nos diz que para cada 5 pessoas na festa, 3 são mulheres.

## RAZÕES IMPORTANTES

Existem razões que usamos com mais frequência, vejamos algumas:

### Densidade

A densidade de um objeto, bem conhecida na física e na química, é a razão entre sua massa e seu volume. É importante ressaltar que a unidade resultante dessa divisão depende das unidades que escolhermos para mensurar a massa e o volume. Mais comumente, utilizamos  $\text{kg/m}^3$ , mas podemos expressá-la em  $\text{g/cm}^3$ ,  $\text{g/mL}$ , ...

$$\text{Densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \frac{m}{v}$$

Essa expressão nos faz perceber que quanto menor o volume ocupado por uma determinada massa, maior será a densidade. Quando fazemos aquela velha brincadeira... O que é mais pesado? 1kg de ferro ou 1kg de algodão? Precisamos perceber que a massa deles é a mesma, o que difere são as densidades.

A densidade do ferro é maior, isso indica que a massa de ferro se concentra em um volume bem menor do que a mesma massa de algodão, que por sua vez se espalha por um grande volume.

A seguir, vejamos alguns materiais e suas densidades:

| Material       | Densidade               |
|----------------|-------------------------|
| Água (líquido) | 1,00 g/cm <sup>3</sup>  |
| Água (sólido)  | 0,92 g/cm <sup>3</sup>  |
| Leite          | 1,03 g/cm <sup>3</sup>  |
| Chumbo         | 11,30 g/cm <sup>3</sup> |

### Taxa de natalidade

Em demografia, entende-se por taxa de natalidade o número de crianças que nascem anualmente por cada mil habitantes, numa determinada área. Por exemplo, se numa cidade, cuja média populacional no ano de 2001 era 50000 habitantes, nasceram no referido ano, 1400 crianças, dizemos que a taxa de natalidade dessa cidade em 2001 foi de 28 nascimentos/mil habitantes (lê-se: 28 nascimentos por mil habitantes).

Veja:

$$\frac{\text{nascimentos}}{\text{população}} = \frac{1400 \text{ nascimentos}}{50.000 \text{ habitantes}} = \frac{28 \text{ nascimentos}}{1.000 \text{ habitantes}}$$

Em geral, a taxa de natalidade pode ser representada pela expressão matemática.

$$\text{Taxa de natalidade} = \frac{\text{nascimentos}}{\text{população}} \cdot 1.000$$

### Taxa de juros simples

Juro é a remuneração financeira que o detentor do dinheiro cobra para conceder um empréstimo. Taxa de juros é a razão (porcentagem) de juros. Por exemplo, se um banco empresta R\$ 2.000,00 a certo cliente e, ao final de um mês, o cliente paga um total de R\$ 2.300,00 ao banco, dizemos que:

O banco recebeu (2300 - 2000) reais = 300 reais de juros.

O banco cobrou uma taxa de 15% ao mês.

Veja:

$$\frac{\text{juros}}{\text{empréstimo}} = \frac{300}{2.000} = \frac{15}{100} = 0,15 = 15\%$$

Dizer, então, que um banco empresta dinheiro à taxa de 15% ao mês significa dizer que, passado um mês, o banco deverá receber 15 reais de juros, para cada 100 reais que o cliente está devendo.

### Velocidade média (V<sub>m</sub>)

É a razão entre a distância percorrida (ΔS) por um móvel e o tempo (Δt) gasto para percorrê-la.

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Suponha, por exemplo, que a distância da sua casa em Campina Grande ao apartamento de veraneio em João Pessoa é de aproximadamente 150 km e que Aristides gasta exatamente duas horas dirigindo da sua casa ao apartamento, qual a velocidade média desenvolvida por seu automóvel nesse percurso?

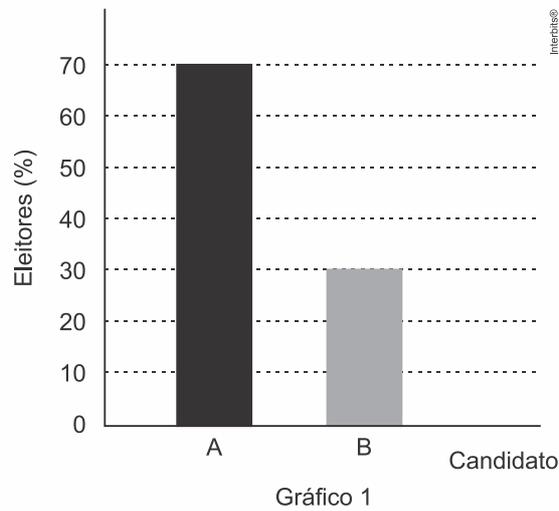
$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{150 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 75 \text{ km/h}$$

Isso significa que Aristides consegue percorrer, em média, 75 km a cada hora de percurso.

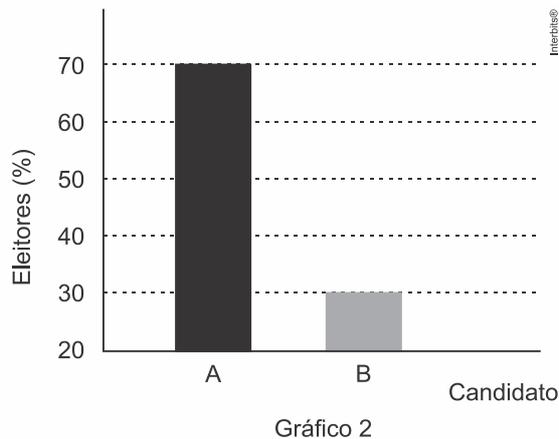
Após vermos todos estas aplicações para as Razões, que tal exercitarmos um pouco?

**QUESTÕES - RAZÃO**

1. (Enem 2017) O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico 1.



Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico 2.



Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é

- A 0
- B  $\frac{1}{2}$
- C  $\frac{1}{5}$
- D  $\frac{2}{15}$
- E  $\frac{8}{35}$

2. (Enem PPL 2017) Um motorista de um carro *flex* (bicombustível) calcula que, abastecido com 45 litros de gasolina ou com 60 litros de etanol, o carro percorre a mesma distância.

Chamando de  $x$  o valor do litro de gasolina e de  $y$  o valor do litro de etanol, a situação em que abastecer com gasolina é economicamente mais vantajosa do que abastecer com etanol é expressa por

**A**  $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

**B**  $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

**C**  $\frac{x}{y} > \frac{4}{3}$

**D**  $\frac{x}{y} > \frac{3}{4}$

**E**  $\frac{x}{y} < \frac{4}{3}$

3. (Enem (Libras) 2017) Uma empresa vende xarope de guaraná a uma distribuidora de bebidas por R\$ 1,60 o litro. O transporte desse xarope é feito por meio de caminhões-tanque que transportam 20.000 litros a cada viagem. O frete de um desses caminhões é de R\$ 2.500,00 por viagem, pago pelo dono da distribuidora. Ele pretende estabelecer o preço do litro do xarope de guaraná para revenda de modo a obter um lucro de R\$ 0,25 por litro.

Qual é o valor mais próximo, em real, para o preço de venda do litro de xarope de guaraná a ser estabelecido pelo dono da distribuidora?

**A** 1,98

**B** 1,85

**C** 2,05

**D** 1,80

**E** 1,73

4. (Enem (Libras) 2017) Um andarilho subiu uma montanha por uma trilha sinuosa. Essa trilha possui 100 metros de trechos íngremes e 1.400 metros de trechos suaves. Um escalador subiu essa mesma montanha por uma via de escalada vertical de 400 metros e uma trilha de trecho suave de 100 metros.

A razão entre a distância de subida da montanha do escalador em relação à do andarilho é

**A**  $\frac{1}{15}$

**B**  $\frac{1}{4}$

**C**  $\frac{1}{3}$

**D** 3

**E** 14

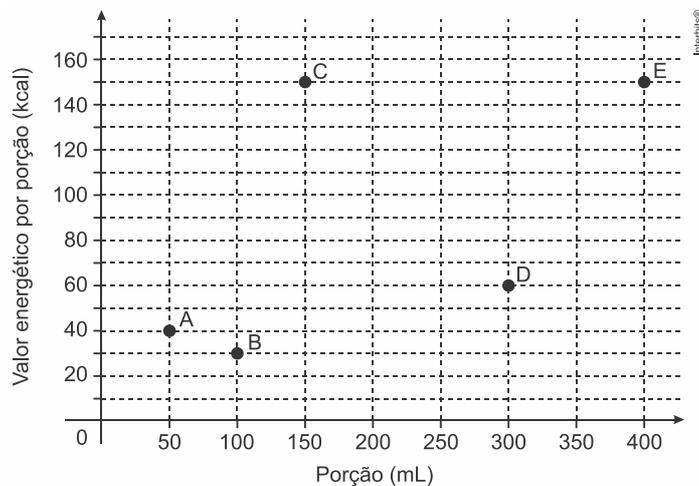
5. (Enem (Libras) 2017) Um jogo de boliche consiste em arremessar uma bola sobre uma pista com o objetivo de atingir e derrubar o maior número de pinos. Para escolher um dentre cinco jogadores para completar sua equipe, um técnico calcula, para cada jogador, a razão entre o número de arremessos em que ele derrubou todos os pinos e o total de arremessos efetuados por esse jogador. O técnico escolherá o jogador que obtiver a maior razão. O desempenho dos jogadores está no quadro.

| Jogador | Nº de arremessos em que derrubou todos os pinos | Nº total de arremessos |
|---------|---|------------------------|
| I       | 50  | 85                     |
| II      | 40  | 65                     |
| III     | 20  | 65                     |
| IV      | 30  | 40                     |
| V       | 48  | 90                     |

Deve ser escolhido o jogador

- A** I.
- B** II.
- C** III.
- D** IV.
- E** V.

6. (Enem (Libras) 2017) Atualmente, muitas pessoas procuram realizar uma dieta mais saudável. Um dos principais objetivos é a redução do consumo calórico. O gráfico fornece o valor energético, em kcal, em função do volume da porção, em mL, para cinco diferentes tipos de bebidas: A, B, C, D e E.



Entre esses cinco tipos de bebidas, qual deles deve ser escolhido por uma pessoa que deseja reduzir o seu consumo calórico?

- A** A
- B** B
- C** C
- D** D
- E** E

7. (Enem 2017) A mensagem digitada no celular, enquanto você dirige, tira a sua atenção e, por isso, deve ser evitada. Pesquisas mostram que um motorista que dirige um carro a uma velocidade constante percorre “às cegas” (isto é, sem ter visão da pista) uma distância proporcional ao tempo gasto a olhar para o celular durante a digitação da mensagem. Considere que isso de fato aconteça. Suponha que dois motoristas (X e Y) dirigem com a mesma velocidade constante e digitam a mesma mensagem em seus celulares. Suponha, ainda, que o tempo gasto pelo motorista X olhando para seu celular enquanto digita a mensagem corresponde a 25% do tempo gasto pelo motorista Y para executar a mesma tarefa.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 21 jul. 2012 (adaptado).

A razão entre as distâncias percorridas às cegas por X e Y, nessa ordem, é igual a

- A  $5/4$
- B  $1/4$
- C  $4/3$
- D  $4/1$
- E  $3/4$

8. (Enem (Libras) 2017) Um estudante elaborou uma planta baixa de sua sala de aula. A sala, com forma de retângulo, tem lados medindo 9 m e 5,5 m. No desenho feito pelo estudante, os lados da figura mediam 18 cm e 11 cm.

A fração que representa a razão entre as medidas dos lados da figura desenhada e as medidas dos lados do retângulo que representa a sala original é

- A  $\frac{1}{2}$
- B  $\frac{1}{5}$
- C  $\frac{1}{20}$
- D  $\frac{1}{50}$
- E  $\frac{1}{200}$

9. (Enem 2017) Para uma temporada das corridas de Fórmula 1, a capacidade do tanque de combustível de cada carro passou a ser de 100 kg de gasolina. Uma equipe optou por utilizar uma gasolina com densidade de 750 gramas por litro, iniciando a corrida com o tanque cheio. Na primeira parada de reabastecimento, um carro dessa equipe apresentou um registro em seu computador de bordo acusando o consumo de quatro décimos da gasolina originalmente existente no tanque. Para minimizar o peso desse carro e garantir o término da corrida, a equipe de apoio reabasteceu o carro com a terça parte do que restou no tanque na chegada ao reabastecimento.

Disponível em: [www.superdaniloflpage.com.br](http://www.superdaniloflpage.com.br). Acesso em: 6 jul. 2015 (adaptado).

A quantidade de gasolina utilizada, em litro, no reabastecimento, foi

- A  $\frac{20}{0,075}$
- B  $\frac{20}{0,75}$
- C  $\frac{20}{7,5}$
- D  $20 \times 0,075$
- E  $20 \times 0,75$

10. (Enem PPL 2017) No próximo fim de semana, uma pessoa receberá visitas em sua casa, precisando, portanto, comprar refrigerante. Para isso, ela fez a pesquisa de preços em dois supermercados e montou esta tabela.

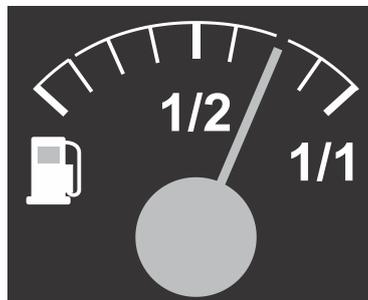
| Volume da garrafa PET (L) | Preço no Supermercado A (R\$) | Preço no Supermercado B (R\$) |
|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 0,5                       | 2,10                          | 2,00                          |
| 1,5                       | 2,70                          | 3,00                          |
| 2,0                       | 4,20                          | 3,20                          |
| 2,5                       | 6,00                          | 4,70                          |
| 3,0                       | 6,90                          | 5,00                          |

Ela pretende comprar apenas garrafas que tenham a mesma capacidade.

Independentemente de em qual supermercado essa pessoa fará a compra, a fim de ter o menor custo, ela deverá adquirir garrafas com que capacidade?

- Ⓐ 500 mL
- Ⓑ 1,5 L
- Ⓒ 2,0 L
- Ⓓ 2,5 L
- Ⓔ 3,0 L

11. (Enem 2016) No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50 L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.



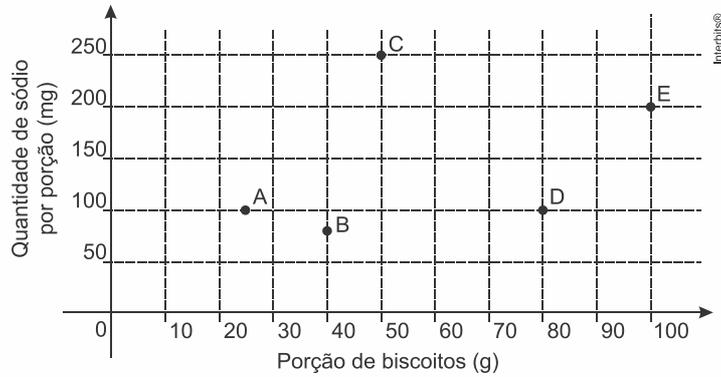
Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida.

Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

- Ⓐ 570
- Ⓑ 500
- Ⓒ 450
- Ⓓ 187
- Ⓔ 150

12. (Enem 2ª aplicação 2016) O sódio está presente na maioria dos alimentos industrializados, podendo causar problemas cardíacos em pessoas que ingerem grandes quantidades desses alimentos. Os médicos recomendam que seus pacientes diminuam o consumo de sódio.

Com base nas informações nutricionais de cinco marcas de biscoitos (A, B, C, D e E), construiu-se o gráfico, que relaciona quantidades de sódio com porções de diferentes biscoitos.



Qual das marcas de biscoito apresentadas tem a menor quantidade de sódio por grama do produto?

- A A
- B B
- C C
- D D
- E E

13. (Enem 2016) Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: [www.blog.saude.gov.br](http://www.blog.saude.gov.br). Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é

- A A.
- B B.
- C C.
- D D.
- E E.

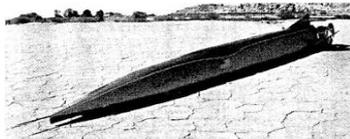
14. (Enem PPL 2016) Em 20 de abril de 2010 ocorreu a explosão e afundamento de uma plataforma de petróleo semissubmersível, no Golfo do México. O acidente ocasionou um dos maiores desastres ecológicos mundiais, devido ao derrame de  $780.000 \text{ m}^3$  de óleo cru no mar, por um período de 87 dias, entre abril e julho de 2010. Finalizado o vazamento, parte do óleo vazado começou a ser queimado, diretamente, enquanto que outra parte foi removida por coleta, através de barcos filtradores. As duas técnicas juntas retiravam, aproximadamente,  $480 \text{ m}^3$  de óleo por dia. Durante todo o período de remoção foram retirados, no total, apenas  $66.705 \text{ m}^3$  de óleo. Por recomendação de ambientalistas, a retirada total de óleo não deveria ultrapassar 300 dias.

Disponível em: [www.popularmechanics.com](http://www.popularmechanics.com). Acesso em: 26 fev. 2013 (adaptado).

Para que todo o óleo derramado no Golfo pudesse ter sido retirado dentro do prazo recomendado pelos ambientalistas, qual deveria ter sido a taxa mínima de remoção de óleo, em metro cúbico/dia?

- A 1.625
- B 2.600
- C 3.508
- D 5.613
- E 8.966

15. (Enem 2ª aplicação 2016) O veículo terrestre mais veloz já fabricado até hoje é o Sonic Wind LSRV, que está sendo preparado para atingir a velocidade de  $3.000 \text{ km/h}$ . Ele é mais veloz do que o Concorde, um dos aviões de passageiros mais rápidos já feitos, que alcança  $2.330 \text{ km/h}$ .



Para uma distância fixa, a velocidade e o tempo são inversamente proporcionais.

BASILIO, A. *Galileu*, mar. 2012 (adaptado).

Para percorrer uma distância de  $1.000 \text{ km}$ , o valor mais próximo da diferença, em minuto, entre os tempos gastos pelo Sonic Wind LSRV e pelo Concorde, em suas velocidades máximas, é

- A 0,1.
- B 0,7.
- C 6,0.
- D 11,2.
- E 40,2.

16. (Enem 2016) Densidade absoluta ( $d$ ) é a razão entre a massa de um corpo e o volume por ele ocupado. Um professor propôs à sua turma que os alunos analisassem a densidade de três corpos:  $d_A$ ,  $d_B$ ,  $d_C$ . Os alunos verificaram que o corpo A possuía 1,5 vez a massa do corpo B e esse, por sua vez, tinha  $\frac{3}{4}$  da massa do corpo C. Observaram, ainda, que o volume do corpo A era o mesmo do corpo B e 20% maior do que o volume do corpo C.

Após a análise, os alunos ordenaram corretamente as densidades desses corpos da seguinte maneira

- A  $d_B < d_A < d_C$
- B  $d_B = d_A < d_C$
- C  $d_C < d_B = d_A$
- D  $d_B < d_C < d_A$
- E  $d_C < d_B < d_A$

17. (Enem PPL 2016) Cinco máquinas de costura são utilizadas em uma confecção de calças. O proprietário deseja comprar mais uma dessas máquinas, idêntica a uma das já existentes, devendo escolher a que tiver a maior média de produção por hora. Na tabela estão indicadas as quantidades de horas trabalhadas e de calças confeccionadas por cada uma das máquinas em determinados períodos observados.

| Máquina | Horas | Número de calças confeccionadas |
|---------|-------|---------------------------------|
| 1       | 240   | 960                             |
| 2       | 210   | 1.050                           |
| 3       | 170   | 1.020                           |
| 4       | 160   | 480                             |
| 5       | 160   | 800                             |

A máquina a ser comprada deverá ser idêntica à

- A 1.
- B 2.
- C 3.
- D 4.
- E 5.

18. (Enem 2016) Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água.

Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização.

Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes períodos, em dia, como segue:

- Filtro 1 (F1): 18 mg em 6 dias;
- Filtro 2 (F2): 15 mg em 3 dias;
- Filtro 3 (F3): 18 mg em 4 dias;
- Filtro 4 (F4): 6 mg em 3 dias;
- Filtro 5 (F5): 3 mg em 2 dias.

Ao final, descarta-se o filtro com a maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho.

Disponível em: [www.redebrasilatual.com.br](http://www.redebrasilatual.com.br). Acesso em: 12 jul. 2015 (adaptado).

O filtro descartado é o

- A F1.
- B F2.
- C F3.
- D F4.
- E F5.

19. (Enem 2016) De forma geral, os pneus radiais trazem em sua lateral uma marcação do tipo  $abc/deRfg$ , como 185/65R15. Essa marcação identifica as medidas do pneu da seguinte forma:

- $abc$  é a medida da largura do pneu, em milímetro;
- $de$  é igual ao produto de 100 pela razão entre a medida da altura (em milímetro) e a medida da largura do pneu (em milímetro);
- R significa radial;
- $fg$  é a medida do diâmetro interno do pneu, em polegada.

A figura ilustra as variáveis relacionadas com esses dados.



O proprietário de um veículo precisa trocar os pneus de seu carro e, ao chegar a uma loja, é informado por um vendedor que há somente pneus com os seguintes códigos: 175/65R15, 175/75R15, 175/80R15, 185/60R15 e 205/55R15. Analisando, juntamente com o vendedor, as opções de pneus disponíveis, concluem que o pneu mais adequado para seu veículo é o que tem a menor altura.

Desta forma, o proprietário do veículo deverá comprar o pneu com a marcação

- A** 205/55R15.
- B** 175/65R15.
- C** 175/75R15.
- D** 175/80R15.
- E** 185/60R15.

20. (Enem 2ª aplicação 2016) Uma caixa-d'água em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 4 m de comprimento, 3 m de largura e 2 m de altura, necessita de higienização. Nessa operação, a caixa precisará ser esvaziada em 20 min, no máximo. A retirada da água será feita com o auxílio de uma bomba de vazão constante, em que vazão é o volume do líquido que passa pela bomba por unidade de tempo.

A vazão mínima, em litro por segundo, que essa bomba deverá ter para que a caixa seja esvaziada no tempo estipulado é

- A** 2.
- B** 3.
- C** 5.
- D** 12.
- E** 20.

21. (Enem PPL 2015) Um promotor de eventos foi a um supermercado para comprar refrigerantes para uma festa de aniversário. Ele verificou que os refrigerantes estavam em garrafas de diferentes tamanhos e preços. A quantidade de refrigerante e o preço de cada garrafa, de um mesmo refrigerante, estão na tabela.

| Garrafa  | Quantidade de refrigerante (litro) | Preço (R\$) |
|----------|------------------------------------|-------------|
| Tipo I   | 0,5                                | 0,68        |
| Tipo II  | 1,0                                | 0,88        |
| Tipo III | 1,5                                | 1,08        |
| Tipo IV  | 2,0                                | 1,68        |
| Tipo V   | 3,0                                | 2,58        |

Para economizar o máximo possível, o promotor de eventos deverá comprar garrafas que tenham o menor preço por litro de refrigerante.

O promotor de eventos deve comprar garrafas do tipo

- A I.
- B II.
- C III.
- D IV.
- E V.

22. (Enem PPL 2015) Durante um jogo de futebol foram anunciados os totais do público presente e do público pagante. Diante da diferença entre os dois totais apresentados, um dos comentaristas esportivos presentes afirmou que apenas 75% das pessoas que assistiam àquele jogo no estádio pagaram ingresso.

Considerando que a afirmativa do comentarista está correta, a razão entre o público não pagante e o público pagante naquele jogo foi

- A  $1/4$
- B  $1/3$
- C  $3/4$
- D  $4/3$
- E  $3/1$

23. (Enem PPL 2015) Na imagem, a personagem Mafalda mede a circunferência do globo que representa o planeta Terra.



Em uma aula de matemática, o professor considera que a medida encontrada por Mafalda, referente à maior circunferência do globo, foi de 80 cm. Além disso, informa que a medida real da maior circunferência da Terra, a linha do Equador, é de aproximadamente 40.000 km.

QUINO. *Toda Mafalda*. São Paulo: Martins Fontes, 2008 (adaptado).

A circunferência da linha do Equador é quantas vezes maior do que a medida encontrada por Mafalda?

- A 500
- B 5.000
- C 500.000
- D 5.000.000
- E 50.000.000

24. (Enem 2014) Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em  $\frac{1}{8}$ , preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura.

A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é

- A  $\frac{1}{8}$
- B  $\frac{7}{8}$
- C  $\frac{8}{7}$
- D  $\frac{8}{9}$
- E  $\frac{9}{8}$

25. (Enem 2014) Boliche é um jogo em que se arremessa uma bola sobre uma pista para atingir dez pinos, dispostos em uma formação de base triangular, buscando derrubar o maior número de pinos. A razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina seu desempenho.

Em uma disputa entre cinco jogadores, foram obtidos os seguintes resultados:

|             |   |
|-------------|---|
| Jogador I   | Derrubou todos os pinos 50 vezes em 85 jogadas. |
| Jogador II  | Derrubou todos os pinos 40 vezes em 65 jogadas. |
| Jogador III | Derrubou todos os pinos 20 vezes em 65 jogadas. |
| Jogador IV  | Derrubou todos os pinos 30 vezes em 40 jogadas. |
| Jogador V   | Derrubou todos os pinos 48 vezes em 90 jogadas. |

Qual desses jogadores apresentou maior desempenho?

- A I.
- B II.
- C III.
- D IV.
- E V.

26. (Enem PPL 2013) Médicos alertam sobre a importância de educar as crianças para terem hábitos alimentares saudáveis. Por exemplo, analisando-se uma bolacha com recheio de chocolate (25 g) e um pé de alface (25 g), observam-se as seguintes quantidades de nutrientes, respectivamente:

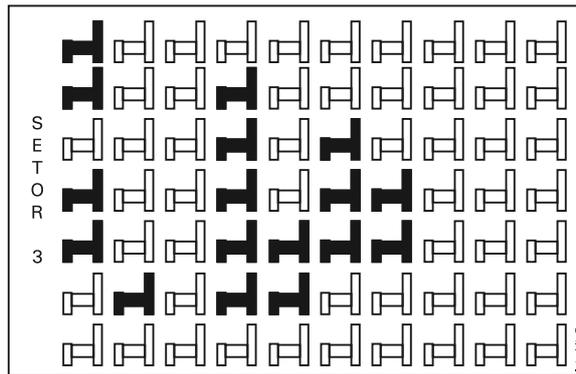
- carboidratos: 15 g e 0,5 g;
- proteínas: 1,9 g e 0,5 g.

Disponível em: <http://veja.abril.com.br>. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Considerando as informações apresentadas, qual deve ser o número de pés de alface consumidos para se obter a mesma quantidade de carboidratos de uma bolacha?

- A 50
- B 30
- C 14
- D 8
- E 7

27. (Enem 2013) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é

- A  $\frac{17}{70}$
- B  $\frac{17}{53}$
- C  $\frac{53}{70}$
- D  $\frac{53}{17}$
- E  $\frac{70}{17}$

28. (Enem PPL 2013) No filme *O colecionador de ossos*, produzido pela Columbia Pictures Corporation – Universal Pictures, a pista deixada por um suspeito de certo delito foi a marca de uma pegada no chão. Uma personagem do filme, ciente de que a marca serviria de prova para a investigação, fotografou essa marca ao lado de uma nota de dólar, que mede aproximadamente 15 cm.

Disponível em: [www.cinemenu.com.br](http://www.cinemenu.com.br). Acesso em: 15 jul. 2010 (adaptado).

Ao revelar a foto, essa personagem obteve uma imagem em que o comprimento da cédula de dólar media 3 cm e o da marca da pegada media 6 cm. Qual a relação numérica entre a marca no chão e a marca na imagem revelada?

- A 5 vezes maior.
- B 5 centímetros maior.
- C 9 centímetros maior.
- D 12 centímetros maior.
- E 12 vezes maior.

29. (Enem PPL 2012) A noz é uma especiaria muito apreciada nas festas de fim de ano. Uma pesquisa de preços feita em três supermercados obteve os seguintes valores: no supermercado A é possível comprar nozes a granel no valor de R\$ 24,00 o quilograma; o supermercado B vende embalagens de nozes hermeticamente fechadas com 250 gramas a R\$ 3,00; já o supermercado C vende nozes a granel a R\$ 1,50 cada 100 gramas.

A sequência dos supermercados, de acordo com a ordem crescente do valor da noz, é

- A A, B, C.
- B B, A, C.
- C B, C, A.
- D C, A, B.
- E C, B, A.

30. (Enem PPL 2012) O quadro apresenta o teor de cafeína em diferentes bebidas comumente consumidas pela população.

| Bebida               | Volume (mL) | Quantidade média de cafeína (mg) |
|----------------------|-------------|----------------------------------|
| Café expresso        | 80,0        | 120                              |
| Café filtrado        | 50,0        | 35                               |
| Chá preto            | 180,0       | 45                               |
| Refrigerante de cola | 250,0       | 80                               |
| Chocolate quente     | 60,0        | 25                               |

Da análise do quadro, conclui-se que o menor teor de cafeína por unidade de volume está presente no

- A** café expresso.
- B** café filtrado.
- C** chá preto.
- D** refrigerante de cola.
- E** chocolate quente.

## PROPORÇÃO

Inicialmente, é interessante saber que proporção é uma igualdade entre razões, ou seja, uma igualdade entre divisões. Vamos estudar dois tipos, a proporção direta e a proporção inversa. Mas, quando duas grandezas são diretamente proporcionais e quando são inversamente proporcionais?

### GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Dizemos que  $x$  é diretamente proporcional a  $y$  quando a divisão direta entre  $x$  e  $y$  é sempre igual a uma constante positiva  $k$ .

$$\frac{x}{y} = k$$

**CUIDADO!!!**

No exemplo a seguir o valor a ser pago pela corrida de táxi **NÃO** é proporcional à quantidade de km rodados.

Suponha que um táxi cobre R\$ 5,00 de bandeira e um adicional de R\$ 3,00 por km rodado, façamos uma tabela para analisar a situação:

| Km rodados | Valor em reais a ser pago |
|------------|---------------------------|
| 1          | $5 + 1.3 = 8$             |
| 2          | $5 + 2.3 = 11$            |
| 3          | $5 + 3.3 = 14$            |
| 4          | $5 + 4.3 = 17$            |

Veja que:

$$\frac{8}{1} = 8$$

$$\frac{11}{2} = 5,5$$

$$\frac{14}{3} = 4,666\dots$$

$$\frac{17}{4} = 4,25$$

As divisões entre o valor em reais a ser pago e a quantidade de km rodados **NÃO** resulta sempre na mesma constante, logo **NÃO** são diretamente proporcionais.

Mas professor, observe que para cada km rodado, aumenta-se R\$ 3,00 no valor a ser pago. Para cada aumento de um lado da tabela temos um aumento correspondente na segunda tabela, quando um aumenta o outro também aumenta!

Só isso não é suficiente para que haja uma proporcionalidade direta! Temos que ter igualdade entre as razões (divisões).

Agora, observe uma pequena alteração na situação apresentada.

O táxi não cobrará mais a bandeira, ficando apenas R\$ 3,00 por km rodado, teremos então uma nova tabela:

| Km rodados | Valor em reais a ser pago |
|------------|---------------------------|
| 1          | $1.5 = 5$                 |
| 2          | $2.5 = 10$                |
| 3          | $3.5 = 15$                |
| 4          | $4.5 = 20$                |

Veja que:

$$\frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{10}{2} = 5$$

$$\frac{15}{3} = 5$$

$$\frac{20}{4} = 5$$

Agora sim, existe proporcionalidade entre o valor pago e a quantidade de km rodados. A divisão entre eles é sempre constante!

**DIVISÃO CONSTANTE = DIRETAMENTE PROPORCIONAIS**

Para fixarmos ainda mais, vamos lembrar novamente...

X é diretamente proporcional a Y, quando a DIVISÃO de X por Y dá uma constante K positiva:

$$\frac{X}{Y} = K$$

DIVISÃO lembra proporcionalidade DIRETA, e para dividir X por Y, devemos colocar o Y embaixo do traço:

$$\frac{X}{Y} = K$$

*embaixo do traço*

Então, vamos acrescentar mais uma palavra à nossa associação:

**DIVISÃO CONSTANTE = DIRETAMENTE PROPORCIONAIS = COLOCA EMBAIXO**

Vamos conversar um pouco sobre a Força Elástica lá da Física, para conhecermos um pouco sobre proporcionalidade direta?

### Força Elástica

Para calcular a força elástica, usamos a Lei de Hooke, que diz:

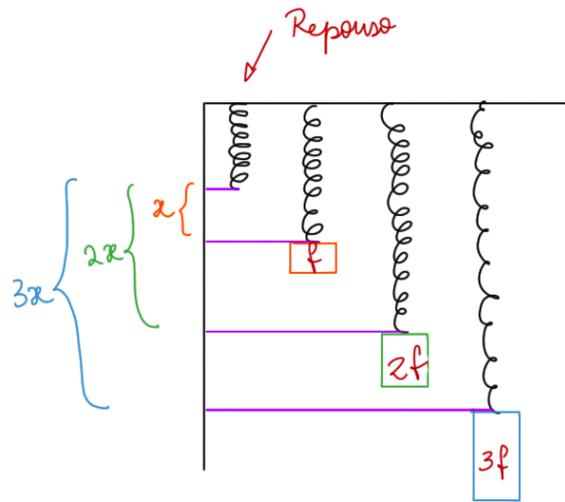
$$F = K \cdot x$$

Em que,

$F$  é força aplicada no corpo elástico, dada em N;

$K$  é a constante elástica, cuja unidade é N/m;

$x$  é a variação ou deformação sofrida pelo corpo elástico, em m.

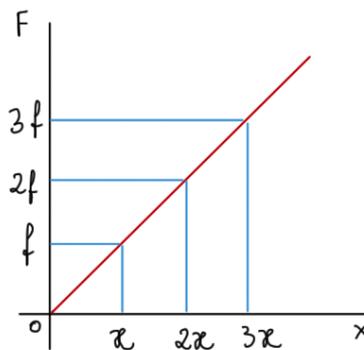


Note que a intensidade da força aplicada sobre o corpo elástico é diretamente proporcional à deformação sofrida pela mola, uma vez que a razão entre a força e a deformação é sempre uma constante:

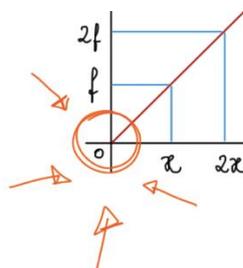
$$\frac{\text{força}}{\text{deformação}} = \frac{f}{x} = \frac{2f}{2x} = \frac{3f}{3x} = K$$

Isso significa que se dobrarmos a força aplicada, dobraremos a deformação sofrida, se triplicarmos a força, triplicaremos a deformação, se dividirmos a força por 2, a deformação também será dividida por 2.

Mais uma vez, a força é diretamente proporcional à deformação, pois a divisão entre elas dá sempre uma constante. E se quisermos representar um gráfico da força aplicada em função da deformação sofrida, como ele seria?



O gráfico de uma grandeza diretamente proporcional em função de outra é sempre uma reta que passa pela origem, é o que chamamos de função linear, ou ainda, uma função polinomial do primeiro grau, da forma  $y = ax + b$  em que  $b = 0$ . **NÃO BASTA SER UMA RETA!** Tem que ser uma reta e passar pela origem! Observe que nenhuma das grandezas podem estar elevadas a expoentes diferentes de 1, pois afetaríamos a linearidade da variação.



## GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Dizemos que  $x$  é inversamente proporcional a  $y$  quando a divisão de  $x$  pelo inverso de  $y$  é sempre igual a uma constante positiva  $k$ .

$$\frac{x}{\frac{1}{y}} = k$$

Perceba que  $\frac{x}{\frac{1}{y}} = x \cdot y$ , logo podemos economizar dizendo que  $x$  é inversamente proporcional a  $y$  quando a multiplicação de  $x$  por  $y$  é sempre igual a uma constante positiva  $k$ .

### MULTIPLICAÇÃO CONSTANTE = INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Imagine, então que um único pedreiro demore 8 dias para terminar um determinado serviço, se dois pedreiros trabalharem no mesmo ritmo, gastarão metade do tempo, apenas 4 dias.

Organizemos esses dados em uma tabela:

| Pedreiros | Dias de serviço |
|-----------|-----------------|
| 1         | 8               |
| 2         | 4               |
| 4         | 2               |
| 8         | 1               |

$$1 \cdot 8 = 8$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$8 \cdot 1 = 8$$

O produto entre eles é sempre constante, portanto, a quantidade de dias de serviço é inversamente proporcional a quantidade de pedreiros que trabalharem! Não é exatamente pelo fato de um aumentar e o outro diminuir que eles são inversamente proporcionais. É o fato do produto entre as grandezas ser constante que as fazem ser inversamente proporcionais.

Para fixarmos ainda mais, vamos lembrar novamente...

$X$  é inversamente proporcional a  $Y$ , quando a MULTIPLICAÇÃO de  $X$  por  $Y$  dá uma constante  $K$  positiva:

$$X \cdot Y = K$$

MULTIPLICAÇÃO lembra proporcionalidade INVERSA, e para multiplicar  $X$  por  $Y$ , devemos colocar o  $Y$  em cima do traço:

$$\frac{X \cdot Y}{1} = k$$

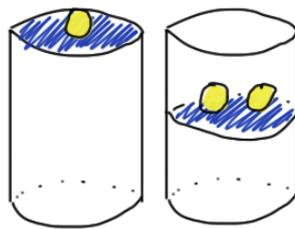
*em cima do traço*

Então, vamos acrescentar mais uma palavra à nossa associação:

**MULTIPLICAÇÃO CONSTANTE = INVERSAMENTE PROPORCIONAIS = COLOCA EM CIMA**

Vamos conversar um pouco sobre a transformação isotérmica de gases lá da química, para conhecermos um pouco sobre proporcionalidade inversa?

Você já deve ter ouvido falar na equação dos gases  $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ , ela envolve as três variáveis de estado de um gás, Pressão, Volume e Temperatura. Para analisar a relação de proporcionalidade entre elas, passou-se a estudá-las mantendo uma sempre constante. Dois físicos, de forma independente, Boyle e Mariotte, realizaram experimentos mantendo a temperatura constante, variando a pressão e o volume. Algumas características dessa transformação isotérmica se repetiram para todos os gases em um sistema fechado, por exemplo, quando a pressão sobre o gás dobrava, percebeu-se que o volume caía pela metade:

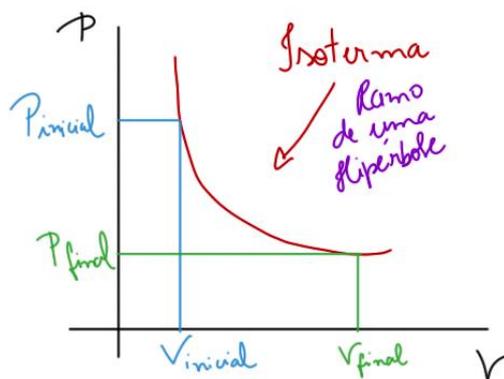


Chegou-se à conclusão que, em transformações isotérmicas, a pressão de um gás era inversamente proporcional ao volume, ou seja, o produto entre a pressão e o volume dá sempre constante:

$$P_{inicial} \times V_{inicial} = P_{final} \times V_{final} = k$$

Isso no diz que se a pressão triplicar, o volume cai para a terça parte, se a pressão cair pela metade, o volume dobra.

E como ficaria o gráfico da pressão em função do volume em uma transformação isotérmica?



O gráfico de uma grandeza inversamente proporcional em função da outra é um ramo de uma hipérbole.

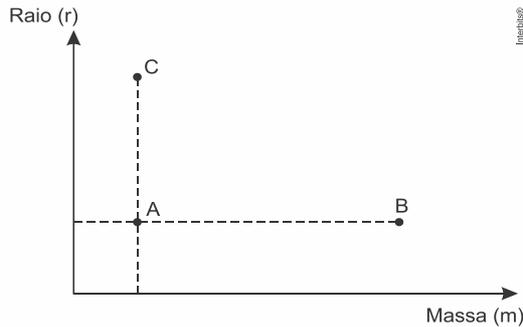
Que tal praticarmos um pouco esses conceitos?

**QUESTÕES - GRANDEZAS PROPORCIONAIS**

31. (Enem 2018) De acordo com a Lei Universal da Gravitação, proposta por Isaac Newton, a intensidade da força gravitacional  $F$  que a Terra exerce sobre um satélite em órbita circular é proporcional à massa  $m$  do satélite e inversamente proporcional ao quadrado do raio  $r$  da órbita, ou seja,

$$F = \frac{km}{r^2}$$

No plano cartesiano, três satélites, A, B e C, estão representados, cada um, por um ponto  $(m; r)$  cujas coordenadas são, respectivamente, a massa do satélite e o raio da sua órbita em torno da Terra.



Com base nas posições relativas dos pontos no gráfico, deseja-se comparar as intensidades  $F_A, F_B$  e  $F_C$  da força gravitacional que a Terra exerce sobre os satélites A, B e C, respectivamente.

As intensidades  $F_A, F_B$  e  $F_C$  expressas no gráfico satisfazem a relação

- A**  $F_C = F_A < F_B$
- B**  $F_A = F_B < F_C$
- C**  $F_A < F_B < F_C$
- D**  $F_A < F_C < F_B$
- E**  $F_C < F_A < F_B$

32. (Enem (Libras) 2017) Uma indústria utiliza um índice de desempenho para as suas máquinas que é diretamente proporcional à quantidade total de peças produzidas e inversamente proporcional ao quadrado da quantidade de peças defeituosas produzidas. Em um semestre, cinco máquinas produziam a mesma quantidade  $T$  de peças, sendo  $D$  delas defeituosas. No semestre seguinte, houve uma alteração na quantidade total de peças produzidas por cada máquina e também na quantidade de peças defeituosas, de acordo com o quadro.

| Máquinas | Total de peças | Peças defeituosas |
|----------|----------------|-------------------|
| I        | 1,07 T         | 1,07 D            |
| II       | 1,4 T          | 0,7 D             |
| III      | 0,7 T          | 1,4 D             |
| IV       | 1,07 T         | $(1,07)^2 D$      |
| V        | $(1,07)^2 T$   | 1,07 D            |

A máquina que manteve o mesmo índice de desempenho do semestre anterior foi a

- A** I.
- B** II.
- C** III.
- D** IV.
- E** V.

33. (Enem 2016) Para a construção de isolamento acústico numa parede cuja área mede  $9 \text{ m}^2$ , sabe-se que, se a fonte sonora estiver a 3 m do plano da parede, o custo é de R\$ 500,00. Nesse tipo de isolamento, a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, e o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento.

Uma expressão que fornece o custo para revestir uma parede de área  $A$  (em metro quadrado), situada a  $D$  metros da fonte sonora, é

- A  $\frac{500 \cdot 81}{A \cdot D^2}$
- B  $\frac{500 \cdot A}{D^2}$
- C  $\frac{500 \cdot D^2}{A}$
- D  $\frac{500 \cdot A \cdot D^2}{81}$
- E  $\frac{500 \cdot 3 \cdot D^2}{A}$

34. (Enem PPL 2015) O fisiologista francês Jean Poiseulle estabeleceu, na primeira metade do século XIX, que o fluxo de sangue por meio de um vaso sanguíneo em uma pessoa é diretamente proporcional à quarta potência da medida do raio desse vaso. Suponha que um médico, efetuando uma angioplastia, aumentou em 10% o raio de um vaso sanguíneo de seu paciente.

O aumento percentual esperado do fluxo por esse vaso está entre

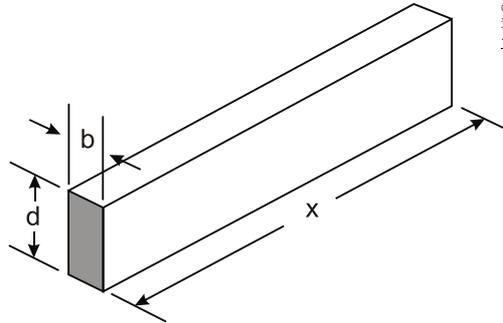
- A 7% e 8%
- B 9% e 11%
- C 20% e 22%
- D 39% e 41%
- E 46% e 47%

35. (Enem PPL 2015) Uma fábrica vende pizzas congeladas de tamanhos médio e grande, cujos diâmetros são respectivamente 30 cm e 40 cm. Fabricam-se apenas pizzas de sabor muçarela. Sabe-se que o custo com os ingredientes para a preparação é diretamente proporcional ao quadrado do diâmetro da pizza, e que na de tamanho médio esse custo é R\$ 1,80. Além disso, todas possuem um custo Fixo de R\$ 3,00, referente às demais despesas da fábrica. Sabe-se ainda que a fábrica deseja lucrar R\$ 2,50 em cada *pizza* grande.

Qual é o preço que a fábrica deve cobrar pela pizza grande, a fim de obter o lucro desejado?

- A R\$ 5,70
- B R\$ 6,20
- C R\$ 7,30
- D R\$ 7,90
- E R\$ 8,70

36. (Enem 2012) A resistência mecânica  $S$  de uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional à sua largura ( $b$ ) e ao quadrado de sua altura ( $d$ ) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento ( $x$ ), conforme ilustra a figura. A constante de proporcionalidade  $k$  é chamada de resistência da viga.

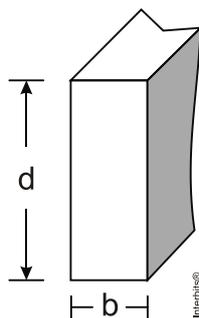


BUSHAW, D. et al. *Aplicações da matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997.

A expressão que traduz a resistência  $S$  dessa viga de madeira é

- A  $S = \frac{k \cdot b \cdot d^2}{x^2}$
- B  $S = \frac{k \cdot b \cdot d}{x^2}$
- C  $S = \frac{k \cdot b \cdot d^2}{x}$
- D  $S = \frac{k \cdot b^2 \cdot d}{x}$
- E  $S = \frac{k \cdot b \cdot 2d}{2x}$

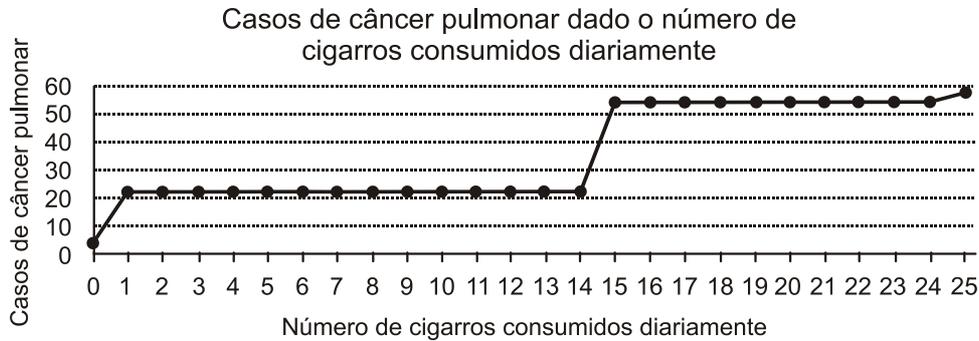
37. (Enem 2011) A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura ( $b$ ) e ao quadrado da altura ( $d$ ), conforme a figura. A constante de proporcionalidade  $k$  varia de acordo com o material utilizado na sua construção.



Considerando-se  $S$  como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é

- A  $S = k \cdot b \cdot d$
- B  $S = b \cdot d^2$
- C  $S = k \cdot b \cdot d^2$
- D  $S = \frac{k \cdot b}{d^2}$
- E  $S = \frac{k \cdot d^2}{b}$

38. (Enem 2009) A suspeita de que haveria uma relação causal entre tabagismo e câncer de pulmão foi levantada pela primeira vez a partir de observações clínicas. Para testar essa possível associação, foram conduzidos inúmeros estudos epidemiológicos. Dentre esses, houve o estudo do número de casos de câncer em relação ao número de cigarros consumidos por dia, cujos resultados são mostrados no gráfico a seguir.



Centers for Disease Control and Prevention CDC-EIS  
Summer Course – 1992 (adaptado).

De acordo com as informações do gráfico,

- A** o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas inversamente proporcionais.
- B** o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que não se relacionam.
- C** o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas diretamente proporcionais.
- D** uma pessoa não fumante certamente nunca será diagnosticada com câncer de pulmão.
- E** o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade.

39. (Enem 2013) Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área  $S$  da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa  $M$ ".

HUGHES-HALLETT, D. et al. *Cálculo e aplicações*.  
São Paulo: Edgard Blücher, 1999 (adaptado).

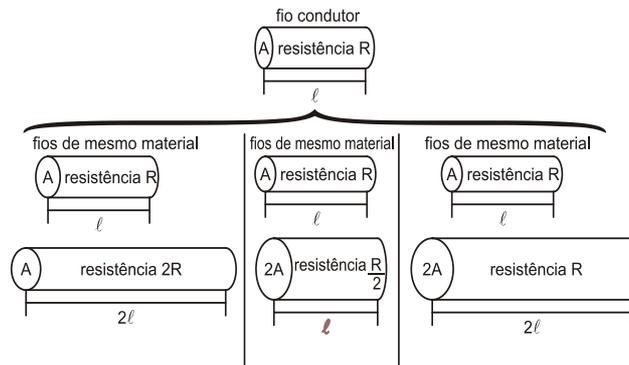
Isso é equivalente a dizer que, para uma constante  $k > 0$ , a área  $S$  pode ser escrita em função de  $M$  por meio da expressão:

- A**  $S = k \cdot M$
- B**  $S = k \cdot M^{\frac{1}{3}}$
- C**  $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$
- D**  $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$
- E**  $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^2$

40. (Enem 2010) A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência ( $R$ ) e comprimento ( $\ell$ ), dada a mesma secção transversal ( $A$ );
- resistência ( $R$ ) e área da secção transversal ( $A$ ), dado o mesmo comprimento ( $\ell$ ) e
- comprimento ( $\ell$ ) e área da secção transversal ( $A$ ), dada a mesma resistência ( $R$ ).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.



Disponível em: <http://www.efeitojoule.com>. Acesso em: abr. 2010 (adaptado)

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência ( $R$ ) e comprimento ( $\ell$ ), resistência ( $R$ ) e área da secção transversal ( $A$ ), e entre comprimento ( $\ell$ ) e área da secção transversal ( $A$ ) são, respectivamente,

- A** direta, direta e direta.
- B** direta, direta e inversa.
- C** direta, inversa e direta.
- D** inversa, direta e direta.
- E** inversa, direta e inversa.

41. (Fcmmg 2018) Na área médica, é comum o trabalho com radiações ionizantes para finalidades diagnósticas e terapêuticas, como, por exemplo, o trabalho com raios-X. Essas radiações possuem o poder de ionizar, ou seja, de remover elétrons da eletrosfera, tornando-os moléculas quimicamente ativas. Se uma molécula de DNA de uma pessoa está exposta a uma radiação ionizante, há a possibilidade de alteração genética dessa molécula, o que pode ocasionar danos, como câncer, anemia e síndrome de down, às futuras células que serão geradas a partir daquela que ficou exposta. A exposição de pessoas à radiação ionizante somente deve ocorrer mediante justificativas plausíveis, procurando-se preservar não só as regiões do corpo humano, mas também as pessoas que não necessitam de irradiação. Existem três fatores que, se trabalhados, podem contribuir para a redução da radiação recebida por um sujeito que se encontra exposto: aumento da distância, diminuição do tempo de exposição e blindagem.

- À medida que o indivíduo se afasta da fonte emissora, a intensidade da radiação ionizante diminui com o quadrado da distância;
- A dose de radiação recebida é diretamente proporcional ao tempo que o sujeito permanece exposto.
- A imposição de barreiras entre indivíduo e fonte emissora de radiação faz com que o feixe emitido chegue menos intenso até ele.

Considerando que um profissional da saúde reduza pela metade o seu tempo de exposição e triplique a distância entre ele e a fonte de radiação, pode-se dizer que, após esses cuidados, a radiação que ele receberá será:

- A** 4,5 vezes menor em relação à radiação inicial.
- B** 6 vezes menor em relação à radiação inicial.
- C** 18 vezes menor em relação à radiação inicial.
- D** Igual à radiação inicial, pois o profissional não utilizou blindagem.

42. (Upe-ssa 1 2016) A margem de erro em uma pesquisa eleitoral é inversamente proporcional à raiz quadrada do tamanho da amostra.

Se, em uma pesquisa com 8.100 eleitores, a margem de erro é de 4%, em uma pesquisa com 25.600 eleitores, ela será de

- A 2,25%
- B 2,50%
- C 2,80%
- D 3,00%
- E 3,50%

43. (Uerj 2011)

**O MENINO MALUQUINHO**

Ziraldo



A definição apresentada pelo personagem não está correta, pois, de fato, duas grandezas são inversamente proporcionais quando, ao se multiplicar o valor de uma delas por um número positivo, o valor da outra é dividido por esse mesmo número.

Admita que a nota em matemática e a altura do personagem da tirinha sejam duas grandezas,  $x$  e  $y$ , inversamente proporcionais.

A relação entre  $x$  e  $y$  pode ser representada por:

- A  $y = \frac{3}{x^2}$
- B  $y = \frac{5}{x}$
- C  $y = \frac{2}{x+1}$
- D  $y = \frac{2x+4}{3}$

44. (Uff 2010) Em Mecânica Clássica, a norma  $G$  do campo gravitacional gerado por um corpo de massa  $m$  em um ponto a uma distância  $d > 0$  do corpo é diretamente proporcional a  $m$  e inversamente proporcional ao quadrado de  $d$ .

