ELSEVIER

LUIZ CLÁUDIO CABRAL
MAURO CÉSAR NUNES

Matemática Básica Explicada Passo a Passo

SÉRIE PROVAS & CONCURSOS

- 451 exercícios resolvidos

Material complementar:

- 500 exercícios propostos

CAMPUS
CONCURSOS

Obrigado por adquirir o e-book

Matemática básica explicada passo a passo

Esta obra é acompanhada do seguinte material complementar disponível no final do livro:

- 500 exercícios propostos

LUIZ CLÁUDIO CABRAL e
MAURO CÉSAR NUNES

Matemática Básica Explicada Passo a Passo

SÉRIE PROVAS & CONCURSOS

ELSEVIER

CAMPUS
CONCURSOS

Copidesque: Adriana Kramer
Revisão Gráfica: Hugo de Lima Corrêa
Editoração Eletrônica: SBNigri Artes e Textos Ltda.

Coordenador da Série: Sylvio Motta

Elsevier Editora Ltda.
Conhecimento sem Fronteiras
Rua Sete de Setembro, 111 – 16º andar
20050-006 – Centro – Rio de Janeiro – RJ – Brasil

Rua Quintana, 753 – 8º andar
04569-011 – Brooklin – São Paulo – SP – Brasil

Serviço de Atendimento ao Cliente
0800-0265340
sac@elsevier.com.br

ISBN 978-85-352-6348-0 (recurso eletrônico)

Nota: Muito zelo e técnica foram empregados na edição desta obra. No entanto, podem ocorrer erros de digitação, impressão ou dúvida conceitual. Em qualquer das hipóteses, solicitamos a comunicação ao nosso Serviço de Atendimento ao Cliente, para que possamos esclarecer ou encaminhar a questão.

Nem a editora nem o autor assumem qualquer responsabilidade por eventuais danos ou perdas a pessoas ou bens, originados do uso desta publicação.

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte.
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

C119m

Cabral, Luiz Cláudio
Matemática básica explicada passo a passo [recurso eletrônico] / Luiz Cláudio Durão Cabral, Mauro César de Abreu Nunes. - Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.
recurso digital (Provas e concursos)

Formato: PDF
Requisitos do sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-85-352-6348-0 (recurso eletrônico)

1. Matemática – Problemas, questões, exercícios. 2. Serviço público – Brasil – Concursos. 3. Livros eletrônicos. I. Nunes, Mauro César. II. Título. III. Série.

12-4128. CDD: 510
CDU: 51

Luiz Cláudio Cabral:

Dedico este livro ao meu filho Bruno Giordano da Mata Cabral e ao meu afilhado Enzo Araújo da Mata. *"O amor de um pai por seu filho é diferente de qualquer outra coisa no mundo. Ele não obedece lei ou piedade, ele ousa todas as coisas e extermina sem remorso tudo o que ficar em seu caminho* (Agatha Christie)."

Mauro César Nunes:

Dedico este livro a todos os alunos, estudantes e concurseiros que sempre me prestigiaram em minhas aulas fazendo críticas e sugestões para as devidas resoluções dos exercícios que a eles foram propostos, enriquecendo, com isso, cada vez mais o meu singelo trabalho realizado até aqui.

página deixada intencionalmente em branco

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, aos nossos familiares, amigos e alunos que nos incentivaram para a realização deste trabalho e que, mesmo nas horas mais difíceis, não esmoreceram em doar ânimo para que concluíssemos este livro.

Os autores

página deixada intencionalmente em branco

Luiz Cláudio Durão Cabral

Professor de Matemática, Física e Raciocínio Lógico, licenciado pela Universidade de Brasília – UnB. Atua há mais de 15 anos no Ensino Médio e em cursos preparatórios para Concursos Públicos em Brasília: Curso Fênix, Nota 10, Classe "A", Apcon, Ágape, Alub Concursos, Fortium, além de GranCursos e Alto Nível.

Mauro César de Abreu Nunes

Professor de Matemática há mais de 43 anos. Atuou em diversos cursos preparatórios de Concursos Públicos, pré-vestibulares e nos Ensinos Fundamental e Médio. No Rio de Janeiro, nos cursos GPI, Gebê, Soeiro e outros, nas Universidades Gama Filho e Nuno Lisboa, nos Colégios São Fernando e Piedade, em Brasília, nos cursos Obcursos, PhD, Classe "A", Apcon, Sarmento, Cespro, PROGRESSÃO, VIP, NDA, Nota 10, Ágape, Alub Concursos, Edital, Opção, Fortium, Alto Nível, GranCursos, entre outros, assim como nos Colégios Santo Antônio, Cor Jesu, Rosário, Rogacionista e demais.

página deixada intencionalmente em branco

Este livro é composto por 451 exercícios resolvidos e mais 500 exercícios propostos com as suas devidas respostas, que se encontram como material complementar na página do livro no site **www.elsevier.com.br**.

Esperamos, assim, que ele seja muito útil aos seus leitores para que possam elucidar uma boa parte de dúvidas sobre a disciplina: **Matemática Básica**, que ora aparece de uma maneira **explicada**, ***passo a passo***!

Esses são os nossos sinceros votos.

Os autores

página deixada intencionalmente em branco

Quando o estudante ou concurseiro percebe o sentido real de uma disciplina, entusiasma-se muito com ela e logo compreende seu valor e a sua importância para a obtenção do seu futuro sucesso. Com isso, passa a dar-lhe maior concentração e atenção aos estudos. Auxilia também na obtenção desse resultado, proporcionando conhecimento das relações de uma disciplina básica com outras que lhe são afins, pelo aumento e, consequentemente, pela ampliação resultante da sua esfera de cognoscibilidades.

Seguimos uma orientação pedagógica realizada de uma maneira ***"passo a passo"*** para a solução da parte que contém os ***exercícios resolvidos***. Também procuramos obter e escolher uma gama selecionada de ***exercícios propostos*** compatíveis às cobranças realizadas nas mais diferentes provas ou certames de ***Concursos Públicos***.

O referido livro, nos seus diferentes capítulos, ensina-nos primeiramente a aplicação dos ***prolegômenos*** necessários e suficientes para que as questões sejam resolvidas com a máxima clareza, rapidez e precisão, abstraindo-se dos complicados cálculos que implicam para a elucidação dessas questões de provas.

