Segunda Prova de Seleção
XLI IMO e XV Olimpíada Ibero-americana de Matemática

20 de maio de 2000

Instruções:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.

▸ PROBLEMA 1

Sejam I o incentro do triângulo ABC e D o ponto de intersecção de AI com o circuncírculo de ABC. Sejam E e F os pés das perpendiculares baixadas a partir de I sobre BD e CD. Se $IE + IF = AD/2$, determine $\angle BAC$.

▸ PROBLEMA 2

Determine todas as funções $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

(i) $f(0) = 1$

(ii) $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$

(iii) Existe um racional não inteiro x_0 tal que $f(x_0)$ é inteiro.

▸ PROBLEMA 3

É dado um reticulado triangular com n pontos sobre cada lado (i.e., um triângulo equilátero de lado n dividido em n^2 triângulos unitários por retas paralelas aos seus lados). Em cada um dos pontos do reticulado com a exceção de um dos vértices do triângulo maior coloca-se uma ficha.

Considere, então, o seguinte jogo: Para cada triângulo unitário que tenha exatamente um de seus vértices desocupado retiram-se as duas fichas dos outros vértices e coloca-se uma ficha no vértice que estava inicialmente desocupado. Você vence o jogo se conseguir deixar uma única ficha sobre o reticulado.

(a) Demonstre que se $n \equiv 1 \pmod{3}$ não é possível ganhar o jogo.

(b) Demonstre que se $n \equiv 0 \pmod{3}$ ou $n \equiv 2 \pmod{3}$ é possível ganhar o jogo.

▸ PROBLEMA 4

Sejam n e k inteiros positivos tais que n não é divisível por 3 e $k \geqslant n$. Prove que existe um inteiro positivo m que é divisível por n e cuja soma dos dígitos na base 10 é k.