Seja  $G = f(d)$  a função que descreve a norma  $G$  do campo gravitacional, gerado por um corpo de massa constante  $m$  em um ponto a uma distância  $d > 0$  desse corpo. É correto afirmar que  $f(2d)$  é igual a:

- A  $\frac{f(d)}{4}$
- B  $\frac{f(d)}{2}$
- C  $4f(d)$
- D  $2f(d)$
- E  $f(d)$

45. (Ueg 2008) Em uma rodovia, um motorista acionou o freio de seu carro quando sua velocidade era de 80 km/h, percorrendo ainda 60 m até parar completamente. Sabe-se que a distância percorrida por esse veículo até parar é diretamente proporcional ao quadrado da sua velocidade.

Caso a frenagem tivesse ocorrido num momento em que a velocidade fosse de 120 km/h, antes de parar o veículo teria percorrido

- A** 135 metros.
- B** 124 metros.
- C** 95 metros.
- D** 147 metros.

## DIVISÕES PROPORCIONAIS

É comum nos depararmos com questões que exigem que sejam repartidas heranças, lucros ou algo parecido de forma proporcional, como fazer isso?

Para saber vamos revisar alguns conceitos em proporcionalidade. Dizemos que **A**, **B** e **C** são diretamente proporcionais a **a**, **b** e **c**, respectivamente, quando:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k$$

Veja que,

$$\begin{aligned} A &= a \cdot k \\ B &= b \cdot k \\ C &= c \cdot k \end{aligned}$$

Donde,

$$\frac{A+B+C}{a+b+c} = \frac{a \cdot k + b \cdot k + c \cdot k}{a+b+c} = \frac{k(a+b+c)}{a+b+c} = k$$

Ou seja,

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{A+B+C}{a+b+c} = k$$

Em que  $k$  é uma constante de proporcionalidade.

**A**, **B** e **C** são chamados de antecedentes e **a**, **b** e **c** são chamados de consequentes. Assim, dizemos que cada antecedente está para o consequente correspondente, assim como a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes.

Veja um exemplo: Como dividir 45 reais em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 4?

A parte diretamente proporcional a 2 será chamada de **A**, a parte diretamente proporcional a 3 será chamada de **B** e a parte diretamente proporcional a 4 será chamada de **C**:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{4} = \frac{A+B+C}{2+3+4} = \frac{45}{9} = 5$$

Perceba que, quando juntamos as partes **A** + **B** + **C** devemos ter o total que é 45.

Descobrimos com a relação acima que a constante de proporcionalidade é 5, daí:

$$\frac{A}{2} = 5 \rightarrow A = 10$$

$$\frac{B}{3} = 5 \rightarrow B = 15$$

$$\frac{C}{4} = 5 \rightarrow C = 20$$

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{4} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = \frac{10+15+20}{2+3+4} = \frac{45}{9} = 5$$

Isso nos mostra que se quisermos dividir 45 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 4, a parte que cabe ao 2 deve ser 10, a parte que cabe ao 3 é 15 e a que cabe ao 4 é 20. Finalmente, 10 está para 2, assim como 15 está para 3, assim como 20 está para 4, assim como 45 está para 9.

E quando as grandezas são inversamente proporcionais, o que podemos fazer?

Lembre que, **A**, **B** e **C** são inversamente proporcionais a **a**, **b** e **c**, respectivamente, quando:

$$\frac{A}{\frac{1}{a}} = \frac{B}{\frac{1}{b}} = \frac{C}{\frac{1}{c}} = k$$

Ou ainda,

$$A \cdot a = B \cdot b = C \cdot c = k$$

Veja que,

$$A = \frac{k}{a}$$

$$B = \frac{k}{b}$$

$$C = \frac{k}{c}$$

Donde,

$$\frac{A + B + C}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{k \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = k$$

Ou seja,

$$\frac{A}{\frac{1}{a}} = \frac{B}{\frac{1}{b}} = \frac{C}{\frac{1}{c}} = \frac{A + B + C}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = k$$

Em que **k** é a constante de proporcionalidade.

Vejam um exemplo:

Como dividir 39 reais em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 4?

A parte inversamente proporcional a 2 será chamada de **A**, a parte inversamente proporcional a 3 será chamada de **B** e a parte inversamente proporcional a 4 será chamada de **C**. Lembre-se que a soma das partes **A + B + C** deve ser 39. Daí:

$$\frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{B}{\frac{1}{3}} = \frac{C}{\frac{1}{4}} = \frac{A + B + C}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{39}{\frac{13}{12}} = 39 \times \frac{12}{13} = 36 = k$$

Descobrimos que a constante de proporcionalidade é 36, logo:

$$A \times 2 = 36 \rightarrow A = 18$$

$$B \times 3 = 36 \rightarrow B = 12$$

$$C \times 4 = 36 \rightarrow C = 9$$

Isso nos diz que, se quisermos dividir 39 em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 4. A parte que cabe ao 2 é 18, a parte que cabe ao 3 é 12 e a que cabe ao 4 é 9.

Vamos exercitar um pouco?

**QUESTÕES - DIVISÕES PROPORCIONAIS**

46. (IFPE 2017) Certa empresa de contabilidade recebeu um grande malote de 115 documentos para serem arquivados. O gerente pediu que André, Bruno e Carlos realizassem esse arquivamento. Para tentar favorecer os funcionários mais antigos, o gerente decidiu que a distribuição do número de documentos que cada um dos três ficaria responsável em arquivar seria inversamente proporcional ao seu tempo de serviço na empresa. André era o mais novo na empresa, com 3 anos de contratado; Bruno era o mais antigo, com 16 anos de contratado; e Carlos tinha 12 anos de contratado.

Com isso, Carlos ficou responsável por arquivar

- A** 25 documentos.
- B** 15 documentos.
- C** 20 documentos.
- D** 30 documentos.
- E** 80 documentos.

47. (IFPE 2017) Karla, Luisa e Raquel são as funcionárias que mais venderam no último ano na empresa em que trabalham. Ao final do ano, a chefia liberou um bônus de R\$ 6.000,00 para ser dividido entre as três de modo diretamente proporcional ao total de vendas de cada uma e inversamente proporcional à quantidade de faltas que cada uma teve, conforme a tabela abaixo.

| Funcionária              | Karla   | Luisa   | Raquel  |
|--------------------------|---------|---------|---------|
| <b>Vendas (em reais)</b> | 220.000 | 210.000 | 180.000 |
| <b>Faltas (em dias)</b>  | 2       | 3       | 3       |

Com base nas informações, assinale a alternativa CORRETA.

- A** Raquel receberá 250 reais a menos que Karla.
- B** Luisa receberá 500 reais a mais que Raquel.
- C** Karla receberá 1.000 reais a mais que Luisa.
- D** Raquel receberá 1.000 reais a menos que Luisa.
- E** Karla receberá mais que Luisa e Raquel juntas.

48. (IFSC 2016) Imagine a seguinte situação: Carlos precisa pagar uma quantia de R\$ 1.140,00, em três parcelas A, B e C, respectivamente.

Considerando que essas parcelas são inversamente proporcionais aos números 5, 4 e 2, respectivamente, é **CORRETO** afirmar que Carlos irá pagar

- A** R\$ 740,00 pelas parcelas A e B juntas.
- B** R\$ 240,00 pela parcela B.
- C** R\$ 680,00 pela parcela C.
- D** R\$ 540,00 pela parcela A.
- E** R\$ 240,00 pela parcela A.

49. (Col. naval 2016) Adão, Beto e Caio uniram-se num mesmo investimento e combinaram que, em janeiro de cada ano, repartiriam o lucro obtido em partes diretamente proporcionais ao tempo de investimento e ao valor investido. Adão investiu R\$ 10.000,00 há nove meses; Beto R\$ 15.000,00 há oito meses e Caio R\$ 12.000,00 há cinco meses.

Se o lucro a ser repartido é de R\$ 54.000,00, o maior recebimento será de

- A R\$ 10.000,00
- B R\$ 12.000,00
- C R\$ 15.000,00
- D R\$ 18.000,00
- E R\$ 24.000,00

50. (PUCRJ 2015) Os sócios de uma empresa decidem dividir o lucro de um determinado período, pelos seus três gerentes, de modo que cada um receba uma parte diretamente proporcional ao seu tempo de serviço.

Sabendo que o lucro que será dividido é de R\$ 18.500,00 e que o tempo de serviço de cada um deles é, respectivamente 5, 7 e 8 anos, podemos afirmar que o mais antigo na empresa receberá:

- A R\$ 4625,00
- B R\$ 5125,00
- C R\$ 6475,00
- D R\$ 7400,00
- E R\$ 9250,00

51. (EPCAR 2013) Uma mãe dividiu a quantia de R\$ 2100,00 entre seus três filhos de 3, 5 e 6 anos. A divisão foi feita em partes inversamente proporcionais às idades de cada um.

Dessa forma, é verdade que

- A o filho mais novo recebeu 100 reais a mais que a soma dos valores recebidos pelos outros dois filhos.
- B o filho mais velho recebeu 20% a menos que o filho do meio.
- C a quantia que o filho do meio recebeu é 40% do que recebeu o mais novo.
- D se a divisão fosse feita em partes iguais, o filho mais velho teria sua parte acrescida de 40% em relação ao que realmente recebeu.

52. (Unesp 2011) Os professores de matemática e educação física de uma escola organizaram um campeonato de damas entre os alunos.

Pelas regras do campeonato, cada colocação admitia apenas um ocupante. Para premiar os três primeiros colocados, a direção da escola comprou 310 chocolates, que foram divididos entre os 1.º, 2.º e 3.º colocados no campeonato, em quantidades inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 5, respectivamente.

As quantidades de chocolates recebidas pelos alunos premiados, em ordem crescente de colocação no campeonato, foram:

- A 155, 93 e 62.
- B 155, 95 e 60.
- C 150, 100 e 60.
- D 150, 103 e 57.
- E 150, 105 e 55.

53. (CFTMG 2008) Os prefeitos das cidades A, B e C desejam construir uma ponte sobre um rio que passa pelos três municípios. O custo dessa obra foi orçado em R\$ 576.000,00 e será dividido em partes diretamente proporcionais às distâncias que a separa de cada uma das cidades.

Se o local da construção dista 6km de A, 12km de B e 18km de C, então a prefeitura de B terá um gasto de:

- A R\$ 288 000,00
- B R\$ 192 000,00
- C R\$ 144 000,00
- D R\$ 96 000,00

54. (PUCCAMP 2001) Certa empresa paga parcialmente um plano de saúde para seus funcionários. Ela contribui com uma quantia que é diretamente proporcional ao tempo de serviço do funcionário e inversamente proporcional a seu salário.

Se, para um funcionário que trabalha há 10 anos e recebe R\$ 1.200,00 de salário a empresa contribui com R\$ 50,00, qual será a contribuição no caso de um funcionário cujo salário é de R\$ 960,00 e tem 8 anos de serviço na empresa?

- A R\$ 48,00
- B R\$ 50,00
- C R\$ 64,00
- D R\$ 72,00
- E R\$ 80,00

55. (PUCCAMP 2000) Uma mina d'água localiza-se na divisa de dois sítios. Os dois proprietários, Sr. Edson e Sr. José, resolveram construir, na saída da mina, uma caixa de água coberta e vão dividir as despesas entre si, em partes inversamente proporcionais às distâncias de suas casas em relação à mina. Se as despesas totalizarem R\$ 5.600,00 e se as casas do Sr.

Edson e do Sr. José distam, respectivamente, 5 km e 3 km da mina, então a parte da despesa que caberá ao Sr. Edson é

- A R\$ 1.900,00
- B R\$ 2.100,00
- C R\$ 2.200,00
- D R\$ 3.100,00
- E R\$ 3.500,00

## REGRA DE TRÊS SIMPLES

Um erro muito comum dos alunos é aplicar regra de três em qualquer questão que aparecer pela frente, no entanto, só podemos aplicar regra de três quando existe proporção entre as grandezas. Portanto, é de extrema importância que saibamos identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais:

O primeiro passo para aplicar a regra de três simples é analisar a proporção entre as duas grandezas. Observe nos exemplos:

Ex<sub>1</sub>: Uma roda dá 80 voltas em 20 minutos. Quantas voltas dará em 28 minutos?

As grandezas envolvidas são quantidade de voltas e tempo gasto.

| Voltas | Tempo (min) |
|--------|-------------|
| 80     | 20          |
| x      | 28          |

Perceba que quanto mais voltas forem dadas maior é o tempo gasto, isto é um forte indício que as grandezas são diretamente proporcionais, devemos confirmar através da constante que será originada pela divisão direta das grandezas.

$$\frac{80}{20} = \frac{x}{28} \rightarrow 20x = 80 \cdot 28 \rightarrow x = 4 \cdot 28 \rightarrow x = 112$$

Ex<sub>2</sub>: Com 8 eletricitistas podemos fazer a instalação de uma casa em 3 dias. Quantos dias levarão 6 eletricitistas para fazer o mesmo trabalho?

| Eletricistas | Tempo (dias) |
|--------------|--------------|
| 8            | 3            |
| 6            | x            |

Quanto mais eletricitistas trabalhando, menos dias durará a instalação, isto é um forte indício que as grandezas são inversamente proporcionais, devemos confirmar com a constante, que será calculada através da multiplicação das grandezas.

$$8 \cdot 3 = 6 \cdot x$$

$$x = 24/6$$

$$x = 4$$

Antes de passarmos para exercícios contextualizados, vamos exercitar um pouco essa análise das grandezas diretamente ou inversamente proporcionais:

01. Com 6 pedreiros podemos construir um a parede em 8 dias. Quantos dias gastarão 3 pedreiros para fazer a mesma parede?

(R:16)

02. Uma fábrica engarrafa 3000 refrigerantes em 6 horas. Quantas horas levará para engarrafar 4000 refrigerantes?

(R: 8)

03. Quatro marceneiros fazem um armário em 18 dias. Em quantos dias 9 marceneiros fariam o mesmo armário?

(R:8)

04. Trinta operários constroem uma casa em 120 dias. Em quantos dias 40 operários construiriam essa casa?

(R: 90)

05. Uma torneira despeja em um tanque 50 litros de água em 20 minutos. Quantas horas levará para despejar 600 litros?

(R: 4)

06. Na construção de uma escola foram gastos 15 caminhões de 4 m<sup>3</sup> de areia. Quantos caminhões de 6 m<sup>3</sup> seriam necessários para fazer o mesmo trabalho?

(R: 10)

07. Com 14 litros de tinta podemos pintar uma parede de 35 m<sup>2</sup>. Quantos litros são necessários para pintar uma parede de 15 m<sup>2</sup>?

(R: 6)

08. Um ônibus, a uma velocidade média de 60 km/h, fez um percurso em 4 horas. Quanto levará, aumentando a velocidade média para 80 km/h?

(R:3)

09. Para se obterem 28 kg de farinha, são necessários 40 kg de trigo. Quantos quilogramas do mesmo trigo são necessários para se obterem 7 kg de farinha?

(R:10)

10. Cinco pedreiros fazem uma casa em 30 dias. Quantos dias levarão 15 pedreiros para fazer a mesma casa?

(R:10)

### REGRA DE TRÊS COMPOSTA

A regra de três composta envolve mais de duas grandezas. Devemos eleger uma como sendo o padrão de comparação e analisar a proporcionalidade existente entre ela e as demais.

Lembre-se que se a proporcionalidade for direta a constante vem da divisão das grandezas e se for inversa, vem da multiplicação das grandezas.

Então, ao montarmos a conta devemos ficar atento, iniciaremos pelo padrão de comparação, se a grandeza analisada for diretamente proporcional, a constante vem da divisão, logo colocaremos o número embaixo do padrão de comparação, para que formemos uma divisão.

Já se a proporção for inversa, sabemos que a constante vem da multiplicação, então, multiplicaremos o padrão de comparação pela grandeza em análise, e aí colocaremos a grandeza em cima do traço.

Resumindo, se for DP, divida, se for IP, multiplique, se for DP, coloque embaixo, se for IP, coloque em cima!

Ex<sub>1</sub>: Uma olaria produz 1470 tijolos em 7 dias, trabalhando 3 horas por dia. Quantos tijolos produzirão em 10 dias, trabalhando 8 horas por dia?

| Padrão         | DP   | DP            |
|----------------|------|---------------|
| <b>Tijolos</b> | Dias | Horas por dia |
| <b>1470</b>    | 7    | 3             |
| <b>x</b>       | 10   | 8             |

Usaremos os tijolos como padrão de comparação.

1ª Comparação: Quanto mais tijolos a serem produzidos, mais dias gastaremos, logo a quantidade de dias é diretamente proporcional a quantidade de tijolos.

2ª Comparação: Quanto mais tijolos, mais horas de trabalho diário teremos, logo a proporcionalidade também é direta.

Montando a conta:

Diretamente coloca embaixo...

$$\frac{1470}{7 \cdot 3} = \frac{x}{10 \cdot 8} \rightarrow 70 = \frac{x}{80} \rightarrow x = 5600$$

Ex<sub>2</sub>: Oitenta pedreiros constroem 32m de muro em 16 dias. Quantos pedreiros serão necessários para construir 16 m de muro em 64 dias?

| Padrão    | DP        | IP   |
|-----------|-----------|------|
| Pedreiros | m de muro | Dias |
| 80        | 32        | 16   |
| x         | 16        | 64   |

Usaremos os pedreiros como padrão de comparação:

1ª Comparação: quanto mais pedreiros, mais metros de muro consegue-se construir, grandezas diretamente proporcionais.

2ª Comparação: quanto mais pedreiros, menos dias de trabalho necessita-se, grandezas inversamente proporcionais.

Lembre-se, DP = divide = coloca em baixo, IP = multiplica = coloca em cima!

$$\frac{80 \cdot 16}{32} = \frac{x \cdot 64}{16} \rightarrow \frac{80}{2} = x \cdot 4 \rightarrow 4x = 40 \rightarrow x = 10$$

Vamos exercitar um pouco a regra de três composta, antes de irmos para as questões contextualizadas:

01. Um ônibus percorre 2232 km em 6 dias, correndo 12 horas por dia. Quantos quilômetros percorrerão em 10 dias, correndo 14 horas por dia?

(R: 4340)

02. Numa fábrica, 12 operários trabalhando 8 horas por dia conseguem fazer 864 caixas de papelão. Quantas caixas serão feitas por 15 operários que trabalhem 10 horas por dia?

(R:1350)

03. Vinte máquinas, trabalhando 16 horas por dia, levam 6 dias para fazer um trabalho. Quantas máquinas serão necessárias para executar o mesmo serviço, se trabalharem 20 horas por dia durante 12 dias?

(R:8)

04. Numa indústria têxtil, 8 alfaiates fazem 360 camisas em 3 dias quantos alfaiates são necessários para que sejam feitas 1080 camisas em 12 dias?

(R:6)

05. Um ciclista percorre 150 km em 4 dias pedalando 3 horas por dia. Em quantos dias faria uma viagem de 400 km, pedalando 4 horas por dia?

(R:8)

06. Uma máquina fabricou 3200 parafusos, trabalhando 12 horas por dia durante 8 dias. Quantas horas deverá trabalhar por dia para fabricar 5000 parafusos em 15 dias?

(R:10)

07. Três torneiras enchem uma piscina em 10 horas. Quantas horas levarão 10 torneiras para encher 2 piscinas?

(R: 6 horas)

08. Uma equipe composta de 15 homens extrai, em 30 dias, 3,6 toneladas de carvão. Se for aumentada para 20 homens, em quantos dias conseguirão extrair 5,6 toneladas de carvão?

(R: 35 dias)

09. Vinte operários, trabalhando 8 horas por dia, gastam 18 dias para construir um muro de 300m. Quanto tempo levará uma turma de 16 operários, trabalhando 9 horas por dia, para construir um muro de 225m?

(R: 15 dias)

10. Um caminhoneiro entrega uma carga em um mês, viajando 8 horas por dia, a uma velocidade média de 50 km/h. Quantas horas por dia ele deveria viajar para entregar essa carga em 20 dias, a uma velocidade média de 60 km/h?

(R: 10 horas por dia)

Prontos para as questões contextualizadas? Vamos lá!

**QUESTÕES - REGRA DE TRÊS**

56. (Enem 2018) Os tipos de prata normalmente vendidos são 975, 950 e 925. Essa classificação é feita de acordo com a sua pureza. Por exemplo, a prata 975 é a substância constituída de 975 partes de prata pura e 25 partes de cobre em 1.000 partes da substância. Já a prata 950 é constituída de 950 partes de prata pura e 50 de cobre em 1.000; e a prata 925 é constituída de 925 partes de prata pura e 75 partes de cobre em 1.000. Um ourives possui 10 gramas de prata 925 e deseja obter 40 gramas de prata 950 para produção de uma joia.

Nessas condições, quantos gramas de prata e de cobre, respectivamente, devem ser fundidos com os 10 gramas de prata 925?

- A** 29,25 e 0,75
- B** 28,75 e 1,25
- C** 28,50 e 1,50
- D** 27,75 e 2,25
- E** 25,00 e 5,00

57. (Enem 2018) Um produtor de milho utiliza uma área de 160 hectares para as suas atividades agrícolas. Essa área é dividida em duas partes: uma de 40 hectares, com maior produtividade, e outra, de 120 hectares, com menor produtividade. A produtividade é dada pela razão entre a produção, em tonelada, e a área cultivada. Sabe-se que a área de 40 hectares tem produtividade igual a 2,5 vezes à da outra. Esse fazendeiro pretende aumentar sua produção total em 15%, aumentando o tamanho da sua propriedade. Para tanto, pretende comprar uma parte de uma fazenda vizinha, que possui a mesma produtividade da parte de 120 hectares de suas terras.

Qual é a área mínima, em hectare, que o produtor precisará comprar?

- A** 36
- B** 33
- C** 27
- D** 24
- E** 21

58. (Enem 2017) Para uma temporada das corridas de Fórmula 1, a capacidade do tanque de combustível de cada carro passou a ser de 100 kg de gasolina. Uma equipe optou por utilizar uma gasolina com densidade de 750 gramas por litro, iniciando a corrida com o tanque cheio. Na primeira parada de reabastecimento, um carro dessa equipe apresentou um registro em seu computador de bordo acusando o consumo de quatro décimos da gasolina originalmente existente no tanque. Para minimizar o peso desse carro e garantir o término da corrida, a equipe de apoio reabasteceu o carro com a terça parte do que restou no tanque na chegada ao reabastecimento.

Disponível em: [www.superdaniolofpage.com.br](http://www.superdaniolofpage.com.br). Acesso em: 6 jul. 2015 (adaptado).

A quantidade de gasolina utilizada, em litro, no reabastecimento, foi

- A**  $\frac{20}{0,075}$
- B**  $\frac{20}{0,75}$
- C**  $\frac{20}{7,5}$
- D**  $20 \times 0,075$
- E**  $20 \times 0,75$

59. (Enem PPL 2017) Uma indústria tem um setor totalmente automatizado. São quatro máquinas iguais, que trabalham simultânea e ininterruptamente durante uma jornada de 6 horas. Após esse período, as máquinas são desligadas por 30 minutos para manutenção. Se alguma máquina precisar de mais manutenção, ficará parada até a próxima manutenção.

Certo dia, era necessário que as quatro máquinas produzissem um total de 9.000 itens. O trabalho começou a ser feito às 8 horas. Durante uma jornada de 6 horas, produziram 6.000 itens, mas na manutenção observou-se que uma máquina precisava ficar parada. Quando o serviço foi finalizado, as três máquinas que continuaram operando passaram por uma nova manutenção, chamada de manutenção de esgotamento.

Em que horário começou a manutenção de esgotamento?

- A** 16h 45 min
- B** 18h 30 min
- C** 19h 50 min
- D** 21h 15 min
- E** 22h 30 min

60. (Enem PPL 2017) Uma televisão pode ser posicionada de modo que se consiga enxergar os detalhes de uma imagem em alta definição. Considere que a distância ideal, com conforto visual, para se assistir à televisão de 32 polegadas é de 1,8 metros. Suponha que haja uma relação de proporcionalidade direta entre o tamanho da tela (medido em polegada) e a distância ideal. Considere que um espectador dispõe de uma televisão de 60 polegadas e que ele deseja se posicionar em frente a ela, com conforto visual.

A distância da televisão, em metro, em que o espectador deve se posicionar para que tenha conforto visual é mais próxima de

- A** 0,33.
- B** 0,96.
- C** 1,57.
- D** 3,37.
- E** 3,60.

61. (Enem (Libras) 2017) Uma padaria fabrica biscoitos que são embalados em pacotes com dez unidades, e cada pacote pesa 85 gramas. Na informação ao consumidor lê-se: "A cada 15 gramas do biscoito correspondem 90 quilocalorias".

Quantas quilocalorias tem um desses biscoitos?

- A** 6
- B** 14
- C** 51
- D** 60
- E** 510

62. (Enem (Libras) 2017) Para a construção de um edifício, o engenheiro responsável decidiu utilizar um novo elevador de carga, com o objetivo de transportar as lajotas do solo até o andar superior com maior eficiência. Testaram-se dois modelos de elevadores: o primeiro carrega 40 peças de lajotas por vez e demora 15 minutos para ir ao topo e retornar ao solo; o segundo carrega 60 peças de lajotas por vez e demora 21 minutos para percorrer o mesmo trajeto. O engenheiro decide verificar quanto tempo o primeiro demora para carregar 280 lajotas até o topo e voltar. Em seguida, decide calcular a quantidade máxima de lajotas que o segundo elevador carregaria nesse mesmo tempo.

Nessas condições, a quantidade máxima de lajotas que o segundo elevador pode carregar é

- A** 133.
- B** 261.
- C** 300.
- D** 392.
- E** 588.

63. (Enem 2016) Para garantir a segurança de um grande evento público que terá início às 4 h da tarde, um organizador precisa monitorar a quantidade de pessoas presentes em cada instante. Para cada 2.000 pessoas se faz necessária a presença de um policial. Além disso, estima-se uma densidade de quatro pessoas por metro quadrado de área de terreno ocupado. Às 10 h da manhã, o organizador verifica que a área de terreno já ocupada equivale a um quadrado com lados medindo 500 m. Porém, nas horas seguintes, espera-se que o público aumente a uma taxa de 120.000 pessoas por hora até o início do evento, quando não será mais permitida a entrada de público.

Quantos policiais serão necessários no início do evento para garantir a segurança?

- A** 360
- B** 485
- C** 560
- D** 740
- E** 860

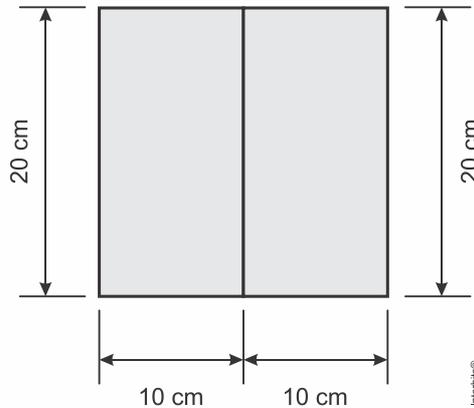
64. (Enem 2016) Um paciente necessita de reidratação endovenosa feita por meio de cinco frascos de soro durante 24 h. Cada frasco tem um volume de 800 mL de soro. Nas primeiras quatro horas, deverá receber 40% do total a ser aplicado. Cada mililitro de soro corresponde a 12 gotas.

O número de gotas por minuto que o paciente deverá receber após as quatro primeiras horas será

- A** 16.
- B** 20.
- C** 24.
- D** 34.
- E** 40.

65. (Enem 2ª aplicação 2016) Um agricultor vive da plantação de morangos que são vendidos para uma cooperativa. A cooperativa faz um contrato de compra e venda no qual o produtor informa a área plantada.

Para permitir o crescimento adequado das plantas, as mudas de morango são plantadas no centro de uma área retangular, de 10 cm por 20 cm, como mostra a figura.



Atualmente, sua plantação de morangos ocupa uma área de  $10.000 \text{ m}^2$ , mas a cooperativa quer que ele aumente sua produção. Para isso, o agricultor deverá aumentar a área plantada em 20%, mantendo o mesmo padrão de plantio.

O aumento (em unidade) no número de mudas de morango em sua plantação deve ser de

- A** 10.000.
- B** 60.000.
- C** 100.000.
- D** 500.000.
- E** 600.000.

66. (Enem 2015) Alguns medicamentos para felinos são administrados com base na superfície corporal do animal. Foi receitado a um felino pesando 3,0 kg um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado de superfície corporal. O quadro apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados.

Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal

| Massa (kg) | Área ( $\text{m}^2$ ) |
|------------|-----------------------|
| 1,0        | 0,100                 |
| 2,0        | 0,159                 |
| 3,0        | 0,208                 |
| 4,0        | 0,252                 |
| 5,0        | 0,292                 |

NORSWORTHY, G. D. *O paciente felino*. São Paulo: Roca, 2009.

A dose diária, em miligramas, que esse felino deverá receber é de

- A** 0,624.
- B** 52,0.
- C** 156,0.
- D** 750,0.
- E** 1.201,9.

67. (Enem 2015) A insulina é utilizada no tratamento de pacientes com diabetes para o controle glicêmico. Para facilitar sua aplicação, foi desenvolvida uma “caneta” na qual pode ser inserido um refil contendo 3mL de insulina, como mostra a imagem.



Para controle das aplicações, definiu-se a unidade de insulina como 0,01 mL. Antes de cada aplicação, é necessário descartar 2 unidades de insulina, de forma a retirar possíveis bolhas de ar. A um paciente foram prescritas duas aplicações diárias: 10 unidades de insulina pela manhã e 10 à noite.

Qual o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita?

- A 25
- B 15
- C 13
- D 12
- E 8

68. (Enem PPL 2015) Um graneiro detectou uma infecção bacteriológica em sua criação de 100 coelhos. A massa de cada coelho era de, aproximadamente, 4 kg. Um veterinário prescreveu a aplicação de um antibiótico, vendido em frascos contendo 16 mL, 25 mL, 100 mL, 400 mL ou 1.600 mL. A bula do antibiótico recomenda que, em aves e coelhos, seja administrada uma dose única de 0,25 mL para cada quilograma de massa do animal.

Para que todos os coelhos recebessem a dosagem do antibiótico recomendada pela bula, de tal maneira que não sobrasse produto na embalagem, o criador deveria comprar um único frasco com a quantidade, em mililitros, igual a

- A 16.
- B 25.
- C 100.
- D 400
- E 1.600.

69. (Enem PPL 2015) Uma confecção possuía 36 funcionários, alcançando uma produtividade de 5.400 camisetas por dia, com uma jornada de trabalho diária dos funcionários de 6 horas. Entretanto, com o lançamento da nova coleção e de uma nova campanha de *marketing*, o número de encomendas cresceu de forma acentuada, aumentando a demanda diária para 21.600 camisetas. Buscando atender essa nova demanda, a empresa aumentou o quadro de funcionários para 96. Ainda assim, a carga horária de trabalho necessita ser ajustada.

Qual deve ser a nova jornada de trabalho diária dos funcionários para que a empresa consiga atender a demanda?

- A 1 hora e 30 minutos.
- B 2 horas e 15 minutos.
- C 9 horas.
- D 16 horas.
- E 24 horas.

70. (Enem 2014) Diariamente, uma residência consome 20.160Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões  $6\text{cm} \times 8\text{cm}$ . Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

- A** Retirar 16 células.
- B** Retirar 40 células.
- C** Acrescentar 5 células.
- D** Acrescentar 20 células.
- E** Acrescentar 40 células.

71. (Enem 2014) Um *show* especial de Natal teve 45.000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o *show*, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao *show* e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados.

Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

- A** 1 hora.
- B** 1 hora e 15 minutos.
- C** 5 horas.
- D** 6 horas.
- E** 6 horas e 15 minutos.

72. (Enem PPL 2014) Um confeitheiro deseja fazer um bolo cuja receita indica a utilização de açúcar e farinha de trigo em quantidades fornecidas em gramas. Ele sabe que uma determinada xícara utilizada para medir os ingredientes comporta 120 gramas de farinha de trigo e que três dessas xícaras de açúcar correspondem, em gramas, a quatro de farinha de trigo.

Quantos gramas de açúcar cabem em uma dessas xícaras?

- A** 30
- B** 40
- C** 90
- D** 160
- E** 360

73. (Enem 2014) Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:

- Recipiente I: 0,125 litro
- Recipiente II: 0,250 litro
- Recipiente III: 0,320 litro
- Recipiente IV: 0,500 litro
- Recipiente V: 0,800 litro

O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez.

Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

- A** I
- B** II
- C** III
- D** IV
- E** V

74. (Enem PPL 2013) Uma dona de casa faz um comparativo de custos para decidir se irá adquirir uma máquina lavadora de louças para substituir a lavagem manual. Decide calcular o custo com a lavagem de louças por um período de 30 dias, com duas lavagens por dia. Ela constatou que não precisa considerar os custos do detergente e do sabão, pois, na máquina lavadora e na lavagem manual, são equivalentes. Verificou que gasta em média 90 litros de água em cada lavagem manual. Cada lavagem na máquina gasta 16 litros de água e 0,9 kWh de energia. Sabe-se que a companhia de distribuição de água cobra R\$ 6,25 por metro cúbico (pelo consumo de água e dispersão e tratamento de esgoto) e a companhia elétrica cobra R\$ 0,45 por kWh consumido.

De acordo com essas informações, num período de 30 dias, a lavagem manual ficará mais cara que a da máquina lavadora em quantos reais?

- A** 1,72
- B** 3,45
- C** 4,72
- D** 9,45
- E** 27,75

75. (Enem PPL 2013) Luíza decidiu pintar seus cabelos e os de sua mãe usando as cores B e C em ambas as tinturas. A cor B é a que tingem os cabelos brancos e a cor C dá um tom mais claro durante a exposição à luz. Luíza sabe que, em cabelos com muitos fios brancos, como os de sua mãe, a proporção entre as cores C e B é de 1 para 3. Para ela, que tem poucos fios brancos, a proporção a ser aplicada é de 3 partes da cor C para 1 parte da cor B. Além disso, como sua mãe tem cabelos curtos, basta a aplicação de 60 gramas de tinta; já para seus longos cabelos, serão necessários 120 gramas.

De acordo com a situação descrita, a quantidade, em gramas, da tinta da cor B que Luíza deve adquirir para pintar os seus cabelos e os de sua mãe é

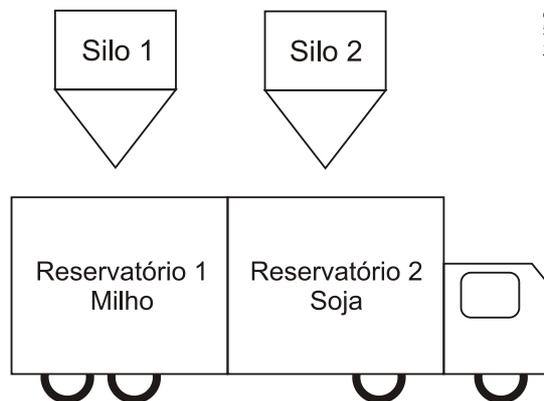
- A** 60.
- B** 75.
- C** 90.
- D** 105.
- E** 180.

76. (Enem 2013) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para  $900 \text{ m}^3$ . Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de  $500 \text{ m}^3$ , cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

- A 2.
- B 4.
- C 5.
- D 8.
- E 9.

77. (Enem PPL 2012) Um pequeno caminhão dispõe de dois reservatórios vazios, cada um com capacidade de  $2\,000 \text{ kg}$ , os quais serão utilizados para transportar a produção de milho e soja até um centro consumidor. No centro de abastecimento, abre-se o registro de um primeiro silo às 12 horas para alimentar o reservatório 1 com milho, numa taxa de  $120 \text{ kg}$  por minuto. Passados cinco minutos, abre-se o registro de um segundo silo para alimentar o reservatório 2 com soja, numa taxa de  $80 \text{ kg}$  por minuto. Considere que a encomenda de milho no centro consumidor seja de  $1\,800 \text{ kg}$  e que, pela lei rodoviária local, a carga máxima a ser transportada por caminhão seja de  $3\,400 \text{ kg}$ .



Nestas condições, em que instantes devem ser fechados os registros dos silos 1 e 2, respectivamente, para que a quantidade de soja transportada seja a máxima possível?

- A 12h15min e 12h20min
- B 12h15min e 12h25min
- C 12h15min e 12h27min30seg
- D 12h15min e 12h30min
- E 12h15min e 12h32min30seg

78. (Enem PPL 2012) Um pintor dispõe de  $35 \text{ litros}$  de tinta vermelha e de  $30 \text{ litros}$  de tinta branca. Ele deseja misturar essas tintas na proporção de  $5 \text{ litros}$  de tinta vermelha para cada  $3 \text{ litros}$  de tinta branca para obter um tom de tinta mais claro. Para obter o maior volume possível de tinta misturada, ele deverá utilizar toda a tinta disponível de uma das cores e sobrar uma certa quantidade de tinta da outra cor.

Quantos litros de tinta sobrarão sem serem misturados?

- A 5.
- B 9.
- C 12.
- D 14.
- E 17.

79. (Enem 2012) Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?

- A 24 litros
- B 36 litros
- C 40 litros
- D 42 litros
- E 50 litros

80. (Enem PPL 2012) Uma churrascaria cobra, no almoço, R\$ 12,00 por pessoa. Após as 15 h, esse valor cai para R\$ 9,00. Estima-se que o custo total de um almoço seja de R\$ 7,00 por pessoa. Em média, por dia, almoçam na churrascaria 1000 clientes, sendo que  $\frac{3}{4}$  deles comparecem até as 15 h.

Qual o lucro médio, por dia, da churrascaria?

- A R\$ 9000,00
- B R\$ 7000,00
- C R\$ 4250,00
- D R\$ 3750,00
- E R\$ 2250,00

81. (Enem 2012) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de

- A 12 kg.
- B 16 kg.
- C 24 kg.
- D 36 kg.
- E 75 kg.

82. (Enem 2011) Muitas medidas podem ser tomadas em nossas casas visando à utilização racional de energia elétrica. Isso deve ser uma atitude diária de cidadania. Uma delas pode ser a redução do tempo no banho. Um chuveiro com potência de 4.800 W consome 4,8 kW por hora.

Uma pessoa que toma dois banhos diariamente, de 10 minutos cada, consumirá, em sete dias, quantos kW?

- A 0,8
- B 1,6
- C 5,6
- D 11,2
- E 33,6

83. (Enem 2011) Você pode adaptar as atividades do seu dia a dia de uma forma que possa queimar mais calorias do que as gastas normalmente, conforme a relação seguinte:

- Enquanto você fala ao telefone, faça agachamentos: 100 calorias gastas em 20 minutos.
- Meia hora de supermercado: 100 calorias.
- Cuidar do jardim por 30 minutos: 200 calorias.
- Passear com o cachorro: 200 calorias em 30 minutos.
- Tirar o pó dos móveis: 150 calorias em 30 minutos.
- Lavar roupas por 30 minutos: 200 calorias.

Disponível em: <http://cyberdiet.terra.com.br>. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Uma pessoa deseja executar essas atividades, porém, ajustando o tempo para que, em cada uma, gaste igualmente 200 calorias.

A partir dos ajustes, quanto tempo a mais será necessário para realizar todas as atividades?

- A** 50 minutos.
- B** 60 minutos.
- C** 80 minutos.
- D** 120 minutos.
- E** 170 minutos.

84. (Enem 2011) Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

*Época*. 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.

De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a

- A** 4 mil.
- B** 9 mil.
- C** 21 mil.
- D** 35 mil.
- E** 39 mil.

85. (Enem 2011) Observe as dicas para calcular a quantidade certa de alimentos e bebidas para as festas de fim de ano:

- Para o prato principal, estime 250 gramas de carne para cada pessoa.
- Um copo americano cheio de arroz rende o suficiente para quatro pessoas.
- Para a farofa, calcule quatro colheres de sopa por convidado.
- Uma garrafa de vinho serve seis pessoas.
- Uma garrafa de cerveja serve duas.
- Uma garrafa de espumante serve três convidados.

Quem organiza festas faz esses cálculos em cima do total de convidados, independente do gosto de cada um.

Quantidade certa de alimentos e bebidas evita o desperdício da ceia. *Jornal Hoje*. 17 dez. 2010 (adaptado).

Um anfitrião decidiu seguir essas dicas ao se preparar para receber 30 convidados para a ceia de Natal. Para seguir essas orientações à risca, o anfitrião deverá dispor de

- Ⓐ 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.
- Ⓑ 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.
- Ⓒ 75 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.
- Ⓓ 7,5 kg de carne, 7 copos americanos, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.
- Ⓔ 7,5 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

86. (Enem 2010) Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10<sup>7</sup>) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas *Veja* (ed. 2055), *Cláudia* (ed. 555), *National Geographic* (ed. 93) e *Nova Escola* (ed. 208) (adaptado).

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consumem 1 000 litros de óleo em frituras por semana.

Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

- Ⓐ 10<sup>2</sup>
- Ⓑ 10<sup>3</sup>
- Ⓒ 10<sup>4</sup>
- Ⓓ 10<sup>5</sup>
- Ⓔ 10<sup>9</sup>

**87. (Enem 2ª aplicação 2010) Fontes alternativas**

Há um novo impulso para produzir combustível a partir de gordura animal. Em abril, a *High Plains Bioenergy* inaugurou uma biorrefinaria próxima a uma fábrica de processamento de carne suína em Guymon, Oklahoma. A refinaria converte a gordura do porco, juntamente com o óleo vegetal, em biodiesel. A expectativa da fábrica é transformar 14 milhões de quilogramas de banha em 112 milhões de litros de biodiesel.

*Revista Scientific American. Brasil, ago. 2009 (adaptado).*

Considere que haja uma proporção direta entre a massa de banha transformada e o volume de biodiesel produzido.

Para produzir 48 milhões de litros de biodiesel, a massa de banha necessária, em quilogramas, será de, aproximadamente,

- A** 6 milhões.
- B** 33 milhões.
- C** 78 milhões.
- D** 146 milhões.
- E** 384 milhões.

**88. (Enem cancelado 2009)** Os calendários usados pelos diferentes povos da Terra são muito variados. O **calendário islâmico**, por exemplo, é lunar, e nele cada mês tem sincronia com a fase da lua. O **calendário maia** segue o ciclo de Vênus, com cerca de 584 dias, e cada 5 ciclos de Vênus corresponde a 8 anos de 365 dias da Terra.

MATSUURA, Oscar. *Calendários e o fluxo do tempo*. Scientific American Brasil. Disponível em: <http://www.uol.com.br>. Acesso em: 14 out. 2008 (adaptado).

Quantos ciclos teria, em Vênus, um período terrestre de 48 anos?

- A** 30 ciclos.
- B** 40 ciclos.
- C** 73 ciclos.
- D** 240 ciclos.
- E** 384 ciclos

**89. (Enem 2009)** Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodiesel ao óleo diesel comercializado nos postos.

A exigência é que, a partir de 1.º de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodiesel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodiesel, bem como possibilita a redução da importação de diesel de petróleo.

Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 12 jul. 2009 (adaptado).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodiesel ao diesel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodiesel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final diesel/biodiesel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodiesel com a adição de 3%?

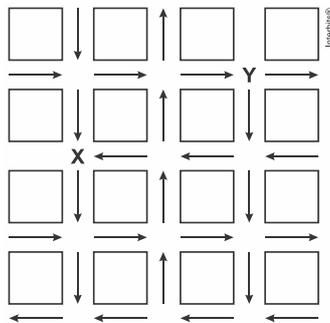
- A** 27,75 milhões de litros.
- B** 37,00 milhões de litros.
- C** 231,25 milhões de litros.
- D** 693,75 milhões de litros.
- E** 888,00 milhões de litros.

90. (Enem 2009) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

- A 920 kg.
- B 800 kg.
- C 720 kg.
- D 600 kg.
- E 570 kg.

91. (Enem 2009) O mapa a seguir representa um bairro de determinada cidade, no qual as flechas indicam o sentido das mãos do tráfego. Sabe-se que esse bairro foi planejado e que cada quadra representada na figura é um terreno quadrado, de lado igual a 200 metros.



Desconsiderando-se a largura das ruas, qual seria o tempo, em minutos, que um ônibus, em velocidade constante e igual a 40 km/h, partindo do ponto X, demoraria para chegar até o ponto Y?

- A 25 min.
- B 15 min.
- C 2,5 min.
- D 1,5 min.
- E 0,15 min.

92. (Enem cancelado 2009) Pneus usados geralmente são descartados de forma inadequada, favorecendo a proliferação de insetos e roedores e provocando sérios problemas de saúde pública. Estima-se que, no Brasil, a cada ano, sejam descartados 20 milhões de pneus usados. Como alternativa para dar uma destinação final a esses pneus, a Petrobras, em sua unidade de São Mateus do Sul, no Paraná, desenvolveu um processo de obtenção de combustível a partir da mistura dos pneus com xisto. Esse procedimento permite, a partir de uma tonelada de pneu, um rendimento de cerca de 530 kg de óleo.

Disponível em: <http://www.ambientebrasil.com.br>. Acesso em: 3 out. 2008 (adaptado).

Considerando que uma tonelada corresponde, em média, a cerca de 200 pneus, se todos os pneus descartados anualmente fossem utilizados no processo de obtenção de combustível pela mistura com xisto, seriam então produzidas

- A 5,3 mil toneladas de óleo.
- B 53 mil toneladas de óleo.
- C 530 mil toneladas de óleo.
- D 5,3 milhões de toneladas de óleo.
- E 530 milhões de toneladas de óleo.

93. (Enem 2009) Segundo as regras da Fórmula 1, o peso mínimo do carro, de tanque vazio, com o piloto, é de 605 kg, e gasolina deve ter densidade entre 725 e 780 gramas por litro. Entre os circuitos nos quais ocorrem competições dessa categoria, o mais longo é *Spa-Francorchamps*, na Bélgica, cujo traçado tem 7 km de extensão. O consumo médio de um carro da Fórmula 1 é de 75 litros para cada 100 km.

Suponha que um piloto de uma equipe específica, que utiliza um tipo de gasolina com densidade de 750 g/L, esteja no circuito de *Spa-Francorchamps*, parado no *box* para reabastecimento. Caso ele pretenda dar mais 16 voltas, ao ser liberado para retornar à pista, seu carro deverá pesar, no mínimo,

- A 617 kg.
- B 668 kg.
- C 680 kg.
- D 689 kg.
- E 717 kg.

94. (Enem 2007) **Álcool, crescimento e pobreza**

O lavrador de Ribeirão Preto recebe em média R\$ 2,50 por tonelada de cana cortada. Nos anos 80, esse trabalhador cortava cinco toneladas de cana por dia. A mecanização da colheita o obrigou a ser mais produtivo. O corta-cana derruba agora oito toneladas por dia.

O trabalhador deve cortar a cana rente ao chão, encurvado. Usa roupas mal-ajambradas, quentes, que lhe cobrem o corpo, para que não seja lanhado pelas folhas da planta. O excesso de trabalho causa a *birola*: tontura, desmaio, câibra, convulsão. A fim de aguentar dores e cansaço, esse trabalhador toma drogas e soluções de glicose, quando não farinha mesmo. Tem aumentado o número de mortes por exaustão nos canaviais.

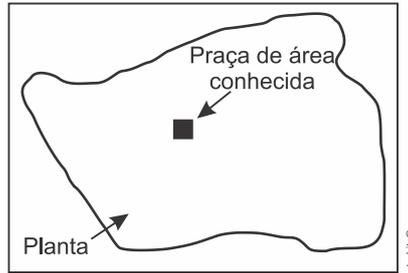
O setor da cana produz hoje uns 3,5% do PIB. Exporta US\$ 8 bilhões. Gera toda a energia elétrica que consome e ainda vende excedentes. A indústria de São Paulo contrata cientistas e engenheiros para desenvolver máquinas e equipamentos mais eficientes para as usinas de álcool. As pesquisas, privada e pública, na área agrícola (cana, laranja, eucalipto, etc.) desenvolvem a bioquímica e a genética no país.

Folha de S. Paulo, 11/3/2007 (com adaptações).

Considere-se que cada tonelada de cana-de-açúcar permita a produção de 100 litros de álcool combustível, vendido nos postos de abastecimento a R\$ 1,20 o litro. Para que um corta-cana pudesse, com o que ganha nessa atividade, comprar o álcool produzido a partir das oito toneladas de cana resultantes de um dia de trabalho, ele teria de trabalhar durante

- A 3 dias.
- B 18 dias.
- C 30 dias.
- D 48 dias.
- E 60 dias.

95. (Enem 2001) Um engenheiro, para calcular a área de uma cidade, copiou sua planta numa folha de papel de boa qualidade, recortou e pesou numa balança de precisão, obtendo 40 g. Em seguida, recortou, do mesmo desenho, uma praça de dimensões reais  $100\text{ m} \times 100\text{ m}$ , pesou o recorte na mesma balança e obteve 0,08 g. Com esses dados foi possível dizer que a área da cidade, em metros quadrados, é de, aproximadamente,



- A** 800.
- B** 10 000.
- C** 320 000.
- D** 400 000.
- E** 5 000 000.

**TRABALHO HARMÔNICO - PROBLEMAS COM TORNEIRAS**

Inicialmente, vamos conceituar trabalho harmônico, e para tanto, vamos usar o exemplo mais famoso... Aquele velho e bom problema com torneiras! Harmonia tem em seu campo semântico, consonância, concomitância. Entende-se por trabalho harmônico, aquele trabalho que é produzido em conjunto.

Por exemplo, uma torneira A enche um tanque sozinha em 3 horas, isto NÃO é trabalho harmônico, a torneira está trabalhando sozinha! Outra torneira B enche sozinha o mesmo tanque em 6 horas, isto também não é trabalho harmônico, ela também está trabalhando sozinha! Em quanto tempo as duas torneiras juntas encheriam esse mesmo tanque? Agora sim temos um trabalho harmônico, as duas torneiras estão trabalhando juntas, parte do serviço será executado pela torneira A e parte do serviço será executado pela torneira B, mesmo a A sendo mais rápida do que a B, o trabalho continua sendo harmônico! É certo que a torneira A encherá uma parte maior do que a torneira B, mas cada uma está fazendo sua parte e juntas obterão o resultado esperado: o tanque cheio!

Bom, deixemos de conversa e vamos trabalhar! kkkk

Para saber o tempo gasto pelas duas torneiras juntas vamos lançar mão da regra de três. Inicialmente, vamos analisar a torneira A sozinha, ela gasta 3 horas para concluir o serviço, isso nos indica que em 1 hora ela terá concluído  $\frac{1}{3}$  de seu trabalho, ou seja,  $\frac{1}{3}$  do tanque estará cheio:

$$\begin{array}{l} \text{Torneira A} \\ 3h \longrightarrow 1 \\ 1h \longrightarrow \frac{1}{3} \end{array}$$

Do mesmo modo, analisaremos agora a torneira B sozinha, se ela demora 6 horas para encher o tanque, em 1 hora ela terá enchido  $\frac{1}{6}$  da capacidade do tanque:

$$\begin{array}{l} \text{Torneira B} \\ 6h \longrightarrow 1 \\ 1h \longrightarrow \frac{1}{6} \end{array}$$

Agora que temos um tempo de 1h em comum, podemos avaliar o trabalho das duas torneiras em conjunto, se a torneira A enche  $\frac{1}{3}$  e a torneira B enche  $\frac{1}{6}$ , as duas torneiras juntas vão encher  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ , que é a soma dos trabalhos de cada uma em separado:

$$\begin{array}{l} \text{Torneiras A e B} \\ 1h \longrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \end{array}$$

Já que sabemos a fração do tanque que as torneiras juntas conseguem encher em uma hora, vamos usar uma regra de três para descobrir em quanto tempo elas juntas enchem a totalidade do tanque.

$$\begin{array}{l} \text{Torneiras A e B} \\ 1h \longrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\ X \longrightarrow 1 \end{array}$$

1 hora está para  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ , assim como x, o tempo total de enchimento, estará para 1 que representa  $100\% = \frac{100}{100} = 1$ , ou seja, o tanque cheio.

$$\begin{array}{l} 1h \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \\ X \rightarrow 1 \end{array}$$

Fazendo meio pelos extremos, temos:

$$X \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = 1$$

Ou ainda:

$$X = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$$

Sabemos então que o tempo para que as duas torneiras juntas encham o tanque é o inverso da soma dos inversos dos tempos individuais de enchimento.

Portanto, se a torneira A gasta 3h para encher e a torneira B gasta 6h para encher, o tempo para que as duas juntas encham o mesmo tanque é 2h.

$$x = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{2+1}{6}} = \frac{1}{\frac{3}{6}} = \frac{6}{3} = 2h$$

Podemos evitar a utilização da regra de três, partindo do que acabamos de aprender com esse exemplo:

Se uma torneira gasta um tempo  $t_1$  para encher um tanque sozinha e outra torneira gasta um tempo  $t_2$  para encher o mesmo tanque sozinha, o tempo  $t$  que as duas torneiras gastarão para encher juntas é

$$t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}}$$

Existe ainda uma maneira mais simples de fazer este tipo de questão quando o trabalho é realizado por duas torneiras:

$$t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = \frac{1}{\frac{t_2 + t_1}{t_1 \times t_2}} = \frac{t_1 \times t_2}{t_1 + t_2}$$

Ou seja, para sabermos o tempo que duas torneiras levam para encher um tanque juntas, basta dividirmos o produto dos tempos individuais, pela soma dos tempos individuais. Voltando para o exemplo anterior, se uma torneira gasta sozinha 3h e outra gasta 6h, as duas torneiras juntas vão gastar:

$$t = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = \frac{18}{9} = 2h$$

Vamos ver outro exemplo semelhante?

Se uma torneira gasta 4h para encher um tanque sozinha e uma outra torneira gasta 12h para encher o mesmo tanque sozinha, em quanto tempo as duas juntas encheriam esse mesmo tanque?