A ***Matemática***, através de seus diferentes ramos como a Aritmética, a Álgebra, a Geometria, a Trigonometria e o Cálculo Infinitesimal etc., segue todas aquelas manifestações do progresso da civilização humana e serve como instrumento fundamental para o crescimento, o desenvolvimento, o aprimoramento, enfim, o refinamento da nossa cultura. Sem ela toda a nossa humanidade não teria realizado as suas grandes e definitivas conquistas no campo da técnica, porque ela é uma ***ciência*** das relações de grandezas, ordem, forma e espaço e, finalmente, continuidade.

Em nossa visão, sinceramente bem humilde, achamos que o presente livro será muito bem recebido pelos estudantes.

Os autores

página deixada intencionalmente em branco

Material Complementar

Capítulo 1

Problemas envolvendo números inteiros e fracionários

1.1. Noção de inteiros

A subtração nem sempre é possível no ***conjunto dos números naturais* IN**, por exemplo, não existe ***número natural*** que represente a diferença 2 – 7; para tanto, foi criado o ***conjunto dos números inteiros***. Nesse conjunto, a diferença 2 – 7 é representada por (–5). Donde se conclui: **–5 ∉ IN** (lê-se: –5 não pertence ao ***conjunto dos números naturais***). Indica-se pelo símbolo **Z** o ***conjunto dos números inteiros***:

$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Observações:

A **soma** de dois **números inteiros não negativos** é um **número inteiro não negativo**.

Exemplo: 3 + 7 = 10

A **soma** de dois **números inteiros não positivos** é um **número inteiro não positivo**.

Exemplo: –3 + (– 6) = –9

A **soma** de um **número inteiro não negativo** com um **número inteiro não positivo** pode resultar em um **inteiro não negativo,** em um **não positivo** ou, ainda, em **zero**.

Exemplos:

não negativo + **não positivo** = **inteiro não negativo**

4 + (–1) = 3

não negativo + **não positivo = inteiro não positivo**

8 + (–13) = –5

não negativo + **não positivo = zero**

7 + (–7) = 0

1.2. Algoritmo da divisão em Z (Divisão Euclidiana em Z)

Sejam $a, b \in Z$ com $b \neq 0$. Então, existem e são únicos os números inteiros q e r tais que:

$$\boxed{a = b.q + r, \text{ onde } 0 \leq r < |b|}$$

Observações:

– A relação a = b.q + r, onde $0 \leq r < |\, b \,|$ é escrita como segue:

$$\begin{array}{ccc|ccc} \text{dividendo} & \leftarrow & a & \underline{b} & \rightarrow & \text{divisor} \\ \text{resto} & \leftarrow & r & q & \rightarrow & \text{quociente} \end{array}$$

– Quando tivermos $r = 0$ (isto é, resto nulo) teremos: $a = b.q$, e nesse caso, diremos que a divisão é *exata*.

– Sejam $a, b \in Z$, com $b \neq 0$ e $|a| < |b|$. Na divisão euclidiana de a por b, podemos concluir que:

- para $a > 0$, teremos $q = 0$ e $r = a$;
- para $a < 0$, teremos $q = -\dfrac{b}{|b|}$ e $r = |b| - |a|$.

– Ao nos depararmos com uma igualdade da forma: a = b.x + y, onde $a, b, x, y \in Z$, $b \neq 0$ e $0 \leq y < |b|$, podemos interpretá-la do seguinte modo: "*a* quando dividido por *b* nos dá quociente *x* e resto *y*".

Exemplos:

E.1) $\begin{array}{r|l} 9 & \underline{5} \\ 4 & 1 \end{array}$, porque $\underbrace{9}_{a} = \underbrace{5}_{b} . \underbrace{1}_{q} + \underbrace{4}_{r}$ e $0 \leq 4 < \underbrace{|\ 5\ |}_{5}$.

E.2) $\begin{array}{r|l} 17 & \underline{-2} \\ 1 & -8 \end{array}$, porque $\underbrace{17}_{a} = \underbrace{(-2)}_{b} . \underbrace{(-8)}_{q} + \underbrace{1}_{r}$ e $0 \leq 1 < \underbrace{|-2\ |}_{2}$.

E.3) $\begin{array}{r|l} -23 & \underline{6} \\ 1 & -4 \end{array}$, porque $\underbrace{-23}_{a} = \underbrace{6}_{b} . \underbrace{(-4)}_{q} + \underbrace{1}_{r}$ e $0 \leq 1 < \underbrace{|\ 6\ |}_{6}$.

E.4) $\begin{array}{r|l} -105 & \underline{-41} \\ 18 & 3 \end{array}$, porque $\underbrace{-105}_{a} = \underbrace{(-41)}_{b} . \underbrace{3}_{q} + \underbrace{18}_{r}$ e $0 \leq 18 < \underbrace{|-41\ |}_{41}$.

E.5) $\begin{array}{r|l} 62 & \underline{63} \\ 62 & 0 \end{array}$, porque $\underbrace{62}_{a} = \underbrace{93}_{b} . \underbrace{0}_{q} + \underbrace{62}_{r}$ e $0 \leq 62 < \underbrace{|\ 93\ |}_{93}$.

1.3. Paridade de um número inteiro

Definição: Quando dividimos um número inteiro por 2, o resto obtido só pode ser 0 ou 1. Os inteiros que são divisíveis por 2 (resto 0) são chamados *números pares* e os inteiros que não são divisíveis por 2 (resto 1) são chamados *números ímpares*.

- Se n é par: $\begin{array}{r|l} n & \underline{2} \\ 0 & q \end{array} \Rightarrow n = 2.q \ (q \in Z)$.
- Se n é ímpar: $\begin{array}{r|l} n & \underline{2} \\ 1 & q \end{array} \Rightarrow n = 2.q + 1 \ (q \in Z)$.

Em símbolos, essas definições ficam:

- n é par $\Leftrightarrow \exists\, q \in Z : n = 2.q \Leftrightarrow n \in M(2)$.
- n é ímpar $\Leftrightarrow \exists\, q \in Z : n = 2.q + 1 \Leftrightarrow n \notin M(2)$.

Exemplos:

1) 0 é par, porque $0 = 2.0$.
2) 7 é ímpar, porque $7 = 2.3 + 1$.
3) -6 é par, porque $-6 = 2.(-3)$.
4) -11 é ímpar, porque $-11 = 2.(-6) + 1$.

