Guia de estudos: Livro 1 – Matemática – Frente 2

Página 152 – Revisando: 5, 6, 7, 8
Página 154 – Propostos: 2, 3, 4, 27, 28, 32, 34, 36, 38, 41

1. (cmrj 2018) Um torneio de xadrez terá alunos de escolas militares. O Colégio Militar de Campo Grande (CMCG) levará 120 alunos; o Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ), $180;$ e o Colégio Militar de Brasília (CMB), $252.$ Esses alunos serão divididos em grupos, de modo que cada grupo tenha representantes das três escolas, e que o número de alunos de cada escola seja o mesmo em cada grupo. Dessa maneira, o maior número de grupos que podem ser formados é

a) $10.$
b) $12.$
c) $15.$
d) $21.$
e) $46.$

2. (Upe-ssa 2017) Rodrigo estava observando o pisca-pisca do enfeite natalino de sua casa. Ele é composto por lâmpadas nas cores amarelo, azul, verde e vermelho. Rodrigo notou que lâmpadas amarelas acendem a cada 45 segundos, as lâmpadas verdes, a cada 60 segundos, as azuis, a cada 27 segundos, e as vermelhas só acendem quando as lâmpadas das outras cores estão acesas ao mesmo tempo. De quantos em quantos minutos, as lâmpadas vermelhas acendem?

a) 6
b) 9
c) 12
d) 15
e) 18

3. (ifsc 2017) Roberto e João são amigos de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntos. Um dia, empolgados com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que gastavam andando de bicicleta. Para tanto, decidiram pedalar numa pista circular, próxima à casa deles.

Constataram, então, que Roberto dava uma volta completa em 24 segundos, enquanto João demorava 28 segundos para fazer o mesmo percurso. Diante disso, João questionou:

– Se sairmos juntos de um mesmo local e no mesmo momento, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, neste mesmo ponto de largada?

Assinale a alternativa CORRETA.

a) $3\text{ min }8\text{ s}$
b) $2\text{ min }48\text{ s}$
c) $1\text{ min }28\text{ s}$
d) $2\text{ min }28\text{ s}$
e) $1\text{ min }48\text{ s}$

4. (Fac. Albert Einstein - Medicin 2017) Um torneio de xadrez terá alunos de 3 escolas. Uma das escolas levará 120 alunos; outra, 180 alunos; e outra, 252 alunos. Esses alunos serão divididos em grupos, de modo que cada grupo tenha representantes das três escolas, e o número de alunos de cada escola seja o mesmo em cada grupo. Dessa maneira, o maior número de grupos que podem ser formados é

a) 12
b) 23
c) 46
d) 69

5. (Uepg 2016) Considerando o número natural a tal que $\text{m.m.c.}(a, 15) = 120$ e $\text{m.d.c.}(a, 15) = 5$ e o número natural $b,$ tal que $\text{m.m.c.}(b, 20) = 140$ e $\text{m.d.c.}(b, 20) = 4,$ assinale o que for correto.

01) $\text{m.m.c.}(a, b) = 280$
02) $\text{m.d.c}(a, b) = 4$
04) a e b são números pares.
08) $a > b$

6. (ifsul 2017) As corridas com obstáculos são provas de atletismo que fazem parte do programa olímpico e consistem em corridas que têm no percurso barreiras que os atletas têm de saltar. Suponha que uma prova tenha um percurso de 1.000 metros e que a primeira barreira esteja a 25 metros da largada, a segunda a 50 metros, e assim sucessivamente.

Se a última barreira está a 25 metros da linha de chegada, o total de barreiras no percurso é

a) 39
b) 41
c) 43
d) 45

7. (cftmg 2017) Seja x um número inteiro, $0 < x \leq 60$ e o conjunto $A = \left\{ K \in \mathbb{N} \mid K = \dfrac{60}{x} \right\}.$ Nessas condições, o número máximo de elementos do conjunto A é

a) $6.$
b) $8.$
c) $12.$
d) $16.$

8. (Unigranrio - Medicina 2017) Uma mulher tem três filhas matriculadas regularmente no ensino fundamental. O produto da sua idade com as idades de suas 3 filhas é $37.037.$ Desta forma, pode-se afirmar que a diferença entre as idades de sua filha mais velha e sua filha mais nova é

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

9. (Famema 2020) Sílvia e Márcio moram em cidades diferentes no interior. Sílvia vai à capital uma vez a cada 10 dias, e Márcio vai à capital uma vez a cada 12 dias. A última vez em que eles se encontraram na capital foi um sábado. O próximo encontro dos dois na capital ocorrerá em

a) uma terça-feira.
b) uma quarta-feira.
c) um domingo.
d) um sábado.
e) uma segunda-feira.

10. (cmrj 2020) A direção do Colégio Militar do Rio de Janeiro contratou uma empresa com o objetivo de construir uma nova sala para o Clube Literário. A sala terá $3{,}36\text{ m}$ de largura e $4{,}00\text{ m}$ de comprimento. No piso, o pedreiro vai colocar peças de cerâmica quadradas, do mesmo tamanho.