Basta fazermos o produto sobre a soma:

$$t = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = \frac{48}{16} = 3h$$

Em 3h, as duas torneiras juntas enchem o tanque! Viu como tudo ficou mais fácil e mais rápido?

Você deve estar se perguntando, e se fossem 3 torneiras, como posso aplicar isso? Então, vamos lá!

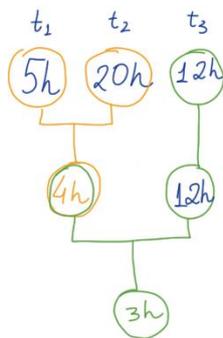
Uma torneira sozinha enche um tanque em 5h, outra sozinha enche o mesmo tanque em 20h e uma terceira sozinha enche o mesmo tanque em 12h, em quanto tempo as três torneiras juntas enchem o mesmo tanque?

Aqui você tem duas opções:

1ª Opção: você pode fazer o produto pela soma com as duas primeiras torneiras e logo após, aplicar novamente o produto pela soma com o resultado obtido e a terceira torneira.

$$t_{1e2} = \frac{5 \times 20}{5 + 20} = \frac{100}{25} = 4h$$

$$t_{(1e2)e3} = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = \frac{48}{16} = 3h$$



Portanto, as três torneiras juntas levariam 3h para encher o tanque.

2ª Opção: Você pode usar o inverso da soma dos inversos. Assim como havíamos visto antes do produto sobre a soma.

$$t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}} = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{12 + 3 + 5}{60}} = \frac{1}{\frac{20}{60}} = \frac{60}{20} = 3h$$

A ideia é tentar analisar e decidir qual técnica vai agilizar a tua resolução, atente para os dados da questão para que você possa tomar a decisão correta de qual técnica utilizar.

Depois de tudo isso, você deve estar se perguntando, e se a questão trouxer um ralo, o que faremos?

Antes de tudo, tenha certeza que as torneiras juntas enchem o tanque mais rapidamente do que o ralo esvazia, ou nunca o tanque encherá. Se você tem certeza que o ralo esvazia mais devagar, aconselho utilizar o inverso da soma dos inversos, no entanto, lembre-se que o ralo trabalha no sentido contrário da torneira. Enquanto a torneira enche, o ralo esvazia, enquanto somamos o inverso do tempo da torneira, devemos subtrair o inverso do tempo do ralo.

Vamos pegar o exemplo anterior e trocar a terceira torneira por um ralo... Uma torneira sozinha enche um tanque em 5h, outra sozinha enche o mesmo tanque em 20h e um ralo esvazia o mesmo tanque quando ele está cheio em 12h, em quanto tempo o tanque encherá, se no início estava vazio, as duas torneiras ligadas e o ralo aberto?

$$t = \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} - \frac{1}{\text{ralo}}} = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{20} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{12 + 3 - 5}{60}} = \frac{1}{\frac{10}{60}} = \frac{60}{10} = 6h$$

Observe que o ralo entra com o sinal negativo no denominador, sendo assim, o produto sobre a soma só pode ser utilizado se estivermos trabalhando com duas torneiras, já o inverso da soma dos inversos pode ser utilizado para qualquer quantidade de torneiras e ralos, desde que observados os sinais de cada um!

Está pronto para exercitar? Vamos com tudo!

96. (ESPM 2018) Juntas, as torneiras A e B enchem um tanque em 24 min. Se apenas a torneira A estiver aberta, o tempo de enchimento é de 1h.

Podemos concluir que, se apenas a torneira B estiver aberta, esse tanque ficaria cheio em:

- A** 30 min.
- B** 40 min.
- C** 20 min.
- D** 36 min.
- E** 42 min.

97. (IFSC 2016) Para encher um reservatório de água, estão conectadas a ele duas torneiras com vazões diferentes. A primeira torneira enche esse reservatório em 15 horas e, a segunda, em 10 horas.

Qual a fração, em relação à capacidade total do reservatório, representaria a quantidade de água eliminada pelas torneiras se elas ficassem abertas ao mesmo tempo, durante 2 horas?

Assinale a alternativa **CORRETA**.

- A**  $1/3$
- B**  $2/25$
- C**  $1/150$
- D**  $1/6$
- E**  $2/15$

98. (UNIFOR 2014) Uma torneira  $T_1$  enche um tanque de volume  $V$  em 6 horas. A torneira  $T_2$  enche o mesmo tanque em 8 horas, e a torneira esvazia esse mesmo tanque em 4 horas.

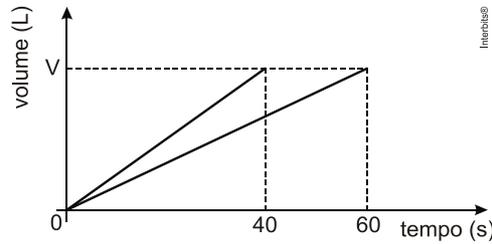
Se o tanque está vazio e todas as torneiras foram abertas ao mesmo tempo, o percentual do volume do tanque em 6 horas é de:

- A** 25%
- B** 30%
- C** 45%
- D** 60%
- E** 65%

99. (UERJ 2013) Em um laboratório, duas torneiras enchem dois recipientes, de mesmo volume  $V$ , com diferentes soluções aquosas. Observe os dados da tabela:

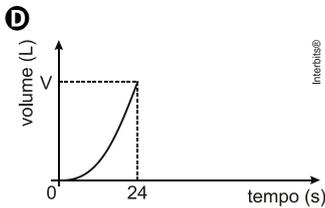
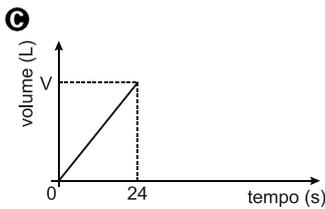
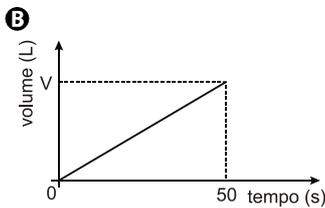
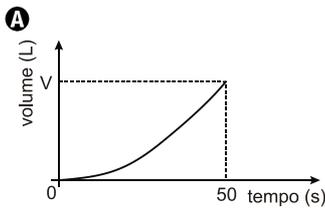
| Recipiente | Solução            | Tempo de enchimento (s) |
|------------|--------------------|-------------------------|
| R1         | ácido clorídrico   | 40                      |
| R2         | hidróxido de sódio | 60                      |

O gráfico abaixo mostra a variação do volume do conteúdo em cada recipiente em função do tempo.



Considere que as duas torneiras foram abertas no mesmo instante a fim de encher um outro recipiente de volume  $V$ .

O gráfico que ilustra a variação do volume do conteúdo desse recipiente está apresentado em:



100. (CFTMG 2011) Um tanque possui duas torneiras, sendo uma de entrada, que o enche em 5 horas, e outra de saída, que o esvazia em 7 horas.

Supondo que esse tanque esteja totalmente vazio e que as torneiras sejam abertas, ao mesmo tempo, às 15 horas, então, ele ficara totalmente cheio às

- A** 8h30 min.
- B** 8h50 min.
- C** 20h30 min.
- D** 20h50 min.

101. (UESC 2011) Para esvaziar um reservatório, são necessárias duas horas e meia, enquanto, para enchê-lo, são necessárias apenas uma hora e meia. Certo dia, após uma limpeza, o reservatório começa a receber água às 8h15min, tendo o funcionário esquecido de fechar a torneira.

Por esse motivo, o reservatório estará completamente cheio às

- A 1h00min
- B 1h15min
- C 1h30min
- D 1h45min
- E 12h00min

102. (UECE 2010) Três torneiras X, Y e Z, abertas simultaneamente, enchem um tanque em três horas. Cada uma das torneiras tem vazão constante e, sozinhas, encheriam o tanque em x horas, 8 horas e 6 horas, respectivamente.

Nestas condições, o valor de x será

- A 18.
- B 20.
- C 22.
- D 24.

103. (UFRRJ 2007) Um tanque de volume V é abastecido por duas torneiras A e B. A torneira A sozinha enche o tanque em 10 minutos e a torneira B, também sozinha, em 20 minutos.

Calcule o tempo que as torneiras A e B juntas levam para encher o tanque.

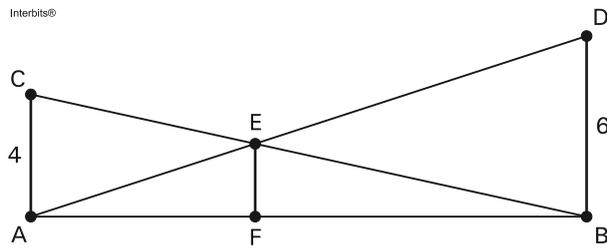
104. (UFG 2007) Para encher um recipiente de 5 litros, uma torneira gasta 12 segundos. Uma segunda torneira gasta 18 segundos para encher o mesmo recipiente.

Nestas condições, para encher um tanque de 1000 litros, usando as duas torneiras ao mesmo tempo, serão necessários

- A 20 minutos.
- B 24 minutos.
- C 33 minutos.
- D 50 minutos.
- E 83 minutos.

105. (CFTCE 2006) Três torneiras enchem um tanque: a primeira em 15 horas; a segunda em 20 horas; e a terceira em 30 horas. Há um escoadouro que pode esvaziar o tanque em 40 horas. Estando as três torneiras e o escoadouro a funcionar, calcule em quantas horas o tanque poderá ficar cheio.

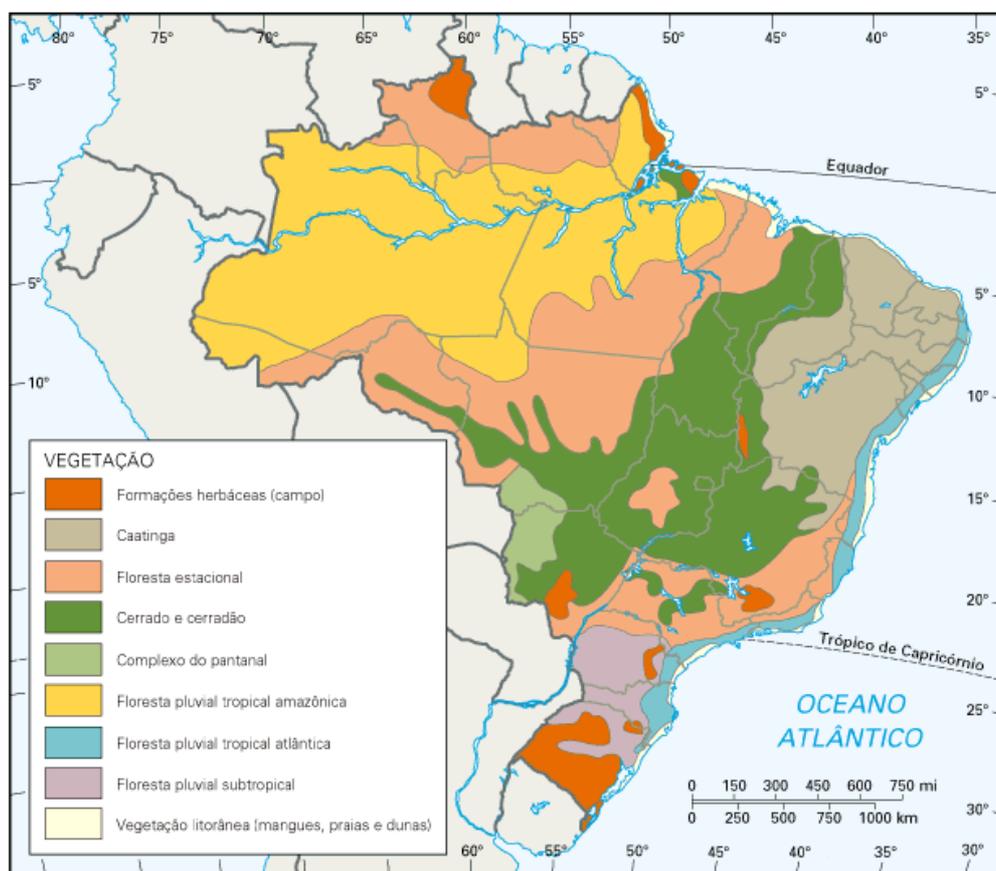
106. (Enem 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

- A** 1 m
- B** 2 m
- C** 2,4 m
- D** 3 m
- E**  $2\sqrt{6}$  m

Podemos definir escala como a razão entre a medida linear do desenho e a medida linear correspondente na realidade. As distâncias expressas nos mapas, plantas e maquetes são consideradas representativas, isto é, indicam uma constante de proporcionalidade usada na transformação para a distância real. Os dados expressos nos mapas são diretamente proporcionais às distâncias na realidade.



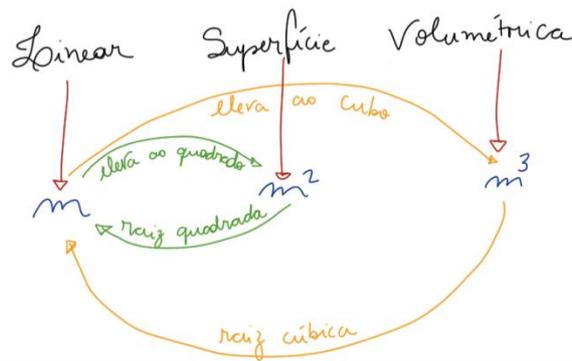
Os mapas representam países, estados, municípios, faixas de terras, continentes, entre outras extensões de terras. Essa representação acontece de forma reduzida, mantendo as relações de tamanho, prevalecendo à proporcionalidade.

Todo mapa, maquete, planta possui uma legenda que informa o coeficiente de proporcionalidade. Vamos supor que em um mapa a informação da legenda seja a seguinte 1 : 5.000.000 (Lê-se: um para cinco milhões), ela indica que cada centímetro de distância no mapa, corresponderá a cinco milhões de centímetros na realidade. Então, se utilizarmos uma régua e medirmos a distância entre duas cidades no mapa, obtendo 2,5 cm, teremos na realidade a seguinte distância:  $2,5 * 5.000.000 = 12.500.000 \text{ cm} = 125.000 \text{ m} = 125 \text{ km}$ . Ou seja, 2,5 cm no mapa correspondem a 125 km na realidade.

As escalas estão diretamente ligadas aos estudos da Geografia (na construção de mapas), na Engenharia e na Arquitetura (maquetes e plantas), Navegação Marítima e Aérea, entre outras situações referentes à localização de coordenadas e cálculo de distâncias através de mapas referenciais.

Muito cuidado! Quando uma questão do ENEM trazer uma escala da forma  $a : b$ ,  $a$  e  $b$  sempre representarão medidas lineares (comprimento, largura, profundidade, ...), não serão portanto, medidas de superfície (área) ou medidas volumétricas (volume, massa, ...).

Vou te apresentar um esquema de como transitar entre as escalas lineares, de superfície e volumétricas:



Sempre que a informação vier na escala linear e a pergunta for linear, você pode aplicar a regra de três simples e tudo vai dar certo!

Se a informação for linear mas a pergunta for sobre áreas, você deve elevar a informação linear ao quadrado, pois a variação na área é o quadrado da variação dos comprimentos. Já se a informação for sobre área e for pedido algo linear, você deve extrair a raiz quadrada da informação, para que você obtenha algo relacionado aos comprimentos.

Do mesmo modo, se a informação for linear mas a pergunta for sobre volume, você deve elevar a informação linear ao cubo, pois a variação no volume é o cubo da variação dos comprimentos. Já se a informação for sobre volume e for pedido algo linear, você deve extrair a raiz cúbica da informação, para que você obtenha algo relacionado aos comprimentos.

Vamos dar uma olhada em como funcionam as escalas e o que precisamos fazer para resolver as questões:

(IFSP 2016) Um mapa tem como escala a indicação 1:1.500.000. Nesse mapa, uma distância, em linha reta, de exatos 180 quilômetros reais entre duas cidades A e B é representado por um segmento de reta que, em centímetros, mede:

- A 12,00
- B 2,70
- C 27,00
- D 0,12
- E 1,20

### SOLUÇÃO

Perceba que a escala 1:1.500.000 refere-se à medidas lineares, nesse caso, comprimento. Isso quer dizer que cada cm do mapa corresponde a 1.500.000 cm na realidade.

É importante perceber que 1.500.000 cm = 15.000 m = 15 km, ou seja, cada cm no mapa corresponde a 15 km na realidade. Aplicando uma regra de três, temos:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \text{ ----- } 15 \text{ km} \\ x \text{ ----- } 180 \text{ km} \end{array}$$

$$15x = 180$$

$$x = 12 \text{ cm}$$

A regra de três foi aplicada no exemplo anterior, pois a informação foi linear e a pergunta também! No entanto, é possível que o ENEM nos traga questões de escala que envolvem perguntas relacionadas a medidas de superfície (área) tendo dado informações lineares. Nesse caso, as contas são um pouquinho diferentes, observe:

(UFRGS 2001) A planta de um terreno foi feita na escala 1:500. Se, na planta, o terreno tem área de 10 cm<sup>2</sup>, sua área real, em metros quadrados, é

- A 25
- B 50
- C 100
- D 250
- E 500

### SOLUÇÃO

Perceba que a escala 1:500 refere-se à medidas lineares (comprimento, largura, profundidade, ...) mas não à área.

Essa escala garante que cada cm na planta do terreno corresponde a 500 cm na realidade e, por conseguinte, que 10 cm na planta correspondem a 5.000 cm na realidade, mas isso não responde a nossa questão. Uma vez que cm não é unidade de área. Devemos partir da escala linear para obter uma escala de superfície.

Se 1 cm na planta corresponde a 500 cm na realidade, elevaremos ambos os membros ao quadrado e teremos:

$$\begin{aligned}(1 \text{ cm})^2 &\rightarrow (500 \text{ cm})^2 \\ 1 \text{ cm}^2 &\rightarrow 250.000 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

A escala linear 1:500 indica que para cada cm na planta, temos 500 cm na realidade, mas também indica que para cada cm<sup>2</sup> de área na planta, temos 250.000 cm<sup>2</sup> na realidade.

Agora, após transformarmos a escala linear em escala de superfície, podemos aplicá-la à questão:

$$\begin{aligned}1 \text{ cm}^2 &\rightarrow 250.000 \text{ cm}^2 \\ 10 \text{ cm}^2 &\rightarrow x \\ x &= 2.500.000 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Ainda não chegamos à resposta, pois desejamos saber a área real em metros quadrados.

Como 100 cm = 1 m, elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}(100 \text{ cm})^2 &= (1 \text{ m})^2 \\ 10.000 \text{ cm}^2 &= 1 \text{ m}^2\end{aligned}$$

Já que encontramos  $x = 2.500.000 \text{ cm}^2$ , basta dividirmos por 10.000 ou cancelar 4 zeros que encontraremos o valor em m<sup>2</sup>.

$$\frac{2.500.000}{10.000} = 250$$

$$10 \text{ cm}^2(\text{planta}) \rightarrow 250 \text{ m}^2(\text{realidade})$$

Alternativa D.

Perceba que para sair de uma escala linear para uma escala de superfície, tivemos que elevar ao quadrado o numerador e o denominador. Analogamente, para sair de uma escala linear para uma escala volumétrica, devemos elevar a escala linear ao cubo.

Vejamos uma questão envolvendo uma pergunta volumétrica, com uma informação linear:

(ENEM 2014) O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1:100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3cm, 1cm e 2cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será

- A 6
- B 600
- C 6.000
- D 60.000
- E 6.000.000

### SOLUÇÃO

A escala 1:100 indica que cada cm no projeto corresponde a 100 cm na realidade, no entanto, deseja-se encontrar o volume do armário. Para que possamos relacionar a escala com grandezas volumétricas, precisamos elevá-la ao cubo.

$$\begin{aligned}(1 \text{ cm})^3 &\rightarrow (100 \text{ cm})^3 \\ 1 \text{ cm}^3 &\rightarrow 1.000.000 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Agora sim, podemos relacionar as grandezas volumétricas.

Veja que o volume do armário, no projeto, é  $V = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}^3$ .

Mas, sabemos que cada  $1 \text{ cm}^3$  do projeto corresponde a  $1.000.000 \text{ cm}^3$  na realidade. Então,  $6 \text{ cm}^3$ , no projeto, serão equivalentes a  $6.000.000 \text{ cm}^3$ , na realidade.

Alternativa E.

Está pronto para exercitar os seus conhecimentos sobre escala? Vamos lá!

**QUESTÕES - ESCALAS**

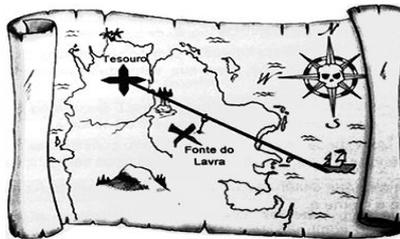
107. (Enem 2018) Uma empresa de comunicação tem a tarefa de elaborar um material publicitário de um estaleiro para divulgar um novo navio, equipado com um guindaste de 15 m de altura e uma esteira de 90 m de comprimento. No desenho desse navio, a representação do guindaste deve ter sua altura entre 0,5 cm e 1 cm, enquanto a esteira deve apresentar comprimento superior a 4 cm. Todo o desenho deverá ser feito em uma escala 1: X.

Os valores possíveis para X são, apenas,

- A  $X > 1.500$ .
- B  $X < 3.000$ .
- C  $1.500 < X < 2.250$ .
- D  $1.500 < X < 3.000$ .
- E  $2.250 < X < 3.000$ .

108. (Enem 2018) Um mapa é a representação reduzida e simplificada de uma localidade. Essa redução, que é feita com o uso de uma escala, mantém a proporção do espaço representado em relação ao espaço real.

Certo mapa tem escala 1: 58.000.000.



Disponível em: <http://oblogdedaynabright.blogspot.com.br>. Acesso em: 9 ago. 2012.

Considere que, nesse mapa, o segmento de reta que liga o navio à marca do tesouro meça 7,6 cm.

A medida real, em quilômetro, desse segmento de reta é

- A 4.408.
- B 7.632.
- C 44.080.
- D 76.316.
- E 440.800.

109. (Enem PPL 2017) No centro de uma praça será construída uma estátua que ocupará um terreno quadrado com área de 9 metros quadrados. O executor da obra percebeu que a escala do desenho na planta baixa do projeto é de 1: 25.

Na planta baixa, a área da figura que representa esse terreno, em centímetro quadrado, é

- A 144.
- B 225.
- C 3.600.
- D 7.500.
- E 32.400.

110. (Enem (Libras) 2017) Uma competição automobilística prevê a realização de uma viagem entre as cidades X e Y, com uma parada na cidade intermediária Z, onde os competidores passarão a noite. O navegador de uma equipe decide fazer um mapa contendo uma rota que passa por essas três cidades. Nesse mapa é utilizada uma escala tal que a distância entre as cidades X e Z é de 12 centímetros, e a distância entre as cidades Z e Y é de 18 centímetros. Sabe-se que a distância real de X a Y é de 870 quilômetros, e que as três cidades são representadas, no mapa, ao longo de uma mesma linha reta.

A distância de X a Z, em quilômetros, é igual a

- A 290.
- B 348.
- C 435.
- D 522.
- E 580.

111. (Enem PPL 2017) Numa tarefa escolar, um aluno precisava fazer a planta baixa de sua casa em uma escala 1:40. Ele verificou que a base da casa era retangular, tendo 12 metros de comprimento e 8 metros de largura. O aluno foi a uma papelaria e lá observou que havia cinco tipos de folhas de papel, todas com diferentes dimensões. O quadro contém os cinco tipos de folhas, com seus comprimentos e larguras fornecidos em centímetro.

| Folha de papel | Comprimento | Largura |
|----------------|-------------|---------|
| Tipo I         | 16          | 12      |
| Tipo II        | 30          | 20      |
| Tipo III       | 32          | 22      |
| Tipo IV        | 34          | 24      |
| Tipo V         | 48          | 32      |

O aluno analisou os cinco tipos de folha e comprou a que possuía as dimensões mínimas necessárias para que ele fizesse a planta de sua casa na escala desejada, deixando exatamente 2 centímetros de margem em cada um dos quatro lados da folha.

A folha escolhida pelo aluno foi a de tipo

- A I.
- B II.
- C III.
- D IV.
- E V.

112. (Enem PPL 2017) Uma equipe de ambientalistas apresentou um mapa de uma reserva ambiental em que faltava a especificação da escala utilizada para a sua confecção. O problema foi resolvido, pois um dos integrantes da equipe lembrava-se de que a distância real de 72 km, percorrida na reserva, equivalia a 3,6 cm no mapa.

Qual foi a escala utilizada na confecção do mapa?

- A 1:20
- B 1:2.000
- C 1:20.000
- D 1:200.000
- E 1:2.000.000

113. (Enem 2017) Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1:400, e que seu volume é de  $25 \text{ cm}^3$ .

O volume do monumento original, em metro cúbico, é de

- A** 100.
- B** 400.
- C** 1.600.
- D** 6.250.
- E** 10.000.

114. (Enem 2016) Em uma empresa de móveis, um cliente encomenda um guarda-roupa nas dimensões 220 cm de altura, 120 cm de largura e 50 cm de profundidade. Alguns dias depois, o projetista, com o desenho elaborado na escala 1:8, entra em contato com o cliente para fazer sua apresentação. No momento da impressão, o profissional percebe que o desenho não caberia na folha de papel que costumava usar. Para resolver o problema, configurou a impressora para que a figura fosse reduzida em 20%.

A altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente,

- A** 22,00 cm, 12,00 cm e 5,00 cm.
- B** 27,50 cm, 15,00 cm e 6,50 cm.
- C** 34,37 cm, 18,75 cm e 7,81 cm.
- D** 35,20 cm, 19,20 cm e 8,00 cm.
- E** 44,00 cm, 24,00 cm e 10,00 cm.

115. (Enem 2ª aplicação 2016) Num mapa com escala 1:250.000, a distância entre as cidades A e B é de 13 cm. Num outro mapa, com escala 1:300.000, a distância entre as cidades A e C é de 10 cm. Em um terceiro mapa, com escala 1:500.000, a distância entre as cidades A e D é de 9 cm. As distâncias reais entre a cidade A e as cidades B, C e D são, respectivamente, iguais a X, Y e Z (na mesma unidade de comprimento).

As distâncias X, Y e Z, em ordem crescente, estão dadas em

- A** X, Y, Z.
- B** Y, X, Z.
- C** Y, Z, X.
- D** Z, X, Y.
- E** Z, Y, X.

116. (Enem PPL 2016) Em um mapa cartográfico, cuja escala é 1:30.000, as cidades A e B distam entre si, em linha reta, 5 cm. Um novo mapa, dessa mesma região, será construído na escala 1:20.000.

Nesse novo mapa cartográfico, a distância em linha reta entre as cidades A e B, em centímetro, será igual a

- A** 1,50.
- B** 3,33.
- C** 3,50.
- D** 6,50.
- E** 7,50.

117. (Enem PPL 2016) Um motorista partiu da cidade A em direção à cidade B por meio de uma rodovia retilínea localizada em uma planície. Lá chegando, ele percebeu que a distância percorrida nesse trecho foi de 25 km. Ao consultar um mapa com o auxílio de uma régua, ele verificou que a distância entre essas duas cidades, nesse mapa, era de 5 cm.

A escala desse mapa é

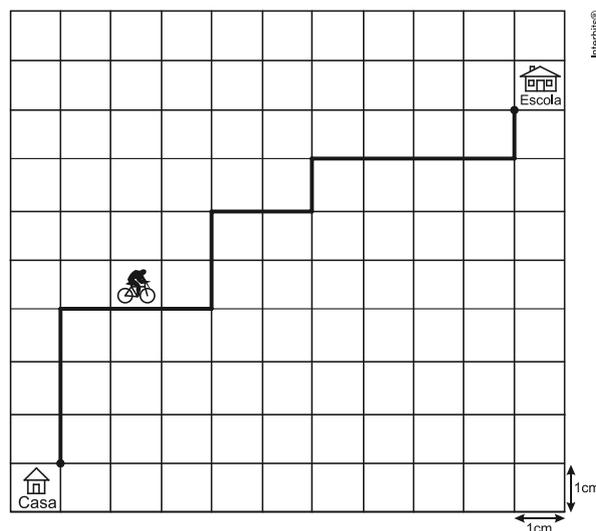
- A 1: 5
- B 1: 1000
- C 1: 5000
- D 1: 100000
- E 1: 500000

118. (Enem PPL 2015) Na construção de um conjunto habitacional de casas populares, todas serão feitas num mesmo modelo, ocupando, cada uma delas, terrenos cujas dimensões são iguais a 20 m de comprimento por 8 m de largura. Visando a comercialização dessas casas, antes do início das obras, a empresa resolveu apresentá-las por meio de maquetes construídas numa escala de 1: 200.

As medidas do comprimento e da largura dos terrenos, respectivamente, em centímetros, na maquete construída, foram de

- A 4 e 10.
- B 5 e 2.
- C 10 e 4.
- D 20 e 8.
- E 50 e 20.

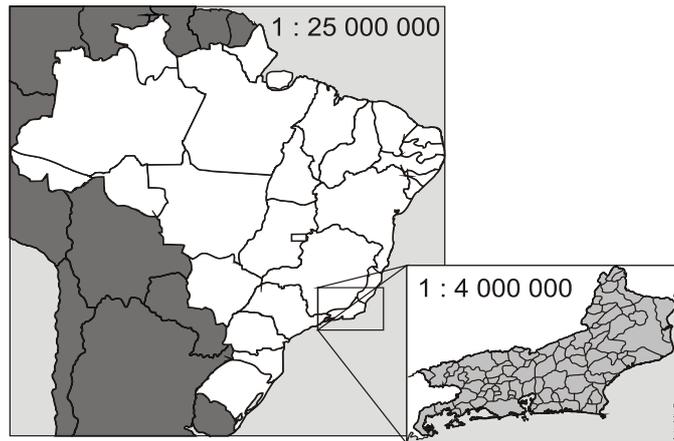
119. (Enem 2013) A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola. Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura, na escala 1: 25000, por um período de cinco dias.



Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?

- A 4
- B 8
- C 16
- D 20
- E 40

120. (Enem 2013) A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.



Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil.

Esse número é

- A menor que 10.
- B maior que 10 e menor que 20.
- C maior que 20 e menor que 30.
- D maior que 30 e menor que 40.
- E maior que 40.

121. (Enem PPL 2013) Em um folheto de propaganda foi desenhada uma planta de um apartamento medindo  $6\text{ m} \times 8\text{ m}$ , na escala 1:50. Porém, como sobrou muito espaço na folha, foi decidido aumentar o desenho da planta, passando para a escala 1:40.

Após essa modificação, quanto aumentou, em  $\text{cm}^2$ , a área do desenho da planta?

- A 0,0108
- B 108
- C 191,88
- D 300
- E 43 200

122. (Enem PPL 2013) **Vulcão Puyehue transforma a paisagem de cidades na Argentina**

Um vulcão de 2 440 m de altura, no Chile, estava “parado” desde o terremoto em 1960. Foi o responsável por diferentes contratemplos, como atrasos em viagens aéreas, por causa de sua fumaça. A cidade de Bariloche foi uma das mais atingidas pelas cinzas.

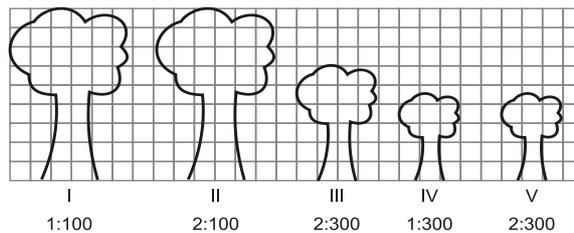
Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 25 jun. 2011 (adaptado).

Na aula de Geografia de determinada escola, foram confeccionadas pelos estudantes maquetes de vulcões, a uma escala 1 : 40 000. Dentre as representações ali produzidas, está a do Puyehue, que, mesmo sendo um vulcão imenso, não se compara em estatura com o vulcão Mauna Loa, que fica no Havaí, considerado o maior vulcão do mundo, com 12 000 m de altura.

Comparando as maquetes desses dois vulcões, qual a diferença, em centímetros, entre elas?

- A 1,26
- B 3,92
- C 4,92
- D 20,3
- E 23,9

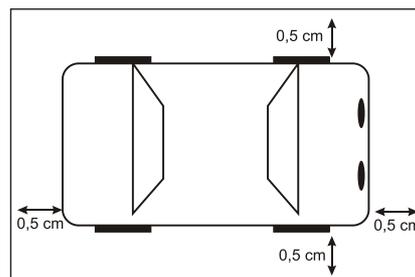
123. (Enem 2012) Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.



Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

- A I
- B II
- C III
- D IV
- E V

124. (Enem PPL 2012) Um jornaleiro irá receber 21 revistas. Cada uma terá um carrinho na escala de 1:43 do tamanho real acompanhando-a em caixinha à parte. Os carrinhos são embalados com folga de 0,5 cm nas laterais, como indicado na figura. Assim, o jornaleiro reservou três prateleiras com 95 cm de comprimento por 7 cm de largura, onde as caixas serão acomodadas de forma a caberem inteiramente dentro de cada prateleira. Além disso, sabe-se que os carrinhos são cópias dos modelos reais que possuem 387 cm de comprimento por 172 cm de largura.



Quantos carrinhos, no máximo, cabem em cada uma das prateleiras?

- A 2
- B 3
- C 7
- D 9
- E 10

125. (Enem 2012) O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: Qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas.

Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

Disponível em: <http://veja.abril.com.br>. Acesso em 25 jun. 2011 (adaptado)

Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e a percorrida pelo atleta?

- A 1:700
- B 1:7 000
- C 1:70 000
- D 1:700 000
- E 1:7 000 000

126. (Enem 2011) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm.

Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de

- A 1:250.
- B 1:2500.
- C 1:25000.
- D 1:250000.
- E 1:25000000.

127. (Enem 2011) Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250.

Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

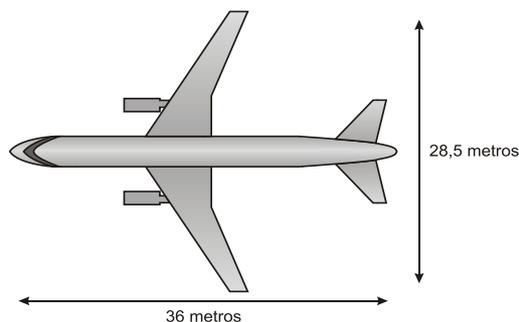
- A 4,8 e 11,2
- B 7,0 e 3,0
- C 11,2 e 4,8
- D 28,0 e 12,0
- E 30,0 e 70,0

128. (Enem 2ª aplicação 2010) As Olimpíadas de 2016 serão realizadas na cidade do Rio de Janeiro. Uma das modalidades que trazem esperanças de medalhas para o Brasil é a natação. Aliás, a piscina olímpica merece uma atenção especial devido as suas dimensões. Piscinas olímpicas têm 50 metros de comprimento por 25 metros de largura.

Se a piscina olímpica fosse representada em uma escala de 1:100, ela ficaria com as medidas de

- A 0,5 centímetro de comprimento e 0,25 centímetro de largura.
- B 5 centímetros de comprimento e 2,5 centímetros de largura.
- C 50 centímetros de comprimento e 25 centímetros de largura.
- D 500 centímetros de comprimento e 250 centímetros de largura.
- E 200 centímetros de comprimento e 400 centímetros de largura.

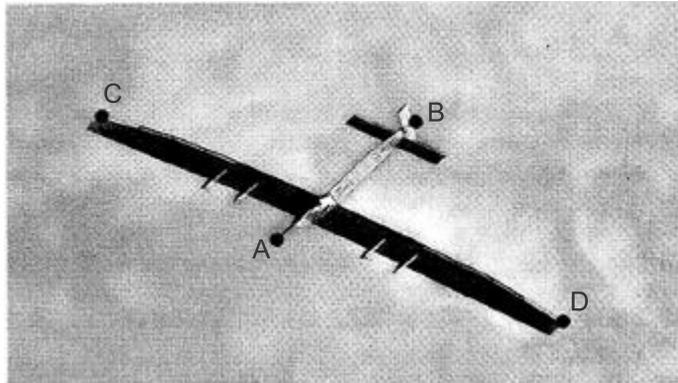
129. (Enem 2009) A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1:150.



Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?

- A 2,9 cm × 3,4 cm.
- B 3,9 cm × 4,4 cm.
- C 20 cm × 25 cm.
- D 21 cm × 26 cm.
- E 192 cm × 242 cm.

130. (Enem 2ª aplicação 2016) Uma empresa europeia construiu um avião solar, como na figura, objetivando dar uma volta ao mundo utilizando somente energia solar. O avião solar tem comprimento  $AB$  igual a 20 m e uma envergadura de asas  $CD$  igual a 60 m.



Para uma feira de ciências, uma equipe de alunos fez uma maquete desse avião. A escala utilizada pelos alunos foi de 3 : 400.

A envergadura  $CD$  na referida maquete, em centímetro, é igual a

- A** 5.
- B** 20.
- C** 45.
- D** 55.
- E** 80.

### GABARITO

| Questão Alternativa |   |
|---------------------|---|
| 01                  | E |
| 02                  | E |
| 03                  | A |
| 04                  | C |
| 05                  | D |
| 06                  | D |
| 07                  | B |
| 08                  | D |
| 09                  | B |
| 10                  | C |
| 11                  | B |
| 12                  | D |
| 13                  | B |
| 14                  | B |
| 15                  | C |
| 16                  | A |
| 17                  | C |
| 18                  | B |
| 19                  | E |
| 20                  | E |
| 21                  | C |
| 22                  | B |
| 23                  | E |
| 24                  | D |
| 25                  | D |
| 26                  | B |
| 27                  | A |
| 28                  | A |
| 29                  | C |
| 30                  | C |
| 31                  | E |
| 32                  | E |
| 33                  | B |
| 34                  | E |
| 35                  | E |
| 36                  | A |
| 37                  | C |
| 38                  | E |
| 39                  | D |
| 40                  | C |
| 41                  | C |
| 42                  | A |
| 43                  | B |

|    |   |
|----|---|
| 44 | A |
| 45 | A |
| 46 | C |
| 47 | C |
| 48 | E |
| 49 | E |
| 50 | D |
| 51 | D |
| 52 | C |
| 53 | B |
| 54 | B |
| 55 | B |
| 56 | B |
| 57 | B |
| 58 | B |
| 59 | B |
| 60 | D |
| 61 | C |
| 62 | C |
| 63 | E |
| 64 | C |
| 65 | C |
| 66 | B |
| 67 | A |
| 68 | C |
| 69 | C |
| 70 | A |
| 71 | B |
| 72 | D |
| 73 | C |
| 74 | B |
| 75 | B |
| 76 | C |
| 77 | B |
| 78 | B |
| 79 | B |
| 80 | C |
| 81 | A |
| 82 | D |
| 83 | B |
| 84 | D |
| 85 | E |
| 86 | E |
| 87 | A |

|     |         |
|-----|---------|
| 88  | A       |
| 89  | D       |
| 90  | A       |
| 91  | D       |
| 92  | B       |
| 93  | B       |
| 94  | D       |
| 95  | E       |
| 96  | B       |
| 97  | A       |
| 98  | A       |
| 99  | C       |
| 100 | A       |
| 101 | E       |
| 102 | D       |
| 103 | 6min40s |
| 104 | B       |
| 105 | 8h      |
| 106 | C       |
| 107 | C       |
| 108 | A       |
| 109 | A       |
| 110 | B       |
| 111 | D       |
| 112 | E       |
| 113 | C       |
| 114 | A       |
| 115 | B       |
| 116 | E       |
| 117 | E       |
| 118 | C       |
| 119 | E       |
| 120 | D       |
| 121 | B       |
| 122 | E       |
| 123 | D       |
| 124 | D       |
| 125 | D       |
| 126 | E       |
| 127 | C       |
| 128 | C       |
| 129 | D       |
| 130 | C       |



# PORCENTAGEM



**A**NDERSON  
MATEMÁTICA



## PORCENTAGEM

### INTRODUÇÃO

Também chamada de razão centesimal, a porcentagem é constituída por uma fração cujo denominador é 100. Para representá-la, utilizamos o símbolo % (por cento). Alguns acreditam que esse símbolo teria evoluído da razão  $\frac{x}{100}$ , enquanto outros sugerem que o % evoluiu da escrita da expressão latina “per centum”:



Independente do caminho, se escrevemos 40% “quarenta por cento”, queremos significar quarenta a cada cem, quarenta em cem, ou ainda quarenta centésimos.

É muito importante que saibamos representar porcentagens de diversas formas, dentre elas, destacam-se a percentual, fracionária, decimal e geométrica. A seguir, acompanhe alguns exemplos:

| Percentual | Fracionária                     | Decimal | Geométrica |
|------------|---------------------------------|---------|------------|
| 5%         | $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$  | 0,05    |            |
| 10%        | $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ | 0,10    |            |
| 25%        | $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$  | 0,25    |            |
| 50%        | $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$  | 0,50    |            |
| 75%        | $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$  | 0,75    |            |
| 100%       | $\frac{100}{100}$               | 1       |            |

Já que conhecemos as representações, como calcular uma porcentagem de um número? Podemos optar pelo forma fracionária ou pela forma decimal, lembrando que para calcular uma porcentagem de um número, basta multiplicarmos a forma decimal da porcentagem pelo número ou ainda, basta multiplicarmos a forma fracionária pelo número.

Observe:

- Quanto é 30% de 16?

Podemos usar a representação decimal para fazer a conta: 30% de 16 =  $0,3 \cdot 16 = 4,8$  ou podemos também, usar a representação fracionária  $\frac{30}{100} \cdot 16 = \frac{480}{100} = 4,8$ , o que nos confirma que 30% de 16 é igual a 4,8.

- Quanto é 70% de 50?

Podemos usar a representação decimal 70% de 50 =  $0,7 \cdot 50 = 35$  ou a fracionária  $\frac{70}{100} \cdot 50 = \frac{3500}{100} = 35$ , ambas nos mostram que 70% de 50 é igual a 35.

- Quanto é 100% de 22?

Usando a representação decimal, temos 100% de 22 =  $1 \cdot 22 = 22$ , usando a fracionária, temos  $\frac{100}{100} \cdot 22 = \frac{2200}{100} = 22$ , ambas confirmam que 100% de 22 é igual a 22.

- Quanto é 150% de 500?

Usando a representação decimal, temos 150% de 500 =  $1,5 \cdot 500 = 750$ , usando a fracionária, temos  $\frac{150}{100} \cdot 500 = \frac{75000}{100} = 750$ , ambas nos levam ao resultado de que 150% de 500 é igual a 750.

Nos exemplos acima, calculamos uma porcentagem de um número, mas você sabe dizer quantos por cento uma quantia representa quando comparada com outra?

- 18 corresponde a quantos por cento de 20?

Para saber a quantos por cento de 20 o 18 corresponde, basta dividirmos 18 por 20, a resposta para essa divisão provavelmente estará na representação decimal, que facilmente pode ser convertida nas demais representações;

$$\frac{18}{20} = 0,9 = 90\%$$

Portanto, 18 corresponde a 90% de 20.

- 7 corresponde a quantos por cento de 28?

Divida 7 por 28,  $\frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$ . Daí, 7 corresponde a 25% de 28.

- 72 corresponde a quantos por cento de 40?

$\frac{72}{40} = \frac{18}{10} = 1,8 = 180\%$ , 72 corresponde a 180% de 40.

E se um número for dado, juntamente com sua porcentagem correspondente, você seria capaz de descobrir o total original?

- Givaldo mensalmente gasta 20% do seu salário comprando roupas, se esse mês ele gastou R\$ 250,00 com vestimentas, qual o valor do seu salário?

Comumente usamos uma regra de três para chegar no salário original, 20% corresponde a R\$250,00, e 100% a quanto corresponderia?

$$\begin{array}{l} 20\% \longrightarrow 250 \\ 100\% \longrightarrow x \end{array}$$

$$X \cdot \cancel{20\%} = \cancel{100\%} \cdot 250$$

$$X = 5 \cdot 250$$

$$x = 1250$$

Portanto, o salário total que Givaldo recebe é R\$ 1.250,00, e se calcularmos 20% de R\$ 1.250,00, obteremos R\$ 250,00, que exatamente a quantia que ele gasta com vestuário.

É importante que você se sinta confortável com os exemplos acima para que possamos avançar para os aumentos e reduções.

Existem três tipos de aumentos, simples, simultâneos e sucessivos.

### Aumento Simples

Um aumento recebe o nome de simples quando o aumento é único e é dado sobre um único referencial, chamado de valor inicial. Por exemplo:

- A inflação fez o valor da cesta básica que era de R\$ 400,00 subir 10%. Após esse aumento, quanto deverá ser pago pela cesta?

O aumento é simples, pois só há um aumento de 10% que só é dado uma única vez e pronto. Geralmente, as pessoas calculam primeiro o valor do aumento que é 10% de R\$ 400,00. O aumento será de  $0,10 \times 400 = 40$ . Logo, a cesta aumentará R\$ 40,00 e passará a custar R\$ 440,00.

No entanto, a nossa proposta é utilizar o fator multiplicativo para agilizar o processo de cálculo para aumentos simples. Mas o que é fator multiplicativo? O nome já é bem intuitivo, fator é cada componente de um produto, multiplicativo vem de multiplicação, a ideia é encontrar um número que ao multiplicar por R\$ 400,00 chegue ao valor de R\$ 440,00. E como vamos encontrar esse fator multiplicativo?

Qualquer que seja o valor  $x$ , para aumentarmos 10%, fazemos assim:

$$x + 10\% \text{ de } x = x + 0,1 \cdot x = 1,1x$$

Ou seja, aumentar 10% em  $x$ , equivale a multiplicar  $x$  por 1,1. Dizemos então que 1,1 é o fator multiplicativo responsável por um aumento de 10%.

Voltemos para os R\$ 400,00, se queremos aumentar 10% em R\$ 400,00, basta multiplicarmos R\$ 400,00 por 1,1.

$$R\$ 400,00 \times 1,1 = R\$ 440,00$$

O ponto chave em aumentos simples é o fator multiplicativo, vamos nos familiarizar um pouco mais com esse fator, para que possamos passear por mais exemplos.

- Qual o fator multiplicativo associado a um aumento de 20%?  
Sempre iniciamos com 100%, quando aumentamos 20%, ficamos com 120% que na forma decimal será representado por  $120\% = 120/100 = 1,2$ . Ou seja, para aumentar 20%, basta multiplicarmos por 1,2. Dizemos então, que 1,2 é o fator multiplicativo associado a um aumento de 20%.

- Qual o fator multiplicativo associado a um aumento de 35%

Sempre iniciamos com 100%, quando aumentamos 35%, ficamos com 135% que na forma decimal será representado por  $135\% = 135/100 = 1,35$ . Ou seja, para aumentar 35%, basta multiplicarmos por 1,35. Dizemos então que 1,35 é o fator multiplicativo associado a um aumento de 35%.

Vamos organizar alguns fatores em uma tabela para que você possa consolidar o aprendizado:

| Aumento Simples | Fator Multiplicativo               |
|-----------------|------------------------------------|
| + 5%            | $100\% + 5\% = 105\% = 1,05$       |
| + 50%           | $100\% + 50\% = 150\% = 1,5$       |
| + 92%           | $100\% + 92\% = 192\% = 1,92$      |
| + 18,5%         | $100\% + 18,5\% = 118,5\% = 1,185$ |
| + 100%          | $100\% + 100\% = 200\% = 2$        |
| + 140%          | $100\% + 140\% = 240\% = 2,4$      |
| + 300%          | $100\% + 300\% = 400\% = 4$        |

Que tal se invertêssemos a ordem? Agora vamos ter acesso primeiramente ao fator multiplicativo para descobrirmos de quantos por cento é o aumento! Lembre-se que sempre começamos com 100%, então o aumento é o que passar de 100%.

| Fator Multiplicativo | Aumento Simples          |
|----------------------|--------------------------|
| 1                    | 1 = 100% = + 0%          |
| 1,25                 | 1,25 = 125% = + 25%      |
| 1,07                 | 1,07 = 107% = + 7%       |
| 1,456                | 1,456 = 145,6% = + 45,6% |
| 2,8                  | 2,8 = 280% = + 180%      |
| 5                    | 5 = 500% = + 400%        |
| 9,1                  | 9,1 = 910% = + 810%      |

Vamos ver mais alguns exemplos de aumentos simples para utilizarmos os fatores multiplicativos?

• Arimateia deseja comprar um celular que custava R\$ 2.500,00, porém a alta do dólar fez o valor do celular subir 24%, qual o novo valor a ser pago?

Primeiro, precisamos do fator multiplicativo associado a um aumento de 24%, que é 1,24. Basta multiplicarmos 2.500 por 1,24, e para tanto, utilizaremos a técnica “dobrar, meiar”, em que dobramos e um número e meiamos o outro e o resultado permanece sendo o mesmo.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{2500}_{\text{dobrar}} \times \underbrace{1,24}_{\text{meiar}} = \\
 & = \underbrace{5000}_{\text{dobrar}} \times \underbrace{0,62}_{\text{meiar}} \\
 & = 10000 \times 0,31 \\
 & = 3100
 \end{aligned}$$

Logo, um aumento de 24% em 2500 o transforma em 3100, daí, Arimateia precisará pagar R\$ 3.100,00 pelo celular.

Em geral, o aumento simples parte de uma valor inicial  $V_i$  e através da multiplicação pelo fator multiplicativo  $f_m$  o transforma em um valor final  $V_f$ .

No exemplo anterior, o valor inicial era 2500, o fator multiplicativo era 1,24 e o valor final era 3500. Uma só multiplicação deve ser feita para que saibamos o efeito do aumento simples:

$$V_i \times f_m = V_f$$

Normalmente, dois valores desta expressão são fornecidos para que possamos encontrar o terceiro. Vamos praticar um pouco o uso desta expressão:

• Após ter sofrido um aumento de 30%, Sâmia pagou R\$ 390,00 em uma bolsa. Qual o valor dessa bolsa antes do aumento?

Nesse exemplo, queremos saber o valor inicial da bolsa, temos o fator multiplicativo associado a um aumento de 30% que é 1,3 e temos o valor final que é 390. Logo:

$$V_i \times f_m = V_f \rightarrow V_i \times 1,3 = 390 \rightarrow V_i = \frac{390}{1,3} \rightarrow V_i = 300$$

Então, o valor da bolsa era R\$ 300,00 antes do aumento. Você precisa se familiarizar com a utilização dessa expressão para ter velocidade de resolução.

• Fernando foi ao posto de gasolina e abasteceu pagando R\$ 4,50 por litro de gasolina, quando foi reabastecer, o litro já custava R\$ 4,95, de quantos por cento foi o aumento?

Já nesse exemplo, temos o valor inicial R\$ 4,50 e o valor final R\$ 4,95, mas não temos o fator multiplicativo, vamos usar a expressão para encontrá-lo:

$$V_i \times f_m = V_f \rightarrow 4,50 \times f_m = 4,95 \rightarrow f_m = \frac{4,95}{4,50} \rightarrow f_m = 1,1$$

Um fator multiplicativo de 1,1 corresponde a um aumento de 10%.

### Aumentos Simultâneos

Os aumentos simultâneos são constituídos por mais de um aumento, os quais incidem sempre sobre o mesmo referencial!

Suponha que o preço de venda do litro da gasolina seja calculado tomando como base o preço de custo na distribuidora que é de R\$ 2,00. Além de pagar os R\$ 2,00 à distribuidora, 50% do preço de custo devem ser pagos ao governo, em forma de imposto, mais 30% do preço de custo devem ser reservados para manter funcionamento do posto, e outros 40% do preço de custo devem ser o lucro do posto, sendo assim, qual deve ser o valor de venda para que os percentuais propostos sejam satisfeitos?

Veja que todos os percentuais propostos atuam sobre o mesmo referencial que é o preço de custo...

Os 50% que devem ser pagos ao governo correspondem a  $0,5 \cdot 2 = \text{R\$ } 1,00$ ;

Os 30% que devem manter o funcionamento do posto correspondem a  $0,3 \cdot 2 = \text{R\$ } 0,60$ ;

Os 40% que devem ser o lucro correspondem a  $0,4 \cdot 2 = \text{R\$ } 0,80$ .

O preço de venda da gasolina deve ser  $\text{R\$ } 2,00 + \text{R\$ } 1,00 + \text{R\$ } 0,60 + \text{R\$ } 0,80 = \text{R\$ } 4,40$ .

Será que existe uma maneira mais simples para calcularmos esses aumentos? Sim! Como todos os aumentos são dados sobre o mesmo referencial, podemos somar todos os percentuais e transformá-los em um só aumento, fazendo que todos os aumentos juntos se comportem como um aumento simples e só assim poderemos aplicar o fator multiplicativo.

$50\% + 30\% + 40\% = 120\%$ , um aumento de 120% necessita de um fator multiplicativo de 2,2, então basta multiplicar o preço de custo por 2,2 e obteremos o preço de venda!

$\text{R\$ } 2,00 \cdot 2,2 = \text{R\$ } 4,40$ .

Em aumentos simultâneos, que todos os percentuais são aplicados sobre o mesmo referencial, você deve somar todos os percentuais e aplicar um aumento só com o fator multiplicativo correspondente à soma de todos os percentuais.

Os aumentos de salário que a polícia militar recebe são sempre calculados sobre o soldo e nunca sobre as gratificações, na verdade, todo aumento vira gratificação, e isso é uma estratégia para que a população pense que os percentuais de aumento são bem maiores. O soldo de um policial permanece o mesmo, do dia que entrou na corporação até sua aposentadoria.

Considere um soldado que ganhe R\$ 2.100,00, dos quais, R\$ 800,00 constituem o soldo e R\$ 1.300,00 sejam de gratificação.