1.4. Representações e sequências notáveis de um número inteiro positivo

Seja $(n)_{n \in IN} = (1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ de todos os números naturais,

a) $(2n)_{n \in IN} = (2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots)$ dos números naturais pares,

b) $(2n-1)_{n \in IN} = (1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots)$ dos números ímpares,

c) $(n^2)_{n \in IN} = (1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots)$ dos quadrados perfeitos,

d) $(n^3)_{n \in IN} = (1, 8, 27, \ldots, n^3, \ldots)$ dos cubos perfeitos,

e) $(2^n)_{n \in IN} = (2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots)$ das potências de 2,

f) $(p_n)_{n \in IN} = (2, 3, 5, \ldots, p_n, \ldots)$ dos números primos,

Obs.: Dizemos também: n é o n-ésimo número natural, $2n$ é o n-ésimo número par, $2n - 1$ é o n-ésimo número ímpar, n^2 é o n-ésimo quadrado perfeito etc.

1.5. Noção de fração

Quando um **todo** ou **uma unidade** é dividido em **partes iguais**, uma dessas partes ou a reunião de várias formam o que chamamos de uma **fração do todo**.

Para se representar uma fração são, portanto, necessários dois números inteiros:

a) O primeiro, para indicar em quantas **partes iguais** foi dividida a unidade (ou todo) e que **dá nome** a cada parte e, por essa razão, chama-se **denominador** da fração;

b) O segundo, que indica o **número de partes** que foram reunidas ou tomadas da unidade e, por isso, chama-se **numerador** da fração.

O numerador e o denominador constituem o que chamamos de termos da fração.

Exemplos:

$\frac{2}{3}$: numerador = 2; e denominador = 3;

$\frac{5}{7}$: numerador = 5; e denominador = 7.

1.6. Nomenclaturas das frações

1 – Frações com denominadores de 1 a 10:

Enuncia-se: meios, terços, quartos, quintos, sextos, sétimos, oitavos, nonos e décimos.

Exemplos:

$\frac{2}{3}$ lê-se: dois terços;

$\frac{5}{6}$ lê-se: cinco sextos;

$\frac{7}{8}$ lê-se: sete oitavos;

$\frac{9}{10}$ lê-se: nove décimos.

2 – Frações com denominadores potências de 10:

Enuncia-se: décimos, centésimos, milésimos, décimos de milésimos, centésimos de milésimos etc.

Exemplos:

$\frac{7}{10}$ lê-se: sete décimos;

$\frac{49}{100}$ lê-se: quarenta e nove centésimos;

$\frac{117}{1.000}$ lê-se: cento e dezessete milésimos;

$\frac{4.531}{10.000}$ lê-se: quatro mil quinhentos e trinta e um décimos de milésimos.

3 – Denominadores diferentes dos citados anteriormente:

Enuncia-se o numerador e, em seguida, o denominador seguido da palavra "avos".

Exemplos:

$\frac{5}{11}$ lê-se: cinco onze avos;

$\frac{7}{19}$ lê-se: sete dezenove avos;

$\frac{13}{17}$ lê-se: treze dezessete avos;

$\frac{23}{25}$ lê-se: vinte e três vinte e cinco avos.

1.7. Tipos de frações

1.7.1. Frações próprias

São aquelas em que o numerador é **menor** que o denominador.

Exemplos: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{19}$; $\frac{5}{27}$

1.7.2. Frações impróprias

São aquelas em que o numerador é **maior ou igual** ao denominador

Exemplos: $\frac{25}{4}$; $\frac{35}{8}$; $\frac{9}{9}$; $\frac{100}{4}$

1.7.3. Frações aparentes

São aquelas cujo numerador é **múltiplo** do denominador. Elas pertencem ao grupo das **frações impróprias**.

Exemplos: $\frac{2}{1}$; $\frac{8}{2}$; $\frac{10}{5}$; $\frac{18}{6}$; $\frac{4}{4}$

1.7.4. Frações particulares

Para formar uma fração de uma grandeza, dividimos a grandeza pelo **denominador** (número de partes iguais) e multiplicamos o resultado pelo **numerador** (número de partes tomadas). Assim, podemos concluir:

– Se o **numerador é zero**, a fração é igual a **zero**:

$$\frac{0}{2}=0; \quad \frac{0}{7}=0; \quad \frac{0}{11}=0; \quad \frac{0}{49}=0; \quad \frac{0}{731}=0 \text{ etc.}$$

– Se o **denominador é um**, a fração é igual ao **numerador**.

$$\frac{3}{1}=3; \quad \frac{17}{1}=17; \quad \frac{93}{1}=93; \quad \frac{478}{1}=478; \quad \frac{57}{1}=57; \text{ etc.}$$

–) Se o ***denominador é zero***, a fração não tem sentido (a divisão por zero é impossível).

–) Se o ***numerador*** e o ***denominador são iguais***, a fração é igual à ***unidade***.

$$\frac{5}{5}=1; \quad \frac{19}{19}=1; \quad \frac{78}{78}=1; \quad \frac{146}{146}=1; \quad \frac{1.001}{1.001}=1; \text{ etc.}$$

1.7.5. Números mistos

São números compostos por uma ***parte inteira*** e outra parte ***fracionária***. Podemos transformar uma ***fração imprópria*** na ***forma mista***, ou vice-versa, sem recorrer a desenhos ou figuras.

Exemplos: $\frac{25}{7}=3+\frac{4}{7}=3\frac{4}{7}$; $\frac{13}{3}=4+\frac{1}{3}=4\frac{1}{3}$; $\frac{11}{2}=5+\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}$

$$3\frac{4}{7}=\frac{(3\times 7)+4}{7}=\frac{25}{7};\quad 4\frac{1}{3}=\frac{(4\times 3)+1}{3}=\frac{13}{3};\quad 5\frac{1}{2}=\frac{(5\times 2)+1}{2}=\frac{11}{2}$$

1.7.6. Frações equivalentes

Duas ou mais frações que representam a ***mesma parte*** da unidade são chamadas ***frações equivalentes*** (têm o ***mesmo valor***).

Quando multiplicamos ou dividimos os termos de uma fração por um mesmo número natural, diferente de zero, obtemos uma ***fração equivalente*** à fração inicial.

Exemplos: $\frac{125^{\div 25}}{75_{\div 25}}=\frac{5}{3}$ ou $\frac{125^{\div 5}}{75_{\div 5}}=\frac{25}{15}$; ou $\frac{125}{75}=\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$

As frações $\frac{125}{75}$, $\frac{25}{15}$ e $\frac{5}{3}$ são ***equivalentes***.

1.7.7. Frações irredutíveis

São todas as frações em que o numerador e o denominador são ***números primos*** entre si.

Exemplos: $\frac{5}{13}$; $\frac{11}{17}$; $\frac{23}{19}$; $\frac{41}{29}$; $\frac{89}{43}$

1.8. Comparação e simplificação de fração

1.8.1. Comparação

Quando duas frações têm denominadores iguais, a ***maior*** das frações é aquela que tem o ***maior numerador***.

