2020 - 2022

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

SISTEMAS LINEARES

$$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$$

SISTEMAS LINEARES

Nesta série de apostilas conheceremos o que são equações lineares, sistemas lineares e aprenderemos a resolver um sistema linear com duas ou mais equações.

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Introdução ao Estudo de Sistemas Lineares
2. Escalonamento
3. Discussão de Sistemas e Sistema Linear Homogêneo

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES

EQUAÇÕES LINEARES

Antes de adentrarmos no estudo de sistemas lineares, vamos estudar um pouco sobre equações lineares. Veremos o que é uma equação linear e como ela pode ser representada.

> Uma **equação linear** é toda equação descrita da seguinte forma:
>
> $$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$$

Onde os termos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são os coeficientes da equação, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as incógnitas (os valores que queremos descobrir), b é o termo independente da equação e n um número real. Vejamos alguns exemplos:

1. $3x + 2y = 0$ Coeficientes: 3 e 2; incógnitas: x e y; termo independente: 0
2. $x + y + z = 1$ Coeficientes: 1,1 e 1; incógnitas: x, y e z; termo independente: 1
3. $4a + 4b = 2$ Coeficientes: 4 e 4; incógnitas: a e b; termo independente: 2

Observação: uma equação linear é dita homogênea se o termo independente for igual a zero. No exemplo 1 temos uma equação linear homogênea.

Agora que já conhecemos a definição de equação linear, vejamos alguns exemplos do que **não são** equações lineares:

1. $3x^2 + 2y = 0 \rightarrow$ O expoente de uma incógnita deve ser sempre 1.
2. $4ab + c = 1 \rightarrow$ Uma incógnita não pode ser multiplicada por outra incógnita.
3. $\frac{x}{y} + 3z = 7 \rightarrow$ Uma incógnita não pode ser dividida por outra incógnita.

SISTEMAS LINEARES

Você deve ouvir muito a palavra “sistema” em seu cotidiano, ele normalmente é utilizado para tratar de um conjunto de elementos, que podem ser concretos ou abstratos. Na Matemática também utilizamos esse termo.

Quando temos **um conjunto de uma ou mais Equações Lineares**, chamamos esse conjunto de **Sistema Linear**. Observe os exemplos:

1. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x + 3y - 9z = 7 \\ x - 5y + 4z = 6 \\ 2x + 6y - 3z = -1 \end{cases}$

Curiosidade: Se todas as equações lineares forem homogêneas, teremos um **sistema linear homogêneo**.

Em uma linguagem mais formal, podemos dizer que o Sistema de Equações Lineares se dá da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

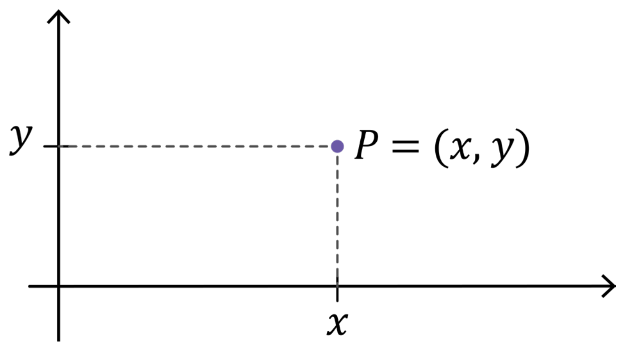
Onde n é um número real qualquer, que determina o número de variáveis do sistema.

E a solução do sistema como é representada? Bom, o sistema linear é um **conjunto** de equações, portanto a solução do conjunto também será um conjunto, que chamamos de **conjunto solução** e o representamos pela letra S. Se, por exemplo, x e y são as soluções de um sistema logo, **o conjunto solução é representado da seguinte forma**:

$$\boldsymbol{S = \{(x, y)\}}$$

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO CONJUNTO SOLUÇÃO

Podemos também representar a solução de um sistema de forma geométrica. Neste caso (x, y) é o par ordenado que representa um ponto P no plano cartesiano, x representa a coordenada do ponto no eixo das abscissas e y a coordenada do ponto no eixo das ordenadas. Conforme ilustração abaixo:



Mas, e se o conjunto tiver mais que três incógnitas, por exemplo, $\boldsymbol{S = \{(x, y, z)\}}$? Aí a representação geométrica será no espaço, ou seja, em três dimensões.

NÚMERO DE EQUAÇÕES E NÚMERO DE INCÓGNITAS

Um Sistema Linear pode ser formado por várias Equações, então podemos dizer que ele é formado por "m" equações. Em uma equação podemos ter muitas variáveis, então dizemos que uma equação poder ter "n" variáveis. Vejamos alguns exemplos:

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow$ 2 variáveis, 2 equações

2. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x - z = 12 \\ y + 5z = -1 \end{cases} \rightarrow$ 3 variáveis, 3 equações

3. $\begin{cases} x + 3y - 5z + w = 1 \\ 7x - 5y + z - w = 0 \end{cases} \rightarrow$ 4 variáveis, 2 equações

Os sistemas podem ser classificados como **Normais**, quando o número de equações for igual ao número de variáveis, ou **Não Normais**, quando o número de equações for diferente do número de variáveis. Nos exemplos acima podemos notar em 1 e 2 temos Sistemas Normais, já no exemplo 3 temos um Sistemas Não Normal.

No Sistema Linear, as equações devem ser resolvidas juntas, e ter uma solução comum a todas elas, ou seja, o resultado deve satisfazer todas as equações.