Após receber 5% de aumento, seu salário passa a ser  $\text{R\$ } 2.100,00 + 5\% \text{ de } \text{R\$ } 800,00 = \text{R\$ } 2.100,00 + \text{R\$ } 40,00 = \text{R\$ } 2.140,00$ , pois  $5\% \text{ de } \text{R\$ } 800,00 = 0,05 \cdot 800 = 40$ , sendo que o soldo continua sendo R\$ 800,00 e agora passa a receber R\$ 1.340,00 de gratificação.

Depois deste aumento de 5%, deve seu salário reajustado em mais 10%, perceba que esse aumento de 10% ainda atua sobre o mesmo referencial de R\$ 800,00, afinal, todo aumento dado é calculado sobre o soldo que é sempre constante.  $10\% \text{ de } R\$ 800,00 = 0,1 \cdot 800 = 80$ . O salário passa a ser  $R\$ 2.140,00 + 10\% \text{ de } R\$ 800,00 = R\$ 2.140,00 + R\$ 80,00 = R\$ 2.220,00$ .

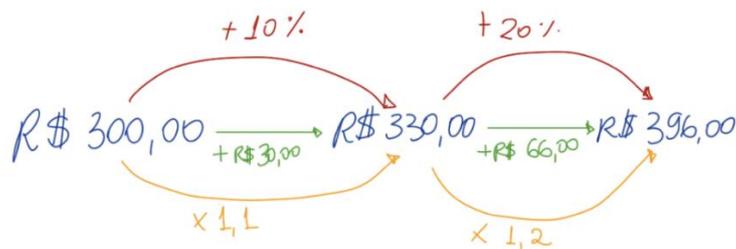
Após uma análise cuidadosa dessa situação, perceba que todo aumento é dado sobre o mesmo referencial que é de R\$ 800,00, por isso, esses aumentos são caracterizados como sendo simultâneos. E por isso, podemos somar os percentuais para aplicar de uma vez só,  $5\% + 10\% = 15\%$ , cujo fator multiplicativo é 1,15. Portanto,  $R\$ 800 \cdot 1,15 = R\$ 920,00$ , quando somamos aos R\$ 1.300,00 de gratificações, temos R\$ 2.220,00 que é o valor total após os aumentos.

### Aumentos Sucessivos

Os aumentos sucessivos constituídos por mais de um aumento, com todos os percentuais aplicados sobre os percentuais acumulados anteriores. Atente para a diferença básica entre os simultâneos e os sucessivos, enquanto que nos simultâneos os percentuais sempre atuam sobre o mesmo referencial, nos sucessivos eles atuam sobre referenciais distintos, o que não nos permite somar tudo para aplicar de uma vez. A soma dá certo nos simultâneos porque tudo é aplicado sobre o mesmo valor, já nos sucessivos cada aplicação é feita sobre um valor diferente.

E como calcular esses aumentos sucessivos? Vamos te mostrar em um exemplo:

O preço de um tênis importado sofreu dois reajustes seguidos, inicialmente um de 10% e posteriormente um de 20%, sendo assim, qual o valor a ser pago pelo tênis, se inicialmente ele custava R\$ 300,00?



Perceba que o aumento de 10% é dado sobre um referencial, transformando R\$ 300,00 em R\$ 330,00, enquanto que o aumento de 20% é dado sobre outro referencial, transformando R\$ 330,00 em R\$ 396,00, o aumento de 20% é dado sobre o acumulado que já contém um aumento anterior de 10%, nos aumentos sucessivos um aumento é dado sobre o outro. Os aumentos sucessivos podem ser divididos em vários aumentos simples e cada um pode ser aplicado individual e sucessivamente através de fatores multiplicativos, como mostrado no esquema acima!

Portanto, podemos partir dos R\$ 300,00 e multiplicarmos por 1,1 e por 1,2, assim, chegaremos ao valor total após aos aumentos sucessivos de 10% e 20%.

$$\begin{aligned} & 300 \times 1,1 \times 1,2 = \\ & \quad = 330 \times 1,2 \\ & \quad = 396 \end{aligned}$$

Agora veja, ao invés de multiplicarmos 300 por 1,1 e só depois multiplicar por 1,2, decidi fazer o seguinte:

$$\begin{aligned} & 300 \times \underbrace{1,1 \times 1,2}_{1,32} = \\ & = 300 \times 1,32 \\ & = 396 \end{aligned}$$

Essa conta não altera o resultado, mas serve para nos mostrar que a multiplicação de 1,1 por 1,2 dá igual a 1,32, o que nos indica que um aumento de 10% seguido de um aumento de 20% não resulta em um aumento de 30%, não estamos diante de aumentos simultâneos em que uma soma resolve o nosso problema. Em se tratando de aumentos sucessivos, um aumento de 10% seguido de um aumento de 20% resulta em um aumento de 32%.

Quando estamos diante de aumentos sucessivos, precisamos associar cada porcentagem de aumento ao seu fator multiplicativo, após isso, multiplicamos o valor inicial por todos os fatores!

Enquanto lá nos simultâneos somávamos todas as porcentagens, associávamos ao fator multiplicativo para chegar ao resultado, nos sucessivos, associamos todas as porcentagens aos seus fatores multiplicativos, multiplicamos todos para chegar ao resultado.

Vamos para mais um exemplo:

Durante a crise financeira do Brasil, a conta de energia surpreendeu vários brasileiros, sofrendo vários reajustes seguidos. Primeiro, aumentou 40%, pouco tempo depois sofreu mais um reajuste de 20%, no fim das contas, após esses dois aumentos sucessivos, em quantos por cento aumentou a conta de energia?

Suponha, sem perder a generalidade que o valor inicial da conta era de R\$ 100,00, após um aumento de 40%, essa conta passou a custar R\$ 140,00. O novo aumento de 20% deve ser dado sobre os R\$ 140,00 e isso caracteriza os aumentos como sucessivos, uma vez que são aplicados sobre os acumulados anteriores e NÃO sobre o mesmo referencial. Um aumento de 20% sobre R\$ 140,00, o transforma em R\$ 168,00. O valor inicial de R\$ 100,00 foi escolhido estrategicamente, pois ao aumentar R\$ 68,00, sabemos que foi um aumento de 68%. Observe que não podemos somar 40% com 20% e dizer que foi um aumento de 60% (isso vale para aumentos simultâneos). O certo a fazer é associar 40% ao seu fator multiplicativo que é 1,4 e 20% ao seu fator multiplicativo que é 1,2, devemos multiplicar 1,4 por 1,2, o que resulta em 1,68, esse fator de 1,68 corresponde a um aumento de 68%. Portanto, a conta de energia, após os dois aumentos sucessivos de 40% e 20%, aumentou 68%.

Agora que conhecemos os três tipos de aumentos, vamos falar sobre reduções?

## REDUÇÕES PERCENTUAIS

Assim como nos aumentos, existem três tipos de reduções percentuais, a simples, as simultâneas e as sucessivas.

### Redução Simples

Uma redução é chamada de simples, quando a redução é única e o percentual de redução é aplicado em um único valor, chamado de valor inicial. Por exemplo:

- Uma bolsa de grife custava R\$ 500,00, após entrar em promoção, teve seu valor reduzido em 20%. Qual o valor a ser pago pela bolsa durante a promoção?

Perceba que o valor inicial da bolsa é R\$ 500,00, é sobre esse valor que haverá um único desconto de 20%, isso caracteriza a redução com sendo simples. Do mesmo modo que conversamos nos aumentos, a ideia aqui é transformar a redução em uma multiplicação e para isso precisamos do fator multiplicativo. Todos começamos com 100%, quando reduzimos 20%, ficamos com 80% e  $80\% = 80/100 = 0,8$ . Ou seja, reduzir 20% é o mesmo que multiplicar por 0,8. Para sabermos mais rapidamente o valor final da bolsa vamos usar a preciosa expressão:

$$V_i \times f_m = V_f$$

Em que R\$ 500,00 é o valor inicial e 0,8 é o fator multiplicativo associado a uma redução de 20%.

$$V_i \times f_m = V_f \rightarrow 500 \times 0,8 = R\$ 400,00$$

Vamos analisar alguns fatores multiplicativos para reduções:

| Redução Simples | Fator Multiplicativo              |
|-----------------|-----------------------------------|
| - 5%            | $100\% - 5\% = 95\% = 0,95$       |
| - 50%           | $100\% - 50\% = 50\% = 0,5$       |
| - 10%           | $100\% - 10\% = 90\% = 0,9$       |
| - 37,5%         | $100\% - 37,5\% = 62,5\% = 0,625$ |
| - 95%           | $100\% - 95\% = 5\% = 0,05$       |
| - 12%           | $100\% - 12\% = 88\% = 0,88$      |
| - 100%          | $100\% - 100\% = 0\% = 0$         |

Que tal se invertêssemos a ordem? Agora vamos ter acesso primeiramente ao fator multiplicativo para descobrirmos de quantos por cento é a redução! Lembre-se que sempre começamos com 100%, então precisamos avaliar quanto sobra dos 100% ao retirarmos o que desejamos.

| Fator Multiplicativo | Redução Simples              |
|----------------------|------------------------------|
| 0,75                 | $0,75 - 1 = - 0,25 = - 25\%$ |
| 0,36                 | $0,36 - 1 = - 0,64 = - 64\%$ |
| 0,14                 | $0,14 - 1 = - 0,86 = - 86\%$ |
| 0,07                 | $0,07 - 1 = - 0,93 = - 93\%$ |
| 0,99                 | $0,99 - 1 = - 0,01 = - 1\%$  |

Agora vamos analisar mais algum exemplos:

- Com a instabilidade do mercado, neste último mês uma ação que valia R\$ 120,00 acabou desvalorizada em 25%. Qual o seu novo valor de mercado?

Para calcularmos essa redução simples, basta multiplicarmos o valor inicial, R\$ 120,00, pelo fator multiplicativo associado a uma redução de 25%, que é 0,75:

$$V_i \times f_m = V_f \rightarrow 120 \times 0,75 = V_f \rightarrow V_f = R\$ 90,00$$

- O quilograma da melancia custava R\$ 0,50 e passou a custar R\$ 0,45, de quantos por cento foi a redução?

Usaremos a expressão  $V_i \times f_m = V_f$  para determinar o fator multiplicativo e posteriormente associá-lo ao percentual de redução.

$$V_i \times f_m = V_f \rightarrow 0,50 \times f_m = 0,45 \rightarrow f_m = \frac{0,45}{0,50} \rightarrow f_m = 0,9$$

O fator multiplicativo de 0,9 indica uma redução de 10% no valor do quilograma da melancia.

- Se após uma redução de 15% pagamos R\$ 170,00 por um ingresso para um show, qual era o valor original desse ingresso?

Utilizaremos novamente a expressão  $V_i \times f_m = V_f$ , para encontrar o valor inicial, já que temos o fator multiplicativo associado a redução de 15% que é 0,85 e o valor final que é R\$ 170,00:

$$V_i \times f_m = V_f \rightarrow V_i \times 0,85 = 170 \rightarrow V_i = \frac{170}{0,85} \rightarrow V_i = R\$ 200,00$$

O preço original do ingresso era de R\$ 200,00 antes da redução de 15%.

- A quantidade de pessoas presente no início de uma palestra era de 500, no final, havia apenas 442, qual foi a redução percentual no número de pessoas presentes na palestra?

$$V_i \times f_m = V_f \rightarrow 500 \times f_m = 442 \rightarrow f_m = \frac{442}{500} \rightarrow f_m = 0,884$$

Um fator multiplicativo de 0,884 corresponde a uma redução de 11,6%.

### Reduções Simultâneas

Reduções simultâneas são aquelas em que todos os seus percentuais são calculados sobre o mesmo referencial. Assim como nos aumentos simultâneos, podemos somar todos os percentuais para aplicar de uma só vez, já que tudo será feito tendo como base o mesmo referencial.

- O salário bruto de um funcionário é de R\$ 3.000,00, sobre esse valor são descontados 11% para o pagamento de INSS e 15% do salário bruto ficam retidos na fonte para pagamento de imposto de renda, além disso há uma taxa de 1% do salário bruto cobrada pelo sindicato que o representa. Sendo assim, qual o valor do salário líquido desse trabalhador?

Perceba que todos os descontos são dados sobre o mesmo referencial, que é o salário bruto, ao invés de calcularmos tudo separadamente, 11% de R\$ 3.000,00 = R\$ 330,00, 15% de R\$ 3.000,00 = R\$ 450,00 e 1% de R\$ 3.000,00 = R\$ 30,00, podemos somar todos os percentuais para aplicar de uma só vez com o fator multiplicativo. 11% + 15% + 1% = 27%, reduzir 27% é o mesmo que multiplicar por 0,73. R\$ 3.000,00 multiplicado por 0,73 dá igual a R\$ 2.190,00, que é o mesmo resultado obtido quando efetuamos as reduções uma a uma: R\$ 3.000,00 - R\$ 330,00 - R\$ 450,00 - R\$ 30,00 = R\$ 2.190,00.

Em reduções simultâneas, você deve somar todos os percentuais e associar o resultado a um fator multiplicativo para só então efetuar a multiplicação.

**Reduções Sucessivas**

Para que tenhamos reduções sucessivas, é necessário que os percentuais de cada uma das reduções sejam aplicados sobre o acumulado das reduções anteriores. Nesse caso, NÃO temos as reduções sendo aplicadas sobre o mesmo referencial, a cada redução aplicada, o referencial muda! Por isso, a ideia é tratar cada redução como sendo uma redução simples e para cada redução, teremos um fator multiplicativo associado e assim, multiplicaremos todos eles para saber o efeito conjunto de todas as reduções sucessivas.

Vamos ver como as reduções sucessivas se comportam em um exemplo?

- Durante uma campanha promocional, foram dados 20% de descontos em todos os produtos de uma loja, um a um, todos foram etiquetados com o novo preço. Querendo economizar ainda mais, um jovem pediu mais 10% de desconto sobre o preço que estava na etiqueta, uma vez que pagaria em dinheiro. Para conceder o desconto, o gerente da loja procurou saber o preço original do produto que era R\$ 200,00, para avaliar se haveria algum prejuízo em fazê-lo. Caso seja concedido ambos os descontos, qual o valor que o jovem pagaria?

Cuidado quando for responder a essa questão, observe que os primeiros 20% de desconto são dados sobre o preço original de R\$ 200,00, fazendo com que na etiqueta apareça o novo preço do produto que é R\$ 160,00 (R\$ 200,00 - R\$ 40,00). Os próximos 10% de desconto que serão dados, não vão ser calculados sobre o mesmo referencial (R\$ 200,00), serão calculados sobre o preço que está na etiqueta R\$ 160,00, sendo assim, o jovem pagaria R\$ 144,00 (R\$ 160,00 - R\$ 16,00) caso os descontos sejam concedidos.

Uma maneira mais rápida para resolver a essa questão é associar a redução de 20% ao fator multiplicativo que é 0,8 e associar a redução de 10% ao fator multiplicativo que é 0,9 e efetuar a multiplicação pelos dois fatores, já que se trata de reduções sucessivas:

$$\begin{aligned} & 200 \times 0,8 \times 0,9 = \\ & = 160 \times 0,9 \\ & = 144 \end{aligned}$$

É importante perceber que a multiplicação de 0,8 por 0,9 dá 0,72, ou seja, uma redução de 20% seguida de uma redução de 10%, resulta numa redução de 28%. Aí está a diferença entre as reduções simultâneas e as sucessivas. Não podemos somar 20% com 10% para aplicarmos de uma só vez, precisamos associar cada redução ao seu fator multiplicativo e multiplicarmos para saber o efeito conjunto.

$$\begin{aligned} & 200 \times 0,8 \times 0,9 = \\ & = 200 \times 0,72 \\ & = 144 \end{aligned}$$

-20%   -10%  
-28%

**ATENÇÃO!!!**

Ponto percentual (pp) é a unidade que indica o valor absoluto da diferença entre porcentagens.

Se uma taxa de juros cai de 12% para 6%, dizemos que ela caiu 6 pontos percentuais e não 6%, na verdade, ela caiu 50% e passou a ser metade do que era antes.

Se dissermos que a taxa caiu 6%, ela deveria ter ficado 6% menor do que no início, o que não é verdade! Como falamos, a nova taxa é metade da taxa inicial, portanto, ela diminuiu 50%.

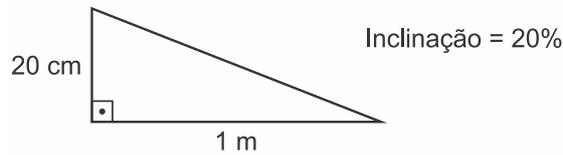
$$V_i \times f_m = V_f \rightarrow 12\% \times f_m = 6\% \rightarrow f_m = \frac{6\%}{12\%} \rightarrow f_m = 0,5 \rightarrow -50\%$$

A expressão  $V_i \times f_m = V_f$  é super preciosa! Ela vai te ajudar muito durante os problemas que envolvem porcentagem! Deixe-a sempre por perto, você nunca sabe quando vai utilizá-la!

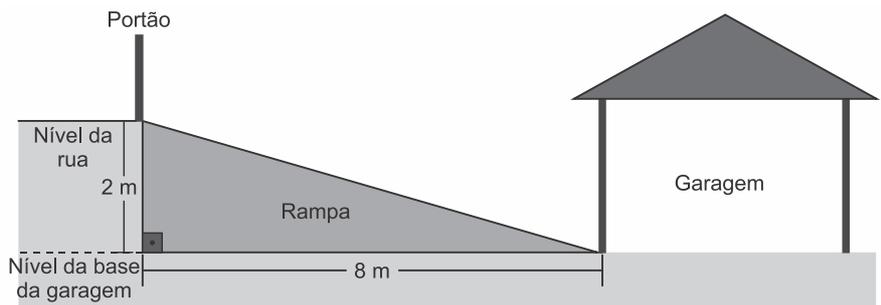
Agora que sabemos tudo sobre porcentagem, que tal dar uma exercitada?

**QUESTÕES - PORCENTAGEM**

1. (Enem 2018) A inclinação de uma rampa é calculada da seguinte maneira: para cada metro medido na horizontal, mede-se  $x$  centímetros na vertical. Diz-se, nesse caso, que a rampa tem inclinação de  $x\%$ , como no exemplo da figura:



A figura apresenta um projeto de uma rampa de acesso a uma garagem residencial cuja base, situada 2 metros abaixo do nível da rua, tem 8 metros de comprimento.



Depois de projetada a rampa, o responsável pela obra foi informado de que as normas técnicas do município onde ela está localizada exigem que a inclinação máxima de uma rampa de acesso a uma garagem residencial seja de 20%. Se a rampa projetada tiver inclinação superior a 20%, o nível da garagem deverá ser alterado para diminuir o percentual de inclinação, mantendo o comprimento da base da rampa.

Para atender às normas técnicas do município, o nível da garagem deverá ser

- A** elevado em 40 cm.
- B** elevado em 50 cm.
- C** mantido no mesmo nível.
- D** rebaixado em 40 cm.
- E** rebaixado em 50 cm.

2. (Enem 2018) Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.

Quantos alunos compraram somente um bilhete?

- A** 34
- B** 42
- C** 47
- D** 48
- E** 79

3. (Enem 2018) Os alunos da disciplina de estatística, em um curso universitário, realizam quatro avaliações por semestre com os pesos de 20%, 10%, 30% e 40%, respectivamente. No final do semestre, precisam obter uma média nas quatro avaliações de, no mínimo, 60 pontos para serem aprovados. Um estudante dessa disciplina obteve os seguintes pontos nas três primeiras avaliações: 46, 60 e 50, respectivamente.

O mínimo de pontos que esse estudante precisa obter na quarta avaliação para ser aprovado é

- A** 29,8.
- B** 71,0.
- C** 74,5.
- D** 75,5.
- E** 84,0.

4. (Enem 2018) O colesterol total de uma pessoa é obtido pela soma da taxa do seu “colesterol bom” com a taxa do seu “colesterol ruim”. Os exames periódicos, realizados em um paciente adulto, apresentaram taxa normal de “colesterol bom”, porém, taxa do “colesterol ruim” (também chamado LDL) de 280 mg/dL.

O quadro apresenta uma classificação de acordo com as taxas de LDL em adultos.

| Taxa de LDL (mg/dL) |                  |
|---------------------|------------------|
| Ótima               | Menor do que 100 |
| Próxima de ótima    | De 100 a 129     |
| Limite              | De 130 a 159     |
| Alta                | De 160 a 189     |
| Muito alta          | 190 ou mais      |

Disponível em: [www.minhavidade.com.br](http://www.minhavidade.com.br). Acesso em: 15 out. 2015 (adaptado).

O paciente, seguindo as recomendações médicas sobre estilo de vida e alimentação, realizou o exame logo após o primeiro mês, e a taxa de LDL reduziu 25%. No mês seguinte, realizou novo exame e constatou uma redução de mais 20% na taxa de LDL.

De acordo com o resultado do segundo exame, a classificação da taxa de LDL do paciente é

- A** ótima.
- B** próxima de ótima.
- C** limite.
- D** alta.
- E** muito alta.

5. (Enem 2018) Devido ao não cumprimento das metas definidas para a campanha de vacinação contra a gripe comum e o vírus H1N1 em um ano, o Ministério da Saúde anunciou a prorrogação da campanha por mais uma semana. A tabela apresenta as quantidades de pessoas vacinadas dentre os cinco grupos de risco até a data de início da prorrogação da campanha.

| Balanço parcial nacional da vacinação contra a gripe |                    |                       |     |
|--|--------------------|-----------------------|-----|
| Grupo de risco                                       | População (milhão) | População já vacinada |     |
|  |                    | (milhão)              | (%) |
| Crianças   | 4,5                | 0,9                   | 20  |
| Profissionais de saúde                               | 2,0                | 1,0                   | 50  |
| Gestantes  | 2,5                | 1,5                   | 60  |
| Indígenas  | 0,5                | 0,4                   | 80  |
| Idosos   | 20,5               | 8,2                   | 40  |

Qual é a porcentagem do total de pessoas desses grupos de risco já vacinadas?

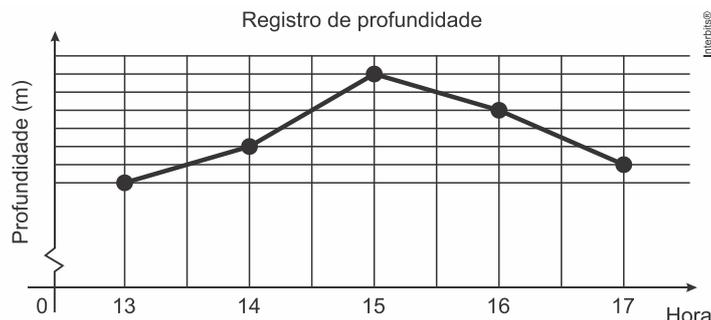
- A 12
- B 18
- C 30
- D 40
- E 50

6. (Enem 2018) O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna. Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% deles eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%.

Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a

- A 10.
- B 15.
- C 35.
- D 40.
- E 45.

7. (Enem 2017) Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade  $h$ , registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de  $h$ , cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.



Foi informado que entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%.

Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os registros?

- A** 18
- B** 20
- C** 24
- D** 36
- E** 40

8. (Enem (Libras) 2017) Uma distribuidora possui 40 mil litros de combustível em estoque. Tal combustível é resultante da mistura de etanol e gasolina pura, de acordo com os percentuais de 25% de etanol e 75% de gasolina pura. Para atender aos novos parâmetros nacionais na mistura dos combustíveis, o dono da distribuidora precisará alterar os percentuais de composição do combustível presente no tanque para 20% de etanol e 80% de gasolina pura.

Se o dono da distribuidora irá adequar o combustível em estoque ao novo padrão adicionando gasolina pura aos 40 mil litros existentes, a quantia de gasolina, em litro, a ser adicionada será

- A** 32.000.
- B** 10.000.
- C** 8.000.
- D** 2.500.
- E** 2.000.

9. (Enem PPL 2017) O governo decidiu reduzir de 25% para 20% o teor de álcool anidro misturado à gasolina vendida nos postos do país. Considere que a média de desempenho, ou seja, a quantidade de quilômetros (km) que um carro anda com 1 litro de combustível, é diretamente proporcional à porcentagem de gasolina presente no combustível, e que a média de desempenho de um carro antes da decisão do governo era de 13,5 km/L.

Nas condições do texto, qual será a estimativa da média de desempenho após a redução de álcool anidro no combustível?

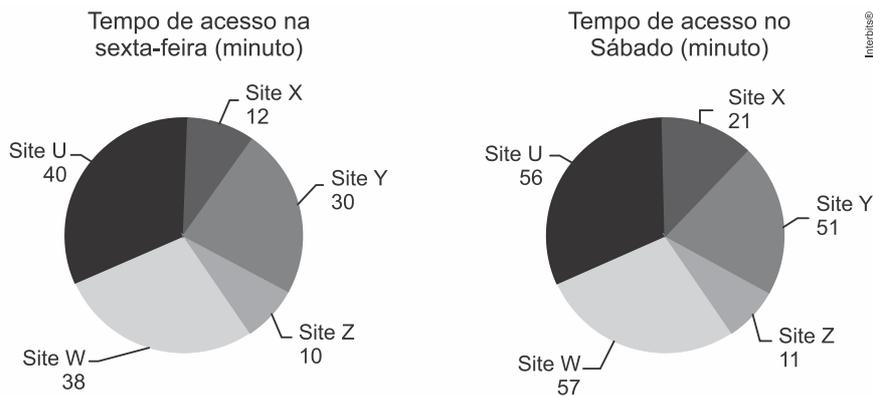
- A** 10,80 km/L.
- B** 12,65 km/L.
- C** 12,82 km/L.
- D** 14,15 km/L.
- E** 14,40 km/L.

10. (Enem PPL 2017) Em certa loja de roupas, o lucro na venda de uma camiseta é de 25% do preço de custo da camiseta pago pela loja. Já o lucro na venda de uma bermuda é de 30% do preço de custo da bermuda, e na venda de uma calça o lucro é de 20% sobre o preço de custo da calça. Um cliente comprou nessa loja duas camisetas, cujo preço de custo foi R\$ 40,00 cada uma, uma bermuda que teve preço de custo de R\$ 60,00 e duas calças, ambas com mesmo preço de custo. Sabe-se que, com essa compra, o cliente proporcionou um lucro de R\$ 78,00 para a loja.

Considerando essas informações, qual foi o preço de custo, em real, pago por uma calça?

- A 90
- B 100
- C 125
- D 195
- E 200

11. (Enem 2017) Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta foi criado um miniaplicativo de computador que roda na área de trabalho, para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco *sites* visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado, nos cinco *sites* mais acessados. A seguir, temos os dados do miniaplicativo para esses dias.



Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi no *site*

- A X.
- B Y.
- C Z.
- D W.
- E U.

12. (Enem (Libras) 2017) Um atacadista compra de uma fábrica um produto por R\$ 10,00 e repassa às lojas por um preço 50% superior. Para obterem um lucro suficiente com o produto, os lojistas fazem a revenda com acréscimo de preço de 100% do valor pelo qual compraram.

Qual é o preço final, em real, de um produto que passou pelas três etapas listadas?

- A R\$ 15,00
- B R\$ 20,00
- C R\$ 25,00
- D R\$ 30,00
- E R\$ 40,00

13. (Enem PPL 2017) A baixa procura por carne bovina e o aumento de oferta de animais para abate fizeram com que o preço da arroba do boi apresentasse queda para o consumidor. No ano de 2012, o preço da arroba do boi caiu de R\$ 100,00 para R\$ 93,00.

Disponível em: [www.diariodemarilia.com.br](http://www.diariodemarilia.com.br). Acesso em: 14 ago. 2012.

Com o mesmo valor destinado à aquisição de carne, em termos de perda ou ganho, o consumidor

- A** ganhou 6,5% em poder aquisitivo de carne.
- B** ganhou 7% em poder aquisitivo de carne.
- C** ganhou 7,5% em poder aquisitivo de carne.
- D** perdeu 7% em poder aquisitivo de carne.
- E** perdeu 7,5% em poder aquisitivo de carne.

14. (Enem PPL 2017) Uma fábrica de papel higiênico produz embalagens com quatro rolos de 30 m cada, cujo preço para o consumidor é R\$ 3,60. Uma nova embalagem com dez rolos de 50 m cada, de mesma largura, será lançada no mercado. O preço do produto na nova embalagem deve ser equivalente ao já produzido, mas, para incentivar as vendas, inicialmente o preço de venda terá um desconto de 10%.

Para que isso aconteça, o preço de venda da nova embalagem, em real, deve ser

- A** 8,10.
- B** 9,00.
- C** 9,90.
- D** 13,50.
- E** 15,00.

15. (Enem 2ª aplicação 2016) O Brasil é o quarto produtor mundial de alimentos e é também um dos campeões mundiais de desperdício. São produzidas por ano, aproximadamente, 150 milhões de toneladas de alimentos e, desse total,  $\frac{2}{3}$  são produtos de plantio. Em relação ao que se planta, 64% são perdidos ao longo da cadeia produtiva (20% perdidos na colheita, 8% no transporte e armazenamento, 15% na indústria de processamento, 1% no varejo e o restante no processamento culinário e hábitos alimentares).

Disponível em: [www.bancodealimentos.org.br](http://www.bancodealimentos.org.br). Acesso em: 1 ago. 2012.

O desperdício durante o processamento culinário e hábitos alimentares, em milhão de tonelada, é igual a

- A** 20.
- B** 30.
- C** 56.
- D** 64.
- E** 96.

16. (Enem PPL 2016) O técnico de um time de voleibol registra o número de jogadas e de acertos, por atleta, em cada fundamento, para verificar os desempenhos dos jogadores. Para que o time tenha um melhor aproveitamento no fundamento bloqueio, ele decide substituir um dos jogadores em quadra por um dos que estão no banco de reservas. O critério a ser adotado é o de escolher o atleta que, no fundamento bloqueio, tenha apresentado o maior número de acertos em relação ao número de jogadas de que tenha participado. Os registros dos cinco atletas que se encontram no banco de reservas, nesse fundamento, estão apresentados no quadro.

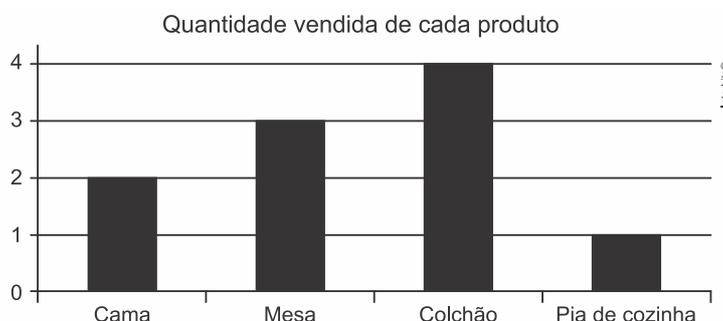
| Atleta | Participação em bloqueios |                   |
|--------|---------------------------|-------------------|
|        | Número de acertos         | Número de jogadas |
| I      | 20                        | 30                |
| II     | 10                        | 34                |
| III    | 19                        | 32                |
| IV     | 3                         | 4                 |
| V      | 8                         | 10                |

Qual dos atletas do banco de reservas o treinador deve colocar em quadra?

- A I
- B II
- C III
- D IV
- E V

17. (Enem PPL 2016) Para atrair uma maior clientela, uma loja de móveis fez uma promoção oferecendo um desconto de 20% em alguns de seus produtos.

No gráfico, estão relacionadas as quantidades vendidas de cada um dos produtos, em um dia de promoção.



No quadro constam os preços de cada produto vendido já com o desconto de 20% oferecido pela loja.

| Móvel          | Preço (R\$) |
|----------------|-------------|
| Cama           | 450,00      |
| Mesa           | 300,00      |
| Colchão        | 350,00      |
| Pia de cozinha | 400,00      |

Qual foi o valor total de desconto, em reais, concedido pela loja com a venda desses produtos durante esse dia de promoção?

- A 300,00
- B 375,00
- C 720,00
- D 900,00
- E 1.125,00

18. (Enem 2016) O censo demográfico é um levantamento estatístico que permite a coleta de várias informações. A tabela apresenta os dados obtidos pelo censo demográfico brasileiro nos anos de 1940 e 2000, referentes à concentração da população total, na capital e no interior, nas cinco grandes regiões.

**População residente, na capital e interior segundo as Grandes Regiões 1940/2000**

| Grandes regiões | População residente |            |           |            |            |            |
|-----------------|---------------------|------------|-----------|------------|------------|------------|
|                 | Total               |            | Capital   |            | Interior   |            |
|                 | 1940                | 2000       | 1940      | 2000       | 1940       | 2000       |
| Norte           | 1.632.917           | 12.900.704 | 368.528   | 3.895.400  | 1.264.389  | 9.005.304  |
| Nordeste        | 14.434.080          | 47.741.711 | 1.270.729 | 10.162.346 | 13.163.351 | 37.579.365 |
| Sudeste         | 18.278.837          | 72.412.411 | 3.346.991 | 18.822.986 | 14.931.846 | 53.589.425 |
| Sul             | 5.735.305           | 25.107.616 | 459.659   | 3.290.220  | 5.275.646  | 21.817.396 |
| Centro-Oeste    | 1.088.182           | 11.636.728 | 152.189   | 4.291.120  | 935.993    | 7.345.608  |

Fonte: IBGE, Censo Demográfico T

O valor mais próximo do percentual que descreve o aumento da população nas capitais da Região Nordeste é

- A 125%
- B 231%
- C 331%
- D 700%
- E 800%

19. (Enem 2016) O LIRAA, Levantamento Rápido do Índice de Infestação por *Aedes aegypti*, consiste num mapeamento da infestação do mosquito *Aedes aegypti*. O LIRAA é dado pelo percentual do número de imóveis com focos do mosquito, entre os escolhidos de uma região em avaliação. O serviço de vigilância sanitária de um município, no mês de outubro do ano corrente, analisou o LIRAA de cinco bairros que apresentaram o maior índice de infestação no ano anterior. Os dados obtidos para cada bairro foram:

- I. 14 imóveis com focos de mosquito em 400 imóveis no bairro;
- II. 6 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro;
- III. 13 imóveis com focos de mosquito em 520 imóveis no bairro;
- IV. 9 imóveis com focos de mosquito em 360 imóveis no bairro;
- V. 15 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro.

O setor de dedetização do município definiu que o direcionamento das ações de controle iniciarão pelo bairro que apresentou o maior índice do LIRAA.

Disponível em: <http://bvsmms.saude.gov.br>. Acesso em: 28 out. 2015.

As ações de controle iniciarão pelo bairro

- A I.
- B II.
- C III.
- D IV.
- E V.

20. (Enem PPL 2016) Segundo o Compromisso Empresarial para Reciclagem (Cempre), o volume de lixo urbano reciclado passou de 5 milhões de toneladas, em 2003, para 7,1 milhões de toneladas, em 2008. Nesse mesmo período, o número de municípios com coleta seletiva passou de 653 para 1.004. Esperava-se, durante este período, um aumento de pelo menos 40% no volume de lixo urbano reciclado e de 60% no número de municípios com coleta seletiva.

Disponível em: <http://revistaepoca.globo.com>. Acesso em: 31 jul. 2012.

Considerando os valores apresentados para o período de 2003 a 2008, os aumentos esperados no volume de lixo urbano reciclado e no número de municípios com coleta seletiva

- A** não foram atingidos, pois o aumento no volume de lixo urbano reciclado foi de 30%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 30%.
- B** não foram atingidos, pois o aumento no volume de lixo urbano reciclado foi de 30%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 35%.
- C** foram atingidos apenas parcialmente, pois os aumentos no volume de lixo urbano reciclado e no número de municípios com coleta seletiva foram de 42%.
- D** foram atingidos apenas parcialmente, pois o aumento no volume de lixo urbano reciclado foi de 42%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 35%.
- E** foram atingidos apenas parcialmente, pois o aumento no volume de lixo urbano reciclado foi de 42%, e no número de municípios com coleta seletiva foi de 54%.

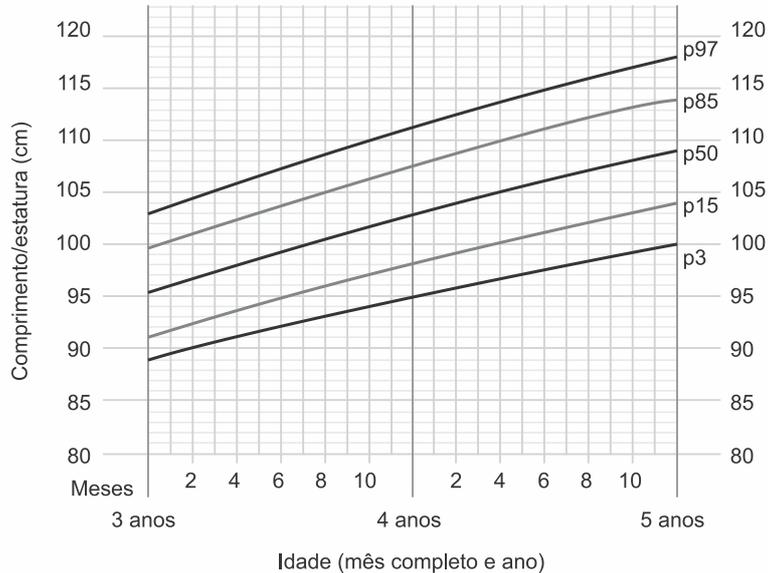
21. (Enem PPL 2016) No início de janeiro de um determinado ano, uma família decidiu economizar para as férias de julho daquele ano, guardando uma quantia por mês. Eles decidiram que, em janeiro, guardariam R\$ 300,00 e, a partir de fevereiro, guardariam, a cada mês, 20% a mais do que no mês anterior.

Qual foi o total economizado (em real) no primeiro semestre do ano, abandonando, por arredondamento, possíveis casas decimais nesse resultado?

- A** 1.800,00
- B** 2.100,00
- C** 2.160,00
- D** 2.978,00
- E** 3.874,00

22. (Enem 2016) A fim de acompanhar o crescimento de crianças, foram criadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS) tabelas de altura, também adotadas pelo Ministério da Saúde do Brasil. Além de informar os dados referentes ao índice de crescimento, a tabela traz gráficos com curvas, apresentando padrões de crescimento estipulados pela OMS.

O gráfico apresenta o crescimento de meninas, cuja análise se dá pelo ponto de intersecção entre o comprimento, em centímetro, e a idade, em mês completo e ano, da criança.



Disponível em: [www.aprocura.com.br](http://www.aprocura.com.br). Acesso em: 22 out. 2015 (adaptado).

Uma menina aos 3 anos de idade tinha altura de 85 centímetros e aos 4 anos e 4 meses sua altura chegou a um valor que corresponde a um ponto exatamente sobre a curva p50.

Qual foi o aumento percentual da altura dessa menina, descrito com uma casa decimal, no período considerado?

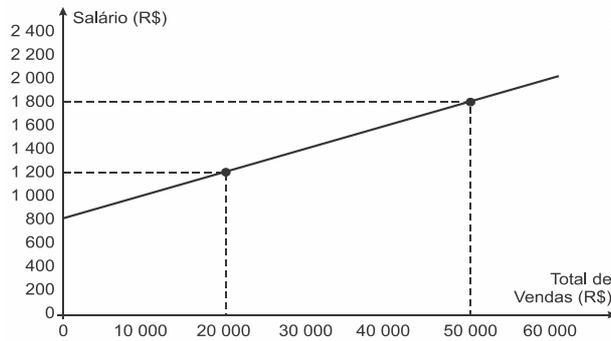
- A** 23,5%
- B** 21,2%
- C** 19,0%
- D** 11,8%
- E** 10,0%

23. (Enem 2016) Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R\$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia, e obtendo um lucro de R\$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía. Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento.

Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser

- A** R\$ 0,96.
- B** R\$ 1,00.
- C** R\$ 1,40.
- D** R\$ 1,50.
- E** R\$ 1,56.

24. (Enem PPL 2015) No comércio é comumente utilizado o salário mensal comissionado. Além de um valor fixo, o vendedor tem um incentivo, geralmente um percentual sobre as vendas. Considere um vendedor que tenha salário comissionado, sendo sua comissão dada pelo percentual do total de vendas que realizar no período. O gráfico expressa o valor total de seu salário, em reais, em função do total de vendas realizadas, também em reais.

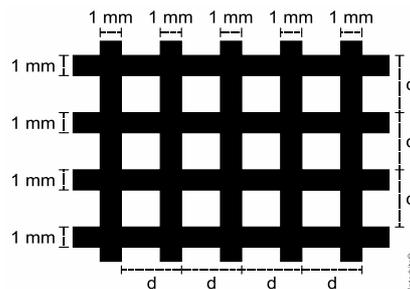


Qual o valor percentual da sua comissão?

- A 2,0%
- B 5,0%
- C 16,7%
- D 27,7%
- E 50,0%

25. (Enem 2015) Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de  $(d - 1)$  milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento. A medida de  $d$ , em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é

- A 2
- B 1
- C  $\frac{11}{3}$
- D  $\frac{4}{3}$
- E  $\frac{2}{3}$

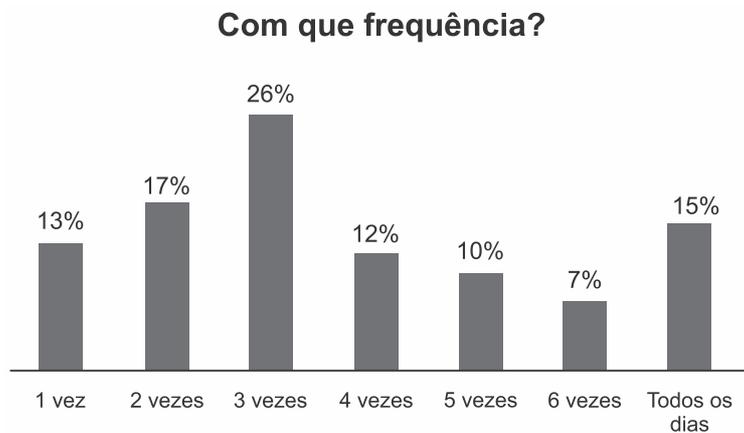
26. (Enem PPL 2015) A Organização Mundial da Saúde (OMS) recomenda que o consumo diário de sal de cozinha não exceda 5 g. Sabe-se que o sal de cozinha é composto por 40% de sódio e 60% de cloro.

Disponível em: <http://portal.saude.gov.br>. Acesso em: 29 fev. 2012 (adaptado).

Qual é a quantidade máxima de sódio proveniente do sal de cozinha, recomendada pela OMS, que uma pessoa pode ingerir por dia?

- A** 1.250 mg
- B** 2.000 mg
- C** 3.000 mg
- D** 5.000 mg
- E** 12.500 mg

27. (Enem PPL 2015) Em uma pesquisa sobre prática de atividade física, foi perguntado aos entrevistados sobre o hábito de andar de bicicleta ao longo da semana e com que frequência o faziam. Entre eles, 75% afirmaram ter esse hábito, e a frequência semanal com que o faziam é a apresentada no gráfico:



Que porcentagem do total de entrevistados representa aqueles que afirmaram andar de bicicleta pelo menos três vezes por semana?

- A** 70,0%
- B** 52,5%
- C** 22,5%
- D** 19,5%
- E** 5,0%

28. (Enem 2015) Um casal realiza um financiamento imobiliário de R\$ 180.000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R\$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R\$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

- A** 2.075,00.
- B** 2.093,00.
- C** 2.138,00.
- D** 2.255,00.
- E** 2.300,00.

29. (Enem PPL 2015) Uma pesquisa recente aponta que 8 em cada 10 homens brasileiros dizem cuidar de sua beleza, não apenas de sua higiene pessoal.

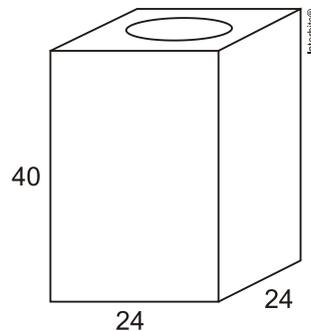
CAETANO, M.; SOEIRO, R.; DAVINO, R. Cosméticos. *Superinteressante*, n. 304, maio 2012 (adaptado).

Outra maneira de representar esse resultado é exibindo o valor percentual dos homens brasileiros que dizem cuidar de sua beleza.

Qual é o valor percentual que faz essa representação?

- A 80%
- B 8%
- C 0,8%
- D 0,08%
- E 0,008%

30. (Enem 2014) Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.



Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

- A 14,4%
- B 20%
- C 32,0%
- D 36,0%
- E 64,0%

31. (Enem 2014) Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R\$10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R\$6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.

A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era

- A R\$166,00.
- B R\$156,00.
- C R\$84,00.
- D R\$46,00.
- E R\$24,00.

32. (Enem PPL 2014) O Brasil desenvolveu técnicas próprias de plantio e colheita de cana-de-açúcar, tornando-se o maior produtor mundial. Cultivando novas variedades, foram produzidas, na safra 2010/2011, 624 milhões de toneladas em 8,1 milhões de hectares. Houve um substancial ganho de produtividade (em toneladas por hectare) quando se compara com a de décadas atrás, como a da safra 1974/1975, que foi de 47 toneladas por hectare.

Disponível em: [www2.cead.ufv.br](http://www2.cead.ufv.br). Acesso em: 27 fev. 2011 (adaptado).

De acordo com dados apresentados, qual foi o valor mais aproximado da taxa de crescimento da produtividade de cana-de-açúcar, por hectare no Brasil, da safra 1974/1975 para a safra 2010/2011?

- A 13%
- B 30%
- C 64%
- D 74%
- E 164%

33. (Enem 2014) O Brasil é um país com uma vantagem econômica clara no terreno dos recursos naturais, dispondo de uma das maiores áreas com vocação agrícola do mundo. Especialistas calculam que, dos 853 milhões de hectares do país, as cidades, as reservas indígenas e as áreas de preservação, incluindo florestas e mananciais, cubram por volta de 470 milhões de hectares. Aproximadamente 280 milhões se destinam à agropecuária, 200 milhões para pastagens e 80 milhões para a agricultura, somadas as lavouras anuais e as perenes, como o café e a fruticultura.

FORTES, G. "Recuperação de pastagens é alternativa para ampliar cultivos". *Folha de S. Paulo*, 30 out. 2011.

De acordo com os dados apresentados, o percentual correspondente à área utilizada para agricultura em relação à área do território brasileiro é mais próximo de

- A 32,8%
- B 28,6%
- C 10,7%
- D 9,4%
- E 8,0%

34. (Enem 2014) De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente,

- 25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.
- 33% são utilizados em descarga de banheiro.
- 27% são para cozinhar e beber.
- 15% são para demais atividades.

No Brasil, o consumo de água por pessoa chega, em média, a 200 litros por dia.

O quadro mostra sugestões de consumo moderado de água por pessoa, por dia, em algumas atividades.

| Atividade         | Consumo total de água na atividade (em litros) |
|-------------------|--|
| Tomar banho       | 24,0   |
| Dar descarga      | 18,0   |
| Lavar as mãos     | 3,2  |
| Escovar os dentes | 2,4  |
| Beber e cozinhar  | 22,0   |

Se cada brasileiro adotar o consumo de água indicado no quadro, mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, então economizará diariamente, em média, em litros de água,

- A 30,0.
- B 69,6.
- C 100,4.
- D 130,4.
- E 170,0.

35. (Enem PPL 2014) Em uma cidade, os impostos que incidem sobre o consumo de energia elétrica residencial são de 30% sobre o custo do consumo mensal. O valor total da conta a ser paga no mês é o valor cobrado pelo consumo acrescido dos impostos.

Considerando  $x$  o valor total da conta mensal de uma determinada residência e  $y$  o valor dos impostos, qual é a expressão algébrica que relaciona  $x$  e  $y$ ?

**A**  $y = \frac{0,3x}{1,3}$

**B**  $y = 0,3x$

**C**  $y = \frac{x}{1,3}$

**D**  $y = \frac{1,3x}{0,3}$

**E**  $y = 0,7x$

36. (Enem 2014) Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90%, dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem  $P$  da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.

De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de  $P$  é

**A** [35; 63].

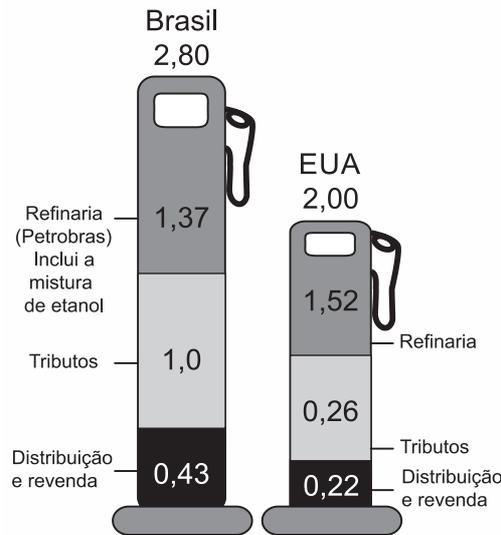
**B** [40; 63].

**C** [50; 70].

**D** [50; 90].

**E** [70; 90].

37. (Enem PPL 2014) A figura mostra os preços da gasolina no Brasil e nos Estados Unidos (EUA), feita a conversão para reais, considerando o preço total de venda ao consumidor (abaixo dos nomes dos países) e os valores das parcelas correspondentes à refinaria, aos tributos e à distribuição e revenda.



Fontes: Petrobras, Agência Nacional do Petróleo (ANP) e Energy Information Administration (EIA).

Note que, considerando apenas a parte correspondente à refinaria, o preço da gasolina vendida no Brasil é inferior ao preço cobrado nos Estados Unidos, mas os tributos, a distribuição e a revenda aumentam o preço final de venda nos postos brasileiros.

Suponha que fosse tomada a decisão de se diminuir o preço final de venda nos postos brasileiros, sem alterar a parcela do preço da gasolina vendida na refinaria, de modo que o preço final se iguale ao cobrado nos postos dos Estados Unidos.

Veja, ed. 2308, ano 40, n. 7, 13 fev. 2013 (Adaptado).

O percentual mais aproximado de redução dos valores em tributos, distribuição e revenda seria

- A 29.
- B 44.
- C 56.
- D 63.
- E 80.

38. (Enem 2014) Uma organização não governamental divulgou um levantamento de dados realizado em algumas cidades brasileiras sobre saneamento básico. Os resultados indicam que somente 36% do esgoto gerado nessas cidades é tratado, o que mostra que 8 bilhões de litros de esgoto sem nenhum tratamento são lançados todos os dias nas águas. Uma campanha para melhorar o saneamento básico nessas cidades tem como meta a redução da quantidade de esgoto lançado nas águas diariamente, sem tratamento, para 4 bilhões de litros nos próximos meses.

Se o volume de esgoto gerado permanecer o mesmo e a meta dessa campanha se concretizar, o percentual de esgoto tratado passará a ser

- A 72%
- B 68%
- C 64%
- D 54%
- E 18%

39. (Enem PPL 2014) O Brasil é o quarto produtor mundial de alimentos, mas aproximadamente 64 toneladas de cada 100 toneladas que se produz são perdidas ao longo da cadeia produtiva. Em relação ao total de alimentos produzidos, a perda de alimentos é distribuída da seguinte forma: 20 toneladas na colheita, 8 toneladas no transporte e armazenamento, 15 toneladas na indústria de processamento, 1 tonelada no varejo e 20 toneladas no processamento culinário e hábitos alimentares.

Disponível em: [www.bancodealimentos.org.br](http://www.bancodealimentos.org.br). Acesso em: 26 out. 2011 (adaptado).

De acordo com os dados apresentados, os alimentos que são perdidos no processamento culinário e nos hábitos alimentares representam qual porcentagem em relação ao total de alimentos que são perdidos no país?

- A 12,28%
- B 20,00%
- C 31,25%
- D 36,00%
- E 44,00%

40. (Enem 2014) Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

$$\text{Valor do kWh (com tributos)} \times \text{consumo (em kWh)} + \text{Cosip}$$

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

| Faixa de consumo mensal (kWh) | Valor da Cosip (R\$) |
|-------------------------------|----------------------|
| Até 80                        | 0,00                 |
| Superior a 80 até 100         | 2,00                 |
| Superior a 100 até 140        | 3,00                 |
| Superior a 140 até 200        | 4,50                 |

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R\$0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

- A 134,1
- B 135,0
- C 137,1
- D 138,6
- E 143,1

41. (Enem PPL 2014) Uma concessionária de automóveis revende atualmente três marcas de veículos, A, B e C, que são responsáveis por 50%, 30% e 20%, respectivamente, de sua arrecadação. Atualmente, o faturamento médio mensal dessa empresa é de R\$ 150.000,00. A direção dessa empresa estima que, após uma campanha publicitária a ser realizada, ocorrerá uma elevação de 20%, 30% e 10% na arrecadação com as marcas A, B e C, respectivamente.

Se os resultados estimados na arrecadação forem alcançados, o faturamento médio mensal da empresa passará a ser de

- A** R\$ 180.000,00.
- B** R\$ 181.500,00.
- C** R\$ 187.500,00.
- D** R\$ 240.000,00.
- E** R\$ 257.400,00.

42. (Enem 2014) Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12t. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação.