Quando vamos comparar duas frações que têm denominadores diferentes, reduzimos ao mesmo denominador e aplicamos a regra.

Exemplo: Comparar as frações $\frac{5}{6}$ e $\frac{5}{7}$ entre si

Como as frações têm denominadores diferentes, reduzindo-as ao mesmo denominador.

$mmc(6, 7) = 42$, daí: $\frac{5}{6}$ e $\frac{5}{7} \Rightarrow \frac{35}{42}$ e $\frac{30}{42}$

Lembrando que: $\frac{5}{6}$ é equivalente a $\frac{35}{42}$ e $\frac{5}{7}$ é equivalente a $\frac{30}{42}$

Assim sendo, observamos que o numerador da primeira fração é maior que o numerador da segunda fração, portanto: $\frac{5}{6} > \frac{5}{7}$

1.8.2. Simplificação

Simplificar uma fração é dividir seus termos por um mesmo número e obter termos menores que os iniciais, formando outra ***fração equivalente*** à primeira.

Exemplo: Vamos simplificar pelo método das **divisões sucessivas** até obter a **forma irredutível** (numerador e denominador primos entre si) da fração $\frac{120}{440}$.

Resolução: $\frac{120}{440} = \frac{120:2}{440:2} \Rightarrow \frac{60:2}{220:2} = \frac{30:2}{110:2} \Rightarrow \frac{15:5}{55:5} = \frac{3}{11}$

Logo: $\frac{3}{11}$ é uma fração equivalente a $\frac{120}{440}$.

1.9. Operações com frações

1.9.1. Adição e subtração

A ***soma de frações*** com denominadores ***iguais*** é uma fração cujo denominador é ***igual*** ao das parcelas e cujo numerador é a ***soma*** dos numeradores das parcelas.

Exemplo:

$\frac{32}{5} + \frac{53}{5} = ?$ $\qquad \frac{32+53}{5} = \frac{85^{\div 5}}{5_{\div 5}} = \frac{17}{1} = 17$ (***fração aparente***)

A ***diferença entre duas frações*** com denominadores ***iguais*** é uma fração cujo denominador é ***igual*** ao das frações dadas e cujo numerador é a ***diferença*** dos numeradores.

Exemplo: $\frac{87}{7} - \frac{43}{7} = ?$ $\qquad \frac{87-43}{7} = \frac{44}{7}$

Ao ***somar*** ou ***subtrair*** frações que têm denominadores ***diferentes***, devemos primeiro ***reduzi-las ao mesmo denominador*** e depois aplicar a regra anterior.

Exemplo: $\frac{11}{6} + \frac{10}{9} - \frac{7}{12} + \frac{5}{18} = ?$

$mmc(6, 9, 12, 18) = 36$, portanto o denominador comum será 36.

$$\frac{6.11}{36} + \frac{4.10}{36} - \frac{3.7}{36} + \frac{2.5}{36} \Rightarrow \frac{66+40-21+10}{36} \Rightarrow \frac{116-21}{36} = \frac{95}{36}$$

1.9.2. Multiplicação

O ***produto*** de duas frações é outra fração, cujo numerador é o ***produto dos numeradores dados*** e o denominador é o ***produto dos denominadores dados***.

Exemplo: $\frac{21}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = ?$ $\quad \frac{21 \times 3 \times 7}{4 \times 5 \times 8} = \frac{441}{160}$

1.9.3. Divisão

O ***quociente*** de uma fração por outra é igual ao ***produto*** da primeira fração pelo ***inverso*** da segunda fração.

Exemplo: $\frac{72}{5} \div \frac{4}{7} = ?$ $\quad \frac{72}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{72 \times 7}{5 \times 4} = \frac{504^{\div 4}}{20_{\div 4}} = \frac{126}{5}$

1.9.4. Números decimais e frações decimais

O sistema de numeração decimal apresenta a seguinte ***ordem posicional*** dos algarismos locados no número:

*Unidades simples (1)
*Dezenas (10)
*Centenas (100)
*Unidade de milhar (1000)
*Décimos $\left(\frac{1}{10}\right)$
*Centésimos $\left(\frac{1}{100}\right)$
*Milésimos $\left(\frac{1}{1.000}\right)$
*Décimos-milésimos $\left(\frac{1}{10.000}\right)$
*Centésimos-milésimos $\left(\frac{1}{100.000}\right)$
*Milionésimos $\left(\frac{1}{1.000.000}\right)$

Eis alguns numerais e como devem ser lidos:
0,9: nove décimos
0,17: dezessete centésimos
0,254: duzentos e cinquenta e quatro milésimos
5,6: cinco inteiros e seis décimos
7,18: sete inteiros e dezoito centésimos
27,391: vinte e sete inteiros, trezentos e noventa e um milésimos
472,1256: quatrocentos e setenta e dois inteiros e mil, duzentos, cinquenta e seis décimos-milésimos.

1.10. Transformação de frações ordinárias em decimais e vice-versa

1.10.1. Representação fracionária

Exemplo: Vamos transformar os ***números decimais*** 0,097 e 5,691 na ***forma fracionária***.

$$0,097 = \frac{97}{1.000}$$

$$5,691 = \frac{5.691}{1.000} = \frac{5.000 + 691}{1.000} = 5 + \frac{691}{1.000} = 5\frac{691}{1.000}$$

Note-se que o ***numeral decimal*** 0,097 representa 97 milésimos e o ***numeral decimal*** 5,691, representa cinco inteiros e seiscentos e noventa e um milésimos.

Para transformar um ***numeral decimal*** em ***fração decimal***, escreve-se uma ***fração*** cujo denominador é o ***numeral decimal*** sem a vírgula e cujo denominador é o algarismo 1 (um) seguido de tantos zeros quantas forem as ***casas decimais*** do ***numeral dado***.

Para transformar uma ***fração decimal*** em ***número decimal***, escreve-se o numerador da fração com tantas ***ordens*** (ou ***casas***) ***decimais*** forem os zeros do denominador.

Exemplo: Vamos transformar os números fracionários $\frac{37}{100}$ e $\frac{2.417}{1.000}$ na sua forma decimal.

37 ocupará duas **casas decimais** após a vírgula, pois está dividido por 100 (2 zeros), então: 0,37

2.417 ocupará três **casas decimais** após a vírgula, pois está dividido por 1.000 (3 zeros), então: 2,417

1.10.2. Representação decimal: propriedades

Um ***numeral decimal*** não se altera quando ***retiramos*** ou ***acrescentamos*** um ou mais zeros à direita da ***parte decimal***.