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE UM SISTEMA

Um sistema Linear pode ser representado de outra forma, bem conhecida por nós, através da **Representação Matricial**. Para representar um Sistema na sua forma Matricial o transformamos em Matriz, ou seja, basta distribuir os coeficientes das incógnitas, de forma que eles ocupem as linhas e colunas de acordo com seu posicionamento no sistema. Vejamos como é fácil:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y - 9z = 7 \\ x - 5y + 4z = 6 \\ 2x + 6y - 3z = -1 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & -9 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B}$$

Note que $\boldsymbol{P}$ representa a matriz dos coeficientes do sistema, $\boldsymbol{x}$ é a matriz que representa as incógnitas e $\boldsymbol{B}$ é a matriz dos termos independentes. Nesta notação, vemos que o sistema é descrito como $\boldsymbol{Px}=\boldsymbol{B}$.

OBS: não confunda a matriz x com a incógnita x!

REGRA DE CRAMER

Você pode ter se perguntado, porque representar um Sistema Linear na forma de Matriz? Há alguns motivos para fazermos isso, e um deles é: para resolver esse Sistema através da Regra de Cramer.

Existem alguns métodos para solucionar um sistema linear, conheceremos agora o método de criado pelo matemático Gabriel Cramer, bastante usado hoje e que **resolve Sistemas Lineares utilizando apenas determinantes**. Parece interessante, não é? Vamos entender então como funciona esse método?

Tendo um sistema linear com a forma matricial $Px=B$ onde o **número de equações é igual ao número de incógnitas**. O valor das incógnitas do sistema será dado por:

$$x_i = \frac{det\, P_i}{det\, P}$$

Onde $detP_i$ é o determinante da matriz P com sua coluna i trocada pela matriz B. A solução do sistema vai ser o conjunto de valores das incógnitas que satisfazem todas as equações.

Importante: Para termos sucesso utilizando a Regra de Cramer, o número de equações deve ser igual ao número de incógnitas (Sistema Normal), além de o determinante da representação Matricial da Equação ser diferente de 0, $detP\neq 0$.

Exemplos

Exemplo 1: Resolva o sistema linear abaixo, pela regra de Cramer.

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$$

Resolução: Note que o número de variáveis é igual ao número de equações e sabemos que tal sistema pode ser representado matricialmente como abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

1º passo: Encontrar o determinante de P.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = [1\cdot(-1)]-(2\cdot 3) = -1-6 = -7$$

Como o $detP\neq 0$ (pois $detP=-7$), podemos usar a Regra Cramer.

2º passo: Trocar a primeira coluna de P pela matriz B e achar o determinante da matriz P_x.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow P_x = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = [1\cdot(-1)]-(-5\cdot 3) = -1+15 = 14$$

Assim, $detP_x=14$.

3º passo: Trocar a segunda coluna de P pela matriz B e achar o determinante da matriz P_y.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow P_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = [1 \cdot (-5)] - (2 \cdot 1) = -5 - 2 = -7$$

Assim, $detP_y$=-7.

4º passo: Encontrar os valores das incógnitas substituindo na fórmula.

$$x = \frac{\det P_x}{\det P} = \frac{14}{-7} = -2$$

$$y = \frac{\det P_y}{\det P} = \frac{-7}{-7} = 1$$

Logo, temos que a solução do sistema linear é dada por S={(−2,1)}.

Exemplo 2: Resolva o sistema linear pela regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \\ x + 5y = 2 \end{cases}$$

Resolução: Perceba que o número de variáveis **não** é igual ao número de equações. Temos 2 variáveis e 3 equações, portanto não é possível resolver pela regra de Cramer.

Exemplo 3: Resolva o sistema linear pela regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - 5z = -3 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Resolução:

Percebemos que o número de variáveis é igual ao número de equações e sabemos que tal sistema pode ser representado matricialmente como abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1º passo: Econtrar o determinante de P.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+10+6-(3+8-5) = 14-6 = 8$$

Como o $detP \neq 0$ (pois $detP = 8$), podemos usar a Regra Cramer.

2º passo: Trocar a primeira coluna de P pela matriz B e achar o determinante da matriz P_x.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow P_x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2-20-9-(-6-5-12) = -31+23 = -8$$

Assim, $detP_x = -8$.

3º passo: Trocar a segunda coluna de P pela matriz B e achar o determinante da matriz P_y.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow P_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+5+12-(9-10+4) = 11-3 = 8$$

Assim, $detP_y = 8$.

4º passo: Trocar a terceira a coluna de P pela matriz B e achar o determinante da matriz P_z.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow P_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+6+2-(1+8-3) = 6-6 = 0$$

Assim, $detP_z = 0$.

5º passo: Achar os valores das incógnitas substituindo na fórmula.

$$x = \frac{\det P_x}{\det P} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$y = \frac{\det P_y}{\det P} = \frac{8}{8} = 1$$

$$z = \frac{\det P_z}{\det P} = \frac{0}{8} = 0$$

Logo, temos que a solução do sistema linear é dada por $S=\{(-1, 1, 0)\}$.

Exemplo 4: Resolva o sistema linear pela regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$$

Resolução: Percebemos que o número de variáveis é igual ao número de equações e sabemos que tal sistema pode ser representado matricialmente como abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1° passo: achar o determinante de P.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 6 - (6 + 6 + 6) = 18 - 18 = 0$$

Como o $detP=0$ não podemos usar a Regra Cramer.

ANOTAÇÕES