No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente,

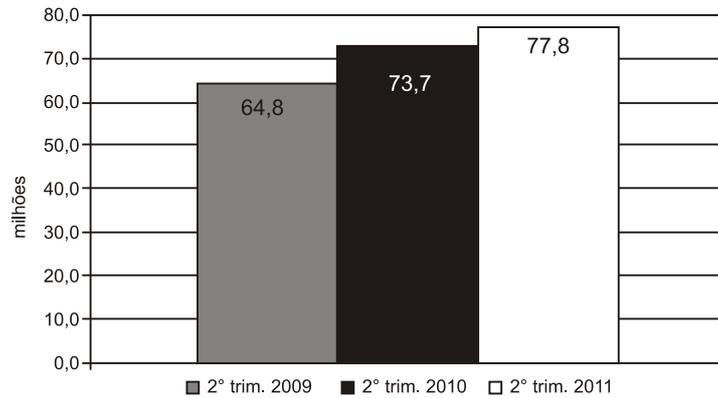
- A** 1,8t; 8,4t; 1,8t.
- B** 3,0t; 6,0t; 3,0t.
- C** 2,4t; 7,2t; 2,4t.
- D** 3,6t; 4,8t; 3,6t.
- E** 4,2t; 3,6t; 4,2t.

43. (Enem PPL 2014) Um cliente fez um orçamento com uma cozinheira para comprar 10 centos de quibe e 15 centos de coxinha e o valor total foi de R\$ 680,00. Ao finalizar a encomenda, decidiu aumentar as quantidades de salgados e acabou comprando 20 centos de quibe e 30 centos de coxinha. Com isso, ele conseguiu um desconto de 10% no preço do cento do quibe e 15% no preço do cento de coxinhas, e o valor total da compra ficou em R\$ 1.182,00.

De acordo com esses dados, qual foi o valor que o cliente pagou pelo cento da coxinha?

- A** R\$ 23,40
- B** R\$ 23,80
- C** R\$ 24,90
- D** R\$ 25,30
- E** R\$ 37,80

44. (Enem PPL 2013) O gráfico mostra o número de pessoas que acessaram a internet, no Brasil, em qualquer ambiente (domicílios, trabalho, escolas, *lan houses* ou outros locais), nos segundos trimestres dos anos de 2009, 2010 e 2011.



Disponível em: [www.prosadigital.com.br](http://www.prosadigital.com.br). Acesso em: 28 fev. 2012.

Considerando que a taxa de crescimento do número de acessos à internet no Brasil, do segundo trimestre de 2011 para o segundo trimestre de 2012, seja igual à taxa verificada no mesmo período de 2010 para 2011, qual é, em milhões, a estimativa do número de pessoas que acessarão a internet no segundo trimestre de 2012?

- A 82,1
- B 83,3
- C 86,7
- D 93,4
- E 99,8

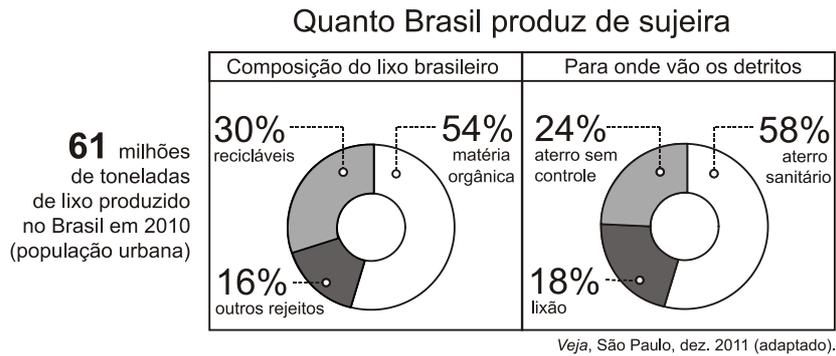
45. (Enem PPL 2013) O tipo mais comum de bebida encontrado nos supermercados não é o suco, mas o néctar de frutas. Os fabricantes de bebida só podem chamar de suco os produtos que tiverem pelo menos 50% de polpa, a parte comestível da fruta. Já o néctar de frutas é mais doce e tem entre 20% e 30% de polpa de frutas.

*Superinteressante*, São Paulo, ago. 2011.

Uma pessoa vai ao supermercado e compra uma caixa de 1 litro de bebida. Em casa ela percebe que na embalagem está escrito “néctar de frutas com 30% de polpa”. Se essa caixa fosse realmente de suco, necessitaria de um aumento percentual de polpa de, aproximadamente,

- A 20%.
- B 67%.
- C 80%.
- D 167%.
- E 200%.

46. (Enem PPL 2013) Observe no gráfico alguns dados a respeito da produção e do destino do lixo no Brasil no ano de 2010.



A partir desses dados, supondo que todo o lixo brasileiro, com exceção dos recicláveis, é destinado aos aterros ou aos lixões, quantos milhões de toneladas de lixo vão para os lixões?

- A** 5,9
- B** 7,6
- C** 10,9
- D** 42,7
- E** 76,8

47. (Enem PPL 2013) O turismo brasileiro atravessa um período de franca expansão. Entre 2002 e 2006, o número de pessoas que trabalham nesse setor aumentou 15% e chegou a 1,8 milhão. Cerca de 60% desse contingente de trabalhadores está no mercado informal, sem carteira assinada.

*Veja, São Paulo, 18 jun. 2008 (adaptado).*

Para regularizar os empregados informais que estão nas atividades ligadas ao turismo, o número de trabalhadores que terá que assinar carteira profissional é

- A** 270 mil.
- B** 720 mil.
- C** 810 mil.
- D** 1,08 milhão.
- E** 1,35 milhão.

48. (Enem PPL 2013) O Conselho Monetário Nacional (CMN) determinou novas regras sobre o pagamento mínimo da fatura do cartão de crédito, a partir do mês de agosto de 2011. A partir de então, o pagamento mensal não poderá ser inferior a 15% do valor total da fatura. Em dezembro daquele ano, outra alteração foi efetuada: daí em diante, o valor mínimo a ser pago seria de 20% da fatura.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 29 fev. 2012.

Um determinado consumidor possuía no dia do vencimento, 01/03/2012, uma dívida de R\$1.000,00 na fatura de seu cartão de crédito. Se não houver pagamento do valor total da fatura, são cobrados juros de 10% sobre o saldo devedor para a próxima fatura. Para quitar sua dívida, optou por pagar sempre o mínimo da fatura a cada mês e não efetuar mais nenhuma compra.

A dívida desse consumidor em 01/05/2012 será de

- A** R\$ 600,00.
- B** R\$ 640,00.
- C** R\$ 722,50.
- D** R\$ 774,40.
- E** R\$ 874,22.

49. (Enem 2013) Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R\$50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja.

Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

- A 15,00.
- B 14,00.
- C 10,00.
- D 5,00.
- E 4,00.

50. (Enem 2013) O contribuinte que vende mais de R\$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: [www1.folha.uol.com.br](http://www1.folha.uol.com.br). Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R\$ 34 mil um lote de ações que custou R\$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

- A R\$ 900,00.
- B R\$ 1200,00.
- C R\$ 2100,00.
- D R\$ 3900,00.
- E R\$ 5100,00.

51. (Enem PPL 2012) O Brasil é um dos maiores produtores de leite do mundo. Em 2010, para a produção de 30,7 bilhões de litros de leite foram ordenhadas 22,9 milhões de vacas leiteiras em todo o país, sendo que essa quantidade de vacas ordenhadas representa 10,9% do rebanho brasileiro de bovinos.

Disponível em: [www.ibge.gov.br](http://www.ibge.gov.br). Acesso em: 15 nov. 2011 (adaptado)

Nessas condições, o número que mais se aproxima da quantidade de bovinos no Brasil em 2010, em milhões de unidades, é

- A 25,40.
- B 33,80.
- C 187,19.
- D 210,09.
- E 281,65.

52. (Enem PPL 2012) Uma loja resolveu fazer uma promoção de um determinado produto que custava R\$ 100,00 em fevereiro, da seguinte maneira: em março, ela deu um desconto de 10% sobre o preço do produto em fevereiro; em abril, deu mais 10% de desconto sobre o preço do produto em março. Tendo obtido uma venda substancial, a loja resolveu aumentar o preço do produto da seguinte maneira: em maio, a loja aumentou em 10% o preço de abril e, em junho, a loja aumentou em mais 10% o preço de maio.

Desta forma, o preço deste produto, no final de junho, era

- A R\$ 100,00.
- B R\$ 99,00.
- C R\$ 98,01.
- D R\$ 97,20.
- E R\$ 96,00.

53. (Enem 2012) O losango representado na Figura 1 foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

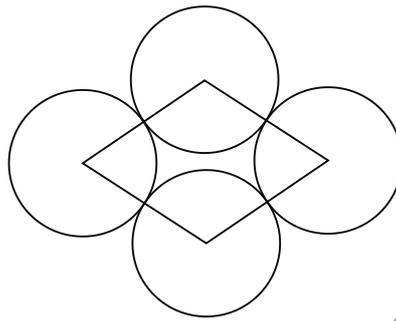


Figura 1

Interbits®

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2.

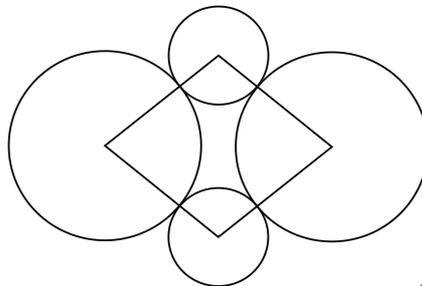


Figura 2

Interbits®

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento de

- A 300%.
- B 200%.
- C 150%.
- D 100%.
- E 50%.

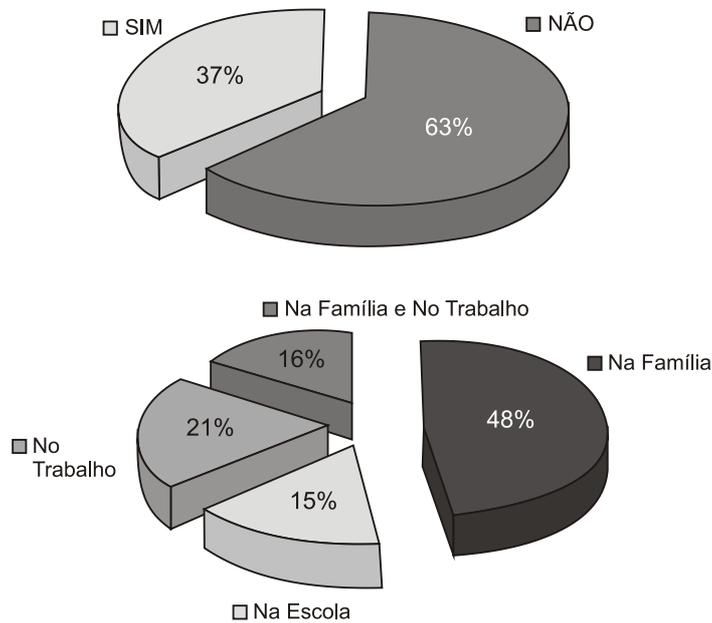
54. (Enem 2012) A cerâmica possui a propriedade da contração, que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico submetido a uma determinada temperatura elevada: em seu lugar aparecendo “espaços vazios” que tendem a se aproximar. No lugar antes ocupado pela água vão ficando lacunas e, conseqüentemente, o conjunto tende a retrair-se. Considere que no processo de cozimento a cerâmica de argila sofra uma contração, em dimensões lineares, de 20%.

Disponível em: [www.arq.ufsc.br](http://www.arq.ufsc.br). Acesso em: 30 mar. 2012 (adaptado).

Levando em consideração o processo de cozimento e a contração sofrida, o volume  $V$  de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta  $a$ , diminui para um valor que é

- A 20% menor que  $V$ , uma vez que o volume do cubo é diretamente proporcional ao comprimento de seu lado.
- B 36% menor que  $V$ , porque a área da base diminui de  $a^2$  para  $((1 - 0,2)a)^2$ .
- C 48,8% menor que  $V$ , porque o volume diminui de  $a^3$  para  $(0,8a)^3$ .
- D 51,2% menor que  $V$ , porque cada lado diminui para 80% do comprimento original.
- E 60% menor que  $V$ , porque cada lado diminui 20%.

55. (Enem PPL 2012) Uma pesquisa foi realizada com a intenção de conhecer o que as pessoas sabem sobre o diabetes. Nela, utilizou-se um questionário com 16 perguntas, respondidas pelas pessoas na entrada de estações do metrô de São Paulo. Os gráficos a seguir mostram, respectivamente, os percentuais de respostas dadas às seguintes perguntas do questionário: “*Você conhece alguém com diabetes?*” e “*Caso conheça, indique onde.*”



Disponível em: [www.diabetes.org.br](http://www.diabetes.org.br) (adaptado).

O percentual do número de entrevistados que conhecem pessoas diabéticas na escola é mais aproximado por

- A 6%.
- B 15%.
- C 37%.
- D 41%.
- E 52%.

56. (Enem PPL 2012) Pensando em desenvolver atividade física e reduzir gasto com energia elétrica em sua residência, uma pessoa resolveu instalar uma bomba d'água acoplada a uma bicicleta ergométrica. Após alguns dias de atividade física, ela observou que, pedalando durante uma hora, o volume médio de água bombeada para o seu reservatório era de 500 litros. Esta pessoa observou, ainda, que o consumo diário em sua casa é de 550 litros de água.

Qual a atitude, em relação ao tempo de exercício diário, essa pessoa deve tomar para suprir exatamente o consumo diário de água da sua casa?

- A Reduzir o seu tempo diário de exercício na bicicleta em 6 minutos.
- B Reduzir o seu tempo diário de exercício na bicicleta em 10 minutos.
- C Aumentar o seu tempo diário de exercício na bicicleta em 5 minutos.
- D Aumentar o seu tempo diário de exercício na bicicleta em 6 minutos.
- E Aumentar o seu tempo diário de exercício na bicicleta em 10 minutos.

57. (Enem 2012) Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

|                 |  |
|-----------------|--|
| Hipoglicemia    | taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL                        |
| Normal          | taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL  |
| Pré-diabetes    | taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL |
| Diabetes Melito | taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL |
| Hiperglicemia   | taxa de glicose maior que 250 mg/dL                              |

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estavam com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de

- A** hipoglicemia.
- B** normal.
- C** pré-diabetes.
- D** diabetes melito.
- E** hiperglicemia.

58. (Enem 2011) Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido.

Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R\$ 3800,00 gerado pela aplicação. A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de

- A** R\$ 4222,22 .
- B** R\$ 4523,80 .
- C** R\$ 5.000,00 .
- D** R\$ 13.300,00 .
- E** R\$ 17.100,00 .

59. (Enem 2011) Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R\$ 500,00 . Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário).

As informações obtidas estão resumidas no quadro:

|          | Rendimento mensal (%) | IR (Imposto de renda) |
|----------|-----------------------|-----------------------|
| POUPANÇA | 0,560                 | ISENTO                |
| CDB      | 0,876                 | 4% (sobre o ganho)    |

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é

- A** a poupança, pois totalizará um montante de R\$ 502,80 .
- B** a poupança, pois totalizará um montante de R\$ 500,56 .
- C** o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 504,38 .
- D** o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 504,21 .
- E** o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 500,87 .

60. (Enem 2011) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

- Investimento A: 3% ao mês
- Investimento B: 36% ao ano
- Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

|           |              |
|-----------|--------------|
| <b>n</b>  | $1,03^n$     |
| <b>3</b>  | <b>1,093</b> |
| <b>6</b>  | <b>1,194</b> |
| <b>9</b>  | <b>1,305</b> |
| <b>12</b> | <b>1,426</b> |

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá

- A** escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
- B** escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
- C** escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.
- D** escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.
- E** escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

61. (Enem 2010) Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.



Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa, vez, utilizando 40% do espaço dela.

Uma representação possível para essa segunda situação é



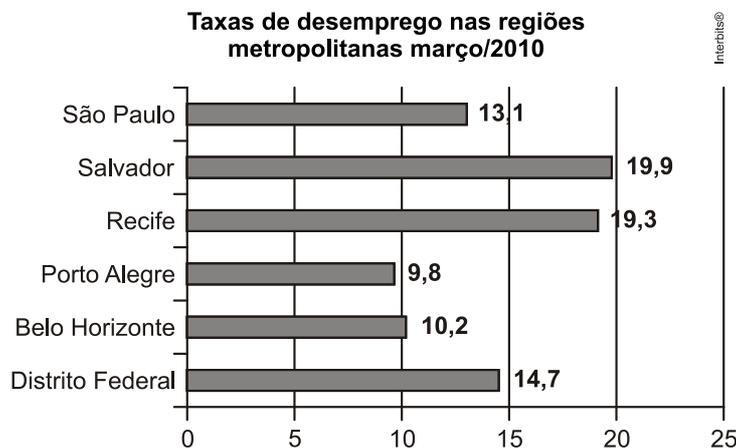
62. (Enem 2ª aplicação 2010) Em março de 2010, o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) reajustou os valores de bolsas de estudo concedidas a alunos de iniciação científica, que passaram a receber R\$ 360,00 mensais, um aumento de 20% com relação ao que era pago até então. O órgão concedia 29 mil bolsas de iniciação científica até 2009, e esse número aumentou em 48% em 2010.

*O Globo*, 11 mar. 2010.

Caso o CNPq decidisse não aumentar o valor dos pagamentos dos bolsistas, utilizando o montante destinado a tal aumento para incrementar ainda mais o número de bolsas de iniciação científica no país, quantas bolsas a mais que em 2009, aproximadamente, poderiam ser oferecidas em 2010?

- A 5,8 mil.
- B 13,9 mil.
- C 22,5 mil.
- D 51,5 mil.
- E 94,4 mil.

63. (Enem 2010) Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).



Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250 000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de

- A 24 500.
- B 25 000.
- C 220 500.
- D 223 000.
- E 227 500.

64. (Enem 2010) Uma empresa possui um sistema de controle de qualidade que classifica o seu desempenho financeiro anual, tendo como base o do ano anterior. Os conceitos são: **insuficiente**, quando o crescimento é menor que 1%; **regular**, quando o crescimento é maior ou igual a 1% e menor que 5%; **bom**, quando o crescimento é maior ou igual a 5% e menor que 10%; **ótimo**, quando é maior ou igual a 10% e menor que 20%; e **excelente**, quando é maior ou igual a 20%. Essa empresa apresentou lucro de R\$ 132 000,00 em 2008 e de R\$ 145 000,00 em 2009.

De acordo com esse sistema de controle de qualidade, o desempenho financeiro dessa empresa no ano de 2009 deve ser considerado

- A insuficiente.
- B regular.
- C bom.
- D ótimo.
- E excelente.

65. (Enem 2010) Em 2006, a produção mundial de etanol foi de 40 bilhões de litros e a de biodiesel, de 6,5 bilhões. Neste mesmo ano, a produção brasileira de etanol correspondeu a 43% da produção mundial, ao passo que a produção dos Estados Unidos da América, usando milho, foi de 45%.

Disponível em: planetasustentavel.abril.com. Acesso em: 02 maio 2009.

Considerando que, em 2009, a produção mundial de etanol seja a mesma de 2006 e que os Estados Unidos produzirão somente a metade de sua produção de 2006, para que o total produzido pelo Brasil e pelos Estados Unidos continue correspondendo a 88% da produção mundial, o Brasil deve aumentar sua produção em, aproximadamente,

- A 22,5%.
- B 50,0%.
- C 52,3%.
- D 65,5%.
- E 77,5%.

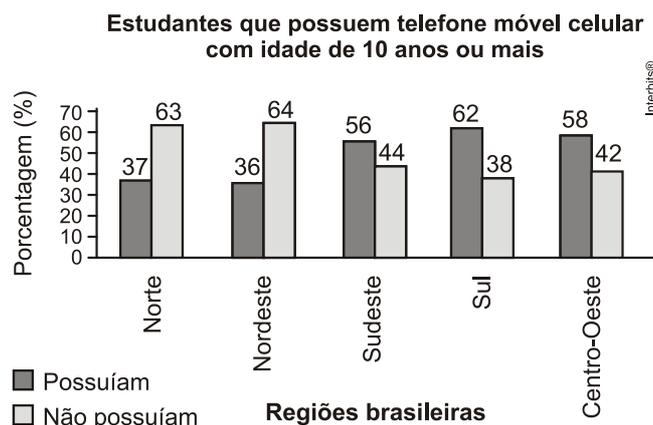
66. (Enem 2ª aplicação 2010) Uma bióloga conduziu uma série de experimentos demonstrando que a cana-de-açúcar mantida em um ambiente com o dobro da concentração atual de  $CO_2$  realiza 30% mais de fotossíntese e produz 30% mais de açúcar do que a que cresce sob a concentração normal de  $CO_2$ . Das câmaras que mantinham esse ar rico em gás carbônico, saíram plantas também mais altas e mais encorpadas, com 40% mais de biomassa.

Disponível em: <http://revistapesquisa.fapesp.br>. Acesso em: 26 set 2008.

Os resultados indicam que se pode obter a mesma produtividade de cana numa menor área cultivada. Nas condições apresentadas de utilizar o dobro da concentração de  $CO_2$  no cultivo para dobrar a produção da biomassa da cana-de-açúcar, a porcentagem da área cultivada hoje deveria ser, aproximadamente,

- A 80%.
- B 100%.
- C 140%.
- D 160%.
- E 200%.

67. (Enem 2010) Os dados do gráfico foram coletados por meio da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.

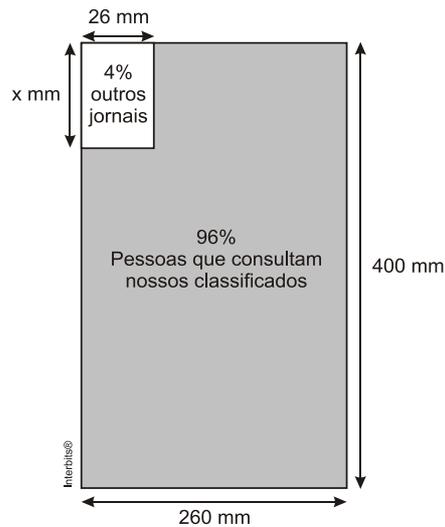


Fonte: IBGE. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br>. Acesso em: 28 abr. 2010(adaptado).

Supondo-se que, no Sudeste, 14900 estudantes foram entrevistados nessa pesquisa, quantos deles possuíam telefone móvel celular?

- A 5513
- B 6556
- C 7450
- D 8344
- E 9536

68. (Enem 2010) O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados.



Para que a propaganda seja fidedigna a porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de aproximadamente

- A 1 mm.
- B 10 mm.
- C 17 mm.
- D 160 mm.
- E 167 mm.

69. (Enem 2010) Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.

Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de

- A 16%.
- B 24%.
- C 32%.
- D 48%
- E 64%.

70. (Enem 2ª aplicação 2010) No dia 12 de janeiro de 2010, o governo da Venezuela adotou um plano de racionamento de energia que previa cortes no fornecimento em todo o país.

O ministro da energia afirmou que uma das formas mais eficazes de se economizar energia nos domicílios seria o uso de lâmpadas que consomem 20% menos da energia consumida por lâmpadas normais.

Disponível em: <http://www.bbc.co.uk>. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

Em uma residência, o consumo mensal de energia proveniente do uso de lâmpadas comuns é de 63 kWh. Se todas as lâmpadas dessa residência forem trocadas pelas lâmpadas econômicas, esse consumo passará a ser de, aproximadamente,

- A 9 kWh.
- B 11 kWh.
- C 22 kWh.
- D 35 kWh.
- E 50 kWh.

71. (Enem 2009) João deve 12 parcelas de R\$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R\$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R\$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado.

A opção que dá a João o menor gasto seria

- A** renegociar suas dívidas com o banco.
- B** pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.
- C** recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.
- D** pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.
- E** pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

72. (Enem cancelado 2009) A taxa anual de desmatamento na Amazônia é calculada com dados de satélite, pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), de 1º de agosto de um ano a 31 de julho do ano seguinte. No mês de julho de 2008, foi registrado que o desmatamento acumulado nos últimos 12 meses havia sido 64% maior do que no ano anterior, quando o INPE registrou 4.974 km<sup>2</sup> de floresta desmatada. Nesses mesmos 12 meses acumulados, somente o estado de Mato Grosso foi responsável por, aproximadamente, 56% da área total desmatada na Amazônia.

Jornal *O Estado de São Paulo*. Disponível em: <<http://www.estadao.com.br>>. Acesso em: 30 ago. 2008 (adaptado).

De acordo com os dados, a área desmatada sob a responsabilidade do estado do Mato Grosso, em julho de 2008, foi

- A** inferior a 2.500 km<sup>2</sup>.
- B** superior a 2.500 km<sup>2</sup> e inferior a 3.000 km<sup>2</sup>.
- C** superior a 3.000 km<sup>2</sup> e inferior a 3.900 km<sup>2</sup>.
- D** superior a 3.900 km<sup>2</sup> e inferior a 4.700 km<sup>2</sup>.
- E** superior a 4.700 km<sup>2</sup>.

73. (Enem simulado 2009) A cada ano, a Amazônia Legal perde, em média, 0,5% de suas florestas. O percentual parece pequeno, mas equivale a uma área de quase 5 mil quilômetros quadrados. Os cálculos feitos pelo Instituto do Homem e do Meio Ambiente da Amazônia (Imazon) apontam um crescimento de 23% na taxa de destruição da mata em junho de 2008, quando comparado ao mesmo mês do ano 2007. Aproximadamente 612 quilômetros quadrados de floresta foram cortados ou queimados em quatro semanas. Nesse ritmo, um hectare e meio (15 mil metros quadrados ou pouco mais de um campo de futebol) da maior floresta tropical do planeta é destruído a cada minuto. A tabela abaixo mostra dados das áreas destruídas em alguns Estados brasileiros.

| Estado      | Agosto/2006 a junho/2007 (km <sup>2</sup> ) | Agosto/2007 a junho/2008 (km <sup>2</sup> ) | Varição |
|-------------|---|---|---------|
| Acre        | 13  | 23  | 77%     |
| Amazonas    | 146   | 153   | 5%      |
| Mato Grosso | 2.436                                       | 2.074                                       | -14%    |
| Pará        | 1.322                                       | 1.936                                       | 46%     |
| Rondônia    | 381   | 452   | 19%     |
| Roraima     | 65  | 84  | 29%     |
| Tocantins   | 6   | 29  | 383%    |
| Total       | 4.370                                       | 4.754                                       | 9%      |

Correio Braziliense, 29 jul. 2008.

Supondo a manutenção desse ritmo de desmatamento nesses Estados, o total desmatado entre agosto de 2008 e junho de 2009, em valores aproximados, foi

- A inferior a 5.000 km<sup>2</sup>.
- B superior a 5.000 km<sup>2</sup> e inferior a 6.000 km<sup>2</sup>.
- C superior a 6.000 km<sup>2</sup> e inferior a 7.000 km<sup>2</sup>.
- D superior a 7.000 km<sup>2</sup> e inferior a 10.000 km<sup>2</sup>.
- E superior a 10.000 km<sup>2</sup>.

74. (Enem 2009) O gráfico a seguir mostra a evolução, de abril de 2008 a maio de 2009, da população economicamente ativa para seis Regiões Metropolitanas pesquisadas.



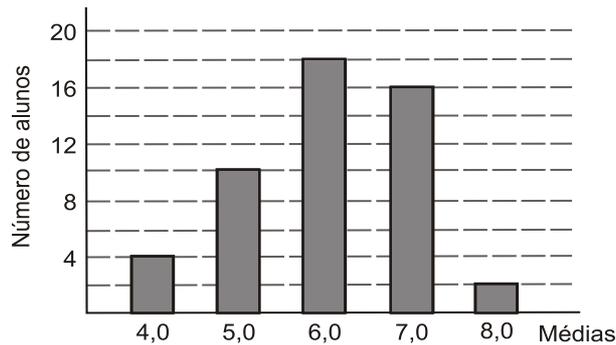
Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Mensal de Emprego.

Disponível em: [www.ibge.gov.br](http://www.ibge.gov.br).

Considerando que a taxa de crescimento da população economicamente ativa, entre 05/09 e 06/09, seja de 4%, então o número de pessoas economicamente ativas em 06/09 será igual a

- A 23.940.
- B 32.228.
- C 920.800.
- D 23.940.800.
- E 32.228.000.

75. (Enem cancelado 2009) Considere que as médias finais dos alunos de um curso foram representadas no gráfico a seguir.



Sabendo que a média para aprovação nesse curso era maior ou igual a 6,0, qual foi a porcentagem de alunos aprovados?

- A 18%
- B 21%
- C 36%
- D 50%
- E 72%

76. (Enem cancelado 2009) A empresa SWK produz um determinado produto  $x$ , cujo custo de fabricação é dado pela equação de uma reta crescente, com inclinação dois e de variável  $x$ . Se não tivermos nenhum produto produzido, a despesa fixa é de R\$ 7,00 e a função venda de cada unidade  $x$  é dada por

$$-2x^2 + 229,76x - 441,84.$$

Tendo em vista uma crise financeira, a empresa fez algumas demissões. Com isso, caiu em 12% o custo da produção de cada unidade produzida. Nessas condições, a função lucro da empresa pode ser expressa como

- A  $L(x) = -2x^2 + 228x - 448,00$
- B  $L(x) = -2x^2 + 227,76x - 448,84$
- C  $L(x) = -2x^2 + 228x - 441,84$
- D  $L(x) = -2x^2 + 229,76x - 441,84$
- E  $L(x) = -2x^2 + 227,76x - 448,96$

77. (Enem 2006) Não é nova a ideia de se extrair energia dos oceanos aproveitando-se a diferença das marés alta e baixa. Em 1967, os franceses instalaram a primeira usina "maré-motriz", construindo uma barragem equipada de 24 turbinas, aproveitando-se a potência máxima instalada de 240 MW, suficiente para a demanda de uma cidade com 200 mil habitantes. Aproximadamente 10% da potência total instalada são demandados pelo consumo residencial.

Nessa cidade francesa, aos domingos, quando parcela dos setores industrial e comercial para, a demanda diminui 40%. Assim, a produção de energia correspondente à demanda aos domingos será atingida mantendo-se

I. todas as turbinas em funcionamento, com 60% da capacidade máxima de produção de cada uma delas.

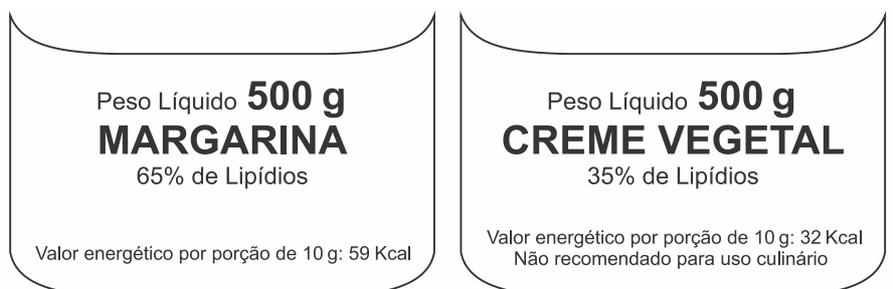
II. a metade das turbinas funcionando em capacidade máxima e o restante, com 20% da capacidade máxima.

III. quatorze turbinas funcionando em capacidade máxima, uma com 40% da capacidade máxima e as demais desligadas.

Está correta a situação descrita

- A** apenas em I.
- B** apenas em II.
- C** apenas em I e III.
- D** apenas em II e III.
- E** em I, II e III.

78. (Enem 2004) As "margarinas" e os chamados "cremes vegetais" são produtos diferentes, comercializados em embalagens quase idênticas. O consumidor, para diferenciar um produto do outro, deve ler com atenção os dizeres do rótulo, geralmente em letras muito pequenas. As figuras que seguem representam rótulos desses dois produtos.



Uma função dos lipídios no preparo das massas alimentícias é torná-las mais macias. Uma pessoa que, por desatenção, use 200 g de creme vegetal para preparar uma massa cuja receita pede 200 g de margarina, não obterá a consistência desejada, pois estará utilizando uma quantidade de lipídios que é, em relação à recomendada, aproximadamente

- A** o triplo.
- B** o dobro.
- C** a metade.
- D** um terço.
- E** um quarto.

79. (Enem 2003) A eficiência de anúncios num painel eletrônico localizado em uma certa avenida movimentada foi avaliada por uma empresa.

Os resultados mostraram que, em média:

- passam, por dia, 30000 motoristas em frente ao painel eletrônico;
- 40% dos motoristas que passam observam o painel;
- um mesmo motorista passa três vezes por semana pelo local.

Segundo os dados acima, se um anúncio de um produto ficar exposto durante sete dias nesse painel, é esperado que o número mínimo de motoristas diferentes que terão observado o painel seja

- A** 15000
- B** 28000
- C** 42000
- D** 71000
- E** 84000

80. (Enem 2003) O tabagismo (vício do fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que 90% dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e 80% dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1500 são casos diagnosticados de câncer, e 500 são casos diagnosticados de enfisema.

Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de fumantes desse grupo de 2000 pessoas é, aproximadamente:

- A** 740
- B** 1100
- C** 1310
- D** 1620
- E** 1750

81. (Enem 2002) A capa de uma revista de grande circulação trazia a seguinte informação, relativa a uma reportagem daquela edição:

"O brasileiro diz que é feliz na cama, mas debaixo dos lençóis 47% não sentem vontade de fazer sexo".

O texto a seguir, no entanto, adaptado da mesma reportagem, mostra que o dado acima está errado:

"Outro problema predominantemente feminino é a falta de desejo - 35% das mulheres não sentem nenhuma vontade de ter relações. Já entre os homens, apenas 12% se queixam de falta de desejo".

Considerando que o número de homens na população seja igual ao de mulheres, a porcentagem aproximada de brasileiros que não sentem vontade de fazer sexo, de acordo com a reportagem, é

- A** 12%.
- B** 24%.
- C** 29%.
- D** 35%.
- E** 50%.

82. (Enem 2001) Em um colégio, 40% da arrecadação das mensalidades correspondem ao pagamento dos salários dos seus professores. A metade dos alunos desse colégio é de estudantes carentes, que pagam mensalidades reduzidas. O diretor propôs um aumento de 5% nas mensalidades de todos os alunos para cobrir os gastos gerados por reajuste de 5% na folha de pagamento dos professores.

A associação de pais e mestres concorda com o aumento nas mensalidades, mas não com o índice proposto. Pode-se afirmar que

- A** o diretor fez um cálculo incorreto e o reajuste proposto nas mensalidades não é suficiente para cobrir os gastos adicionais.
- B** o diretor fez os cálculos corretamente e o reajuste nas mensalidades que ele propõe cobrirá exatamente os gastos adicionais.
- C** a associação está correta em não concordar com o índice proposto pelo diretor, pois a arrecadação adicional baseada nesse índice superaria em muito os gastos adicionais.
- D** a associação, ao recusar o índice de reajuste proposto pelo diretor, não levou em conta o fato de alunos carentes pagarem mensalidades reduzidas.
- E** o diretor deveria ter proposto um reajuste maior nas mensalidades, baseado no fato de que a metade dos alunos paga mensalidades reduzidas.

83. (Enem 2001) Nas últimas eleições presidenciais de um determinado país, onde 9% dos eleitores votaram em branco e 11% anularam o voto, o vencedor obteve 51% dos votos válidos. Não são considerados válidos os votos em branco e nulos.

Pode-se afirmar que o vencedor, de fato, obteve de todos os eleitores um percentual de votos da ordem de

- A** 38%.
- B** 41%.
- C** 44%.
- D** 47%.
- E** 50%.

84. (Enem 2000) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os pontos possíveis, é de R\$ 21.000,00 e esse valor não será reajustado nos próximos meses.

Ele tem R\$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deverá esperar:

- A** dois meses, e terá a quantia exata.
- B** três meses, e terá a quantia exata.
- C** três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$225,00.
- D** quatro meses, e terá a quantia exata.
- E** quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$430,00.

85. (Enem 2000) O Brasil, em 1997, com cerca de  $160 \times 10^6$  habitantes, apresentou um consumo de energia da ordem de 250.000 TEP (tonelada equivalente de petróleo), proveniente de diversas fontes primárias. O grupo com renda familiar de mais de vinte salários mínimos representa 5% da população brasileira e utiliza cerca de 10% da energia total consumida no país. O grupo com renda familiar de até três salários mínimos representa 50% da população e consome 30% do total de energia.

Com base nessas informações, pode-se concluir que o consumo médio de energia para um indivíduo do grupo de renda superior é X VEZES MAIOR do que para um indivíduo do grupo de renda inferior. O valor aproximado de x é:

- A 2,1.
- B 3,3.
- C 6,3.
- D 10,5.
- E 12,7.

86. (Enem 1998) Uma escola de ensino médio tem 250 alunos que estão matriculados na 1ª, 2ª ou 3ª série. 32% dos alunos são homens e 40% dos homens estão na 1ª série. 20% dos alunos matriculados estão na 3ª série, sendo 10 alunos homens. Dentre os alunos da 2ª série, o número de mulheres é igual ao número de homens.

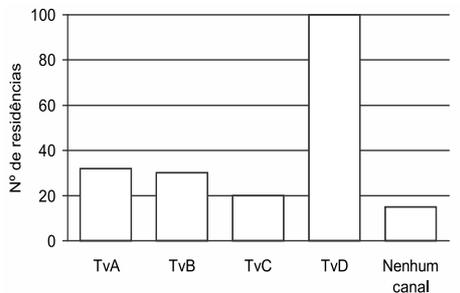
|        | 1ª    | 2ª    | 3ª    | Total     |
|--------|-------|-------|-------|-----------|
| Mulher | a     | b     | c     | a + b + c |
| Homem  | d     | e     | f     | d + e + f |
| Total  | a + d | b + e | c + f | 250       |

A tabela anterior pode ser preenchida com as informações dadas. O valor de a é:

- A 10
- B 48
- C 92
- D 102
- E 120

87. (Enem 1998) Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20h e 21h, durante uma determinada noite.

Os resultados obtidos estão representados no gráfico de barras a seguir:



A percentagem de entrevistados que declararam estar assistindo à TvB é APROXIMADAMENTE igual a:

- A 15%
- B 20%
- C 22%
- D 27%
- E 30%

**GABARITO**

| <b>QUESTÃO</b> | <b>ALTERNATIVA</b> |
|----------------|--------------------|
| 01             | A                  |
| 02             | D                  |
| 03             | C                  |
| 04             | D                  |
| 05             | D                  |
| 06             | D                  |
| 07             | A                  |
| 08             | B                  |
| 09             | E                  |
| 10             | B                  |
| 11             | A                  |
| 12             | D                  |
| 13             | C                  |
| 14             | D                  |
| 15             | A                  |
| 16             | E                  |
| 17             | D                  |
| 18             | D                  |
| 19             | A                  |
| 20             | E                  |
| 21             | D                  |
| 22             | A                  |
| 23             | C                  |
| 24             | A                  |
| 25             | A                  |
| 26             | B                  |
| 27             | B                  |
| 28             | D                  |
| 29             | A                  |
| 30             | D                  |
| 31             | B                  |
| 32             | C                  |
| 33             | D                  |
| 34             | C                  |
| 35             | A                  |
| 36             | A                  |
| 37             | C                  |
| 38             | B                  |
| 39             | C                  |
| 40             | C                  |
| 41             | B                  |
| 42             | C                  |
| 43             | B                  |

|    |   |
|----|---|
| 44 | A |
| 45 | B |
| 46 | B |
| 47 | D |
| 48 | D |
| 49 | E |
| 50 | B |
| 51 | D |
| 52 | C |
| 53 | E |
| 54 | C |
| 55 | A |
| 56 | D |
| 57 | D |
| 58 | C |
| 59 | D |
| 60 | C |
| 61 | C |
| 62 | C |
| 63 | A |
| 64 | C |
| 65 | C |
| 66 | C |
| 67 | D |
| 68 | D |
| 69 | B |
| 70 | E |
| 71 | E |
| 72 | D |
| 73 | B |
| 74 | D |
| 75 | E |
| 76 | A |
| 77 | E |
| 78 | C |
| 79 | B |
| 80 | E |
| 81 | B |
| 82 | C |
| 83 | B |
| 84 | C |
| 85 | B |
| 86 | C |
| 87 | A |

# PROGRESSÃO ARITMÉTICA



**A**NDERSON  
MATEMÁTICA



## PROGRESSÃO ARITMÉTICA

### DEFINIÇÃO

O título desse assunto diz muito sobre ele, progressão significa progredir, avançar, continuar, ir para frente, já aritmética remete à média aritmética. Então, progressão aritmética é uma sequência em que temos que progredir calculando médias aritméticas. Numa P.A., cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética dos seus vizinhos.

P.A. (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...)

Perceba que 5 é a média aritmética entre 2 e 8:

$$MA_{2,8} = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Quando avançamos para o 8, ele passa a ser a média aritmética entre 5 e 11:

$$MA_{5,11} = \frac{5 + 11}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

E isso acontece sempre que avançamos para o próximo termo, o 11 é a média aritmética entre 8 e 14:

$$MA_{8,14} = \frac{8 + 14}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

Em uma P.A., a partir do segundo, o termo do meio é a média aritmética de seu anterior e seu posterior:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Se partirmos da expressão acima, perceberemos que calcular uma média aritmética é o mesmo que perceber que a diferença entre um termo e seu anterior é sempre constante:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

$$a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = r$$

Perceba que na P.A. (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...) que estamos trabalhando,

$$5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 17 - 14 = \dots = 3$$

Em uma P.A., a partir do segundo termo, a diferença entre um termo e seu anterior é sempre constante. Essa diferença é chamada de razão  $r$  da P.A..

$$r = a_n - a_{n-1}$$

A informação acima é muito importante por facilitar a obtenção dos termos da P.A.

Na P.A. (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...) que estamos trabalhando, a razão é igual a três, isso significa que para obter os próximos termos, basta somarmos 3. Qual o próximo termo depois de 17? Será 20 pois  $17 + 3 = 20$ , e depois de 20? Será  $23 = 20 + 3$ . E assim por diante:

$$\text{P.A. (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ...)}$$

$\overset{+3}{\curvearrowright} \overset{+3}{\curvearrowright} \overset{+3}{\curvearrowright} \overset{+3}{\curvearrowright} \overset{+3}{\curvearrowright} \overset{+3}{\curvearrowright} \overset{+3}{\curvearrowright}$

Em uma P.A., para encontrar os próximos termos, basta adicionarmos a razão.

### TERMO GERAL DA P.A.

Vamos fazer uma análise mais apurada dos termos da P.A. para que possamos descobrir mais algumas relações entre os termos:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2 = 2 + 0 \times 3 \\
 a_2 &= 5 = 2 + 3 = 2 + 1 \times 3 \\
 a_3 &= 8 = 2 + 3 + 3 = 2 + 2 \times 3 \\
 a_4 &= 11 = 2 + 3 + 3 + 3 = 2 + 3 \times 3 \\
 a_5 &= 14 = 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = 2 + 4 \times 3 \\
 a_6 &= 17 = 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 2 + 5 \times 3 \\
 a_7 &= 20 = 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 2 + 6 \times 3 \\
 a_8 &= 23 = 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 2 + 7 \times 3
 \end{aligned}$$

Primeiro, observe os números circulos em verde, todos os termos da nossa P.A. começam com 2, que é considerado o primeiro termo da P.A., agora, observe que os números em laranja que estão à sua direita, representam a quantidade de razões que foram utilizadas para chegar no termo, perceba também que o número circulado em laranja à direita é sempre uma unidade menor do que a posição do termo que queremos encontrar (número em laranja à sua esquerda), finalmente, atente para os números em azul, eles representam a razão da P.A.. Baseado nisso, podemos estabelecer uma expressão para encontrar os termos de uma P.A.. levando em consideração a sua posição:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times r$$

↓
↓
↓
↓

Termo que queremos encontrar
Primeiro termo da P.A.
Uma unidade a menos do que a posição
razão da P.A.

Essa fórmula nos obriga a sempre começarmos pelo primeiro termo, por exemplo:

- Dada a P.A.(3, 7, 11, ...), qual é o décimo termo?

Nessa P.A., o primeiro termo é 3,  $a_1 = 3$ , e a razão é 4,  $r = 4$ . Para encontrarmos o décimo termo, utilizaremos a fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times r$$

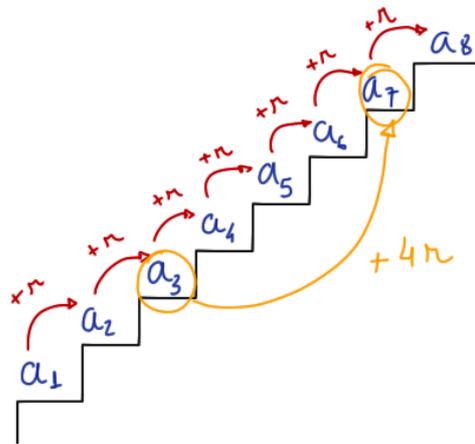
$$a_{10} = 3 + (10 - 1) \times 4$$

$$a_{10} = 3 + 9 \times 4$$

$$a_{10} = 3 + 36$$

$$a_{10} = 39$$

Gosto muito de associar cada termo da P.A. a um degrau de uma escada:



Isso nos permite partir de qualquer degrau e chegar onde queremos, na ilustração acima, percebemos que de  $a_3$  para  $a_7$ , subimos 4 degraus e por isso, devemos somar 4 razões, daí:

$$a_7 = a_3 + 4r$$

Com essas informações podemos estabelecer algumas relações:

Do segundo ao oitavo termo, subimos seis degraus, daí  $a_8 = a_2 + 6r$ .

Do quarto ao nono termo, subimos cinco degraus, daí  $a_9 = a_4 + 5r$ .

Do sétimo ao décimo termo, subimos três degraus, daí  $a_{10} = a_7 + 3r$ .

Até agora, apenas subimos os degraus, agora vamos descer?

Do quinto ao terceiro termo, descemos dois degraus, daí  $a_3 = a_5 - 2r$ .

Do sétimo ao segundo termo, descemos cinco degraus, daí  $a_2 = a_7 - 5r$ .

Do oitavo ao quarto termo, descemos quatro degraus, daí  $a_4 = a_8 - 4r$ .

Com isso, estamos prontos para iniciar de qualquer termo e chegar onde quisermos!

$$a_8 = a_2 + 6r$$

$$a_9 = a_4 + 5r$$

$$a_{10} = a_7 + 3r$$

$$a_3 = a_5 - 2r$$

$$a_2 = a_7 - 5r$$

$$a_4 = a_8 - 4r$$

Observe que a soma dos dois números em laranja resulta na posição que queremos chegar! Atente para essa propriedade para que você possa ter mais agilidade quando quiser encontrar um termo da P.A..

$$a_n = a_k + (n - k) \times r$$

Não é necessário decorar a expressão acima, basta entender como funciona a escada com os degraus e saber de onde você vai sair e onde você quer chegar! Vejamos um exemplo:

• Durante o ano de 2018, a quantidade de sapatos produzidos por uma fábrica em um mês é sempre 200 unidades a mais que o mês anterior, se em março foram produzidos 1600 sapatos, quantas unidades foram produzidas no mês de outubro?

Devemos considerar março como sendo o terceiro mês do ano e outubro como sendo o décimo, do terceiro para o décimo termo, devemos subir 7 degraus, então:

$$a_{10} = a_3 + 7r$$

Portanto, a produção em outubro será:

$$a_{10} = 1600 + 7 \times 200$$

$$a_{10} = 1600 + 1400$$

$$a_{10} = 3000$$

Uma produção de 3000 sapatos!

Pronto para exercitar?

**QUESTÕES - TERMO GERAL DA P.A.**

1. (Enem 2018) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1.380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R\$ 8.000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é

- A** R\$ 512.000,00.
- B** R\$ 520.000,00.
- C** R\$ 528.000,00.
- D** R\$ 552.000,00.
- E** R\$ 584.000,00.

2. (Enem (Libras) 2017) A figura ilustra uma sequência de formas geométricas formadas por palitos, segundo uma certa regra.



Continuando a sequência, segundo essa mesma regra, quantos palitos serão necessários para construir o décimo termo da sequência?

- A** 30
- B** 39
- C** 40
- D** 43
- E** 57

3. (Enem 2ª aplicação 2016) Com o objetivo de trabalhar a concentração e a sincronia de movimentos dos alunos de uma de suas turmas, um professor de educação física dividiu essa turma em três grupos (A, B e C) e estipulou a seguinte atividade: os alunos do grupo A deveriam bater palmas a cada 2 s, os alunos do grupo B deveriam bater palmas a cada 3 s e os alunos do grupo C deveriam bater palmas a cada 4 s.

O professor zerou o cronômetro e os três grupos começaram a bater palmas quando ele registrou 1 s. Os movimentos prosseguiram até o cronômetro registrar 60 s.

Um estagiário anotou no papel a sequência formada pelos instantes em que os três grupos bateram palmas simultaneamente.

Qual é o termo geral da sequência anotada?

- A**  $12n$ , com  $n$  um número natural, tal que  $1 \leq n \leq 5$ .
- B**  $24n$ , com  $n$  um número natural, tal que  $1 \leq n \leq 2$ .
- C**  $12(n-1)$ , com  $n$  um número natural, tal que  $1 \leq n \leq 6$ .
- D**  $12(n-1) + 1$ , com  $n$  um número natural, tal que  $1 \leq n \leq 5$ .
- E**  $24(n-1) + 1$ , com  $n$  um número natural, tal que  $1 \leq n \leq 3$ .

4. (Enem 2016) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro.

Qual é o número de andares desse edifício?

- A** 40
- B** 60
- C** 100
- D** 115
- E** 120

5. (Enem 2011) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

- A** 38 000
- B** 40 500
- C** 41 000
- D** 42 000
- E** 48 000

6. (Enem 2ª aplicação 2010) Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.

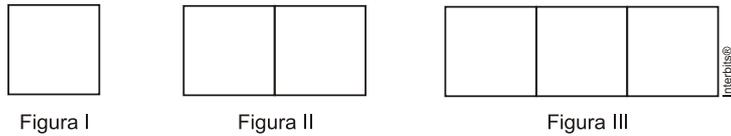
Disponível em: <http://www.webrun.com.br>. Acesso em: 28 abr. 2010.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino.

Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,

- A** 12 dias.
- B** 13 dias.
- C** 14 dias.
- D** 15 dias.
- E** 16 dias.

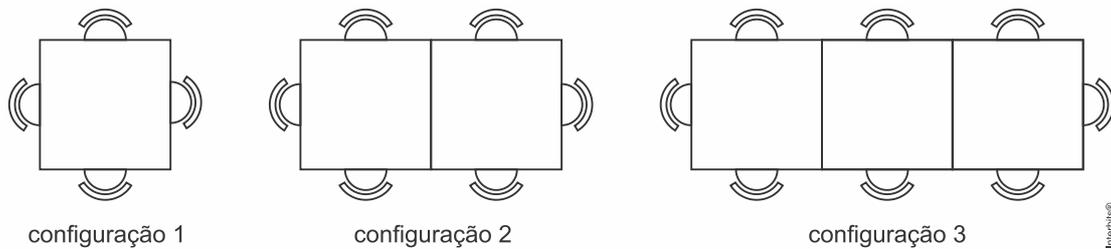
7. (Enem 2010) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.



Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

- A  $C = 4Q$
- B  $C = 3Q + 1$
- C  $C = 4Q - 1$
- D  $C = Q + 3$
- E  $C = 4Q - 2$

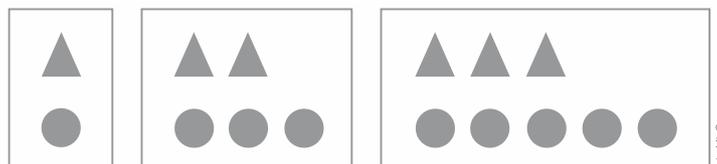
8. (CMRJ 2018) Observe, na figura abaixo, a quantidade de mesas e o número máximo de lugares disponíveis em cada configuração:



Considere que a sequência de configurações continue, segundo o padrão apresentado. Então, a soma dos algarismos do número máximo de lugares disponíveis em uma configuração com 75 mesas é igual a

- A 14.
- B 12.
- C 10.
- D 8.
- E 6.

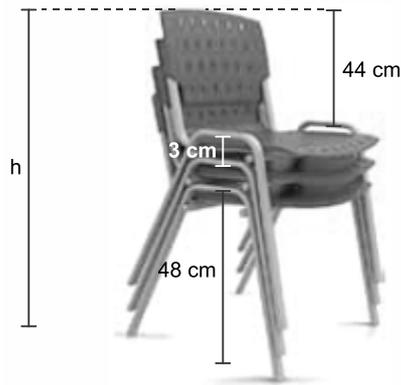
9. (IMED 2018) Uma garota decidiu brincar com seus carimbos e, em pedaços de papel, criou uma sequência de figuras.



Quantos triângulos e quantos círculos haverá na vigésima figura se a garota mantiver o padrão da sequência ilustrada.

- A 400 círculos e 210 triângulos
- B 210 círculos e 400 triângulos
- C 40 círculos e 19 triângulos
- D 20 círculos e 39 triângulos
- E 39 círculos e 20 triângulos

10. (Unesp 2017) A figura indica o empilhamento de três cadeiras idênticas e perfeitamente encaixadas umas nas outras, sendo  $h$  a altura da pilha em relação ao chão.



(www.habto.com. Adaptado.)

A altura, em relação ao chão, de uma pilha de  $n$  cadeiras perfeitamente encaixadas umas nas outras, será igual a 1,4 m se  $n$  for igual a

- A 14.
- B 17.
- C 13.
- D 15.
- E 18.

11. (IFBA 2017) A Meia Maratona Shopping da Bahia Farol a Farol foi criada pela Personal Club e mais uma vez contará com a parceria do Shopping da Bahia.

Tradicional no mês de outubro, a maior e mais esperada corrida de rua da Bahia, que já se encontra em sua sexta edição e será realizada nos percursos de 5 km, 10 km e 21 km, com largada no Farol de Itapuã e chegada no Farol da Barra, dois dos principais cartões postais da cidade de Salvador.