2,51 = 2,510 = 2,5100 = 2,51000...

Para multiplicar um ***numeral decimal*** por 10, 100 ou 1.000 etc. basta deslocar a vírgula uma, duas, três, etc. ***casas decimais*** para a direita.

$12,7 \times 10 = 127$

$132,85 \times 100 = 13\ 852$

$1,345 \times 10\ 000 = 13\ 450$

Para dividir um ***numeral decimal*** por 10, 100 ou 1.000 etc., basta deslocar a vírgula uma, duas ou três etc. ***casas decimais*** para a esquerda.

$5,196 \div 10 = 0,5196$

$6,4 \div 1\ 000 = 0,0064$

$67 \div 10\ 000 = 0,0067$

1.11. Dízimas periódicas simples e compostas

1.11.1. Decimais exatos

Decimais exatos são ***numerais decimais*** obtidos a partir de ***frações irredutíveis***. Vamos, por exemplo, transformar em ***numerais decimais*** as ***frações irredutíveis*** a seguir:

Exemplos: $\frac{5}{4}, \frac{15}{6}, \frac{7}{25}$ e $\frac{50}{1}$

$\frac{5}{4} \Rightarrow 5:4 \Rightarrow 1,25$ é um ***decimal exato***.

$\frac{15}{6} \Rightarrow 15:6 \Rightarrow 2,5$ é um ***decimal exato***.

$\frac{7}{25} \Rightarrow 7:25 \Rightarrow 0,28$ é um ***decimal exato***.

$\frac{50}{1} \Rightarrow 50:1 \Rightarrow 50$ é um ***decimal exato***.

1.11.2. Dízimas periódicas simples

Uma dízima periódica é ***simples*** quando seu ***período*** tem início logo após a vírgula (na ordem décimo de unidade).

Exemplos:

0,454545... ou $0,\overline{45}$ ou 0,(45) ou $0,\dot{4}\dot{5}$

0,316316316... ou $0,\overline{316}$ ou 0,(316) ou $0,\dot{3}\dot{1}\dot{6}$

0,2222... ou $0,\overline{2}$ ou 0,(2) ou $0,\dot{2}$

Partes periódicas ou períodos: 45; 316; 2

1.11.3. Dízimas periódicas compostas

Uma dízima periódica é ***composta*** quando existir(em) algarismo(s) na ordem dos décimos, centésimos, milésimos, etc. que não faz(em) parte do ***período***.

Exemplos:

1,8333............................... ***parte inteira***: 1
parte periódica ou ***período***: 3
parte não periódica: 8

29,31727272..................... ***parte inteira***: 29
parte periódica ou ***período***: 72
parte não periódica: 31

341,834751751751............ ***parte inteira***: 341
parte periódica ou ***período***: 751
parte não periódica: 834

1.12. Fração geradora da dízima periódica ou geratriz da dízima

Quando dividimos o numerador de uma fração irredutível pelo denominador, obtemos uma ***dízima periódica*** (simples ou composta) e dizemos que a fração primitiva é chamada de ***geratriz da dízima periódica***.

Exemplo: $\frac{5}{11}$ é ***geratriz da dízima*** $0,454545...$

1.12.1. Obtenção de uma fração geratriz

Chama-se ***fração geratriz*** de uma ***dízima periódica*** a fração que deu origem a essa ***dízima***, isto é, aquela que ***gerou*** a dízima.

Conceito: A ***geratriz*** de uma ***dízima periódica simples*** é uma fração na qual o numerador é igual ao ***período da dízima*** e o denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do ***período***.

Exemplos: $0,\overline{6}=\frac{6}{9}$; $0,\overline{21}=\frac{21}{99}$; $0,\overline{341}=\frac{341}{999}$

Conceito: A geratriz de uma dízima periódica composta é uma fração na qual:

– O numerador é formado escrevendo-se a ***parte não periódica*** seguida do ***período***. Do número formado, subtrai-se a ***parte não periódica***.
– O denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do ***período*** e por tantos zeros quantos são os algarismos da ***parte não periódica***.

Exemplos: $0,3\overline{7}=\frac{37-3}{90}=\frac{34^{\div 2}}{90_{\div 2}}=\frac{17}{45}$

$$0,42\overline{7}=\frac{427-42}{900}=\frac{385^{\div 5}}{900_{\div 5}}=\frac{77}{180}$$

$$5,63\overline{27}=5\frac{6327-63}{9900}=5\frac{6264^{\div 36}}{9900_{\div 36}}=5\frac{174}{275}=\frac{275\times 5+174}{275}=\frac{1549}{275}.$$

Exercícios resolvidos

1. (FCC) João tinha uma caixa com pregos, mas perdeu $\frac{3}{11}$ da quantidade inicial. Depois, ele usou $\frac{5}{8}$ do que sobrou na caixa. Qual fração representa a parte de pregos que sobrou na caixa?

a) $\frac{2}{11}$.
b) $\frac{3}{11}$.
c) $\frac{3}{8}$.
d) $\frac{5}{8}$.
e) $\frac{17}{88}$.

Resolução:

A quantidade inicial de pregos será representada pela fração inteira, igual a 1.

Ao perder uma quantidade equivalente a $\frac{3}{11}$ de pregos, João ficou com: $1 - \frac{3}{11}$ $= \frac{11-3}{11} = \frac{8}{11}$ de pregos.

A seguir, João usou $\frac{5}{8}$ do que sobrou, ou seja, $\frac{5}{8}$ de $\frac{8}{11}$ resultando em: $\frac{5}{{}_1\cancel{8}} \times \frac{\cancel{8}^1}{11} = \frac{5}{11}$.

A fração que representa a parte de pregos que sobrou na caixa, após João usar a quantidade anterior, será de: $\frac{8}{11} - \frac{5}{11} = \frac{8-5}{11} = \frac{3}{11}$.

Gabarito: B.

2. (FEC) Ana comeu $\frac{2}{3}$ da quantidade total de bombons de uma caixa, e sua irmã comeu $\frac{1}{4}$ da mesma quantidade total. A fração correspondente à quantidade de bombons que as duas comeram juntas é de:

a) $\frac{3}{7}$.

b) $\frac{11}{12}$.

c) $\frac{2}{12}$.

d) $\frac{1}{7}$.

e) $\frac{5}{6}$.

Resolução:

Inicialmente, determinaremos a fração do número de bombons consumidos por Ana e sua irmã:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4 + 1 \times 3}{12} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$$

A seguir, determinaremos a fração que corresponde à quantidade de bombons que sobrou na caixa:

$$1 - \frac{11}{12} = \frac{12 \times 1 - 11}{12} = \frac{12-11}{12} = \frac{1}{12}$$

Gabarito: B.