Admitindo-se que não haverá perda de material, a menor quantidade dessas peças, que ele vai usar para cobrir completamente o piso, é um número

a) ímpar e menor que $500.$

b) múltiplo de $10.$

c) maior que $570.$

d) igual a $525.$

e) primo.

11. (Fmp 2022) Sabe-se que N é um número natural que, quando dividido por 7, deixa resto igual a 2.

Portanto, o número natural N^3, quando dividido por 7, deixa resto igual a

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

12. (Fmj 2021) Um grupo de 4 nadadores atravessa uma piscina, que tem $20\ \text{m}$ de um lado a outro, com tempos individuais de $12\ \text{s},$ $15\ \text{s},$ $18\ \text{s}$ e $25\ \text{s}.$ Esses atletas iniciaram um treino, de um mesmo lado da piscina, atravessando-a de um lado para outro continuamente. Quando chegam a um lado da piscina, eles imediatamente passam a nadar em direção ao lado oposto. A primeira vez em que os quatro nadadores chegarem, ao mesmo tempo, em um mesmo lado da piscina, o nadador mais rápido terá nadado um total de

a) 1.000 m.
b) 2.000 m.
c) 2.500 m.
d) 1.500 m.
e) 3.000 m.

13. (Fuvest 2020) A função E de Euler determina, para cada número natural $\text{n},$ a quantidade de números naturais menores do que n cujo máximo divisor comum com n é igual a $1.$ Por exemplo, $\text{E}(6) = 2$ pois os números menores do que 6 com tal propriedade são 1 e $5.$ Qual o valor máximo de $\text{E}(\text{n}),$ para n de 20 a $25?$

a) 19
b) 20
c) 22
d) 24
e) 25

14. (Famema 2020) Sílvia e Márcio moram em cidades diferentes no interior. Sílvia vai à capital uma vez a cada 10 dias, e Márcio vai à capital uma vez a cada 12 dias. A última vez em que eles se encontraram na capital foi um sábado. O próximo encontro dos dois na capital ocorrerá em

a) uma terça-feira.
b) uma quarta-feira.
c) um domingo.
d) um sábado.
e) uma segunda-feira.

GABARITO

Resposta da questão 1: [B]

Seja x o maior número de grupos que podem ser formados.

Do enunciado, x divide $120, 180$ e $252.$ Como queremos o maior x possível, x é o máximo divisor dos números $120, 180$ e $252.$

Como $\text{mdc}\ (120, 180, 252) = 12,$ o maior número de grupos que podem ser formados é $12.$

Resposta da questão 2: [B]

Transformando os tempos dados para minutos e calculando-se o mínimo múltiplo comum entre eles, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} 45\ \text{s} = 0,75\ \text{min} \\ 60\ \text{s} = 1\ \text{min} \\ 27\ \text{s} = 0,45\ \text{min} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \text{MMC}\left(0,75;\ 1;\ 0,45\right) = 9$$

Assim, a cada 9 minutos as lâmpadas vermelhas estarão acesas (pois todas as outras estarão acesas ao mesmo tempo). Lembrando que para encontrar o MMC deve-se fatorar os números (dividir sucessivamente por números primos em ordem crescente). Ou seja:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0,75 & 1 & 0,45 & 2 \\ 0,75 & 0,50 & 0,45 & 2 \\ 0,75 & 0,25 & 0,45 & 3 \\ 0,25 & 0,25 & 0,15 & 3 \\ 0,25 & 0,25 & 0,05 & 5 \\ 0,05 & 0,05 & 0,01 & 5 \\ 0,01 & 0,01 & 0,01 & \end{array}\right\} 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 900 \Rightarrow \frac{900}{100} = 9$$

Resposta da questão 3: [B]

Para obter após quanto tempo os dois amigos se encontram na linha de chegada, basta obter o mínimo múltiplo comum (MMC) entre dos dois tempos. Ou seja:

$$\begin{array}{l|l} 28\ 24 & 2 \\ 14, 12 & 2 \\ 7, 6 & 2 \\ 7, 3 & 3 \\ 7, 1 & 7 \\ 1, 1 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{MMC}(28, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1 = 168$$

Dividindo 168 segundos por 60 para obter o tempo em minutos temos:

$$\frac{168}{60} = 2,8 = 2\ \text{min} \text{ e } 48 \text{ segundos.}$$

Resposta da questão 4: [A]

O resultado pedido corresponde ao máximo divisor comum dos números $120, 180$ e $252,$ ou seja,

$$\begin{aligned} \text{mdc}(120, 180, 252) &= \text{mdc}(2^3 \cdot 3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7) \\ &= 2^2 \cdot 3 \\ &= 12. \end{aligned}$$

Resposta da questão 5: 01 + 02 + 04 + 08 = 15.