Extraído de: <http://www.meiamaratonafarolafarol.com.br/> em 26/08/2016

Um atleta, planejando percorrer o percurso de 21 km, fez um plano de treinamento, que consistia em correr 1.000 m no primeiro dia e, a cada dia subsequente, percorreria a distância do dia anterior acrescida de 400 m. Sendo assim, esse atleta irá atingir a distância diária de 21 km no

- A 54° dia
- B 53° dia
- C 52° dia
- D 51° dia
- E 50° dia

12. (Fatec 2017) Leia o texto publicado em maio de 2013 para responder à questão a seguir.

### Os Estados Unidos se preparam para uma invasão de insetos após 17 anos

Elas vivem a pelo menos 20 centímetros sob o solo há 17 anos. E neste segundo trimestre, bilhões de cigarras (*Magicalada septendecim*) emergirão para invadir partes da Costa Leste, enchendo os céus e as árvores, e fazendo muito barulho.

Há mais de 170 espécies de cigarras na América do Norte, e mais de 2 mil espécies ao redor do mundo. A maioria aparece todos os anos, mas alguns tipos surgem a cada 13 ou 17 anos. Os visitantes deste ano, conhecidos como *Brood II* (Ninhada II, em tradução livre) foram vistos pela última vez em 1996. Os moradores da Carolina do Norte e de Connecticut talvez tenham de usar rastelos e pás para retirá-las do caminho, já que as estimativas do número de insetos são de 30 bilhões a 1 trilhão.

Um estudo brasileiro descobriu que intervalos baseados em números primos ofereciam a melhor estratégia de sobrevivência para as cigarras.

<<http://tinyurl.com/zh8daj6>> Acesso em: 30.08.2016. Adaptado.

Com relação à Ninhada II, e adotando o ano de 1996 como o 1º termo ( $a_1$ ) de uma Progressão Aritmética, a expressão algébrica que melhor representa o termo geral ( $a_n$ ) da sequência de anos em que essas cigarras sairão à superfície, é dada por

- A  $a_n = 17 \cdot n + 1979$
- B  $a_n = 17 \cdot n + 1998$
- C  $a_n = 17 \cdot n + 2013$
- D  $a_n = 1996 \cdot n + 17$
- E  $a_n = 1979 \cdot n + 17$

13. (IFSUL 2016) Um maratonista registrou os seus tempos, em segundos, para um mesmo percurso, durante 1 semana, que foram: (20, 18, 16, 14, 12, 10, 8).

Essa sequência numérica representa uma progressão de que tipo?

- A Geométrica crescente.
- B Geométrica decrescente.
- C Aritmética crescente.
- D Aritmética decrescente.

14. (UEG 2016) No primeiro semestre de 2015, a empresa “Aço Firme” fabricou 28.000 chapas metálicas em janeiro; em fevereiro sua produção começou a cair como uma progressão aritmética decrescente, de forma que em julho a sua produção foi de 8.800 chapas.

Nessas condições, a produção da empresa nos meses de maio e junho totalizou

- A 33.600 chapas
- B 32.400 chapas
- C 27.200 chapas
- D 24.400 chapas
- E 22.600 chapas

15. (UDESC 2016) Nos jogos Pan-americanos de 2015, o Brasil ficou com o terceiro lugar no quadro geral de medalhas, conforme apresentado na Tabela.

| Tabela - Número de Medalhas obtidas no PAN/2015 |        |      |       |        |       |
|---|--------|------|-------|--------|-------|
| Lugar   | País   | Ouro | Prata | Bronze | Total |
| 1°  | EUA    | 103  | 81    | 81     | 265   |
| 2°  | Canadá | A    | B     | 70     | 217   |
| 3°  | Brasil | 41   | 40    | C      | 141   |

Sabe-se que a diferença entre o número total de medalhas obtidas pelo Brasil e o número de medalhas de ouro dos EUA é igual ao número de medalhas de ouro obtidas pelo Canadá menos o número de medalhas de prata obtidas pelo Brasil.

Então, nesta ordem, com relação aos números A, B e C, indicados na Tabela 1, é **correto** afirmar que:

- A** formam uma progressão aritmética crescente.
- B** formam uma progressão geométrica crescente.
- C** formam uma progressão aritmética decrescente.
- D** formam uma progressão geométrica decrescente.
- E** não formam progressão aritmética nem progressão geométrica.

16. (IFSUL 2015) Uma das maneiras mais utilizadas para expor latas de produtos nos supermercados é o empilhamento, formando uma torre, conforme figura abaixo.



Suponha que, ao fazer um empilhamento, tenham sido utilizadas 100 latas na base. E, em cada fileira seguinte, sejam sempre utilizadas 8 latas a menos que na fileira inferior.

A quantidade máxima de fileiras e latas na fileira do topo que esse empilhamento pode ter são, respectivamente,

- A** 8 e 6
- B** 9 e 1
- C** 13 e 4
- D** 14 e 4

17. (UERJ 2015)

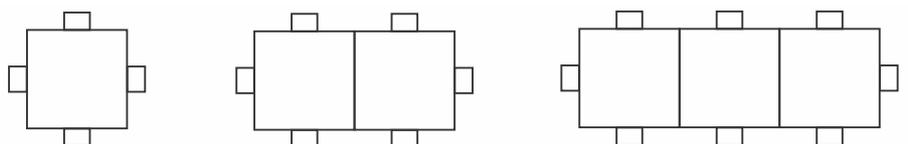


Na situação apresentada nos quadrinhos, as distâncias, em quilômetros,  $d_{AB}$ ,  $d_{BC}$  e  $d_{CD}$  formam, nesta ordem, uma progressão aritmética.

O vigésimo termo dessa progressão corresponde a

- A -50
- B -40
- C -30
- D -20

18. Observe na figura a forma de se arrumar mesas e cadeiras.



O número de cadeiras necessárias quando se chegar a 50 mesas será

- A 102.
- B 104.
- C 106.
- D 108.

19. (UPE 2014) Um triângulo UPE é retângulo, as medidas de seus lados são expressas, em centímetros, por números naturais e formam uma progressão aritmética de razão 5.

Quanto mede a área do triângulo UPE?

- A  $15 \text{ cm}^2$
- B  $25 \text{ cm}^2$
- C  $125 \text{ cm}^2$
- D  $150 \text{ cm}^2$
- E  $300 \text{ cm}^2$

20. (FMP 2014) Os valores de três resistores formam uma progressão aritmética. As resistências equivalentes quando os três são ligados em série e quando os três são ligados em paralelo são, respectivamente,  $15 \Omega$  e  $\frac{40}{33} \Omega$ .

Multiplicando-se os números que correspondem aos valores desses três resistores obtém-se

- A 45
- B 80
- C 105
- D 120
- E 125

21. (UFMS 2014) As doenças cardiovasculares são a principal causa de morte em todo mundo. De acordo com os dados da Organização Mundial da Saúde, 17,3 milhões de pessoas morreram em 2012, vítimas dessas doenças. A estimativa é que, em 2030, esse número seja de 23,6 milhões.

Suponha que a estimativa para 2030 seja atingida e considere  $(a_n)$  a sequência que representa o número de mortes (em milhões de pessoas) por doenças cardiovasculares no mundo, com  $n=1$  correspondendo a 2012, com  $n=2$  correspondendo a 2013 e assim por diante.

Se  $(a_n)$  é uma progressão aritmética, então o 8º termo dessa sequência, em milhões de pessoas, é igual a

- A 19,59.
- B 19,61.
- C 19,75.
- D 20,10.
- E 20,45.

22. (UDESC 2013) Um professor de matemática, após corrigir uma prova aplicada em uma turma de 30 alunos, percebeu as seguintes peculiaridades em relação às notas atribuídas:

- cada aluno obteve uma nota diferente;
- a maior nota alcançada foi 9,2;
- ordenando as notas em uma escala crescente, a diferença entre quaisquer duas notas consecutivas foi 0,3.

Com base nessas informações, pode-se afirmar que o número de alunos desta turma que não alcançou, nesta prova, nota igual ou superior a 6,0 é igual a:

- A 9
- B 11
- C 19
- D 21
- E 12

**SOMA DOS TERMOS DE UMA P.A.**



Gauss

A história desta SOMA começa na Alemanha, por volta de 1785, na escola de Braunschweig. Conta-se que o professor Büttner resolveu manter os alunos de uma classe de ensino fundamental ocupados e propôs que eles calculassem a soma de todos os inteiros de 1 a 100.

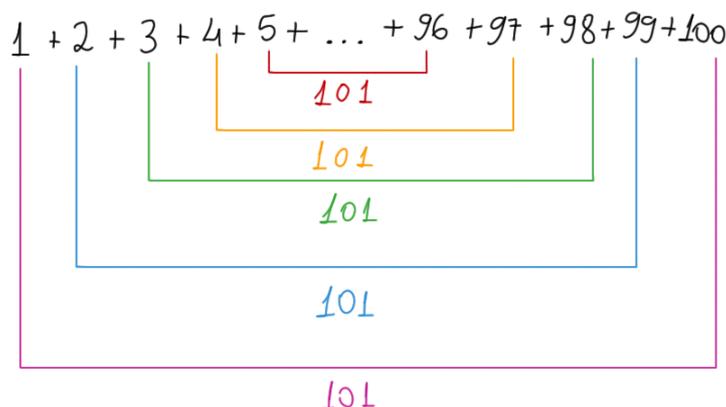
$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

Aparentemente, ele esperava que eles passassem bastante tempo resolvendo tal exercício. E para a surpresa de todos, em poucos minutos um aluno de aproximadamente 8 anos deu a resposta (e correta): 5.050. Esse menino era Karl Friedrich Gauss, que viveu entre 1777 e 1855. É um dos casos mais espantosos de precocidade registrados na história da matemática, contando-se que já aos três anos de idade era capaz de efetuar algumas operações aritméticas.

E foi Büttner que, auxiliado por seu assistente (Bartels), conduziu Gauss aos seus estudos de Aritmética aos 10 anos de idade. É por muitos considerado um dos maiores matemáticos que já existiram, razão pela qual também é conhecido como o “Príncipe da Matemática”.

Para isso, Gauss observou que, ao somarmos o primeiro número da sequência com o último, obtemos o resultado de 101, e que, ao somarmos o segundo número com o penúltimo, também obtemos 101 como resultado e assim por diante.

Vejamos o esquema abaixo para melhor compreensão:



Esquema que representa a ideia da Soma de Gauss

Pela imagem anterior, podemos ver que cada número irá se associar a outro que está em posição oposta a si, e a soma de ambos será sempre 101.

Repetindo esse processo, chegará o momento em que somaremos os números centrais da sequência e encontraremos que  $50 + 51 = 101$ .

Assim sendo, em vez de somarmos os cem números da sequência, deveremos apenas somar os cinquenta pares de números obtidos, ou seja:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$S_{100} = \underbrace{\overbrace{1+100}^{\widehat{101}} + \overbrace{2+99}^{\widehat{101}} + \overbrace{3+98}^{\widehat{101}} + \dots + \overbrace{48+53}^{\widehat{101}} + \overbrace{49+52}^{\widehat{101}} + \overbrace{50+51}^{\widehat{101}}}_{50 \text{ vezes}}$$

$$S = 50 \times 101$$

$$S = 5050$$

Portanto, através dessa ideia, Gauss conseguiu calcular rapidamente a soma de todos os números inteiros entre 1 e 100, obtendo o resultado de 5050.

É importante perceber que apesar de existirem 100 termos na sequência, ao juntarmos o primeiro com o último, o segundo com o penúltimo, ... apenas 50 pares são formados, por isso, multiplicamos 101 por 50 e não por 100.

Partindo da ideia de Gauss, podemos chegar ao caso geral para encontrar a soma dos termos de uma PA finita:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Devemos somar o primeiro termo com o último ( $a_1 + a_n$ ), somar o segundo com o penúltimo ( $a_2 + a_{n-1}$ ), o terceiro com o antepenúltimo ( $a_3 + a_{n-2}$ ), e assim por diante.

Assim como Gauss havia percebido, os pares somados resultarão no mesmo valor, nesse caso ( $a_1 + a_n$ ).

Agora, lembre-se, existindo  $n$  termos na sequência, formaremos  $\frac{n}{2}$  pares. Portanto, devemos multiplicar ( $a_1 + a_n$ ) por  $\frac{n}{2}$  para encontrar a soma dos  $n$  termos da PA.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{\frac{n}{2} \text{ vezes}}$$

$$S_n = (a_1 + a_n) \times \frac{n}{2}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

Sintetizando, para obter a soma dos  $n$  primeiros termos de uma PA, basta somarmos o primeiro termo da sequência ao último, multiplicar pela quantidade de termos da sequência e finalmente dividir o resultado por dois.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

## Texto Complementar

**Paciência** é um jogo de cartas para um só jogador. É um jogo muito famoso sobretudo por causa de uma versão para o sistema operacional Microsoft Windows, que é considerada um dos jogos para computador mais populares de todos os tempos e o videogame mais jogado no mundo inteiro. A variante de Paciência usada pelo Windows é conhecida especificamente por "Klondike", referindo-se à região canadense onde ocorria uma febre do ouro no século 19.



Utiliza-se um baralho completo, 52 cartas. Deve-se fazer um monte com 7 cartas e colocá-lo virado para baixo na mesa, depois um com seis cartas colocado da mesma forma à esquerda do primeiro, e assim sucessivamente até um último monte de apenas uma carta.

O restante das cartas passa a ser o monte de compra. Esses podem ser chamados de *montes de organização*. Também devem ser reservados 4 espaços para a fase final do jogo, a *montagem*.

Vira-se a primeira carta de cada monte, exceto o de compra, totalizando sete cartas reveladas.

Se desejássemos saber quantas cartas compõem o monte de compra do jogo paciência (antes que o jogo seja iniciado), como faríamos?



Calcularemos, inicialmente, a quantidade de cartas que existem nas sete colunas principais. Perceba que temos uma carta na primeira coluna, duas na segunda, três na terceira, quatro na quarta, cinco na quinta, seis na sexta e finalmente sete na sétima.

Logo o total de cartas nas colunas é

$$T = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

Lembre-se, basta somarmos o primeiro termo ao último, multiplicarmos pela quantidade de termos e finalmente dividir por dois.

$$S_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$S_7 = \frac{\left( \begin{array}{c} \text{primeiro termo} \\ \hat{1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{último termo} \\ \hat{7} \end{array} \right) \times \begin{array}{c} \text{qtde de termos} \\ \hat{7} \end{array}}{2}$$

$$S_7 = \frac{(1 + 7) \times 7}{2}$$

$$S_7 = \frac{8 \times 7}{2}$$

$$S_7 = \frac{56}{2}$$

$$S_7 = 28$$

Portanto, 28 é a total de cartas que compõem as colunas.

Como existem 52 cartas no baralho e 28 nas sete colunas, restam  $52 - 28 = 24$  cartas no monte de compra.

Agora que você já sabe como calcular a soma de todos os termos de uma progressão aritmética, vamos exercitar?

**QUESTÕES - SOMA DOS TERMOS DE UMA P.A.**

23. (Enem PPL 2014) Um ciclista participará de uma competição e treinará alguns dias da seguinte maneira: no primeiro dia, pedalará 60 km; no segundo dia, a mesma distância do primeiro mais  $r$  km; no terceiro dia, a mesma distância do segundo mais  $r$  km; e, assim, sucessivamente, sempre pedalando a mesma distância do dia anterior mais  $r$  km. No último dia, ele deverá percorrer 180 km, completando o treinamento com um total de 1560 km.

A distância  $r$  que o ciclista deverá pedalar a mais a cada dia, em km, é

- A** 3.
- B** 7.
- C** 10.
- D** 13.
- E** 20.

24. (Enem 2013) As projeções para a produção de arroz no período de 2012–2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

| Ano  | Projeção da produção (t) |
|------|--------------------------|
| 2012 | 50,25                    |
| 2013 | 51,50                    |
| 2014 | 52,75                    |
| 2015 | 54,00                    |

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

- A** 497,25.
- B** 500,85.
- C** 502,87.
- D** 558,75.
- E** 563,25.

25. (Enem 2012) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas.

A quantidade de cartas que forma o monte é

- A** 21.
- B** 24.
- C** 26.
- D** 28.
- E** 31.

26. (Enem 2ª aplicação 2010) O trabalho em empresas de exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal. Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.



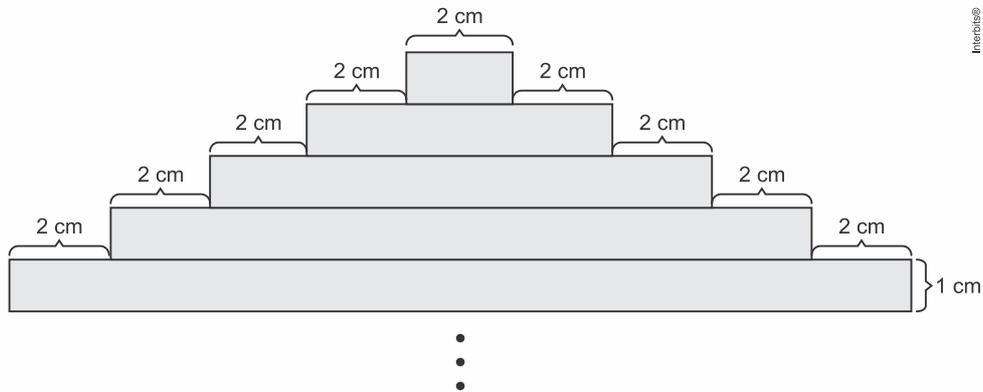
Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

- Funcionário I: aproximadamente 200 estrelas.
- Funcionário II: aproximadamente 6 000 estrelas.
- Funcionário III: aproximadamente 12 000 estrelas.
- Funcionário IV: aproximadamente 22 500 estrelas.
- Funcionário V: aproximadamente 22 800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

- A** I
- B** II
- C** III
- D** IV
- E** V

27. (Unesp 2018) A figura mostra cinco retângulos justapostos de uma sequência. Todos os retângulos possuem mesma altura, igual a 1 cm.



Sabendo que 1 m<sup>2</sup> equivale a 10.000 cm<sup>2</sup> e que a sequência é constituída por 100 retângulos, a figura formada tem área igual a

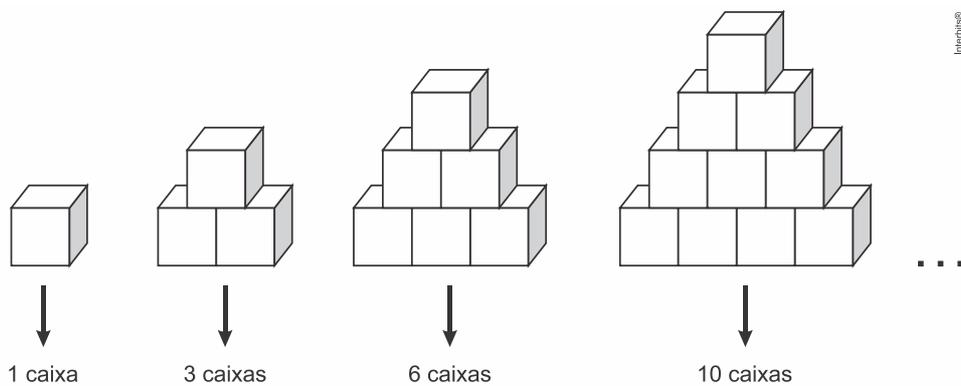
- A** 2,5 m<sup>2</sup>
- B** 4,0 m<sup>2</sup>
- C** 5,0 m<sup>2</sup>
- D** 2,0 m<sup>2</sup>
- E** 4,5 m<sup>2</sup>

28. (IFAL 2018) Em um grupo de 10 crianças, certo número de bombons foi distribuído para cada uma, em uma progressão aritmética crescente, da criança de menor estatura para a de maior estatura. Se colocarmos as crianças nessa ordem, perceberemos que a terceira criança ganhou 7 bombons e a oitava ganhou 17.

Quantos bombons foram distribuídos?

- A 100.
- B 110.
- C 120.
- D 130.
- E 140.

29. (ACAFE 2018) Uma famosa rede de supermercados resolve fazer uma grande promoção de determinado produto. Para tanto, resolve organizar os produtos de maneira a formar pilhas em uma sequência, conforme indica a figura a seguir. Cada cubo, na figura, corresponde a um produto.



Pretende-se continuar construindo a sequência até a vigésima quarta pilha de produtos. Quantos produtos serão necessários para formar a **última** pilha de produtos dessa sequência?

- A 360
- B 240
- C 320
- D 300

30. (Uerj 2017) Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

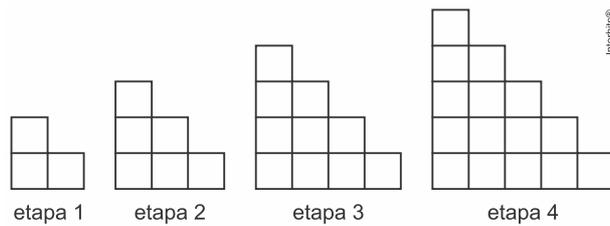
- primeiro dia - corrida de 6 km;
- dias subsequentes - acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

- A 414
- B 438
- C 456
- D 484

31. (UFRGS 2017) Quadrados iguais de lado 1 são justapostos, segundo padrão representado nas figuras das etapas abaixo.



Mantido esse padrão de construção, o número de quadrados de lado 1, existentes na figura da etapa 100, é

- A 1.331.
- B 3.050.
- C 5.050.
- D 5.100.
- E 5.151.

32. (PUCRS 2017) A distribuição de pontos em cada uma das figuras abaixo segue um padrão de construção.



Seguindo esse mesmo padrão, a soma dos pontos distribuídos em todas as figuras até a Figura 30 será igual a

- A 61
- B 183
- C 210
- D 930
- E 960

33. (IFPE 2017) Pedro começou a programar uma viagem para janeiro de 2018 e, para isso, resolveu juntar dinheiro durante todo o ano de 2017. Em janeiro de 2017, Pedro guardou R\$ 100,00; em fevereiro, guardou R\$ 180,00; em março, R\$ 260,00; e foi juntando, a cada mês, uma quantia com R\$ 80,00 a mais que o mês anterior, até dezembro de 2017.

Economizando dessa forma, em 12 meses, Pedro conseguiu poupar um total de

- A R\$ 4.600,00.
- B R\$ 5.500,00.
- C R\$ 6.480,00.
- D R\$ 7.540,00.
- E R\$ 3.780,00.

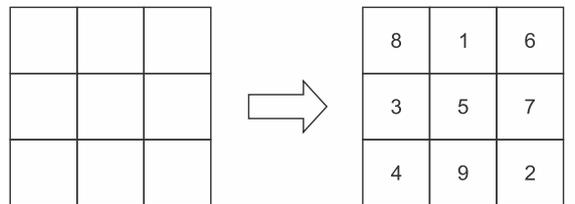
34. (IFAL 2017) Ao saber que a esposa estava grávida, um homem passa a armazenar latas de leite no quarto do bebê, aguardando sua chegada, porém, para ficar bem decorado, ele as junta formando uma pirâmide, onde na fila superior tem uma lata, na segunda fila duas latas, na terceira três e assim por diante até a fila da base.

Se ele consegue formar exatamente 10 filas sem sobras de latas, quantas latas ele conseguiu juntar?

- A 10.
- B 25.
- C 55.
- D 60.
- E 75.

35. O Quadrado Mágico é uma tabela quadrada composta por números inteiros consecutivos a partir do 1, em que a soma de cada coluna, de cada linha e de cada diagonal são iguais. Essa soma é chamada de número mágico.

Aprenda a encontrar o número mágico de um quadrado  $3 \times 3$ , como o da figura.



O quadrado mágico  $3 \times 3$  possui 9 posições, portanto deve ser preenchido com os números de 1 até 9, sem repetição.

O número mágico pode ser encontrado seguindo dois passos.

**Passo 1** - Encontrar a soma total dos números.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

**Passo 2** - Dividir a soma encontrada pelo número de colunas existentes no quadrado. No caso do quadrado mágico  $3 \times 3$ , os 9 números estão agrupados em 3 colunas.

Logo o número mágico será  $45 : 3 = 15$

Em condições semelhantes, o número mágico de um quadrado  $4 \times 4$  será

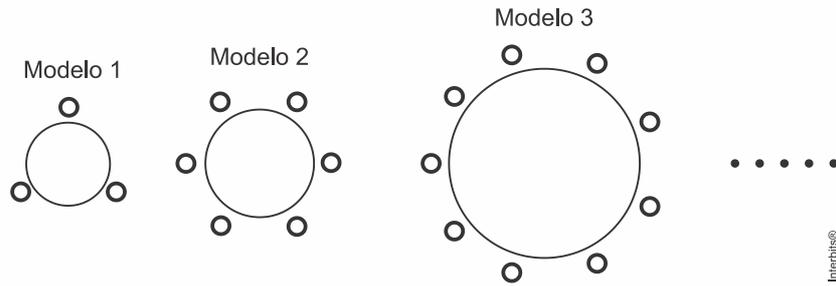
- A 16.
- B 24.
- C 34.
- D 64.
- E 136.

36. (IMED 2016) Em uma determinada Universidade, o cronograma de matrícula aos estudantes calouros é organizado de acordo com a classificação no curso da graduação. No primeiro dia, são matriculados oito estudantes calouros, no segundo dia, 11, no terceiro, 14 e assim sucessivamente, formando uma progressão aritmética.

Nessa situação, ao final do sétimo dia, o número total de novos estudantes matriculados até o momento é igual a:

- A 119.
- B 164.
- C 225.
- D 239.
- E 343.

37. (IFPE 2016) Na fabricação de mesas de reunião, uma fábrica trabalha com vários modelos e tamanhos. As mesas redondas são todas acompanhadas com uma certa quantidade de poltronas a depender do tamanho da mesa, conforme a figura abaixo:



O primeiro modelo acompanha 3 poltronas, o segundo modelo acompanha 6 poltronas, o terceiro, 9 poltronas e assim sucessivamente, isto é, sempre um modelo de mesa acompanha 3 poltronas a mais em relação ao modelo anterior. Um cliente adquiriu uma unidade de cada um dos 10 primeiros modelos de mesa circular.

Como todo patrimônio da sua empresa é identificado a partir de uma etiqueta adesiva, quantos adesivos devem ser confeccionados para que cada uma das mesas e poltronas adquiridas seja devidamente etiquetada?

- A 165
- B 175
- C 30
- D 40
- E 10

38. (Unesp 2016) A figura indica o padrão de uma sequência de grades, feitas com vigas idênticas, que estão dispostas em posição horizontal e vertical. Cada viga tem 0,5 m de comprimento. O padrão da sequência se mantém até a última grade, que é feita com o total de 136,5 metros lineares de vigas.



O comprimento do total de vigas necessárias para fazer a sequência completa de grades, em metros, foi de

- A 4.877.
- B 4.640.
- C 4.726.
- D 5.195.
- E 5.162.

39. (IFAL 2016) Em uma apresentação circense, forma-se uma pirâmide humana com uma pessoa no topo sustentada por duas outras que são sustentadas por mais três e assim sucessivamente.

Quantas pessoas são necessárias para formar uma pirâmide com oito filas de pessoas, da base ao topo?

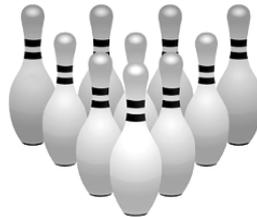
- A 8.
- B 16.
- C 28.
- D 36.
- E 45.

40. (Fatec 2016) Em 2015, um arranha-céu de 204 metros de altura foi construído na China em somente 19 dias, utilizando um modelo de arquitetura modular pré-fabricada. Suponha que o total de metros de altura construídos desse prédio varie diariamente, de acordo com uma Progressão Aritmética (PA), de primeiro termo igual a 12,5 metros (altura construída durante o primeiro dia), e o último termo da PA igual a  $x$  metros (altura construída durante o último dia).

Com base nessas informações, o valor de  $x$  é, aproximadamente,

- A 7,5.
- B 8,0.
- C 8,5.
- D 9,0.
- E 9,5.

41. (PUCCAMP 2016) Um *jogo de boliche* é jogado com 10 pinos dispostos em quatro linhas, como mostra a figura abaixo.



Se fosse inventado um jogo, semelhante ao boliche, no qual houvesse um número maior de pinos, dispostos da mesma forma, e ao todo com 50 linhas, o número de pinos necessários seria igual a

- A 1.125.
- B 2.525.
- C 2.550.
- D 1.625.
- E 1.275.

42. (PUCPR 2015) Um consumidor, ao adquirir um automóvel, assumiu um empréstimo no valor total de R\$ 42.000,00 (já somados juros e encargos). Esse valor foi pago em 20 parcelas, formando uma progressão aritmética decrescente.

Dado que na segunda prestação foi pago o valor de R\$ 3.800,00, a razão desta progressão aritmética é:

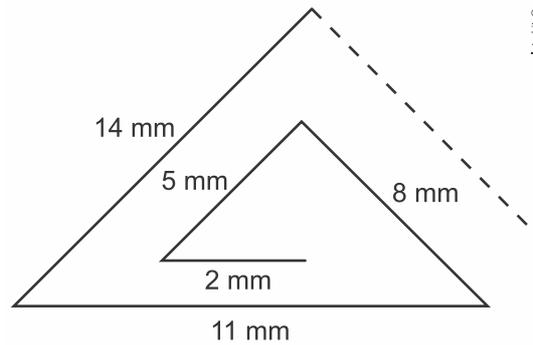
- A -300.
- B -200.
- C -150.
- D -100.
- E -350.

43. (IMED 2015) O treinamento sobre prevenção e combate a incêndio para os funcionários de uma determinada empresa foi realizado em um auditório com capacidade para 300 pessoas sentadas. O auditório possui 12 poltronas na primeira fileira, 16 poltronas na segunda fileira, 20 na terceira e assim sucessivamente, segundo uma progressão aritmética.

Considerando a capacidade máxima de poltronas, é correto afirmar que o número total de fileiras é igual a:

- A 10.
- B 12.
- C 15.
- D 18.
- E 20.

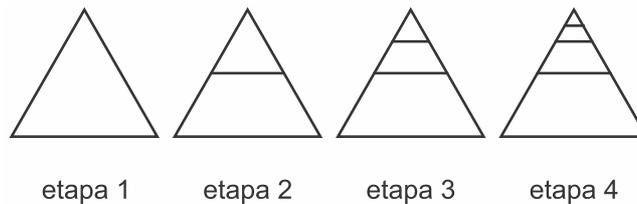
44. (UERN 2015) Jorge criou um desenho a partir de segmentos de reta, cuja medida de cada segmento é 3mm maior do que o segmento anterior, formando a seguinte figura:



Sabendo-se que essa figura é composta por 24 segmentos, então a soma do comprimento, em centímetros, de todos os segmentos que formam essa figura é

- A 85,2.
- B 86,4.
- C 87,6.
- D 90,0.

45. (UFRGS 2015) Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Na etapa 1, há um único triângulo equilátero. Na etapa 2, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo da etapa 1, formando dois triângulos equiláteros. Na etapa 3, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo menor da etapa 2, formando três triângulos equiláteros. Na etapa 4 e nas etapas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos triângulos menores da etapa anterior.

O número de trapézios na 6ª etapa de construção é

- A 14.
- B 15.
- C 16.
- D 17.
- E 18.

46. (Uerj 2014) Uma farmácia recebeu 15 frascos de um remédio. De acordo com os rótulos, cada frasco contém 200 comprimidos, e cada comprimido tem massa igual a 20mg. Admita que um dos frascos contenha a quantidade indicada de comprimidos, mas que cada um destes comprimidos tenha 30mg. Para identificar esse frasco, cujo rótulo está errado, são utilizados os seguintes procedimentos:

- numeram-se os frascos de 1 a 15;
- retira-se de cada frasco a quantidade de comprimidos correspondente à sua numeração;
- verifica-se, usando uma balança, que a massa total dos comprimidos retirados é igual a 2540mg.

A numeração do frasco que contém os comprimidos mais pesados é:

- A** 12
- B** 13
- C** 14
- D** 15

47. (ESPM 2014) Dois irmãos começaram juntos a guardar dinheiro para uma viagem. Um deles guardou R\$ 50,00 por mês e o outro começou com R\$ 5,00 no primeiro mês, depois R\$ 10,00 no segundo mês, R\$ 15,00 no terceiro e assim por diante, sempre aumentando R\$ 5,00 em relação ao mês anterior. Ao final de um certo número de meses, os dois tinham guardado exatamente a mesma quantia.

Esse número de meses corresponde a:

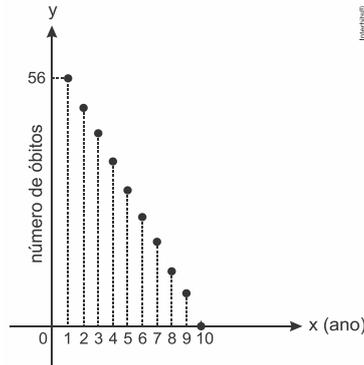
- A** pouco mais de um ano e meio.
- B** pouco menos de um ano e meio.
- C** pouco mais de dois anos.
- D** pouco menos de um ano.
- E** exatamente um ano e dois meses.

48. (UNIFOR 2014) Um ciclista pedala 310km em cinco dias. Cada dia ele pedala 10km a mais do que andou no dia anterior.

Assim a distância pedalada pelo ciclista no primeiro dia foi:

- A** 36 km
- B** 40 km
- C** 42 km
- D** 44 km
- E** 46 km

49. (UEPB 2014) Melhorando-se o nível de alimentação da população, condições sanitárias das casas e ruas, vacinação das crianças e pré-natal, é possível reduzir o índice de mortalidade infantil em determinada cidade.



Considerando-se que o gráfico acima representa o número de crianças que foram a óbito a cada ano, durante dez anos, e que os pontos do gráfico são colineares, podemos afirmar corretamente que o total de crianças mortas neste intervalo de tempo foi de:

- A 224
- B 280
- C 324
- D 300
- E 240

50. (UEA 2014) Potencialmente, os portos da região Norte podem ser os canais de escoamento para toda a produção de grãos que ocorre acima do paralelo 16 Sul, onde estão situados gigantes do agronegócio. Investimentos em logística e a construção de novos terminais portuários privados irão aumentar consideravelmente o número de toneladas de grãos embarcados anualmente.

Observe as informações.

**Movimentação**

**10,8 milhões**  
de toneladas foram embarcados pelos portos da região Norte na safra 2011/2012, segundo estudo elaborado pela Confederação Nacional da Indústria (CNI)

**50 milhões**  
de toneladas é quanto poderá ser embarcado em 2020, ainda de acordo com o estudo

(O Estado de S.Paulo, 10.07.2013. Adaptado.)

Admita que, na previsão elaborada pela CNI, os números que indicam as toneladas de grãos embarcadas anualmente estejam em Progressão Aritmética crescente de razão  $r$ , na qual o primeiro termo é o número de toneladas embarcadas em 2012, e o último, o número de toneladas previstas para 2020.

Nessas condições, prevê-se que a quantidade total de grãos embarcados, de 2012 a 2020, será, em milhões de toneladas, igual a

- A 254,6.
- B 273,6.
- C 290,2.
- D 268,4.
- E 243,2.

**GABARITO**

| QUESTÃO | ALTERNATIVA |
|---------|-------------|
| 01      | C           |
| 02      | B           |
| 03      | D           |
| 04      | D           |
| 05      | D           |
| 06      | D           |
| 07      | B           |
| 08      | D           |
| 09      | E           |
| 10      | B           |
| 11      | D           |
| 12      | A           |
| 13      | D           |
| 14      | C           |
| 15      | C           |
| 16      | C           |
| 17      | A           |
| 18      | A           |
| 19      | D           |
| 20      | B           |
| 21      | C           |
| 22      | C           |
| 23      | C           |
| 24      | D           |
| 25      | B           |
| 26      | C           |
| 27      | D           |
| 28      | C           |
| 29      | D           |
| 30      | C           |
| 31      | E           |
| 32      | E           |
| 33      | C           |
| 34      | C           |
| 35      | C           |
| 36      | A           |
| 37      | B           |
| 38      | C           |
| 39      | D           |
| 40      | D           |
| 41      | E           |
| 42      | B           |
| 43      | A           |
| 44      | C           |
| 45      | B           |
| 46      | C           |
| 47      | A           |
| 48      | C           |
| 49      | B           |
| 50      | B           |



# PROGRESSÃO GEOMÉTRICA



**A**NDERSON  
MATEMÁTICA



## PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

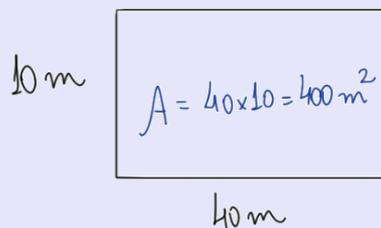
### DEFINIÇÃO

Uma progressão geométrica é uma sequência em que para progredir, precisamos calcular médias geométricas! Antes de entendermos o que realmente é uma progressão geométrica, eu te pergunto, você sabe o que é uma média geométrica?

#### Média Geométrica

Média vem de meio, *geo* vem de terra e *metria* vem de medidas, a média geométrica é o meio das medidas de um terreno. Para que você compreenda melhor, vamos analisar um exemplo:

Considere um terreno com 10m de largura e 40m de comprimento e conseqüentemente com 400m<sup>2</sup> de área. O terreno tem um formato retangular, em que a largura é bem menor do que o comprimento.

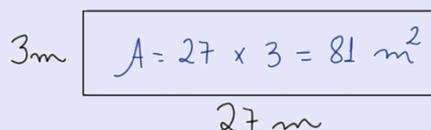


É possível transformar essa área retangular em uma área quadrada? Em que o comprimento não seja tão grande quanto o 40m e a largura não seja tão pequena quanto o 10m? É possível sim! E para isso, precisamos trazer essas duas medidas para o centro, para o meio. Devemos manter a área de 400m<sup>2</sup>, mas trazê-lo para um formato quadrangular. Uma característica do quadrado é que ele possui os quatro lados com a mesma medida. E para saber o valor do lado de um quadrado, basta extrair a raiz quadrada de sua área. Portanto, o lado do quadrado para manter a área desejada é de  $l = \sqrt{400} = 20\text{m}$ .

Dizemos que 20 é a média geométrica entre 10 e 40. Uma vez que ela é capaz de trazer as medidas de um terreno para o meio conservando a mesma área.

Quem é a média geométrica entre 3 e 27?

Vamos utilizar o mesmo raciocínio...



A área de um retângulo 3m x 27m é de 81m<sup>2</sup>. Para transformá-lo em um quadrado, é necessário que ele tenha  $\sqrt{81} = 9\text{m}$  de lado.

Dizemos que 9 é a média geométrica entre 3 e 27.

Analisando o processo, para calcular a média geométrica, primeiro calculamos a área do terreno retangular, multiplicando o comprimento e a largura, para em seguida extrair a raiz quadrada. Portanto, a média geométrica entre dois números é a raiz quadrada de seu produto.

$$MG(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$$

Agora podemos voltar para entender o que é uma progressão geométrica.

Numa P.G., um termo, a partir do segundo, é a média geométrica entre o seu anterior e seu posterior.

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Vamos aplicar esse conhecimento em um exemplo:

Observe a P.G. (3, 6, 12, 24, 48, 96 ...)

Perceba que 6 é a média geométrica entre 3 e 12, pois  $\sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$ .

Veja também, que 12 é a média geométrica entre 6 e 24, já que  $\sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = 12$ .

Isso acontece para o 24 também, que é a média geométrica entre 12 e 48, uma vez que  $\sqrt{12 \cdot 48} = \sqrt{576} = 24$ .

Calcular uma média geométrica é o mesmo que perceber que a divisão entre um termo e seu anterior dá sempre a mesma resposta:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

$$a_n \cdot a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Ou seja, em uma P.G., a divisão de um termo pelo seu anterior, a partir do segundo termo, é sempre constante. Denominamos essa constante de razão da P.G..

Na P.G. (3, 6, 12, 24, 48, 96 ...) que estamos trabalhando, a razão é 2:

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \frac{96}{48} = \dots = 2$$

Essa informação nos diz que para encontrarmos os próximos termos da P.G., basta multiplicarmos pela razão, que nesse exemplo em específico é 2:

P.G. (3, 6, 12, 24, 48, 96 ...)

Em uma P.G., quando multiplicamos um termo pela razão, encontramos o próximo termo.

Vamos listar do primeiro ao sexto termo da P.G. que estamos analisando (3, 6, 12, 24, 48, 96 ...)

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 3 = 3 \times 2^0 \\
 a_2 &= 6 = 3 \times 2^1 \\
 a_3 &= 12 = 3 \times 2^2 \\
 a_4 &= 24 = 3 \times 2^3 \\
 a_5 &= 48 = 3 \times 2^4 \\
 a_6 &= 96 = 3 \times 2^5
 \end{aligned}$$

Atente para o número 3 que está circulado em verde, ele faz parte da composição de todos os termos que listamos, ele é também o primeiro termo da P.G.. O número 2 que está circulado em laranja é a razão, que vem logo após o 3, todos eles são constantes, a única coisa que altera é o expoente do 2. Esse expoente, que está em azul, é uma unidade a menos do que a posição do termo que queremos encontrar. Baseado nessas conclusões, podemos utilizar a seguinte expressão para encontrar os termos de uma P.G.:

*Termos que queremos encontrar*  
 $a_n = a_1 \times q^{n-1}$   
*uma unidade a menos que a posição*  
*primeiro termo da P.G.*  
*razão da P.G.*

Podemos usar a expressão acima para encontrarmos o sétimo termo da P.G. que estamos trabalhando, basta fazermos:

$$a_7 = a_1 \times q^{7-1}$$

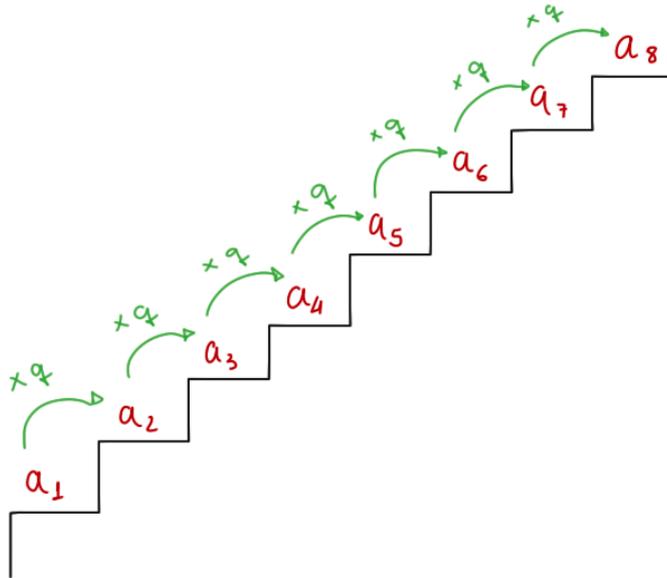
$$a_7 = a_1 \times q^6$$

$$a_7 = 3 \times 2^6$$

$$a_7 = 3 \times 64$$

$$a_7 = 192$$

Essa expressão é muito útil quando queremos encontrar um termo de uma P.G., a desvantagem é que sempre temos que partir do primeiro termo e às vezes não temos ele disponível. Como reverter essa situação? Gosto muito de encarar cada termo da P.G. como sendo um degrau de uma escada:



Para subir um degrau, precisamos multiplicar por uma razão  $q$ , e para descer um degrau, precisamos dividir por uma razão  $q$ . Sendo assim, atente para algumas conclusões:

Do terceiro para o sétimo termo, precisamos subir quatro degraus, logo  $a_7 = a_3 \times q^4$ .

Do segundo para o oitavo termo, precisamos subir seis degraus, logo  $a_8 = a_2 \times q^6$ .

Do quinto para o sétimo termo, precisamos subir dois degraus, logo  $a_7 = a_5 \times q^2$ .

Agora vamos descer os degraus:

Do quarto para o primeiro termo, precisamos descer três degraus, logo  $a_1 = a_4 \times q^{-3}$ .

Do sexto para o segundo termo, precisamos descer quatro degraus, logo  $a_2 = a_6 \times q^{-4}$ .

Do oitavo para o segundo termo, precisamos descer seis degraus, logo  $a_2 = a_8 \times q^{-6}$ .

$$a_7 = a_3 \times q^4$$

$$a_8 = a_2 \times q^6$$

$$a_7 = a_5 \times q^2$$

$$a_1 = a_4 \times q^{-3}$$

$$a_2 = a_6 \times q^{-4}$$

$$a_2 = a_8 \times q^{-6}$$

Observe que a soma dos dois números em laranja resulta na posição que queremos chegar! Atente para essa propriedade para que você possa ter mais agilidade quando quiser encontrar um termo da P.G..

$$a_n = a_k \times q^{n-k}$$

Não é necessário decorar a expressão acima, basta entender como funciona a escada com os degraus e saber de onde você vai sair e onde você quer chegar! Vejamos um exemplo:

- Em um cardume, a quantidade de peixes duplica a cada ano, se no terceiro ano de criação existiam 600 peixes, qual a quantidade de peixes existentes no sétimo ano?

Como a quantidade de peixes duplica a cada ano, podemos estabelecer uma progressão geométrica de razão  $q = 2$  com as quantidade de peixes em cada ano. Sabemos também o terceiro termo dessa progressão,  $a_3 = 600$ , usando a escada, do terceiro para o sétimo termo, precisamos subir quatro degraus, logo:

$$a_7 = a_3 \times q^4$$

$$a_7 = 600 \times 2^4$$

$$a_7 = 600 \times 16$$

$$a_7 = 9600$$

No sétimo ano, existirão 9600 peixes.

Que tal exercitarmos um pouco?

**QUESTÕES - TERMO GERAL DA P.G.**

1. (Enem 2018) Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.



Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm.

O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é

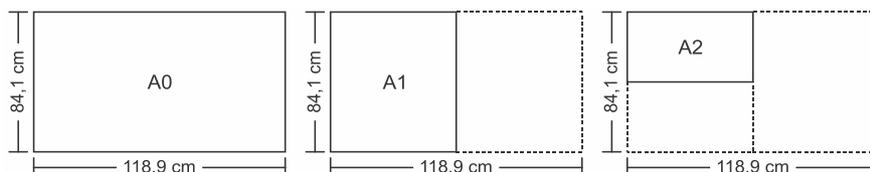
- A** 14
- B** 12
- C**  $7\sqrt{2}$
- D**  $6 + 4\sqrt{2}$
- E**  $6 + 2\sqrt{2}$

2. (Enem (Libras) 2017) Atualmente, a massa de uma mulher é 100 kg. Ela deseja diminuir, a cada mês, 3% da massa que possuía no mês anterior. Suponha que ela cumpra sua meta.

A sua massa, em quilograma, daqui a dois meses será

- A** 91,00.
- B** 94,00.
- C** 94,09.
- D** 94,33.
- E** 96,91.

3. (Enem PPL 2016) O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos EUA e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são 84,1 cm  $\times$  118,9 cm. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, obtendo os demais formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura: A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.



Disponível em: <http://pt.wikipedia.org>. Acesso em: 4 abr. 2012 (adaptado).

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0?

- A** 8
- B** 16
- C** 64
- D** 128
- E** 256

4. (Enem 2ª aplicação 2016) Para comemorar o aniversário de uma cidade, a prefeitura organiza quatro dias consecutivos de atrações culturais. A experiência de anos anteriores mostra que, de um dia para o outro, o número de visitantes no evento é triplicado. É esperada a presença de 345 visitantes para o primeiro dia do evento.

Uma representação possível do número esperado de participantes para o último dia é

- A  $3 \times 345$
- B  $(3 + 3 + 3) \times 345$
- C  $3^3 \times 345$
- D  $3 \times 4 \times 345$
- E  $3^4 \times 345$

5. (Enem 2015) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8.000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere  $P$  a quantidade anual de produtos fabricados no ano  $t$  de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas  $P$  em função de  $t$ , para  $t \geq 1$ ?

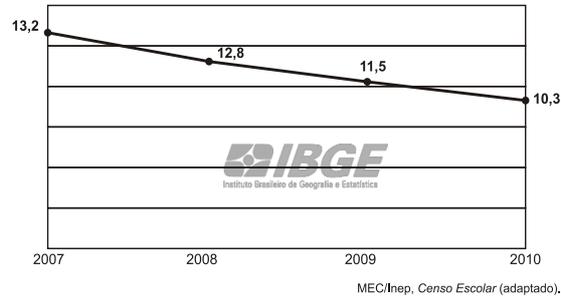
- A  $P(t) = 0,5 \cdot t^{-1} + 8.000$
- B  $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8.000$
- C  $P(t) = 4.000 \cdot t^{-1} + 8.000$
- D  $P(t) = 8.000 \cdot (0,5)^{t-1}$
- E  $P(t) = 8.000 \cdot (1,5)^{t-1}$

6. (Enem PPL 2014) Pesquisas indicam que o número de bactérias  $X$  é duplicado a cada quarto de hora. Um aluno resolveu fazer uma observação para verificar a veracidade dessa afirmação. Ele usou uma população inicial de  $10^5$  bactérias  $X$  e encerrou a observação ao final de uma hora. Suponha que a observação do aluno tenha confirmado que o número de bactérias  $X$  se duplica a cada quarto de hora.

Após uma hora do início do período de observação desse aluno, o número de bactérias  $X$  foi de

- A  $2^{-2} \cdot 10^5$
- B  $2^{-1} \cdot 10^5$
- C  $2^2 \cdot 10^5$
- D  $2^3 \cdot 10^5$
- E  $2^4 \cdot 10^5$

7. (Enem PPL 2012) O abandono escolar no ensino médio é um dos principais problemas da educação no Brasil. Reduzir as taxas de abandono tem sido uma tarefa que exige persistência e ações continuadas dos organismos responsáveis pela educação no país. O gráfico apresentado a seguir mostra as taxas percentuais de abandono no ensino médio, para todo o país, no período de 2007 a 2010, em que se percebe uma queda a partir de 2008. Com o objetivo de reduzir de forma mais acentuada a evasão escolar são investidos mais recursos e intensificadas as ações, para se chegar a uma taxa em torno de 5,2% ao final do ano de 2013.

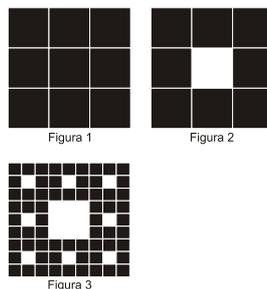


Qual a taxa de redução anual que deve ser obtida para que se chegue ao patamar desejado para o final de 2013? Considere  $(0,8)^3 \cong 0,51$ .

- A 10%
- B 20%
- C 41%
- D 49%
- E 51%

8. (Enem PPL 2012) Uma maneira muito útil de se criar belas figuras decorativas utilizando a matemática é pelo processo de autossemelhança, uma forma de se criar *fractais*. Informalmente, dizemos que uma figura é autossemelhante se partes dessa figura são semelhantes à figura vista como um todo. Um exemplo clássico é o *Carpete de Sierpinski*, criado por um processo recursivo, descrito a seguir:

- Passo 1: Considere um quadrado dividido em nove quadrados idênticos (Figura 1). Inicia-se o processo removendo o quadrado central, restando 8 quadrados pretos (Figura 2).
- Passo 2: Repete-se o processo com cada um dos quadrados restantes, ou seja, divide-se cada um deles em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um, restando apenas os quadrados pretos (Figura 3).
- Passo 3: Repete-se o passo 2.



Admita que esse processo seja executado 3 vezes, ou seja, divide-se cada um dos quadrados pretos da Figura 3 em 9 quadrados idênticos e remove-se o quadrado central de cada um deles.

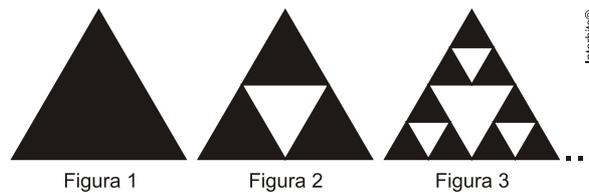
O número de quadrados pretos restantes nesse momento é

- A 64.
- B 512.
- C 568.
- D 576.
- E 648.

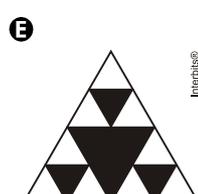
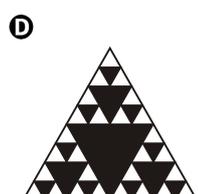
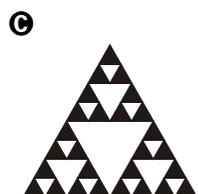
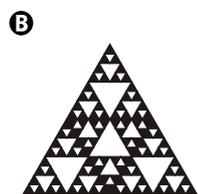
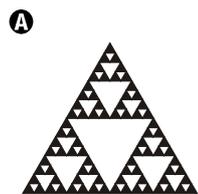
9. (Enem 2008) Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) - objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais - objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

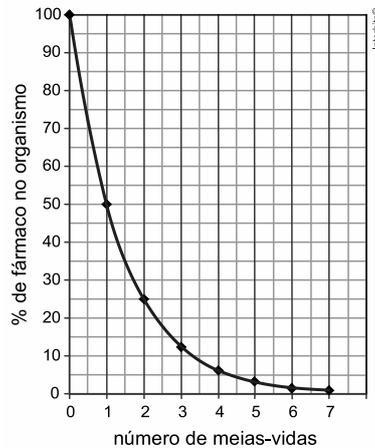
1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).



De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é



10. (Enem 2007) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



O gráfico anterior representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

F. D. Fuchs e Cher I. Wannma. *Farmacologia Clínica*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13 h 30min será aproximadamente de

- A** 10%.
- B** 15%.
- C** 25%.
- D** 35%.
- E** 50%.

11. (Fuvest 2019) Forma-se uma pilha de folhas de papel, em que cada folha tem 0,1 mm de espessura. A pilha é formada da seguinte maneira: coloca-se uma folha na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houverem sido colocadas anteriormente.