3. (FCC) Observe os dados apresentados na tabela:

X	Y	X ÷ Y
2	3	0,666...
5	6	0,8333...
1	2	0,5

Se S for a soma dos três resultados apresentados na coluna X ÷ Y, é correto afirmar que S:

a) é divisível por 3;
b) é múltiplo de 5;
c) é um número par;
d) é uma dízima periódica sem representação decimal finita;
e) não pode ser calculado porque não podemos somar dízimas periódicas.

Resolução:

Lembramos, inicialmente, que os valores indicados na coluna **X ÷ Y** correspondem ao resultado da divisão do valor presente na coluna **X** pelo correspondente na coluna **Y**, na mesma linha. Logo, a soma dos três resultados apresentados na coluna **X ÷ Y** poderá ser representada pela soma a seguir:

$$S=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad S=\frac{2.2}{6}+\frac{1.5}{6}+\frac{3.1}{6} \quad \Rightarrow \quad S=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{3}{6} \quad \Rightarrow \quad S=\frac{12}{6}=2$$

Obs.: $mmc(2;\,3;\,6) = 6$

De acordo com o valor encontrado, a soma "S" é representada por um número natural e par.

Gabarito: C.

4. (FEC) Ache o valor de $\dfrac{\mathbf{10-3,2\times 1,7}}{\mathbf{0,8-1}}$

a) –28,4.
b) 2,28.
c) –22,8.
d) 28,4.
e) 0,228.

Resolução:

$$\frac{10-\overbrace{3,2\times 1,7}^{\text{efetuando, inicialmente}}}{0,8-1}=\frac{10-5,44}{0,8-1}=\frac{4,56}{-0,2}=-\frac{\frac{456}{10\cancel{0}}}{\frac{2}{1\cancel{0}}}=-\frac{456}{10}\times\frac{1}{2}=-\frac{456}{20}=-22,8$$

Gabarito: C.

5. (FEC) Calcule: $\dfrac{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}}{\mathbf{1\frac{1}{3}}}+\dfrac{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}}-\dfrac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}$

a) $\dfrac{160}{190}$.
b) $\dfrac{376}{85}$.
c) $\dfrac{5}{8}$.
d) $\dfrac{3}{47}$.
e) $\dfrac{189}{160}$.

Resolução:

$$\frac{\frac{3}{8}}{\mathbf{1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}+\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}}+\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\left(\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{5}\times\frac{4}{1}\right)-\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{1}\right)=\left(\frac{3\times 3}{8\times 4}\right)+\left(\frac{3\times 4}{5\times 1}\right)-\left(\frac{1\times 3}{2\times 1}\right)=$$

$$\frac{9}{32}+\frac{12}{5}-\frac{3}{2}\quad\Rightarrow\quad mmc(2;\,5;\,32)=160$$

$$\frac{9\times 5}{160}+\frac{12\times 32}{160}-\frac{3\times 80}{160}=\frac{45}{160}+\frac{384}{160}-\frac{240}{160}=\frac{45+384-240}{160}=\frac{189}{160}$$

Gabarito: E.

6. (FGV) Ordenando os números racionais p = $\frac{13}{24}$, q = $\frac{2}{3}$ e r = $\frac{5}{8}$, obtemos:

a) p < r < q.
b) q < p < r.
c) r < p < q.
d) q < r < p.
e) r < q < p.

Resolução:

Inicialmente, reduziremos as ***frações*** aos mesmos ***denominadores*** e verificaremos a ***ordenação*** pelos valores obtidos nos seus respectivos ***numeradores***, assim, aquela ***fração*** que apresentar o ***menor numerador*** será considerada a ***menor das frações***.

$$\overbrace{\frac{13}{24}}^{p}\;;\;\overbrace{\frac{2}{3}}^{q}\;;\;\overbrace{\frac{5}{8}}^{r}\quad\Rightarrow\quad mmc(3;\,8;\,24)=24$$

$$\frac{13}{24}\;;\;\frac{2\times 8}{24}\;;\;\frac{5\times 3}{24}\quad\Rightarrow\quad\overbrace{\frac{13}{24}}^{p}\;;\;\overbrace{\frac{16}{24}}^{q}\;;\;\overbrace{\frac{5}{24}}^{r}$$

A ***fração*** **"r"** possui o ***menor numerador***, seguido da ***fração*** **"p"** e tendo como maior ***fração*** a **"q"**. Assim, teremos a seguinte ***ordenação***:

$$\overbrace{\frac{5}{24}}^{r}<\overbrace{\frac{13}{24}}^{p}<;\overbrace{\frac{16}{24}}^{q}$$ ou, ainda: **r < p < q**

Gabarito: B.

7. (FGV) A soma da dízima periódica 0,444... com o número decimal exato 0,21 é igual à seguinte fração:

a) $\frac{587}{900}$.
b) $\frac{589}{900}$.
c) $\frac{591}{900}$.
d) $\frac{593}{900}$.
e) $\frac{595}{990}$.

Resolução:

O ***número racional*** **0,444...** é uma *dízima periódica simples*, em que seu *termo periódico* é formado pelo algarismo **"4"**. Assim, transformando essa dízima periódica na *fração geratriz* que a originou, basta dividir o algarismo da parte periódica **"4"** por tantos "9" quantos forem os algarismos da parte periódica, portanto, teremos:

$$0,4444... = \frac{4}{9}$$

Somando-se a fração geratriz encontrada pelo número decimal exato 0,21, teremos:

$$\frac{4}{9} + 0,21 = \frac{4}{9} + \frac{21}{100} \Rightarrow mmc(\ 9\ ;\ 100) = 900$$

$$\frac{4 \times 100}{900} + \frac{21 \times 9}{900} = \frac{400}{900} + \frac{189}{900} = \frac{400 + 189}{900} = \frac{589}{900}$$

Gabarito: B.

8. (NCE) Ao fazer uma divisão entre dois números inteiros numa calculadora, Josimar obteve como resultado: 0,1234123412341234. Assinale o item que pode indicar a divisão feita por Josimar:

a) $\frac{1234}{999}$.

b) $\frac{1234}{1000}$.

c) $\frac{12}{34}$.

d) $\frac{12341234}{9000000}$.

e) $\frac{1234}{9999}$.