Sabendo que $\text{m.m.c.}(p, q)\text{m.d.c.}(p, q) = p \cdot q,$ com $p, q \in \mathbb{N}^*,$ temos

$$\begin{aligned} \text{m.m.c.}(a, 15) \cdot \text{m.d.c.}(a, 15) = a \cdot 15 &\Leftrightarrow a \cdot 15 = 120 \cdot 5 \\ &\Leftrightarrow a = 40. \end{aligned}$$

Analogamente, vem

$$\begin{aligned} \text{m.m.c.}(b, 20) \cdot \text{m.d.c.}(b, 20) = b \cdot 20 &\Leftrightarrow b \cdot 20 = 140 \cdot 4 \\ &\Leftrightarrow b = 28. \end{aligned}$$

[01] Verdadeira, pois $\text{m.m.c.}(40, 28) = \text{m.m.c.}(2^3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 7) = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 = 280.$

[02] Verdadeira. De fato, pois $\text{m.d.c.}(40, 28) = \text{m.d.c.}(2^3 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 7) = 2^2 = 4.$

[04] Verdadeira. É imediato que $a = 40$ e $b = 28$ são números pares.

[08] Verdadeira. Com efeito, pois $40 > 28.$

Resposta da questão 6: [A]

Para obter o número total de barreiras, basta dividir o tamanho total do percurso pelo espaço que cada barreira está uma da outra, ou seja, $1000 \div 25 = 40.$

Porém, como a última barreira está a 25 metros da linha de chegada, deve-se subtrair uma barreira, logo:

$40 - 1 = 39$ barreiras.

Resposta da questão 7: [C]

De acordo com a lei de formação do conjunto $A,$ concluímos que k é um divisor positivo de $60.$ Utilizando o processo de Euclides para determinar o número n de divisores positivos de $60,$ obtemos:

A decomposição do 60 em fatores primos será dada por $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$ portanto, o número de divisores de 60 será dado por:

$n = (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 12.$

Resposta da questão 8: [C]

Fatorando-se o produto das idades, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 37037 & 7 \\ 5291 & 11 \\ 481 & 13 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a idade da mãe será 37 anos e das filhas $7, 11$ e 13 anos. A diferença de idade entre a filha mais velha e a mais nova será de 6 anos.

Resposta da questão 9: [B]

Os dois se encontrarão novamente após $\text{mmc}(10, 12) = \text{mmc}(2 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3) = 60$ dias. Assim, como $60 = 8 \cdot 7 + 4,$ podemos concluir que o próximo encontro ocorrerá numa quarta-feira.

Resposta da questão 10 [D]

Considerando que:
$3,36\ m = 336\ cm$ e que $4,0\ m = 400\ cm.$

Podemos determinar a medida do maior lado para a peça de cerâmica quadrada calculando o MDC entre 336 e $400.$
$MDC(336,\ 400) = 16.$

Número de peças utilizadas no comprimento: $400 : 16 = 25.$
Número de peças utilizadas na largura: $336 : 16 = 21.$

Portanto, o número de peças será dado por: $21 \cdot 25 = 525.$

Resposta da questão 11: [A]

De acordo com as informações do problema, podemos escrever que
$N = 7K + 2,\ K \in \mathbb{N}$
$\therefore$

$$N^3 = (7K + 2)^3$$
$$N^3 = (7K)^3 + 3 \cdot (7K)^2 + 3 \cdot 7k \cdot 2 + 2^3$$
$$N^3 = 7^3 \cdot k^3 + 3 \cdot 7^2 \cdot k^2 + 3 \cdot 7k \cdot 2 + 7 + 1$$
$$N^3 = 7 \cdot \left(7^2 \cdot k^3 + 3 \cdot 7^2 \cdot k^2 + 3 \cdot k \cdot 2 + 1\right) + 1$$

Portanto o resto da divisão de N^3 por 7 é igual a 1.

Resposta da questão 12: [E]

O tempo a partir do início que os atletas levam para chegar ao mesmo lado da piscina é dado pelo mínimo múltiplo comum entre os tempos individuais para completar uma ida e uma volta:

$$mmc(24, 30, 36, 50) = mmc\left(2^3 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3^2, 2 \cdot 5^2\right) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$$

Ou seja, o encontro ocorre após $1800\ s.$

Sendo assim, o nadador mais rápido (o que leva $12\ s)$ terá nadado um total de:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t = \frac{20\ m}{12\ s} \cdot 1800\ s = 3000\ m$$

Resposta da questão 13: [C]

Sendo 23 o único primo entre 20 e $25,$ segue que $E(23) = 23 - 1 = 22$ é o valor máximo de $E(n)$ quando n varia de 20 a $25.$

Resposta da questão 14: [B]

Os dois se encontrarão novamente após $mmc(10, 12) = mmc(2 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3) = 60$ dias. Assim, como $60 = 8 \cdot 7 + 4,$ podemos concluir que o próximo encontro ocorrerá numa quarta-feira.