Depois de 33 dessas operações, a altura da pilha terá a ordem de grandeza

- A** da altura de um poste.
- B** da altura de um prédio de 30 andares.
- C** do comprimento da Av. Paulista.
- D** da distância da cidade de São Paulo (SP) à cidade do Rio de Janeiro (RJ).
- E** do diâmetro da Terra.

12. (Upe-ssa 1 2018) A população inicial de uma colônia de bactérias, que cresce 40% a cada hora, é de  $8 \cdot 10^5$  bactérias.

Qual é o número aproximado de bactérias dessa colônia ao final de 16 horas? Considere  $(1,4)^{16} = 218$

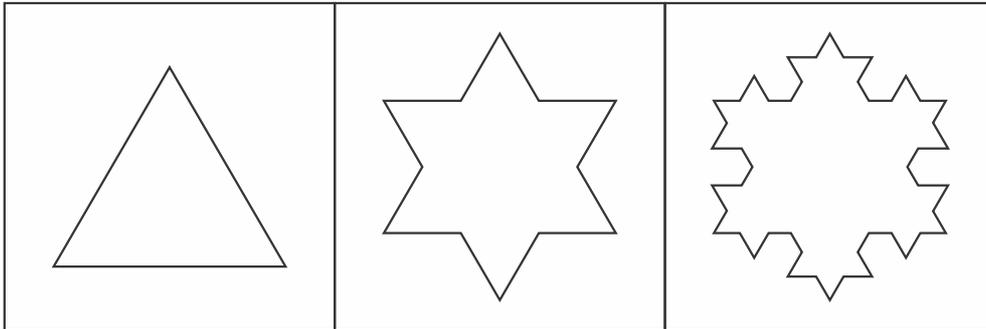
- A**  $1,7 \times 10^8$
- B**  $2,2 \times 10^5$
- C**  $1,8 \times 10^6$
- D**  $3,4 \times 10^8$
- E**  $4,6 \times 10^5$

13. (Unicamp 2018) Dois anos atrás certo carro valia R\$ 50.000,00 e atualmente vale R\$ 32.000,00.

Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a

- A R\$ 25.600,00.
- B R\$ 24.400,00.
- C R\$ 23.000,00.
- D R\$ 18.000,00.

14. (Ufjf-pism 2 2018) O fractal denominado floco de neve de Koch é obtido partindo-se de um triângulo equilátero. Divide-se cada lado desse triângulo em 3 segmentos de mesmo comprimento, desenha-se um novo triângulo equilátero a partir do segmento do meio e retira-se a sua base, conforme figura abaixo. Esse processo ocorre indefinidamente para obter o floco de neve.

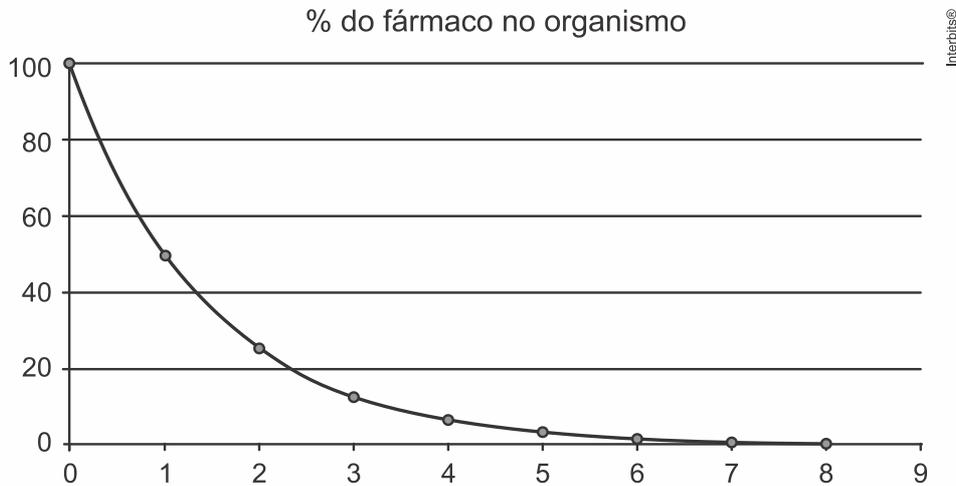


Fonte: disponível em <[goo.gl/MfBH7V](http://goo.gl/MfBH7V)>

Qual o número de lados da sétima figura, isto é, após ocorrer 6 vezes esse processo?

- a) 1.024
- b) 3.072
- c) 4.096
- d) 7.048
- e) 12.288

15. (Fcmmg 2018) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, que é o tempo necessário para que a quantidade original do medicamento no organismo se reduza à metade. Numa prescrição médica, esse tempo representa uma das variáveis a serem analisadas e por ele é possível prever a quantidade do fármaco que ainda se encontra presente no organismo do paciente. Graficamente, como indicado na figura abaixo, a relação das meias-vidas de um fármaco, em função da % do fármaco, no organismo, gera a curva de uma função exponencial.



A Prednisona é um medicamento anti-inflamatório, antialérgico e antirreumático que serve para o tratamento de reumatismo, alergias, doenças dermatológicas, tumores, entre outras indicações. Possui meia-vida de aproximadamente 3 horas e pode ser encontrada nas farmácias, em embalagem contendo comprimidos de 20 mg.

Se, no tratamento de determinado paciente, foram prescritos 3 comprimidos de 20 mg de Prednisona, administrados às 8 horas, pode-se prever que a quantidade do fármaco presente no organismo do paciente às 23 horas do mesmo dia será de, APROXIMADAMENTE:

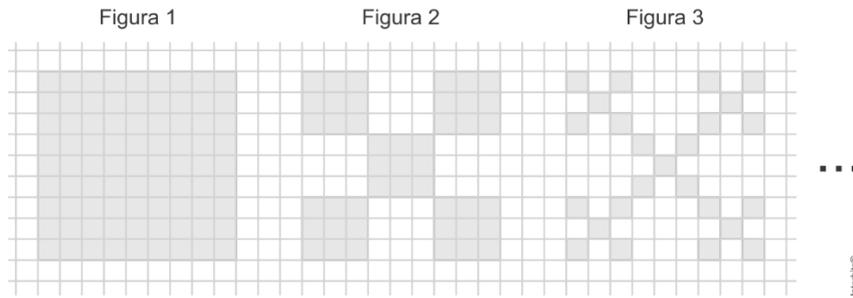
- A** 0,6 mg
- B** 2 mg
- C** 3 mg
- D** 6 mg

16. (Upe-ssa 2 2018) Um químico está tentando produzir um detergente econômico, utilizando sabão concentrado líquido e água. Ele tem 12 litros de sabão concentrado líquido, e retira 4 litros desse volume e os substitui por água. Em seguida, retira 4 litros da mistura obtida e os substitui por água novamente.

Efetuada essa operação por 6 vezes consecutivas, quantos litros de sabão concentrado líquido, sobram na mistura?

- A** 1
- B** 2
- C** 3
- D** 4
- E** 5

17. (Unesp 2018) A sequência de figuras, desenhadas em uma malha quadriculada, indica as três primeiras etapas de formação de um fractal. Cada quadradinho dessa malha tem área de  $1\text{ cm}^2$ .



Dado que as áreas das figuras, seguindo o padrão descrito por esse fractal, formam uma progressão geométrica, a área da figura 5, em  $\text{cm}^2$ , será igual a

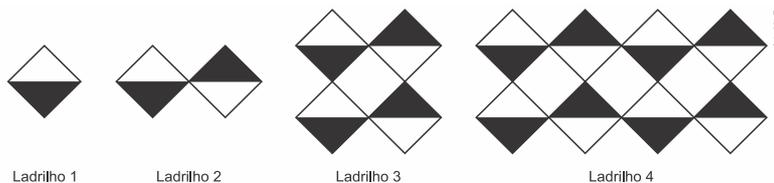
- A  $\frac{625}{81}$
- B  $\frac{640}{81}$
- C  $\frac{125}{27}$
- D  $\frac{605}{81}$
- E  $\frac{215}{27}$

18. (Famerp 2017) Em 1996, 25% da energia produzida por um país era obtida de usinas hidrelétricas. Em 2016, essa produção passou a ser de 40%.

Admitindo-se que de 25%, em 1996, para 40%, em 2016, o crescimento anual da porcentagem foi geométrico, é correto afirmar que o fator constante de crescimento anual foi igual a

- A  $\sqrt[20]{6,25}$
- B  $\log_{1,6} 20$
- C  $\log_{20} 6,25$
- D  $\log_{20} 1,6$
- E  $\sqrt[20]{1,6}$

19. (G1 - ifpe 2017) Lopes é aluno do curso de Artes Visuais do campus Olinda e, entre uma aula e outra, gosta de desenhar ladrilhos triangulares conforme a figura.



Seguindo o padrão, quantos triângulos pretos Lopes desenhará no ladrilho de número 10?

- A 2.048
- B 256
- C 1.024
- D 512
- E 100

20. (Espm 2016) Um novo aparelho eletrônico foi lançado no mercado em janeiro de 2014, quando foram vendidas cerca de 3 milhões de unidades. A partir de então, esse número teve um crescimento exponencial, dado pela expressão  $V = n \cdot k^t$ , onde  $n$  e  $k$  são constantes reais e  $t$  é o número de meses após o lançamento (jan = 0, fev = 1 etc.).

Se, em fevereiro desse ano foram vendidos 4,5 milhões de aparelhos, podemos concluir que, no mês seguinte, esse número passou para:

- A** 5,63 milhões
- B** 10,13 milhões
- C** 4,96 milhões
- D** 8,67 milhões
- E** 6,75 milhões

21. (IFSUL 2016) Conforme a Agência da ONU para os Refugiados (ACNUR), temos testemunhado o aumento do deslocamento forçado de pessoas em todo o mundo, ocasionado por guerras e conflitos. Em 2014, segundo esta agência, estes deslocamentos afetavam 59,5 milhões de pessoas.

Se o número de deslocamentos forçados crescer anualmente, segundo uma progressão geométrica de razão 1,14, então, em 2015 esse número será de

- A** 60,54 milhões de pessoas.
- B** 67,83 milhões de pessoas.
- C** 120,14 milhões de pessoas.
- D** 127,33 milhões de pessoas.

22. (IFSUL 2016) Os números que expressam o raio de uma circunferência, seu perímetro e a área do círculo delimitado por tal circunferência estão, nessa ordem, em progressão geométrica.

Qual é o raio da circunferência?

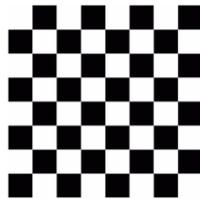
- A** 2
- B** 4
- C**  $2\pi$
- D**  $4\pi$

**SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G.**



Uma das histórias a respeito da origem do jogo de xadrez, é contada no livro de Malba Tahan, chamado "Diabruras da Matemática". Diz a lenda que o jogo foi criado para entreter um rei da Índia, de nome ladava, o jovem Lahur Sessa, apresentou o jogo ao rei e este ficou maravilhado, querendo recompensar o inventor do jogo de xadrez, ladava perguntou qual presente ele gostaria de receber: joias, terras, um palácio... O pedido do jovem inventor deixou o rei perplexo, Lahur disse que como recompensa, queria receber uma quantidade de trigo da seguinte forma:

- 1 grão de trigo pela 1ª casa;
- 2 grãos de trigo pela 2ª casa;
- 4 grãos de trigo pela 3ª casa;
- 8 grãos de trigo pela 4ª casa, ....



A quantidade de grãos deveria ser dobrada a cada casa subsequente, e como sabemos, o jogo de xadrez tem 64 casas. O rei achou o pedido muito insignificante e pediu que fosse calculado a quantidade de grãos para atender o desejo do inventor do jogo de xadrez do jeito que este havia proposto. Esse é um problema que envolve a soma dos termos de uma progressão geométrica, vejamos:

$$\underbrace{1}_{1^a}, \underbrace{2}_{2^a}, \underbrace{4}_{3^a}, \underbrace{8}_{4^a}, \underbrace{16}_{5^a}, \underbrace{32}_{6^a}, \underbrace{64}_{7^a}, \underbrace{128}_{8^a}, \dots, \underbrace{?}_{64^a}$$

*casa casa casa casa casa casa casa casa casa*

Perceba que as quantidades de grãos podem ser escritas como potências de base 2, em que o expoente é uma unidade menor do que o número da casa:

$$\underbrace{2^0}_{1^a}, \underbrace{2^1}_{2^a}, \underbrace{2^2}_{3^a}, \underbrace{2^3}_{4^a}, \underbrace{2^4}_{5^a}, \underbrace{2^5}_{6^a}, \underbrace{2^6}_{7^a}, \underbrace{2^7}_{8^a}, \dots, \underbrace{2^{63}}_{64^a}$$

*casa casa casa casa casa casa casa casa casa*

Para calcular a soma dos 64 primeiros termos dessa P.G., faremos:

$$S_{64} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} \quad (i)$$

Se multiplicarmos ambos os membros pela razão da PG, que é 2, teremos:

$$2 \cdot S_{64} = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} + 2^{64} \quad (ii)$$

Já que na multiplicação de duas potências de mesma base, repete-se a base e soma os expoentes, logo somamos um a cada expoente! Agora, fazendo (ii) - (i), temos:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot S_{64} - S_{64} \\ & = \\ & (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63} + 2^{64}) - (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63}) \end{aligned}$$

Perceba que  $2^1$  cancela com  $2^1$ ,  $2^2$  também cancela com  $2^2$ , e assim sucessivamente, até que  $2^{63}$  cancela com  $2^{63}$ , restando apenas  $2^{64} - 2^0$ :

$$\begin{aligned} & (\cancel{2^1} + \cancel{2^2} + \dots + \cancel{2^{63}} + 2^{64}) - (2^0 + \cancel{2^1} + \cancel{2^2} + \dots + \cancel{2^{63}}) \\ & S_{64} = 2^{64} - 2^0 \end{aligned}$$

$$S_{64} = 18.446.744.073.709.551.615$$

Um número astronômico: 18 quintilhões, 446 quatrilhões, 744 trilhões, 73 bilhões, 709 milhões, 551 mil, 615. Os calculistas reais chegaram a conclusão que para atender ao pedido, seria necessário semear o planeta Terra todo e a dívida só seria quitada ao fim de 450 séculos! O astuto inventor deixou o rei em apuros, como pagar a dívida? O rei ficaria na mais absoluta miséria!

Podemos generalizar e desenvolver uma fórmula para o cálculo da soma dos termos de uma progressão geométrica usando o mesmo raciocínio:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ S_n &= a_1 \cdot q^0 + a_1 \cdot q^1 + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Colocando  $a_1$  em evidência, temos:

$$S_n = a_1 \cdot (q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^{n-1}) \quad (\text{iii})$$

Ao multiplicarmos ambos os membros pela razão da PG, temos:

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q \cdot (q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

Novamente, na multiplicação de duas potências de mesma base, repete-se a base e soma os expoentes, logo somamos um a cada expoente.

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot (q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n) \quad (\text{iv})$$

Agora, façamos (iv) - (iii), perceba que  $q^1$  cancela com  $q^1$ ,  $q^2$  com  $q^2$ , até que  $q^{n-1}$  cancela com  $q^{n-1}$ , restando apenas  $q^n - q^0$ :

$$q \cdot S_n - S_n = a_1(q^1 + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n - q^0 - q^1 - q^2 - \dots - q^{n-1})$$

$$q \cdot S_n - S_n = a_1(\cancel{q^1} + \cancel{q^2} + \dots + \cancel{q^{n-1}} + q^n - q^0 - \cancel{q^1} - \cancel{q^2} - \dots - \cancel{q^{n-1}})$$

$$q \cdot S_n - S_n = a_1(q^n - q^0)$$

$$q \cdot S_n - S_n = a_1(q^n - 1)$$

Colocando  $S_n$  em evidência, temos:

$$S_n(q - 1) = a_1(q^n - 1)$$

Donde:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Diagram illustrating the formula for the sum of a geometric series  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$  with handwritten annotations:

- $a_1$ : Primeiro termo da P.G.
- $q^n$ : Quantidade de termos da P.G.
- $q$ : Razão da P.G.
- $S_n$ : Soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.G.

Vamos aplicar essa expressão em um exemplo?

- Wanderson Gomes, YouTuber famoso, decidiu iniciar um novo canal, e no primeiro vídeo postado conseguiu 15 novos inscritos para o canal, no segundo, conseguiu 30 novos inscritos, no terceiro, 60 inscritos, se ele mantiver o mesmo padrão, dobrando a cada vídeo postado, qual a quantidade de novos seguidores que ele conseguirá após postar todos os 10 vídeos?

O número de novos inscritos conseguidos com os vídeos postados compõem uma progressão geométrica de razão  $q = 2$  e  $a_1 = 15$ , para sabermos o total de novos seguidores após a postagem dos 10 vídeos, precisamos somar a quantidade de seguidores conseguidos no 1º vídeo com a quantidade conseguida no 2º, 3º e assim até o 10º. Sendo assim, devemos utilizar a expressão da soma dos termos da P.G.:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1}$$

$$S_{10} = \frac{15 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_{10} = \frac{15 \cdot (1024 - 1)}{1}$$

$$S_{10} = 15 \cdot 1023$$

$$S_{10} = 15.345$$

A quantidade de novos seguidores que ele conseguirá após postar todos os 10 vídeos é de 15.345.

Vamos exercitar um pouco...

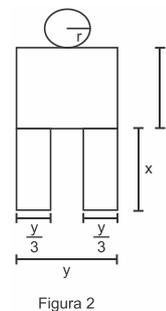
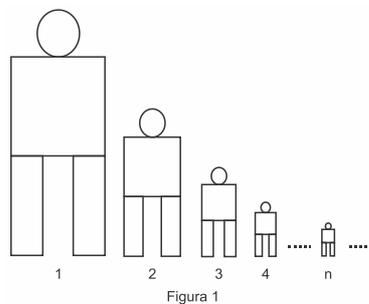
**QUESTÕES - SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G.**

23. (IFBA 2018) Numa avaliação com 100 questões, a pontuação de cada questão foi atribuída de acordo com uma progressão geométrica de razão 2 da seguinte forma: a primeira questão valia 1 ponto, a segunda questão valia 2 pontos, a terceira questão valia 4, a quarta questão valia 8 pontos e assim por diante. A nota máxima que um aluno pode ficar é o somatório dos pontos de todas as questões. Uma pessoa, ao fazer esta avaliação, verificou que acertou todas as questões de numeração múltiplos de três maiores que 20 e menores que 40 e também acertou as questões de numeração múltiplos de cinco maiores que 31 e menores que 51.

Que pontuação este estudante fez na prova?

- A  $\frac{2^{34}(2^{20} - 1)}{2^5 - 1}$
- B  $\frac{2^{20}(2^{21} - 1)}{2^3 - 1}$
- C  $\frac{2^{20}(2^{21} - 1)}{2^3} + \frac{2^{34}(2^{20} - 1)}{2^5}$
- D  $\frac{2^{20}(2^{21} - 1)}{2^3 - 1} + \frac{2^{34}(2^{20} - 1)}{2^5 - 1}$
- E  $\frac{2^{20}(2^{21} - 1)}{2^3 - 1} - \frac{2^{34}(2^{20} - 1)}{2^5 - 1}$

24. (Unioeste 2018) A Figura 1 apresenta uma sequência de figuras de bonecos com corpo e pernas no formato retangular e cabeça circular. As dimensões do primeiro boneco são apresentadas na Figura 2 (Na Figura 2,  $r$  é o raio do círculo). Sabe-se que cada uma das medidas do  $n$ -ésimo boneco é igual à metade da medida correspondente do  $(n-1)$ -ésimo boneco.



Assim, se  $A_1$  é a área do primeiro boneco, então é CORRETO afirmar que a soma das áreas dos 30 primeiros bonecos é

- A  $\frac{A_1}{3} \left( \frac{4^{30} - 1}{4^{29}} \right)$
- B  $A_1 \left( \frac{4^{30} - 1}{4^{29}} \right)$
- C  $\frac{A_1}{4} \left( \frac{2^{30} - 1}{2^{29}} \right)$
- D  $\frac{A_1}{2} \left( \frac{4^{30} - 1}{4^{29}} \right)$
- E  $A_1 \left( \frac{2^{30} - 1}{2^{29}} \right)$

25. (IFPE 2018) Dudu quer se tornar um *youtuber* famoso, mas, em seu primeiro vídeo, ele obteve apenas 5 inscritos em seu canal. Obstinado que é, Dudu pretende, a cada novo vídeo, dobrar a quantidade de inscritos em seu canal.

Se no primeiro mês ele postar 10 vídeos e conseguir atingir a meta estabelecida, ao fim deste mês, seu canal terá

- A 1.024 inscritos.
- B 5.120 inscritos.
- C 5.115 inscritos.
- D 1.023 inscritos.
- E 310 inscritos.

26. (Enem 2018) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com  $2n$  competidores, então na 2ª fase restarão  $n$  competidores, e assim sucessivamente até a partida final. Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por

- A  $2 \times 128$
- B  $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
- C  $128 + 64 + 32 + 16 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$
- D  $128 + 64 + 32 + 16 + 16 + 8 + 4 + 2$
- E  $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

27. (PUCPR 2017) Leia o texto a seguir.

### A lenda do jogo de xadrez

A lenda conta que um rei hindu teve o conhecimento de um jogo que é composto de 32 peças, no qual o objetivo é capturar a peça mais importante, o rei do adversário, através de um sábio brâmane, chamado Sessa, que queria lhe tirar da depressão que o abatera depois da morte de seu filho. Após algumas partidas jogadas, a satisfação do rei foi tamanha que deu o direito ao brâmane de escolher o que ele quisesse no reino como premiação. Sessa fez então um pedido inusitado: um tabuleiro com grãos de trigo que, na primeira casa tivesse um grão, na segunda, dois, na terceira, quatro, dobrando sempre até a casa de número 64 e somando todos os valores encontrados ao final. O rei mandou então os algebristas de seu reino fazerem os cálculos. A respeito dessa situação, julgue os itens a seguir.

- I. A sequência proposta por Sessa: 1 grão na primeira casa, na segunda dois, na terceira quatro etc. É uma progressão aritmética de razão 2.
- II. A sequência proposta por Sessa: 1 grão na primeira casa, na segunda dois, na terceira quatro etc. É uma progressão geométrica de razão 2.
- III. A soma dos termos da progressão vale  $2^{64}$ .
- IV. A soma dos termos da progressão vale 2080.

Assinale a alternativa **CORRETA**.

- A Somente I é correta.
- B Somente III é correta.
- C Somente IV é correta.
- D Somente II é correta.
- E Todas estão corretas.

28. (IFSUL 2017) Na última páscoa, a direção de um campus do IFSul solicitou que cada servidor doasse caixas de bombons para serem entregues a 16.000 alunos de baixa renda das escolas da região. Supondo-se que o primeiro servidor doou uma caixa; o segundo doou 2; o terceiro, 4 e assim sucessivamente até o décimo quinto servidor.

É possível afirmar que o total de caixas de bombons arrecadadas foi suficiente para doar exatamente

- A** uma para cada aluno.
- B** duas para cada aluno.
- C** uma para cada aluno e ainda sobraram 767 caixas de bombons.
- D** duas para cada aluno e ainda sobraram 767 caixas de bombons.

29. (IFSUL 2016) Uma clínica de emagrecimento desafiou seus pacientes, um de cada vez, a perderem juntos, um total de 1.023 kg. O primeiro paciente emagreceu 1 kg, o segundo 2 kg, o terceiro 4 kg, e assim sucessivamente.

Quantos pacientes participaram do desafio?

- A** 8
- B** 9
- C** 10
- D** 11

30. (INSPER 2015) Para percorrer 1km, o jovem Zeno adota a estratégia de dividir seu movimento em várias etapas, percorrendo, em cada etapa, metade da distância que ainda falta até o ponto de chegada. A tabela mostra a distância percorrida por ele em cada etapa.

| Etapa | Distância percorrida (km) |
|-------|---------------------------|
| 1     | $\frac{1}{2}$             |
| 2     | $\frac{1}{4}$             |
| 3     | $\frac{1}{8}$             |
| ⋮     | ⋮                         |
| n     | $\frac{1}{2^n}$           |

Ao final da etapa n, a distância total percorrida por Zeno será igual a

- A**  $\frac{2^n - 1}{2^n}$ .
- B**  $\frac{2^n + 1}{2^n}$ .
- C**  $\frac{n}{2^n}$ .
- D**  $\frac{2n - 1}{2^n}$ .
- E**  $\frac{2n + 1}{2^n}$ .

31. (PUCRJ 2014) Vamos empilhar 5 caixas em ordem crescente de altura. A primeira caixa tem 1 m de altura, cada caixa seguinte tem o triplo da altura da anterior.

A altura da nossa pilha de caixas será:

- A** 121 m
- B** 81 m
- C** 32 m
- D** 21 m
- E** 15 m

32. (UFSM 2013) No Brasil, falar em reciclagem implica citar os catadores de materiais e suas cooperativas. Visando a agilizar o trabalho de separação dos materiais, uma cooperativa decide investir na compra de equipamentos. Para obter o capital necessário para a compra, são depositados, no primeiro dia de cada mês, R\$600,00 em uma aplicação financeira que rende juros compostos de 0,6% ao mês.

A expressão que representa o saldo, nessa aplicação, ao final de  $n$  meses, é

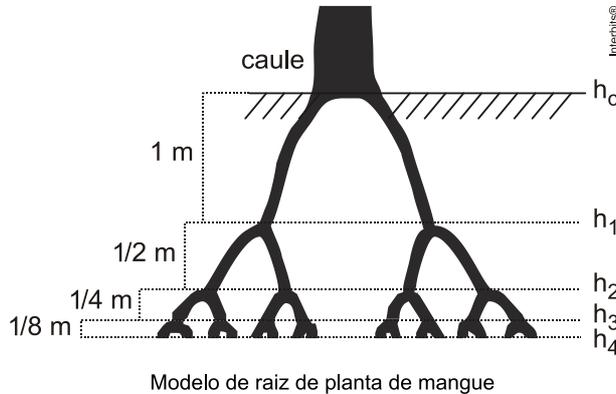
- A**  $100.600[(1,006)^n - 1]$ .
- B**  $100.000[(1,06)^n - 1]$ .
- C**  $10.060[(1,006)^n - 1]$ .
- D**  $100.600[(1,06)^n - 1]$ .
- E**  $100.000[(1,006)^n - 1]$ .

33. (UCS 2012) O vazamento dos dutos de uma plataforma de perfuração de petróleo provocou, no mar, uma mancha de óleo, em forma circular, cujo diâmetro, no primeiro dia, atingiu 2 metros. Os técnicos só conseguiram tomar providências após um mês, tendo por dia o raio da mancha aumentado  $1/5$  do aumento verificado no dia anterior.

No final do décimo dia após o início do processo, qual era a medida, em metros, do raio da mancha?

- A**  $\frac{5^9 - 1}{4 \cdot 5^8}$
- B**  $\frac{5^{10} - 1}{4 \cdot 5^9}$
- C**  $\frac{5^{10} - 1}{2 \cdot 5^9}$
- D**  $\frac{5^9 - 1}{2 \cdot 5^8}$
- E**  $2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$

34. (UEL 2012) A figura a seguir representa um modelo plano do desenvolvimento vertical da raiz de uma planta do mangue. A partir do caule, surgem duas ramificações da raiz e em cada uma delas surgem mais duas ramificações e, assim, sucessivamente. O comprimento vertical de uma ramificação, dado pela distância vertical reta do início ao fim da mesma, é sempre a metade do comprimento da ramificação anterior.



Sabendo que o comprimento vertical da primeira ramificação é de  $h_1 = 1$  m, qual o comprimento vertical total da raiz, em metros, até  $h_{10}$ ?

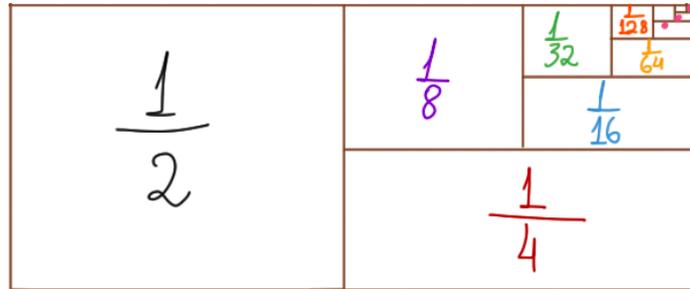
- A  $\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^{10}} \right)$
- B  $\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^9} \right)$
- C  $2 \left( 1 - \frac{1}{2^{10}} \right)$
- D  $2 \left( 1 - \frac{1}{10^{10}} \right)$
- E  $2 \left( 1 - \frac{1}{2^9} \right)$

35. (FEEVALE 2012) Pedro, no dia do nascimento do filho, prometeu, a cada aniversário da criança, plantar  $2^n$  árvores ( $n$ , número natural, representa a idade do filho).

Passados 5 anos, quantas árvores foram plantadas por Pedro, ao total, considerando que ele cumpriu sua promessa em todos os anos?

- A 10 árvores
- B 16 árvores
- C 32 árvores
- D 62 árvores
- E 64 árvores

Imagina se comprássemos uma barra de chocolate e quiséssemos dividi-la de uma forma que todo dia comêssemos metade do que ainda temos disponível? Ilustrei abaixo a barra de chocolate, dá uma olhadinha nela...



Suponha que no primeiro dia comemos  $\frac{1}{2}$  da barra de chocolate, no segundo dia, metade da metade, ou seja,  $\frac{1}{4}$  da barra, no terceiro dia, metade de um quarto, ou seja,  $\frac{1}{8}$ , no quarto dia  $\frac{1}{16}$ , no quinto dia,  $\frac{1}{32}$  e assim por diante. Perceba que nunca o chocolate acabaria, uma vez que nunca comemos tudo que dispomos, só comemos metade do que temos. Assim teríamos chocolate para comer por uma vida inteira... O problema é que a cada dia que se passa, os pedaços que comemos ficam cada vez menores, acho que lá pro 10º dia já nem conseguimos sentir o sabor de tão pequeno que o pedaço já está!

Anotando a sequência das frações do chocolate que foram comidas dia a dia, temos:

$$\left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots \right)$$

Eles compõem uma progressão geométrica infinita de razão  $q = \frac{1}{2}$  e a medida em que avançamos os termos vão se aproximando cada vez mais de zero.

E se somarmos todos os pedaços de chocolate que foram comidos, o que obteremos? Nada mais natural que tenhamos a barra inteira:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

Mas será que existe alguma expressão que possamos usar para comprovar isso?

Bom, a que conhecemos é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.G.:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Mas, a P.G. que representa as frações do chocolate que foram comidas é infinita, isso nos indica que não temos um  $n$  para substituir, pois ele tende ao infinito. E agora, o que faremos? Observe que o  $n$  na expressão é o expoente da razão, então vamos observar o que acontece com  $q^n$  quando o  $n$  se aproxima do infinito. Na nossa P.G.,  $q = \frac{1}{2}$ , logo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0,0625$$

...

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} = 0,000976 \dots$$

...

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}} = 0,000000 \dots$$

Perceba que à medida em que  $n$  aumenta, rapidamente  $q^n$  se aproxima de zero, o que nos indica que quando  $n$  se aproxima do infinito,  $q^n$  é praticamente zero. Daí:

$$S_{n \rightarrow \infty} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{n \rightarrow \infty} = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1}$$

$$S_{n \rightarrow \infty} = \frac{a_1(-1)}{q - 1}$$

Multiplicando por  $-1$  o numerador e o denominador, temos:

$$S_{n \rightarrow \infty} = \frac{a_1(-1) \cdot (-1)}{q - 1 \cdot (-1)}$$

$$S_{n \rightarrow \infty} = \frac{a_1}{-q + 1}$$

Só por organização, alteraremos a ordem do que está no denominador, escrevendo  $1 - q$  ao invés de  $-q + 1$ :

$$S_{n \rightarrow \infty} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Para o Enem, se quisermos encontrar a soma dos infinitos termos em uma P.G., precisamos que essa P.G. tenha sua razão  $-1 < q < 1$ ,  $q \neq 0$ , ou seja, à medida que o número de termos dessa P.G. aumenta, o termo se aproxima cada vez de zero. Sendo assim, a soma dos infinitos termos dessa P.G. será dada por:

$$S_{n \rightarrow \infty} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Handwritten annotations:

- $a_1$  is circled in purple and labeled "Primeiro termo da P.G." (First term of the P.G.).
- $q$  is circled in green and labeled "Razão da P.G." (Ratio of the P.G.).
- $S_{n \rightarrow \infty}$  is circled in red and labeled "Soma dos infinitos termos da P.G." (Sum of infinite terms of the P.G.).

Voltemos ao exemplo do chocolate, quanto seria a soma:

$$S_{n \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

$$S_{n \rightarrow \infty} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Logo,

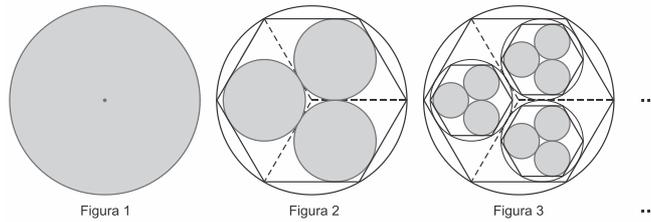
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

O que confirma o que havíamos conversado.

Vamos aos exercícios?

**QUESTÕES - SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. INFINITA**

36. (PPUCPR 2018) Considere, a seguir, os esboços das três primeiras figuras de uma sequência com infinitas construções geométricas.

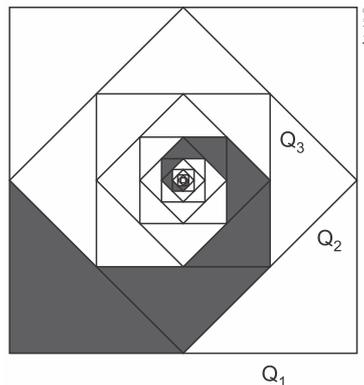


O círculo da Figura 1 tem  $7 \text{ dm}^2$  de área. Cada um dos três círculos destacados na Figura 2 está inscrito em um dos losangos congruentes que compõem o hexágono regular que, por sua vez, é circunscrito por um círculo equivalente ao da figura anterior. A partir desses três círculos destacados na Figura 2, e exatamente da mesma forma com que foram construídos, foram obtidos os círculos em destaque na Figura 3.

Seguindo indefinidamente com esse padrão de construção, o limite da soma de todas as áreas sombreadas nas infinitas figuras dessa sequência será, em decímetros quadrados, igual a

- A 13,15.
- B 14.
- C 16.
- D  $14\pi$ .
- E  $21\pi$ .

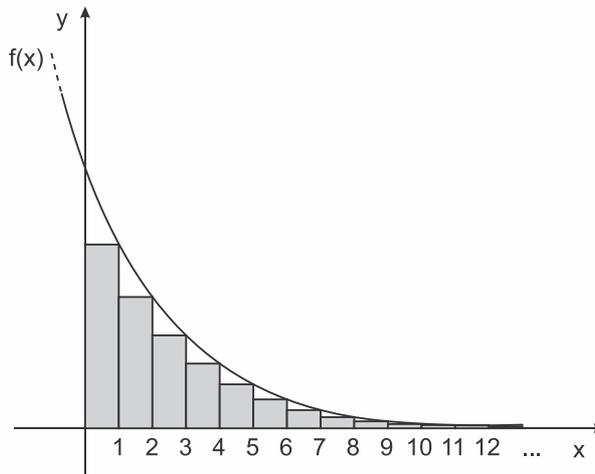
37. (UFRGS 2017) Na figura abaixo, encontram-se representados quadrados de maneira que o maior quadrado ( $Q_1$ ) tem lado 1. O quadrado  $Q_2$  está construído com vértices nos pontos médios dos lados de  $Q_1$ ; o quadrado  $Q_3$  está construído com vértices nos pontos médios dos lados de  $Q_2$  e, assim, sucessiva e infinitamente.



A soma das áreas da sequência infinita de triângulos sombreados na figura é

- A  $\frac{1}{2}$ .
- B  $\frac{1}{4}$ .
- C  $\frac{1}{8}$ .
- D  $\frac{1}{16}$ .
- E  $\frac{1}{32}$ .

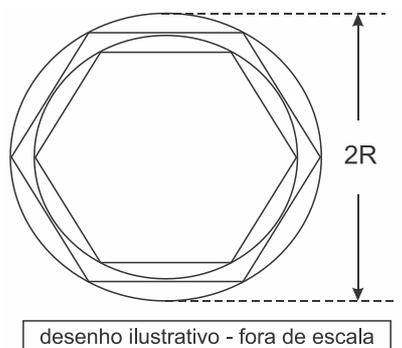
38. (ESPM 2017) A figura abaixo representa parte do gráfico da função  $f(x) = \frac{16}{2^x}$ , fora de escala.



A soma das áreas dos infinitos retângulos assinalados é igual a:

- A** 16
- B** 8
- C** 24
- D** 32
- E** 12

39. (ESPCEX 2016) Considere o seguinte procedimento: em uma circunferência de diâmetro  $2R$ , inscreve-se um hexágono regular para, em seguida, inscrever neste polígono uma segunda circunferência. Tomando esta nova circunferência, o processo é repetido gerando uma terceira circunferência.



Caso este procedimento seja repetido infinitas vezes, a soma dos raios de todas as circunferências envolvidas nesse processo é igual a:

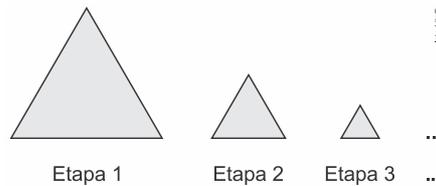
- A**  $2R \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
- B**  $4R \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
- C**  $4R \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$
- D**  $R(2 + \sqrt{3})$
- E**  $2R \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

40. (IFAL 2016) Num triângulo equilátero de lado  $L$ , constrói-se outro triângulo equilátero nos pontos médios de seus lados. Esse processo é feito indefinidamente, gerando infinitos outros triângulos equiláteros.

Então, podemos dizer que o limite da soma dos perímetros desses triângulos vale

- A 2 L.
- B 4 L.
- C 6 L.
- D 8 L.
- E 10 L.

41. (UFRGS 2016) Considere o padrão de construção representado pelos triângulos equiláteros abaixo.

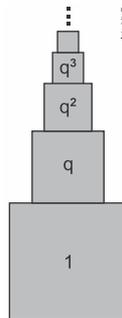


O perímetro do triângulo da etapa 1 é 3 e sua altura é  $h$ ; a altura do triângulo da etapa 2 é metade da altura do triângulo da etapa 1; a altura do triângulo da etapa 3 é metade da altura do triângulo da etapa 2 e, assim, sucessivamente.

Assim, a soma dos perímetros da sequência infinita de triângulos é

- A 2.
- B 3.
- C 4.
- D 5.
- E 6.

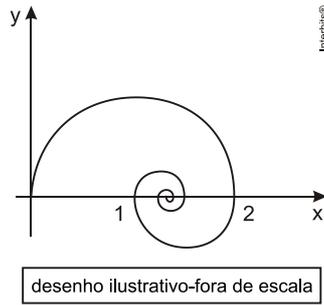
42. (UEFS 2016)



Se infinitos quadrados, cujas áreas formam uma progressão geométrica decrescente de razão  $q$ , pudessem ser empilhados, como na figura, e o quadrado da base tivesse uma área de  $1\text{ m}^2$ , a altura da pilha, em  $m$ , seria

- A  $\frac{1}{1-q}$
- B  $\frac{1-q}{1-\sqrt{q}}$
- C  $\frac{1-\sqrt{q}}{1-q}$
- D  $\frac{1+\sqrt{q}}{1-q}$
- E infinita

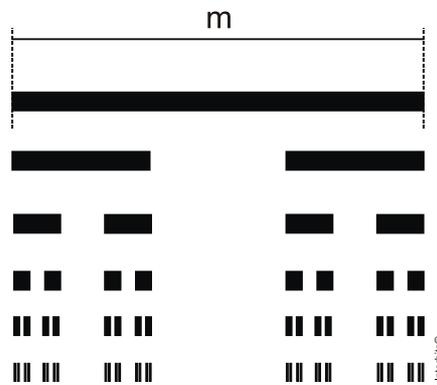
43. (ESPCEX 2015) Na figura abaixo temos uma espiral formada pela união de infinitos semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas.



Se o raio do primeiro semicírculo (o maior) é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do semicírculo anterior, o comprimento da espiral é igual a

- A  $\pi$ .
- B  $2\pi$ .
- C  $3\pi$ .
- D  $4\pi$ .
- E  $5\pi$ .

44. (ESPCEX 2013) Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original. Em muitos casos, um fractal é gerado pela repetição indefinida de um padrão. A figura abaixo segue esse princípio. Para construí-la, inicia-se com uma faixa de comprimento  $m$  na primeira linha. Para obter a segunda linha, uma faixa de comprimento  $m$  é dividida em três partes congruentes, suprimindo-se a parte do meio. Procede-se de maneira análoga para a obtenção das demais linhas, conforme indicado na figura.



Se, partindo de uma faixa de comprimento  $m$ , esse procedimento for efetuado infinitas vezes, a soma das medidas dos comprimentos de todas as faixas é

- A 3 m
- B 4 m
- C 5 m
- D 6 m
- E 7 m

45. (UFF 2010) Com o objetivo de criticar os processos infinitos, utilizados em demonstrações matemáticas de sua época, o filósofo Zenão de Eleia (século V a.C.) propôs o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, um dos paradoxos mais famosos do mundo matemático.



Fonte: <http://culturaclassica.blogspot.com/2008/05/aquiles-ainda-corre-os-paradoxos-de.html>

Existem vários enunciados do paradoxo de Zenão. O escritor argentino Jorge Luis Borges o apresenta da seguinte maneira:

*Aquiles, símbolo de rapidez, tem de alcançar a tartaruga, símbolo de morosidade. Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá dez metros de vantagem. Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga corre um; Aquiles corre esse metro, a tartaruga corre um decímetro; Aquiles corre esse decímetro, a tartaruga corre um centímetro; Aquiles corre esse centímetro, a tartaruga um milímetro; Aquiles corre esse milímetro, a tartaruga um décimo de milímetro, e assim infinitamente, de modo que Aquiles pode correr para sempre, sem alcançá-la.*

Fazendo a conversão para metros, a distância percorrida por Aquiles nessa fábula é igual a

$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

É correto afirmar que:

- A**  $d = +\infty$
- B**  $d = 11,11$
- C**  $d = \frac{91}{9}$
- D**  $d = 12$
- E**  $d = \frac{100}{9}$

## GABARITO

| QUESTÃO | ALTERNATIVA |
|---------|-------------|
| 01      | A           |
| 02      | C           |
| 03      | E           |
| 04      | C           |
| 05      | E           |
| 06      | E           |
| 07      | B           |
| 08      | B           |
| 09      | C           |
| 10      | D           |
| 11      | D           |
| 12      | A           |
| 13      | A           |
| 14      | E           |
| 15      | B           |
| 16      | A           |
| 17      | A           |
| 18      | E           |
| 19      | D           |
| 20      | E           |
| 21      | B           |
| 22      | D           |
| 23      | D           |
| 24      | A           |
| 25      | C           |
| 26      | E           |
| 27      | D           |
| 28      | D           |
| 29      | C           |
| 30      | A           |
| 31      | A           |
| 32      | A           |
| 33      | B           |
| 34      | C           |
| 35      | D           |
| 36      | C           |
| 37      | B           |
| 38      | A           |
| 39      | B           |
| 40      | C           |
| 41      | E           |
| 42      | D           |
| 43      | B           |
| 44      | A           |
| 45      | E           |



# MATEMÁTICA FINANCEIRA



**A**NDERSON  
MATEMÁTICA



Esse é um dos conteúdos mais importantes, não apenas para o Enem, mas para sua própria vida. Com ele, podemos analisar várias opções de investimentos, saber os custos gerados por financiamentos e para isso devemos empregar procedimentos matemáticos que simplificaram toda a nossa análise.



Para iniciar nosso estudo, vamos lançar mão de alguns conceitos:

**CAPITAL:** é o valor aplicado inicialmente em uma transação, é conhecido também por valor presente, ou ainda, valor atual.

**JUROS:** é uma remuneração que se obtém, por exemplo, quando se empresta uma quantia por um determinado período. Os juros, são destinados ao credor, uma maneira de compensar pelo tempo que passará sem usar o dinheiro que foi emprestado. No mesmo raciocínio, quem solicita um empréstimo ou utiliza certas modalidades de crédito, normalmente tem que pagar um acréscimo por ter usado um dinheiro que não lhe era próprio, esse acréscimo também é denominado juros. Os juros existem porque a maioria das pessoas prefere o consumo imediato, e está disposta a pagar um preço por isto. Por outro lado, quem for capaz de esperar até possuir a quantia suficiente para adquirir seu desejo, e neste ínterim estiver disposta a emprestar esta quantia a alguém menos paciente, portanto, deve ser recompensado por esta abstinência na proporção do tempo e risco, que a operação envolver.

**TAXA DE JUROS:** Para determinar o valor dos juros são definidas taxas percentuais (taxas de juros) fixadas pelo credor. As taxas de juros são calculadas de acordo com alguns fatores como, a inflação em vigor, com o que foi acordado no contrato ou com o risco do empréstimo para o credor. As taxas podem ser maiores ou menores numa relação proporcional ao tamanho do risco. No Brasil, os bancos utilizam uma taxa de referência básica, criada em 1979 pelo Banco Central do Brasil, chamada Taxa Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custódia). Essa taxa também é utilizada na delimitação das taxas de juros para o comércio.

**MONTANTE:** é o valor total, incluindo o capital e os juros.

No mercado financeiro, existem diversas modalidades de juros: juros simples, juros compostos, juros nominais, juros de mora, juros reais, juros rotativos, juros sobre o capital próprio, entre outras. Para o Enem, nos concentraremos em dois tipos de juros: os **SIMPLES** e os **COMPOSTOS**.

**JUROS SIMPLES**

A característica que definem os juros como sendo simples é a capitalização ocorrendo sempre sobre o valor inicial! Mas, o que é capitalização? É a atualização do capital... Veja o exemplo a seguir:

Suponha que seja feito um empréstimo de R\$ 1.000,00 a uma taxa de juros simples de 10% ao mês. Como estamos trabalhando com juros simples, devemos lembrar que toda a atualização do capital é feita sobre o valor inicial. Por tanto, mensalmente, sempre aumentaremos R\$ 100,00 que corresponde 10% de R\$ 1.000,00. Esses R\$ 100,00 que aumentaremos todo mês é chamado de parcela de juros, nos juros simples, a parcela de juros é fixa, já que a porcentagem é sempre calculada sobre o mesmo referencial.

Faremos uma tabela para analisar a evolução da dívida:

| Montante (R\$) | Tempo (meses) |
|----------------|---------------|
| 1.000,00       | 0             |
| 1.100,00       | 1             |
| 1.200,00       | 2             |
| 1.300,00       | 3             |
| 1.400,00       | 4             |

*Handwritten annotations: Red arrows point from the amount in one row to the amount in the next row, labeled '+100'. Red arrows point from the time in one row to the time in the next row, labeled '+1'.*

É importante perceber que o montante sempre aumenta em R\$ 100,00 mês após mês. Esse aumento constante faz com que os valores do montante componham um progressão aritmética de  $a_0 = 1.000$  e  $r = 100$ .

$$a_0 = 1.000 = 1.000 + 0 \times 100$$

$$a_1 = 1.100 = 1.000 + 1 \times 100$$

$$a_2 = 1.200 = 1.000 + 2 \times 100$$

$$a_3 = 1.300 = 1.000 + 3 \times 100$$

$$a_4 = 1.400 = 1.000 + 4 \times 100$$

...

$$a_t = 1.000 + t \times 100$$

Essa expressão indica que para descobrirmos o montante após t meses, basta multiplicar t por 100 e somar aos 1.000 iniciais.

Por exemplo, qual será o montante da dívida após 24 meses?

$$a_t = 1.000 + t \times 100$$

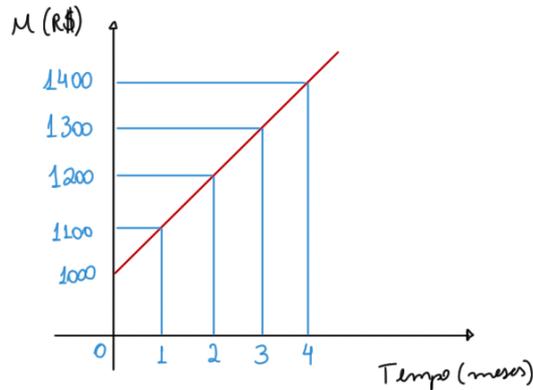
$$a_{24} = 1.000 + 24 \times 100$$

$$a_{24} = 1.000 + 2.400$$

$$a_{24} = 3.400$$

Após 24 meses a dívida será de R\$ 3.400,00. Isso acontece por que a parcela mensal de juros é fixa, a cada mês que se passa, acrescentamos R\$ 100,00, como se passam 24 meses, serão acrescentados 24 x R\$ 100,00 = R\$ 2.400,00 aos R\$ 1.000,00 que constituíam a dívida inicial, totalizando R\$ 3.400,00.

Se fôssemos representar graficamente a evolução da dívida, teríamos uma função do primeiro grau, já que a expressão é do tipo  $y = ax + b$  ( $a_t = 100t + 1.000$ ):



Vamos analisar um pouco mais a fundo a expressão deste exemplo para generalizarmos e usar para qualquer situação que envolva juros simples:

$$a_t = 1.000 + t \times 100$$

*montante* (apontando para  $a_t$ )  
*Capital Inicial* (apontando para 1.000)  
*número de Capitalizações* (apontando para  $t$ )  
*10% de 1000* (apontando para 100)  
*taxa de juros* (apontando para 10%)  
*Capital* (apontando para 1000)

Com isso, temos:

$$M = C + t \cdot i \cdot C$$

$$M = C + t \cdot i \cdot C$$

*Montante a juros Simples* (apontando para  $M$ )  
*Capital* (apontando para o primeiro  $C$ )  
*número de Capitalizações* (apontando para  $t$ )  
*taxa de juros Simples* (apontando para  $i$ )  
*Capital* (apontando para o segundo  $C$ )

Vimos no início que o Montante é a junção do Capital com os Juros, logo:

$$M = C + t \cdot i \cdot C$$

*Montante a juros Simples* (apontando para  $M$ )  
*Capital* (apontando para  $C$ )  
*juros Simples* (apontando para  $t \cdot i \cdot C$ )

Daí, podemos concluir que os Juros simples podem ser calculados utilizando a expressão:

$$J_s = t \cdot i \cdot C$$

Daí, se desejarmos saber os juros simples gerados por um capital, basta multiplicarmos o capital, pela taxa e pelo número de capitalizações. Vamos exercitar?

**QUESTÕES - JUROS SIMPLES**

1. (Fac. Albert Einstein - Medicina 2018) Um produto foi comprado em 2 parcelas, a primeira à vista e a segunda após 3 meses, de maneira que, sobre o saldo devedor, incidiram juros simples de 2% ao mês.

Se o valor das 2 parcelas foi o mesmo, em relação ao preço do produto à vista, cada parcela corresponde à

- A**  $\frac{51}{101}$
- B**  $\frac{53}{103}$
- C**  $\frac{55}{105}$
- D**  $\frac{57}{107}$

2. (Upe-ssa 3 2018) Diante da crise que o país atravessa, uma financeira oferece empréstimos a servidores públicos cobrando apenas juro simples.

Se uma pessoa retirar R\$ 8.000,00 nessa financeira, à taxa de juro de 16% ao ano, quanto tempo levará para pagar um montante de R\$ 8.320?

- A** 2 meses
- B** 3 meses
- C** 4 meses
- D** 5 meses
- E** 6 meses

3. (G1 - ifsc 2017) Analise as seguintes situações:

1. Seu João fez um empréstimo de R\$ 1.000,00, no Banco A, a uma taxa de juros simples; após 4 meses, pagou um montante de R\$ 1.320,00 e quitou sua dívida.

2. Dona Maria fez um empréstimo de R\$ 1.200,00, no Banco B, a uma taxa de juros simples; após 5 meses, pagou um montante de R\$ 1.800,00 e quitou a dívida.

Assinale a alternativa CORRETA.

A taxa mensal de juros simples cobrada pelo Banco A e pelo Banco B, respectivamente, é:

- A** 8% a.m. e 10% a.m.
- B** 18% a.m. e 13% a.m.
- C** 6,4% a.m. e 12,5% a.m.
- D** 13% a.m. e 18% a.m.
- E** 10% a.m. e 8% a.m.

4. (G1 - cftmg 2016) O pagamento de uma televisão foi feito, sem entrada, em 5 parcelas mensais iguais, corrigidas a juros simples pela taxa de 0,7% ao mês.

Dessa forma, no final do período, o valor total pago, em percentual, será maior do que o inicial em

- A 2,1.
- B 3,5.
- C 4,2.
- D 7,3.

5. (Uepg 2016) Paulo tem a quantia de R\$ 8.000,00 para aplicar durante quatro meses. Consultando três bancos, recebeu as seguintes propostas de investimento.

Proposta I: taxa de 15% ao ano de juros simples.

Proposta II: taxa de 0,04% ao dia de juros simples.

Proposta III: resgate de R\$ 8.416,00 no final do período de 4 meses.

Analise as propostas e assinale o que for correto.

01) A proposta I renderá mais de R\$ 300,00 de juros.

02) A proposta II vai produzir um montante superior a R\$ 8.400,00.

04) A proposta II renderá menos que a proposta III.