Resolução:

O ***número racional*** **0,1234123412341234** é uma *dízima periódica simples*, em que seu *termo periódico* é formado pelos algarismos **"1234"**. Assim, transformando essa dízima periódica na *fração geratriz* que a originou, basta dividir os algarismos da parte periódica (**1234**) por tantos "9" quantos forem os algarismos da parte periódica, portanto, teremos:

$$0,123412341234... \quad \frac{1234}{9999}$$

Gabarito: E.

9. (CFC) Dê a fração geratriz da dízima periódica 0,12555...

a) $\frac{125}{999}$.

b) $\frac{125}{1000}$.

c) $\frac{113}{900}$.

e) $\frac{125}{9990}$.

d) $\frac{113}{90}$.

Resolução:

O ***número racional*** 0,12555... é uma ***dízima periódica composta***, em que seu ***termo periódico*** é dado pelo ***algarismo* "5"** e o termo ***não periódico*** é dado pelos ***algarismos* "12"**. Assim, transformando essa ***dízima periódica composta*** na ***fração geratriz*** que a originou, basta ***dividir*** o número formado pelos algarismos não periódicos e pelo algarismo periódico ("125"), subtraído do número formado pelos algarismos que não se repetem ("12") por tantos noves ("9") quantos forem os algarismos da parte periódica e tantos zeros ("0") quantos forem os algarismos da parte não periódica, portanto, teremos:

$$0{,}12555... = 0{,}12\overline{5} = \frac{125-12}{900} = \frac{113}{900}$$

Gabarito: C.

10. **(NCE) As dízimas periódicas simples formadas por apenas um algarismo equivalem a frações ordinárias, conforme exemplificado a seguir:**

$0{,}111\ ... = \frac{1}{9}$

$0{,}222\ ... = \frac{2}{9}$

$0{,}333\ ... = \frac{3}{9}$

$0{,}444\ ... = \frac{4}{9}$ etc.

Portanto, o valor de (0,666...) × (0,666...) + (0,333...) × (0,333...) é igual a:

a) 0,111... ,
b) 0,222... .
c) 0,333... .
d) 0,444... .
e) 0,555... .

Resolução:

Transformando as dízimas periódicas simples da expressão anterior em frações geratrizes:

$$(0{,}666...) \times (0{,}666...) + (0{,}333...) \times (0{,}333...) \Rightarrow \frac{6}{9}\times\frac{6}{9}+\frac{3}{9}\times\frac{3}{9} \Rightarrow \frac{6^{\div 3}}{9_{\div 3}}\times\frac{6^{\div 3}}{9_{\div 3}}+\frac{3^{\div 3}}{9_{\div 3}}\times\frac{3^{\div 3}}{9_{\div 3}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}=0{,}555...$$

Gabarito: E.

11. **(FCC) Cristina foi passear e gastou $\frac{1}{4}$ do dinheiro que levou para comprar o ingresso para um show e — do que restou no restaurante que foi depois do espetáculo. Se, ao final, Cristina ficou com R$24,00, com que quantia ela saiu de casa?**

a) R$ 64,00.
b) R$ 96,00.
c) R$ 160,00.
d) R$ 256,00.
e) R$ 320,00.

Resolução:

Consideraremos a quantia inicial como sendo: "*x*" reais.

Se Cristina gastou $\frac{1}{4}$ do dinheiro, então gastou o equivalente a $\frac{x}{4}$.

Portanto, sobrou do dinheiro:

$$x - \frac{x}{4} = \frac{4x - x}{4} = \frac{3x}{4}$$

A seguir, Cristina gastou $\frac{4}{5}$ do que restou em um restaurante, ou seja, gastou o equivalente a:

$$\frac{4}{5} \times \frac{3x}{4} = \frac{12x}{20}$$

A quantia que sobrou foi de:

$$\frac{3x}{4} - \frac{12x}{20} = \frac{15x - 12x}{20} = \frac{3x}{20}$$

Se esse valor de sobra equivale a R$24,00, então teremos:

$$\frac{3x}{20} = R\$\,24{,}00 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20 \times R\$\,24{,}00}{3} \quad \Rightarrow \quad x = R\$\,160{,}00$$

Gabarito: C.

12. (FCC) Do total de funcionários de um tribunal, $\frac{3}{4}$ são homens e os restantes são mulheres. Em certo dia, faltaram ao serviço $\frac{1}{9}$ do total de homens e $\frac{1}{3}$ do de mulheres. Nesse caso, compareceram:

a) 1/6.
b) 1/3.
c) 5/6.
d) 2/3.
e) 1/4.

Resolução:

Observe a distribuição das pessoas, em relação ao total de funcionários (1 = valor inteiro) a seguir de acordo com que foi exposto ao texto:

$$1\,(\text{total de funcionários}) \begin{cases} \dfrac{3}{4}\,(\textit{homens}) \begin{cases} \dfrac{1}{9}\ \textit{dos homens faltaram} = \dfrac{1}{9_3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{8}{9}\ \textit{dos homens compareceram} = \dfrac{8^2}{9_3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \\ \dfrac{1}{4}\,(\textit{mulheres}) \begin{cases} \dfrac{1}{3}\ \textit{das mulheres faltaram} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{2}{3}\ \textit{das mulheres compareceram} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4_2} = \dfrac{1}{6} \end{cases} \end{cases}$$

Portanto, os que comparecerem foram: $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{4+1}{6}=\frac{5}{6}$

Gabarito: C.

13. Todas as alternativas sobre números inteiros estão corretas, exceto:

a) Nem todo primo é ímpar.
b) Todo inteiro par pode ser escrito na forma $n^2 + 2$ com $n \in Z$.
c) A soma de dois inteiros ímpares é sempre um inteiro par.
d) Todo inteiro ímpar pode ser escrito na forma $2n - 9$, $n \in Z$.
e) Se n é um inteiro ímpar, então n^2 também é ímpar.