08) Se optar pela proposta III, Paulo terá aplicado seu dinheiro a uma taxa de juros simples igual a 6% ao semestre.

6. (Fmp 2016) Abaixo são apresentados termos gerais que definem cinco sequências de números reais, para  $n$  sendo um número natural:

$$a_n = 80 \cdot (24)^n$$

$$b_n = 80 \cdot (1,30)^n$$

$$c_n = 80 \cdot (0,30)^n$$

$$d_n = 80 + 24 \cdot n$$

$$e_n = 80 + (2,4) \cdot n$$

Um dos termos gerais apresentados acima indica o valor devido  $n$  meses após a tomada de um empréstimo de R\$ 80,00, calculado após a incidência de uma taxa mensal de **juros simples** de 30% sobre o valor do empréstimo.

Esse termo geral é

- A  $e_n$
- B  $d_n$
- C  $a_n$
- D  $c_n$
- E  $b_n$

7. (cftmg 2015) Uma cliente fez um empréstimo, a juros simples, de R\$600,00 em um banco, a uma taxa de 4% ao mês, por dois meses. Quando ela foi pagar, o gerente do banco informou-lhe que poderia sortear uma taxa  $i$  para ter um desconto sobre o valor de sua dívida. Fez-se o sorteio e foi lhe concedido o desconto, resultando no pagamento de R\$602,64.

Dessa forma, o valor da taxa  $i$  sorteada foi de

- A** 5%
- B** 6%
- C** 7%
- D** 8%

8. (Ufsm 2015) A chegada da televisão no Brasil facilitou o acesso à informação. Com o avanço da tecnologia, os aparelhos estão cada dia mais modernos e conseqüentemente mais caros. Um consumidor deseja adquirir uma televisão com tecnologia de última geração. Enquanto aguarda o preço da televisão baixar, ele aplica o capital disponível de R\$3.000,00 a juros simples de 0,8% ao mês em uma instituição financeira, por um período de 18 meses.

O montante, ao final desse período, é igual a

- A** R\$7.320,00.
- B** R\$5.400,00.
- C** R\$4.320,00.
- D** R\$3.432,00.
- E** R\$3.240,00.

9. (Uepa 2015) Um agricultor financiou junto a uma cooperativa os insumos utilizados na lavoura em 2014. Pagou 20% do valor dos insumos no ato da compra, utilizando parte do lucro obtido no ano anterior, e financiou o restante em 10 meses a uma taxa de 2% ao mês a juros simples. Observou que havia gastado o montante de R\$ 208.800,00 com a parte financiada.

Neste caso, o valor financiado dos insumos pelo agricultor foi de:

- A** R\$ 217.500,00
- B** R\$ 174.000,00
- C** R\$ 164.000,00
- D** R\$ 144.500,00
- E** R\$ 136.000,00

10. (Espm 2013) Um empréstimo de R\$ 10.000,00 foi pago em 5 parcelas mensais, sendo a primeira, de R\$ 2.000,00, efetuada 30 dias após e as demais com um acréscimo de 10% em relação à anterior.

Pode-se concluir que a taxa mensal de juros simples ocorrida nessa transação foi de aproximadamente:

- A** 2,78%
- B** 5,24%
- C** 3,28%
- D** 6,65%
- E** 4,42%

11. (EPCAR 2013) Gabriel aplicou R\$ 6500,00 a juros simples em dois bancos.

No banco A, ele aplicou uma parte a 3% ao mês durante  $\frac{5}{6}$  de um ano; no banco B, aplicou o restante a 3,5% ao mês, durante  $\frac{3}{4}$  de um ano.

O total de juros que recebeu nas duas aplicações foi de R\$ 2002,50.

Com base nessas informações, é correto afirmar que

- A** é possível comprar um televisor de R\$ 3100,00 com a quantia aplicada no banco A
- B** o juro recebido com a aplicação no banco A foi menor que R\$ 850,00
- C** é possível comprar uma moto de R\$ 4600,00 com a quantia recebida pela aplicação no banco B
- D** o juro recebido com a aplicação no banco B foi maior que R\$ 1110,00

12. (EPCAR 2012) Sr José tinha uma quantia  $x$  em dinheiro e aplicou tudo a juros simples de 5% ao ano.

Terminado o primeiro ano, reuniu o capital aplicado e os juros e gastou  $\frac{1}{3}$  na compra de material para construção de sua casa.

O restante do dinheiro ele investiu em duas aplicações: colocou  $\frac{5}{7}$  a juros simples de 6% ao ano e o que sobrou a juros simples de 5% ao ano, recebendo assim, 700 reais de juros relativos a esse segundo ano.

Pode-se afirmar, então, que a quantia  $x$  que o Sr. José tinha é um número cuja soma dos algarismos é

- A** 10
- B** 11
- C** 12
- D** 13

13. (CFTMG 2011) A quantia de R\$17.000,00 investida a juros simples de 0,01% ao dia, gera, após 60 dias, um montante de

- A** R\$102,00
- B** R\$1.020,00
- C** R\$17.102,00
- D** R\$18.020,00

14. (EPCAR 2011) Lucas e Mateus ganharam de presente de aniversário as quantias  $x$  e  $y$  reais, respectivamente, e aplicaram, a juros simples, todo o dinheiro que ganharam, da seguinte forma:

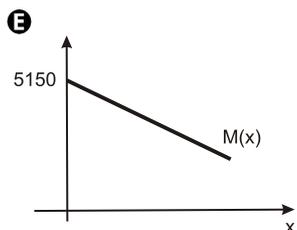
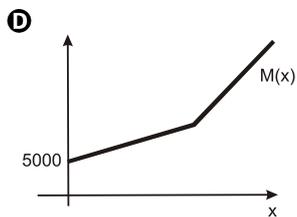
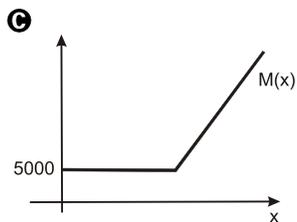
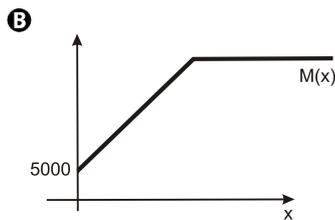
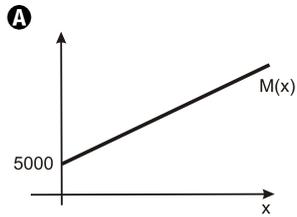
- 1) Mateus aplicou a quantia  $y$  durante um tempo que foi metade do que esteve aplicado a quantia  $x$  de Lucas.
- 2) Mateus aplicou seu dinheiro a uma taxa igual ao triplo da taxa da quantia aplicada por Lucas.
- 3) No resgate de cada quantia aplicada, Lucas e Mateus receberam o mesmo valor de juros.

Se juntos os dois ganharam de presente 516 reais, então  $x - y$  é igual a

- A** R\$ 103,20
- B** R\$ 106,40
- C** R\$ 108,30
- D** R\$ 109,60

15. (Enem cancelado 2009) Paulo emprestou R\$ 5.000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere  $x$  o número de meses do empréstimo e  $M(x)$  o montante a ser devolvido para Paulo no final de  $x$  meses.

Nessas condições, a representação gráfica correta para  $M(x)$  é



16. (Ufsm 2008) Para custear seus estudos em um curso de culinária, um aluno conseguiu um empréstimo no valor de R\$ 1.000,00 pelo qual pagará, após 4 meses, uma única parcela de R\$ 1.280,00.

Portanto, a taxa anual de juros simples desse empréstimo é de

- A** 84%
- B** 96%
- C** 184%
- D** 196%
- E** 336%

17. (Ufpr 2008) Luiz Carlos investiu R\$ 10.000,00 no mercado financeiro da seguinte forma: parte no fundo de ações, parte no fundo de renda fixa e parte na poupança. Após um ano ele recebeu R\$ 1.018,00 em juros simples dos três investimentos. Nesse período de um ano, o fundo de ações rendeu 15%, o fundo de renda fixa rendeu 10% e a poupança rendeu 8%.

Sabendo que Luiz Carlos investiu no fundo de ações apenas metade do que ele investiu na poupança, os juros que ele obteve em cada um dos investimentos foram:

- a) R\$ 270,00 no fundo de ações, R\$ 460,00 no fundo de renda fixa e R\$ 288,00 na poupança.
- b) R\$ 300,00 no fundo de ações, R\$ 460,00 no fundo de renda fixa e R\$ 258,00 na poupança.
- c) R\$ 260,00 no fundo de ações, R\$ 470,00 no fundo de renda fixa e R\$ 288,00 na poupança.
- d) R\$ 260,00 no fundo de ações, R\$ 480,00 no fundo de renda fixa e R\$ 278,00 na poupança.
- e) R\$ 270,00 no fundo de ações, R\$ 430,00 no fundo de renda fixa e R\$ 318,00 na poupança.

18. (Fgv 2007) Determinada loja vende todos os produtos com pagamento para 45 dias. Para pagamento à vista, a loja oferece 8% de desconto.

A taxa mensal de juro simples paga pelo cliente que prefere pagar após 45 dias é, aproximadamente, de:

- A 0%
- B 5,3%
- C 8%
- D 5,8%
- E 4,2%

19. (Pucmg 2006) Em 05 de agosto de 2004, aproveitando a possibilidade de desconto no benefício, certo aposentado contraiu um empréstimo de R\$ 12.000,00 à taxa de juros simples de 2% ao mês.

Se nenhuma parcela desse empréstimo foi descontada, o saldo devedor em 5 de dezembro de 2005 era de, aproximadamente:

- A R\$ 15.250,00
- B R\$ 15.840,00
- C R\$ 16.160,00
- D R\$ 16.720,00

20. (Ufpe 2005) O preço de um aparelho de TV, quando comprado à vista, é de R\$ 1.500,00. A loja financia o pagamento em três prestações mensais de R\$ 575,00, sendo a primeira paga um mês após a compra.

Quais os juros mensais simples embutidos no financiamento?

- A 3,0%
- B 3,5%
- C 4,0%
- D 4,5%
- E 5,0%

**JUROS COMPOSTOS**

A característica principal dos juros compostos é que a capitalização ocorre sobre o acumulado anterior. Com isso, passam a incidir juros sobre juros. Vamos considerar um empréstimo de R\$ 1.000,00 assim como fizemos com os juros simples na seção anterior, só que agora, com uma taxa de juros compostos de 10% ao mês, sendo assim, analisemos a tabela com o montante mês a mês:

| Montante (R\$) | Tempo (meses) |
|----------------|---------------|
| 1.000,00       | 0             |
| 1.100,00       | 1             |
| 1.210,00       | 2             |
| 1.331,00       | 3             |
| 1.464,10       | 4             |

Perceba com um mês de dívida, devemos calcular um aumento de 10% sobre o valor de R\$ 1.000,00 e por isso multiplicamos R\$ 1.000,00 por 1,1, já para sabermos o valor da dívida passados dois meses, devemos calcular um aumento de 10% sobre R\$ 1.100,00, o que fazemos multiplicando por 1,1. Perceba que para saber o montante para o próximo mês, basta multiplicarmos por 1,1. Isso faz com que os montantes estabeleçam uma progressão geométrica de razão 1,1.

$$a_0 = 1.000 = 1.000 \times (1,1)^0$$

$$a_1 = 1.100 = 1.000 \times (1,1)^1$$

$$a_2 = 1.210 = 1.000 \times (1,1)^2$$

$$a_3 = 1.331 = 1.000 \times (1,1)^3$$

$$a_4 = 1.464,1 = 1.000 \times (1,1)^4$$

Com isso, percebemos que:

$$a_t = 1.000 \times (1,1)^t$$

Essa expressão indica que para encontrarmos o montante desse empréstimo, passados t meses, basta multiplicarmos 1.000 por 1,1 elevado a t. Por exemplo, qual será o montante da dívida passados 6 meses?

$$a_t = 1.000 \times (1,1)^t$$

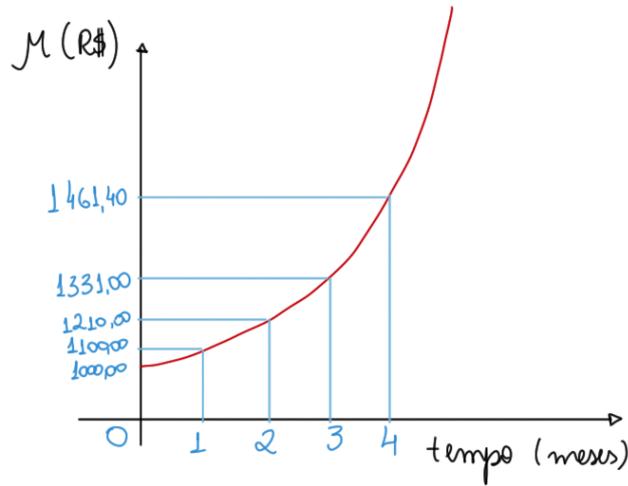
$$a_6 = 1.000 \times (1,1)^6$$

$$a_6 = 1.000 \times 1,771561$$

$$a_6 \cong 1.771,56$$

A dívida total, após seis meses é de, aproximadamente, R\$ 1.771,56.

Para representar graficamente a evolução da dívida desse empréstimo, usaremos uma função exponencial, já que mês a mês, os valores da dívida compõem uma P.G. e a expressão é do tipo  $y = a \times b^x \rightarrow a_t = 1.000 \times (1,1)^t$ :



Vamos analisar um pouco mais a fundo a expressão deste exemplo para generalizarmos e usar para qualquer situação que envolva juros compostos:

$$a_t = 1.000 \times (1,1)^t$$

*Montante a juros compostos*  $M$   
*Capital Inicial*  $C$   
*fator multiplicativo*  $(1+i)$   
*1+taxa*  
*número de Capitalizações*  $t$

Com isso, temos:

$$M = C \times (1+i)^t$$

$$M = C \times (1+i)^t$$

*Montante a juros compostos*  $M$   
*Capital Inicial*  $C$   
*fator multiplicativo*  
*número de Capitalizações*  $t$

Vamos exercitar?

**QUESTÕES - JUROS COMPOSTOS**

21. (Uemg 2018) Júlio dispõe de uma quantia  $Q$ , em reais, e pretende aplicá-la, no sistema de juros compostos, à taxa de 4% ao mês.

Considerando  $\log 2 = 0,3010$  e  $\log 1,04 = 0,0086$ , quanto tempo será necessário para que essa quantia seja quadruplicada?

- A** 4 anos e meio.
- B** 5 anos e 8 meses.
- C** 5 anos e 10 meses.
- D** Mais de 6 anos.

22. (Ufu 2018) Um comerciante está negociando o valor  $V$  da venda à vista de uma mercadoria que foi adquirida com seu fornecedor um mês antes por R\$ 1.000,00 com 4 meses de prazo para pagamento (sem pagar juros). Sabe-se que o comerciante aplica esse valor  $V$  à taxa de 2% de juros (compostos) ao mês para viabilizar o pagamento futuro da mercadoria.

Para que a atualização do valor associado à venda dessa mercadoria forneça, na data do pagamento do fornecedor, um lucro líquido de R\$ 200,00, a venda à vista deve ser de

**Observação:** use a aproximação 1,0612 para  $(1,02)^3$  e, ao expressar um valor monetário, faça o arredondamento na segunda casa decimal, considerando unidades inteiras de centavos.

- A** R\$ 942,33.
- B** R\$ 1.130,80.
- C** R\$ 1.232,89.
- D** R\$ 1.108,62.

23. (IFSC 2017) Segundo dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), o rendimento médio mensal das famílias catarinenses é R\$ 1.368,00.

Considerando-se que uma família pegou um empréstimo no valor de 30% de sua renda média mensal e vai pagar este empréstimo a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, quanto essa família pegou emprestado e qual o valor que a família irá pagar (montante final) se saldar essa dívida em 2 meses?

- A** Pegou emprestado R\$ 407,40 e pagará, ao final de 2 meses, R\$ 423,86.
- B** Pegou emprestado R\$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R\$ 425,94.
- C** Pegou emprestado R\$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R\$ 424,90.
- D** Pegou emprestado R\$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R\$ 425,94.
- E** Pegou emprestado R\$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R\$ 426,98.

24. (Enem 2017) Um empréstimo foi feito a taxa mensal de  $i\%$ , usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a  $P$ . O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é

- A**  $P \left[ 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} \right]$
- B**  $P \left[ 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{100}\right)} \right]$
- C**  $P \left[ 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} \right]$
- D**  $P \left[ 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{3i}{100}\right)} \right]$
- E**  $P \left[ 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^3} \right]$

25. (Usf 2016) Pensando em montar seu próprio consultório, Nathália começou a economizar desde que entrou no curso de Medicina. Ao passar no vestibular, ela ganhou R\$ 5.000,00 de seus pais e os aplicou a uma taxa de 0,5% ao mês a juros compostos. Além disso, mensalmente, ela depositou R\$ 100,00 à mesma taxa de juros compostos.

Hoje, passados 5 anos, ou seja, 60 meses, qual o montante do rendimento dos R\$ 5.000,00 e qual o valor economizado por Nathália com suas aplicações mensais?

(Considere  $1,005^{60} \cong 1,35$ )

- A** R\$ 6.750,00 e R\$ 7.000,00.  
**B** R\$ 6.500,00 e R\$ 7.800,00.  
**C** R\$ 6.500,00 e R\$ 7.000,00.  
**D** R\$ 6.750,00 e R\$ 7.800,00.  
**E** R\$ 7.800,00 e R\$ 6.500,00.

26. (IFAL 2016) Em 2000, certo país da América Latina pediu um empréstimo de 1 milhão de dólares ao FMI (Fundo Monetário Internacional) para pagar em 100 anos. Porém, por problemas políticos e de corrupção, nada foi pago até hoje e a dívida foi sendo “rolada” com a taxa de juros compostos de 8,5% ao ano.

Determine o valor da dívida no corrente ano de 2015, em dólar. Considere  $(1,085)^5 \cong 1,5$ .

- A** 1,2 milhões.
- B** 2,2 milhões.
- C** 3,375 milhões.
- D** 1,47 milhões.
- E** 2 milhões.

27. (Espm 2016) Em todos os dias 10 dos meses de janeiro, fevereiro e março de um certo ano, o Sr. João aplicou a mesma quantia de R\$ 1.000,00 à taxa de juros compostos de 10% ao mês.

Podemos concluir que o montante dessa aplicação no dia 10 de abril desse mesmo ano foi de:

- A** R\$ 4.203,00
- B** R\$ 3.641,00
- C** R\$ 4.015,00
- D** R\$ 3.135,00
- E** R\$ 3.968,00

28. (Upe-ssa 3 2016) Mariana fez um empréstimo à base de juros compostos, num banco que cobra 10% ao mês. Ao final de 180 dias, o montante a ser pago por ela será de R\$ 9.000,00. Com o dinheiro do empréstimo, Mariana realizou alguns pagamentos chegando a sua casa com R\$ 1.250,00.

Quanto ela gastou, aproximadamente, com os pagamentos?

Adote  $(1,1)^6 = 1,8$

- A** R\$ 1.333,00
- B** R\$ 2.755,00
- C** R\$ 3.260,00
- D** R\$ 3.750,00
- E** R\$ 4.500,00

29. (Ufu 2015) Um financiamento de R\$10.000 foi contratado a uma taxa de juros (compostos) de 3% ao mês. Ele será liquidado em duas parcelas iguais, a primeira vencendo em 60 dias e a segunda em 90 dias após a efetivação do contrato.

Dados:

|                                   |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $(1 + 0,03)^1 = 1,03$             | $(1 + 0,03)^2 = 1,0609$           | $(1 + 0,03)^3 = 1,0927$           |
| $\frac{1}{(1 + 0,03)^1} = 0,9709$ | $\frac{1}{(1 + 0,03)^2} = 0,9426$ | $\frac{1}{(1 + 0,03)^3} = 0,9151$ |

O valor de cada parcela desse financiamento é, aproximadamente, igual a

- A** R\$5226,00.
- B** R\$5383,00.
- C** R\$5387,00.
- D** R\$5282,00.

30. (Upe 2014) Antônio foi ao banco conversar com seu gerente sobre investimentos. Ele tem um capital inicial de R\$ 2.500,00 e deseja saber depois de quanto tempo de investimento esse capital, aplicado a juros compostos, dobrando todo ano, passa a ser maior que R\$ 40.000,00.

Qual a resposta dada por seu gerente?

- A 1,5 anos
- B 2 anos
- C 3 anos
- D 4 anos
- E 5 anos

31. (Ufsm 2014) Uma empresa de cartão de crédito opera com juros compostos de 6% ao mês. Um usuário dessa empresa contraiu uma dívida de R\$ 2.000,00 e, durante 6 meses, não pôde efetuar o pagamento. Ao procurar a empresa para renegociar a dívida, a empresa propôs que seja quitada em uma única parcela, com juros simples de 5% ao mês, referente aos 6 meses de atraso.

Aceita a proposta, o total de juros pagos e o desconto obtido, em reais, são, respectivamente, iguais a

$$\text{Dado: } (1,06)^6 = 1,4185$$

- A 600,00 e 117,00.
- B 600,00 e 120,00.
- C 600,00 e 237,00
- D 720,00 e 117,00.
- E 720,00 e 120,00.

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES: Com base na leitura do texto abaixo, responda a(s) quest(ões).

Antes de analisar os dados abaixo, é importante lembrar que o Brasil ainda tem uma baixíssima renda per capita (por cabeça), de US\$ 10.900 (em 2010). Porém, entre 2003 e 2011, por volta de 100 milhões de pessoas integravam a classe C, a chamada nova classe média, sendo que então quase 30 milhões deram um salto para ela, movimentando toda a economia, e especialmente no Nordeste. (...) Ressalte-se ainda que o país deteve até 2012 o recorde mundial de taxas de juros cobradas de suas empresas e consumidores, mesmo com as reduções. Mesmo assim, um cartão de crédito ainda costumava cobrar mais de 10 % de juros mensais em 2013, quando em qualquer lugar do mundo essa taxa - ANUAL - já seria absurda.

Fonte: [http://www.economiabr.com.br/Ind/Ind\\_consumo.htm](http://www.economiabr.com.br/Ind/Ind_consumo.htm).  
Acesso: 10 abr. 2014. [Adaptado]

32. (ifsc 2014) É **CORRETO** afirmar que a taxa de 10% ao mês de juros compostos do cartão de crédito é equivalente a uma anual de juros compostos:

- A menor que 10%
- B igual a 120%
- C entre 50% e 100%
- D maior que 120%
- E igual a 10%

33. (ifsc 2014) É **CORRETO** afirmar que uma dívida de R\$ 500,00 no cartão de crédito, a uma taxa de juros de 10% ao mês de juros compostos, durante n meses, pode ser modelada pela seguinte função:

- A  $y = 500 \cdot (1,1)^n$
- B  $y = (500) \cdot 1,1 \cdot n$
- C  $y = 500 + (1,1) \cdot n$
- D  $y = 500^2 + (1,1) \cdot n$
- E  $y = 500^2 + 1,1$

34. (Ufsm 2013) No Brasil, falar em reciclagem implica citar os catadores de materiais e suas cooperativas. Visando a agilizar o trabalho de separação dos materiais, uma cooperativa decide investir na compra de equipamentos. Para obter o capital necessário para a compra, são depositados, no primeiro dia de cada mês, R\$600,00 em uma aplicação financeira que rende juros compostos de 0,6% ao mês.

A expressão que representa o saldo, nessa aplicação, ao final de  $n$  meses, é

- A  $100.600[(1,006)^n - 1]$ .
- B  $100.000[(1,06)^n - 1]$ .
- C  $10.060[(1,006)^n - 1]$ .
- D  $100.600[(1,06)^n - 1]$ .
- E  $100.000[(1,006)^n - 1]$ .

35. (Ufrn 2013) Maria pretende comprar um computador cujo preço é R\$ 900,00. O vendedor da loja ofereceu dois planos de pagamento: parcelar o valor em quatro parcelas iguais de R\$ 225,00, sem entrada, ou pagar à vista, com 5% de desconto. Sabendo que o preço do computador será o mesmo no decorrer dos próximos quatro meses, e que dispõe de R\$ 855,00, ela analisou as seguintes possibilidades de compra:

|         |  |
|---------|--|
| Opção 1 | Comprar à vista, com desconto.   |
| Opção 2 | Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 1% de juros compostos ao mês e comprar, no final dos quatro meses, por R\$ 900,00.         |
| Opção 3 | Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 1% de juros compostos ao mês e comprar a prazo, retirando, todo mês, o valor da prestação. |
| Opção 4 | Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 2,0% de juros compostos ao mês e comprar, três meses depois, pelos R\$ 900,00.             |

Entre as opções analisadas por Maria, a que oferece maior vantagem financeira no momento é a

- A opção 2.
- B opção 1.
- C opção 4.
- D opção 3.

36. (Fgv 2013) Uma mercadoria é vendida com entrada de R\$500,00 mais 2 parcelas fixas mensais de R\$576,00.

Sabendo-se que as parcelas embutem uma taxa de juros compostos de 20% ao mês, o preço à vista dessa mercadoria, em reais, é igual a

- A 1.380,00.
- B 1.390,00.
- C 1.420,00.
- D 1.440,00.
- E 1.460,00.

37. (Mackenzie 2012) Maria fez um empréstimo bancário a juros compostos de 5% ao mês. Alguns meses após ela quitou a sua dívida, toda de uma só vez, pagando ao banco a quantia de R\$10.584,00.

Se Maria tivesse pago a sua dívida dois meses antes, ela teria pago ao banco a quantia de

- A R\$10.200,00
- B R\$9.800,00
- C R\$9.600,00
- D R\$9.200,00
- E R\$9.000,00

38. (Uepa 2012) Diversas pesquisas apontam o endividamento de brasileiros. O incentivo ao consumismo, mediado pelas diversas mídias, associado às facilidades de crédito consignado e ao uso desenfreado de cartões são alguns dos fatores responsáveis por essa perspectiva de endividamento.

(Fonte: Jornal *o Globo*, de 4 de setembro de 2011 - Texto Adaptado)

Suponha que um cartão de crédito cobre juros de 12% ao mês sobre o saldo devedor e que um usuário com dificuldades financeiras suspende o pagamento do seu cartão com um saldo devedor de R\$660,00. Se a referida dívida não for paga, o tempo necessário para que o valor do saldo devedor seja triplicado sobre regime de juros compostos, será de:

Dados:  $\log 3 = 0,47$ ;  $\log 1,12 = 0,05$ .

- A nove meses e nove dias
- B nove meses e dez dias
- C nove meses e onze dias
- D nove meses e doze dias
- E nove meses e treze dias

39 . (Enem 2018) Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente  $P$  submetido a juros compostos com taxa  $i$ , por um período de tempo  $n$ , produz um valor futuro  $V$  determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1+i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R\$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize 0,2877 como aproximação para  $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$  e 0,0131 como aproximação para  $\ln(1,0132)$ .

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

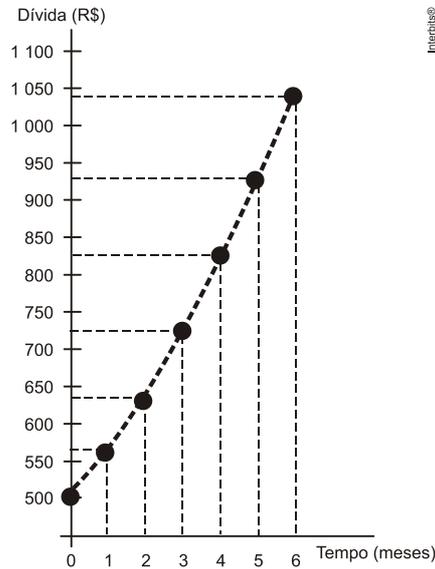
- A 56ª
- B 55ª
- C 52ª
- D 51ª
- E 45ª

40. (Enem 2015) Um casal realiza um financiamento imobiliário de R\$ 180.000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R\$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R\$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

- A 2.075,00.
- B 2.093,00.
- C 2.138,00.
- D 2.255,00.
- E 2.300,00.

41. (Enem PPL 2013) Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida. Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são

- Ⓐ R\$ 500,00; constante e inferior a 10% ao mês.
- Ⓑ R\$ 560,00; variável e inferior a 10% ao mês.
- Ⓒ R\$ 500,00; variável e superior a 10% ao mês.
- Ⓓ R\$ 560,00; constante e superior a 10% ao mês.
- Ⓔ R\$ 500,00; variável e inferior a 10% ao mês.

42. (Enem PPL 2013) O Conselho Monetário Nacional (CMN) determinou novas regras sobre o pagamento mínimo da fatura do cartão de crédito, a partir do mês de agosto de 2011. A partir de então, o pagamento mensal não poderá ser inferior a 15% do valor total da fatura. Em dezembro daquele ano, outra alteração foi efetuada: daí em diante, o valor mínimo a ser pago seria de 20% da fatura.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 29 fev. 2012.

Um determinado consumidor possuía no dia do vencimento, 01/03/2012, uma dívida de R\$1.000,00 na fatura de seu cartão de crédito. Se não houver pagamento do valor total da fatura, são cobrados juros de 10% sobre o saldo devedor para a próxima fatura. Para quitar sua dívida, optou por pagar sempre o mínimo da fatura a cada mês e não efetuar mais nenhuma compra.

A dívida desse consumidor em 01/05/2012 será de

- Ⓐ R\$ 600,00.
- Ⓑ R\$ 640,00.
- Ⓒ R\$ 722,50.
- Ⓓ R\$ 774,40.
- Ⓔ R\$ 874,22.

43. (Enem 2009) João deve 12 parcelas de R\$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R\$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R\$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado.

A opção que dá a João o menor gasto seria

- A** renegociar suas dívidas com o banco.
- B** pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.
- C** recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.
- D** pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.
- E** pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

44. (Enem 2000) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os pontos possíveis, é de R\$ 21.000,00 e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R\$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deverá esperar:

- A** dois meses, e terá a quantia exata.
- B** três meses, e terá a quantia exata.
- C** três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$225,00.
- D** quatro meses, e terá a quantia exata.
- E** quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$430,00.

## GABARITO

| QUESTÃO | ALTERNATIVA |
|---------|-------------|
| 01      | B           |
| 02      | B           |
| 03      | A           |
| 04      | B           |
| 05      | 01 e 04     |
| 06      | B           |
| 07      | C           |
| 08      | D           |
| 09      | B           |
| 10      | E           |
| 11      | C           |
| 12      | D           |
| 13      | C           |
| 14      | A           |
| 15      | A           |
| 16      | A           |
| 17      | A           |
| 18      | D           |
| 19      | B           |
| 20      | E           |
| 21      | C           |
| 22      | B           |
| 23      | E           |
| 24      | A           |
| 25      | A           |
| 26      | C           |
| 27      | B           |
| 28      | D           |
| 29      | B           |
| 30      | D           |
| 31      | C           |
| 32      | D           |
| 33      | A           |
| 34      | A           |
| 35      | C           |
| 36      | A           |
| 37      | C           |
| 38      | D           |
| 39      | C           |
| 40      | D           |
| 41      | C           |
| 42      | D           |
| 43      | E           |
| 44      | C           |

# MMC e MDC



**A**NDERSON  
MATEMÁTICA



## MMC E MDC

### MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Você sabe o que é um múltiplo de um número? Para o Enem, vamos nos restringir aos múltiplos positivos. Dizemos que 24 é múltiplo de 6, pois 24 é um número inteiro, 6 é um número inteiro e a divisão de 24 por 6 também é um número inteiro. Daí, dizemos que 24 é múltiplo de 6, ou ainda, que 6 é um divisor de 24. Já que estamos falando sobre um múltiplo de 6, que tal conhecermos mais múltiplos?

Se fôssemos anotar os múltiplos de 6, teríamos uma lista infinita:

$$M_6 = (0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots)$$

Mas isso é exclusividade do 6? Não, os números possuem infinitos múltiplos... Observe a lista dos múltiplos de 5:

$$M_5 = (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots)$$

Temos então, duas listas de múltiplos, os de 6 e os de 5. Existe algum múltiplo que esteja nas duas listas? Existe algum múltiplo em comum entre 6 e 5?

$$M_6 = (0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, \dots)$$

$$M_5 = (0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, \dots)$$

Os múltiplos comuns entre 5 e 6 são:

$$M_{5 \text{ e } 6} = (0, 30, 60, \dots)$$

Zero é múltiplo de todos os inteiros, por isso, ele sempre será múltiplo comum entre dois números e sempre aparecerá como o primeiro da lista. Esta é a razão pela qual sugeri que fiquemos apenas com os múltiplos positivos...

E o que é um Mínimo Múltiplo Comum (MMC)?

É o primeiro número, excluindo o zero, que figura na lista ordenada dos múltiplos dos números em questão. No caso de 6 e 5, o menor múltiplo comum é 30. Isso quer dizer, que 30 é o menor número positivo que é divisível por 6 e por 5 ao mesmo tempo.

Generalizando, dizemos que o número inteiro  $m$  é o MMC entre os inteiros  $x$  e  $y$ , se  $m$  é o menor número inteiro e positivo que é divisível por  $x$  e por  $y$  simultaneamente.

Existem algumas maneiras de encontrar o MMC, a primeira delas é fazendo a decomposição em fatores primos dos números em separado, vamos pegar o 36 e o 48 como exemplo:

|    |  |   |
|----|--|---|
| 36 |  | 2 |
| 18 |  | 2 |
| 9  |  | 3 |
| 3  |  | 3 |
| 1  |  |   |

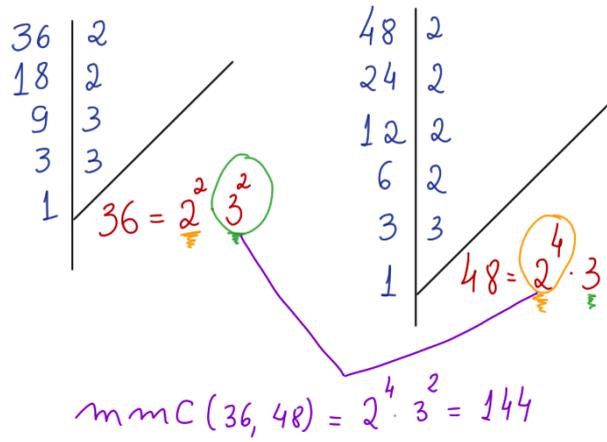
$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

|    |  |   |
|----|--|---|
| 48 |  | 2 |
| 24 |  | 2 |
| 12 |  | 2 |
| 6  |  | 2 |
| 3  |  | 3 |
| 1  |  |   |

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

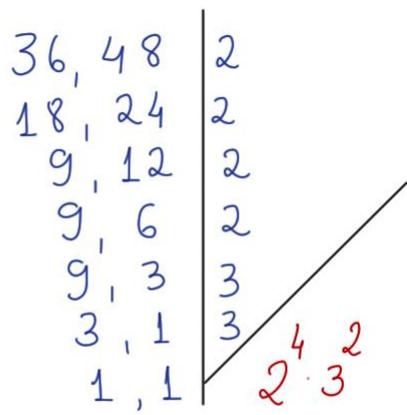
Nessa maneira, você deve atenta primeiramente para os fatores, perceba que tanto o 2 quanto o 3 aparecem nas duas fatorações. Para cada fator comum, você deve escolher o que está elevado a maior potência.

Por exemplo, no 36 aparece  $2^2$  e no 48 aparece  $2^4$ , devemos escolher  $2^4$  que é a maior potência de 2 que aparece. Em relação ao 3, aparece  $3^2$  na fatoração do 36 e aparece  $3^1$  na fatoração do 48, logo, devemos escolher  $3^2$  por ser a maior potencia de 3 que aparece. Portanto, o MMC entre 36 e 48, será  $2^4 \times 3^2 = 144$ .



Se existirem fatores que não são comuns, eles já são a maior potência que aparece, por isso, devem também ser considerados no produto.

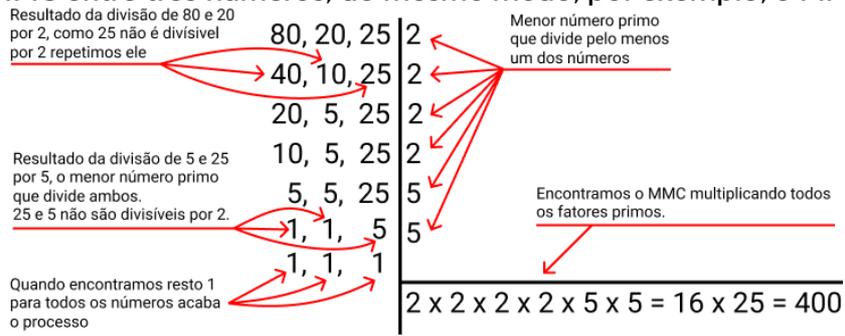
Outra maneira de encontrar o MMC de dois números é efetuar a decomposição em fatores primos de maneira conjunta:



$$mmc(36, 48) = 2^4 \cdot 3^2 = 144$$

Esse é o método que estamos mais acostumados a fazer.

E como calcular o MMC entre três números, do mesmo modo, por exemplo, o MMC (80, 20, 25) será:



Vamos exercitar um pouco?

1. (cmrj 2018) Os povos indígenas têm uma forte relação com a natureza. Suponha que a tribo indígena Kayapó Gorotire, do Norte do Brasil, celebre o Ritual do Sol de 20 em 20 dias, o Ritual da Chuva de 66 em 66 dias, e o Ritual da Terra de 30 em 30 dias.

Se os três rituais acontecerem hoje, 10 de setembro de 2017, que é um domingo, o próximo dia da semana em que os três rituais serão celebrados juntos novamente será

- A** Sábado.
- B** Terça-feira.
- C** Quarta-feira.
- D** Quinta-feira.
- E** Sexta-feira.

2. (Upe 2017) Rodrigo estava observando o pisca-pisca do enfeite natalino de sua casa. Ele é composto por lâmpadas nas cores amarelo, azul, verde e vermelho. Rodrigo notou que lâmpadas amarelas acendem a cada 45 segundos, as lâmpadas verdes, a cada 60 segundos, as azuis, a cada 27 segundos, e as vermelhas só acendem quando as lâmpadas das outras cores estão acesas ao mesmo tempo.

De quantos em quantos minutos, as lâmpadas vermelhas acendem?

- A** 6
- B** 9
- C** 12
- D** 15
- E** 18

3. (ifsc 2017) Roberto e João são amigos de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntos. Um dia, empolgados com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que gastavam andando de bicicleta. Para tanto, decidiram pedalar numa pista circular, próxima à casa deles.

Constataram, então, que Roberto dava uma volta completa em 24 segundos, enquanto João demorava 28 segundos para fazer o mesmo percurso. Diante disso, João questionou:

- Se sairmos juntos de um mesmo local e no mesmo momento, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, neste mesmo ponto de largada?

Assinale a alternativa CORRETA.

- A** 3 min 8 s
- B** 2 min 48 s
- C** 1 min 28 s
- D** 2 min 28 s
- E** 1 min 48 s

4. Antônio é um botânico que desenvolveu em seu laboratório três variedades de uma mesma planta,  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ . Esses exemplares se desenvolvem cada um a seu tempo, de acordo com a tabela a seguir.

| Variedade | Tempo de germinação (em semanas, após o plantio) | Tempo de floração (em semanas, após a germinação) | Tempo para um única colheita (em semanas, após a floração) |
|-----------|--|---|--|
| $V_1$     | 5  | 3   | 1  |
| $V_2$     | 3  | 2   | 1  |
| $V_3$     | 2  | 1   | 1  |

Considere um experimento em que as três variedades serão plantadas inicialmente no mesmo dia e que, a cada dia de colheita, outra semente da mesma variedade será plantada.

Com base nos dados da tabela, o número mínimo de semanas necessárias para que a colheita das três variedades ocorra simultaneamente, será

- A** 36.
- B** 24.
- C** 18.
- D** 16.

5. (cftjrj 2016) João faz caminhada a cada 4 dias. Pedro, vizinho de João, faz caminhada no mesmo local, a cada 6 dias. Considerando que Pedro e João se encontraram hoje fazendo caminhada, eles se encontrarão novamente daqui a  $n$  dias.

Qual das alternativas abaixo indica um valor possível para  $n$ ?

- A** 30
- B** 32
- C** 36
- D** 42

6. (ifal 2016) Três linhas diferentes de ônibus, A, B e C, passam em um certo ponto a cada 8 min, 12 min e 20 min, respectivamente.

Se às 6 horas, essas três linhas chegam no mesmo instante a esse ponto, em qual horário do dia as três linhas chegarão novamente no mesmo instante a esse mesmo ponto?

- A** 6h30min.
- B** 7h10min.
- C** 7h50min.
- D** 8 h.
- E** 9 h.

7. (utfpr 2016) Gabriela ficou doente. Sua mãe a levou ao médico que receitou alguns remédios dentre eles um antibiótico. O primeiro deve ser tomado a cada uma hora e trinta minutos e o segundo a cada duas horas e trinta minutos.

Sabendo que Gabriela iniciou seu tratamento às 6h da manhã, tomando os dois medicamentos ao mesmo tempo, assinale a que horas da noite ela tomará os dois medicamentos juntos novamente.

- A** 19h30min.
- B** 20h.
- C** 20h30min.
- D** 21h.
- E** 21h30min.

8. Nelson possui um cãozinho e precisa medicar o seu animal regularmente com dois produtos, A e B, cuja função é mantê-lo livre de pulgas e carrapatos. O produto A é vendido em caixas com 24 comprimidos e deve ser tomado a cada 6 dias. O produto B é vendido em caixas de 10 comprimidos e deve ser tomado a cada 20 dias.

Supondo que **hoje** ele tenha dado os dois produtos a seu cãozinho e que para isso tenha tido que abrir uma nova caixa de cada produto, no próximo dia em que ele tiver que dar os dois produtos juntos a seu cãozinho ainda haverá, na caixa do produto A,

- A 25 comprimidos.
- B 20 comprimidos.
- C 14 comprimidos.
- D 12 comprimidos.

9. (Uerj 2015) Na tabela abaixo, estão indicadas três possibilidades de arrumar  $n$  cadernos em pacotes:

| Nº de pacotes | Nº de cadernos por pacotes | Nº de cadernos que sobram |
|---------------|----------------------------|---------------------------|
| X             | 12                         | 11                        |
| Y             | 20                         | 19                        |
| Z             | 18                         | 17                        |

Se  $n$  é menor do que 1200, a soma dos algarismos do maior valor de  $n$  é:

- A 12
- B 17
- C 21
- D 26

10. (ifsc 2015) Em uma loja existem três relógios cucos desregulados. O primeiro toca o cuco a cada 12min, o segundo a cada 22min e o terceiro a cada 39min.

Se os três cucos tocaram juntos às quinze horas da tarde, é CORRETO afirmar que eles tocarão juntos novamente:

- A Às 19 horas e 32 minutos do mesmo dia.
- B Somente às 4 horas e 28 minutos do dia seguinte.
- C Às 16 horas e 32 minutos do mesmo dia.
- D Somente às 2 horas e 44 minutos do dia seguinte.
- E Somente às 19h e 36 minutos do dia seguinte.

11. (utfpr 2015) Uma médica, ao prescrever uma receita, determina que três medicamentos sejam ingeridos pelo paciente, de acordo com a seguinte escala de horários: remédio A, de 3 em 3 horas, remédio B, de 4 em 4 horas e remédio C, de 6 em 6 horas.

Caso o paciente utilize os três remédios às 6 horas da manhã, o próximo horário coincidente de ingestão dos mesmos será:

- A 12h.
- B 14h.
- C 16h.
- D 18h.
- E 20h.

## MÁXIMO DIVISOR COMUM

Usamos a abreviação MDC para representar **Máximo Divisor Comum**, mas como fazer para encontrá-lo? Devemos procurar o maior divisor comum entre dois ou mais números naturais. Mas o que são divisores? Para dizermos que um número divide outro, devemos obter divisões exatas entre eles, o resto da divisão precisa ser zero.

Veja só:

Quais são os divisores positivos de 36?

$$\begin{aligned} 36 \div 1 &= 36 \\ 36 \div 2 &= 18 \\ 36 \div 3 &= 12 \\ 36 \div 4 &= 9 \\ 36 \div 6 &= 6 \\ 36 \div 9 &= 4 \\ 36 \div 12 &= 3 \\ 36 \div 18 &= 2 \\ 36 \div 36 &= 1 \end{aligned}$$

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Quais são os divisores positivos de 48?

$$\begin{aligned} 48 \div 1 &= 48 \\ 48 \div 2 &= 24 \\ 48 \div 3 &= 16 \\ 48 \div 4 &= 12 \\ 48 \div 6 &= 8 \\ 48 \div 8 &= 6 \\ 48 \div 12 &= 4 \\ 48 \div 16 &= 3 \\ 48 \div 24 &= 2 \\ 48 \div 48 &= 1 \end{aligned}$$

$$D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

Existem divisores comuns que figuram tanto na lista do 36 quanto na lista do 48?

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

Os divisores comuns entre 36 e 48 são:

$$D_{36 \text{ e } 48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Destes, o maior é 12. Logo, dizemos que 12 é o maior divisor comum entre 36 e 48.

Mas, se toda vez que quisermos encontrar o MDC tivermos que listar todos os divisores, vamos gastar muito tempo, por isso, temos uma alternativa. Podemos recorrer a decomposição dos números em fatores primos. Ao realizarmos a decomposição numérica para encontrarmos o MDC, devemos considerar como divisor somente os fatores primos que dividem simultaneamente todos os números da decomposição.

Observe:

|        |   |                                   |
|--------|---|-----------------------------------|
| 36, 48 | ②   | divisor comum<br>dividido 36 e 48 |
| 18, 24 | ②   | divisor comum<br>dividido 18 e 24 |
| 9, 12  | 2   | → NÃO É COMUM<br>SÓ DIVIDE O 12   |
| 9, 6   | 2   | → NÃO É COMUM<br>SÓ DIVIDE O 6    |
| 9, 3   | ③   | divisor comum<br>dividido 9 e 3   |
| 3, 1   | 3   | → NÃO É COMUM<br>SÓ DIVIDE O 3    |
| 1, 1   | $mdc(36, 48) = ② \cdot ② \cdot ③ = 12$<br><div style="text-align: center; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: small;">divisores comuns</span> </div> |                                   |

Para economizarmos tempo, podemos utilizar somente os divisores comuns na fatoração ao invés de fazermos todas as divisões possíveis, por exemplo:

|        |  |               |
|--------|--|---------------|
| 36, 48 | ②  | divisor comum |
| 18, 24 | ②  | divisor comum |
| 9, 12  | ③  | divisor comum |
| 3, 4   | $2 \cdot 2 \cdot 3 = ⑫$<br><div style="text-align: center; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: small;">máximo divisor comum</span> </div> |               |

Este último modo é mais rápido e nos dá mais informações:

|        |                         |  |
|--------|-------------------------|--|
| 36, 48 | ②                       |  |
| 18, 24 | ②                       |  |
| 9, 12  | ③                       |  |
| 3, 4   | $2 \cdot 2 \cdot 3 = ⑫$ |  |

Aqui, podemos ver que o 12 divide o 36 em 3 partes, ou ainda, o 36 pode ser dividido em 12 partes de 3.

|        |                         |  |
|--------|-------------------------|--|
| 36, 48 | ②                       |  |
| 18, 24 | ②                       |  |
| 9, 12  | ③                       |  |
| 3, 4   | $2 \cdot 2 \cdot 3 = ⑫$ |  |

Já nesse esquema, vemos que o 12 divide o 48 em 4 partes, ou ainda, o 48 pode ser dividido em 12 partes de 4.

Com isso, estamos prontos para os exercícios!

**QUESTÕES - MÁXIMO DIVISOR COMUM**

12. (Ifba 2018) O Supermercado “Preço Baixo” deseja fazer uma doação ao Orfanato “Me Adote” e dispõe, para esta ação, 528 kg de açúcar, 240 kg de feijão e 2.016 kg de arroz. Serão montados Kits contendo, cada um, as mesmas quantidades de açúcar, de feijão e de arroz.

Quantos quilos de açúcar deve haver em cada um dos kits, se forem arrumados de forma a contemplar um número máximo para cada item?

- A** 20
- B** 11
- C** 31
- D** 42
- E** 44

13. (cmrj 2018) Um torneio de xadrez terá alunos de escolas militares. O Colégio Militar de Campo Grande (CMCG) levará 120 alunos; o Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ), 180; e o Colégio Militar de Brasília (CMB), 252. Esses alunos serão divididos em grupos, de modo que cada grupo tenha representantes das três escolas, e que o número de alunos de cada escola seja o mesmo em cada grupo.

Dessa maneira, o maior número de grupos que podem ser formados é

- A** 10.
- B** 12.
- C** 15.
- D** 21.
- E** 46.

14. (Fac. Albert Einstein - Medicina 2017) Um torneio de xadrez terá alunos de 3 escolas. Uma das escolas levará 120 alunos; outra, 180 alunos; e outra, 252 alunos. Esses alunos serão divididos em grupos, de modo que cada grupo tenha representantes das três escolas, e o número de alunos de cada escola seja o mesmo em cada grupo.

Dessa maneira, o maior número de grupos que podem ser formados é

- A** 12
- B** 23
- C** 46
- D** 69

15. (ifba 2016) Uma chácara, com formato retangular, de dimensões  $52\text{ m} \times 117\text{ m}$ , vai ser cercada com arame farpado de 8 fios em cada estaca.

Sabendo que as estacas estão igualmente espaçadas, encontre o número mínimo de estacas e a quantidade de fios de arame farpados para realizar o serviço:

- A** 13 estacas e 2704 metros de arame farpado.
- B** 20 estacas e 2600 metros de arame farpado.
- C** 26 estacas e 2704 metros de arame farpado.
- D** 28 estacas e 2704 metros de arame farpado.
- E** 30 estacas e 2600 metros de arame farpado.

16. (Pucpr 2016) Um estagiário recebeu a tarefa de organizar documentos em três arquivos. No primeiro arquivo, havia apenas 42 contratos de locação; no segundo arquivo, apenas 30 contratos de compra e venda; no terceiro arquivo, apenas 18 laudos de avaliação de imóveis. Ele foi orientado a colocar os documentos em pastas, de modo que todas as pastas devem conter a mesma quantidade de documentos. Além de não poder mudar algum documento do seu arquivo original, deveria colocar na menor quantidade possível de pastas.

O número mínimo de pastas que ele pode usar é:

- A** 13.
- B** 15.
- C** 26.
- D** 28.
- E** 30.

17. (ifpe 2016) Na Escola Pierre de Fermat, foi realizada uma gincana com o objetivo de arrecadar alimentos para a montagem e doação de cestas básicas. Ao fim da gincana, foram arrecadados 144 pacotes de feijão, 96 pacotes de açúcar, 192 pacotes de arroz e 240 pacotes de fubá. Na montagem das cestas, a diretora exigiu que fosse montado o maior número de cestas possível, de forma que não sobrasse nenhum pacote de alimento e nenhum pacote fosse partido.

Seguindo a exigência da diretora, quantos pacotes de feijão teremos em cada cesta?

- A** 1
- B** 2
- C** 3
- D** 4
- E** 5

18. (Uefs 2016) Uma equipe de professores corrigiu, em três dias de correção de um vestibular, números de redações iguais a 702, 728 e 585. Em cada dia, as redações foram igualmente divididas entre os professores.

O número de professores na equipe é um divisor de

- A** 52
- B** 54
- C** 60
- D** 68
- E** 77

19. (Acafe 2016) Um feirante deseja distribuir 576 goiabas, 432 laranjas e 504 maçãs entre várias famílias de um bairro carente. A exigência do feirante é que a distribuição seja feita de modo que cada família receba o mesmo e o menor número possível de frutas de uma mesma espécie.

A quantidade total de frutas recebida por cada família representa um número:

- A** divisível por 9.
- B** múltiplo de 7.
- C** múltiplo de 12.
- D** entre 40 e 50.

20. (Ifal 2016) Um ferreiro dispõe de duas barras de ferro de comprimentos 1,20 m e 1,80 m.

Serrando essas barras, quantas barras menores e de máximo tamanho possível ele obterá ao final do processo?

- A 10 barras de 30 cm.
- B 20 barras de 30 cm.
- C 5 barras de 60 cm.
- D 10 barras de 60 cm.
- E 5 barras de 360 cm.

21. (Acafe 2015) Um grupo de 216 mulheres e 180 homens inscreveram-se como voluntários para visitar pessoas doentes em hospitais de uma cidade. Todas as pessoas inscritas serão divididas em grupos segundo o seguinte critério: todos os grupos deverão ter a mesma quantidade de pessoas, e em cada grupo só haverá pessoas do mesmo sexo.

Nessas condições, se grupos distintos deverão visitar hospitais distintos, o menor número de hospitais a serem visitados é um número:

- A par.
- B divisível por 6.
- C quadrado perfeito.
- D primo.

22. (Enem 2015) Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1.080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m.

Atendendo ao pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

- A 105 peças.
- B 120 peças.
- C 210 peças.
- D 243 peças.
- E 420 peças.

23. (Enem 2015) O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano, serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

- 1) cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;
- 2) todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;
- 3) não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é

- A 2.
- B 4.
- C 9.
- D 40.
- E 80.

## GABARITO

| QUESTÃO | ALTERNATIVA |
|---------|-------------|
| 01      | B           |
| 02      | B           |
| 03      | B           |
| 04      | A           |
| 05      | C           |
| 06      | D           |
| 07      | D           |
| 08      | C           |
| 09      | B           |
| 10      | E           |
| 11      | D           |
| 12      | B           |
| 13      | B           |
| 14      | A           |
| 15      | C           |
| 16      | B           |
| 17      | C           |
| 18      | A           |
| 19      | B           |
| 20      | C           |
| 21      | D           |
| 22      | E           |
| 23      | C           |