Resolução:

Analisando alternativa por alternativa, teremos:

a) Nem todo primo é ímpar.
De fato, já que o número 2, que é par, é um número primo. Logo, o item está **CERTO**.

b) Todo inteiro par pode ser escrito na forma $n^2 + 2$ com $n \in Z$.
Atribuindo qualquer valor inteiro a "n", teremos:
Para $n = -3$
$n^2 + 2 \Rightarrow (-3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$. Logo, o item está **ERRADO**.

c) A soma de dois inteiros ímpares é sempre um inteiro par.
Verificando:
$5 + 7 = 12$ (verdade)
$-9 + 11 = 2$ (verdade)
$-1 + -13 = -14$ (verdade)
Logo, esse item está **CERTO**.

d) Todo inteiro ímpar pode ser escrito na forma $2n - 9$, $n \in Z$.
Atribuindo qualquer valor inteiro a "n", teremos:
Para $n = -4$
$2n - 9 \quad \Rightarrow \quad 2 \times (-4) - 9 = -8 - 9 = -17$ (verdade).
Para $n = 0$
$2n - 9 \quad \Rightarrow \quad 2 \times (0) - 9 = 0 - 9 = -9$ (verdade)
Para $n = 3$
$2n - 9 \quad \Rightarrow \quad 2 \times (3) - 9 = 6 - 9 = -3$ (verdade)
Logo, o item está **CERTO**.

e) Se n é um inteiro ímpar, então n^2 também é ímpar.
Atribuindo qualquer valor inteiro a "n", teremos:
Para $n = -7$
$n^2 \quad \Rightarrow \quad (-7)^2 = 49$ (verdade)
Para $n = 11$
$n^2 \quad \Rightarrow \quad (11)^2 = 121$ (verdade)
Logo, o item está **CERTO**.

Gabarito: B.

14. (FCC) Eram 22 horas e em uma festa estavam 243 mulheres e 448 homens. Verificou-se que, continuadamente a cada nove minutos, metade dos homens ainda presentes na festa ia embora. Também se verificou que, continuadamente a cada 15 minutos, a terça parte das mulheres ainda presentes na festa ia embora. Dessa forma, após a debandada das 22 horas e 45 minutos, a diferença entre o número de mulheres e do número de homens é:

a) 14.
b) 28.
c) 36.
d) 44.
e) 58.

Resolução:

O intervalo de tempo observado corresponde a: 22 horas 45 minutos – 22 horas = 45 minutos.

Foi verificado que, continuadamente a cada nove minutos, metade dos homens ainda presentes na festa ia embora, ou seja, teve $\frac{45}{9} = 5$ saídas consecutivas, a se ver:

1ª saída: $\frac{448}{2} = 224$ sobraram: $448 - 224 = 224$ homens.

2ª saída: $\frac{224}{2} = 112$ sobraram: $224 - 112 = 112$ homens.

3ª saída: $\frac{112}{2} = 56$ sobraram: $112 - 56 = 56$ homens.

4ª saída: $\frac{56}{2} = 28$ sobraram: $56 - 28 = 28$ homens.

5ª saída: $\frac{28}{\ }\quad 14$ sobraram: $28 - 14 = 14$ homens.

Também se verificou que, continuadamente a cada 15 minutos, a terça parte das mulheres ainda presentes na festa ia embora, ou seja, ocorreram $\frac{45}{15} = 3$ saídas consecutivas:

1ª saída: $\frac{243}{3} = 81$ sobraram: $243 - 81 = 162$ mulheres.

2ª saída: $\frac{162}{3} = 54$ sobraram: $162 - 54 = 108$ mulheres.

3ª saída: $\frac{108}{3} = 36$ sobraram: $108 - 36 = 72$ mulheres.

Portanto, a diferença entre o número de mulheres e do número de homens ao final foi de:

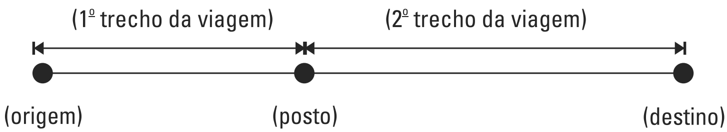
$72 - 14 = 58$

Gabarito: E.

15. (Cesgranrio) Um automóvel parte para uma viagem com o tanque cheio. Depois de percorrer 3/8 do percurso dessa viagem, seu tanque está com a metade do combustível inicial. Nesse momento, o motorista para em um posto de gasolina e coloca combustível correspondente a 1/3 da capacidade do tanque. Considerando que o consumo é diretamente proporcional à distância percorrida, ao final da viagem o tanque estará:

a) vazio;
b) com 1/6 da sua capacidade;
c) com 1/4 da sua capacidade;
d) com 1/3 da sua capacidade;
e) com 1/2 da sua capacidade.

Resolução:



Observe as sucessões ocorridas nessa viagem:

1º) o carro saiu da origem com o tanque cheio (= 1).

2º) No 1º trecho, percorreu $\frac{3}{8}$ da distância e gastou a metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ da capacidade do tanque, sobrando, então, a outra metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ do tanque.

3º) Parou num posto de gasolina e colocou $\frac{1}{3}$ da capacidade do tanque, ficando, então, com $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

4º) Para percorrer o restante da viagem, que corresponde a $\frac{5}{8}$ (2º trecho), estando o tanque com — de suas capacidade.

5º) Se o consumo é diretamente proporcional à distância percorrida, ao final da viagem o tanque estará:

se, com $\frac{1}{2}$ *do tanque* $\xrightarrow{\textit{percorreu}}$ $\frac{3}{8}$ *distância*

então, x $\xrightarrow{\textit{percorrerá}}$ $\frac{5}{8}$ *distância*

$$\frac{3}{8}x=\frac{1}{2}\times\frac{5}{8} \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{\cancel{8}}x=\frac{1}{2}\times\frac{5}{\cancel{8}} \quad\Rightarrow\quad 3x=\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{5}{6}$$

Possuindo $\frac{5}{6}$ do tanque e necessitando dos mesmos $\frac{5}{6}$ para chegar ao destino, então concluímos que o tanque chegará vazio.

Gabarito: A.

Capítulo 2

Divisores de um número natural: D(*n*)

2.1. Critérios de divisibilidade

Os ***critérios de divisibilidade*** são constituídos por ***regras práticas*** que nos possibilitam dizer se um determinado ***número natural* é** ou ***não divisível*** por outro número natural, sem que seja preciso efetuar essa divisão.

Divisibilidade por 2:

Um ***número natural*** é divisível por **2** quando é ***par***, isto é, quando termina em **0; 2; 4; 6; 8.**

Exemplos:

Os números 399**0,** 989**2,** 4331**4,** 13254**6,** 75241**8** são números divisíveis por **2**, porque terminam em, respectivamente: **0; 2; 4; 6; 8.**

Divisibilidade por 3:

Um ***número natural*** é divisível por **3** quando a ***soma de todos*** os seus algarismos forma um número divisível por **3**, ou seja, um ***múltiplo*** de **3**.

Exemplos:

a) 1.104 é divisível por **3**?

Resposta: SIM.

É divisível por **3**, pois seus algarismos quando ***somados***: 1 + 1 + 0 + 4 = **6**, que é um número divisível por **3** (porque 6 ÷ 3 = 2, que é um *número natural*)**.**

b) 2.791.035 é divisível por **3**?

Resposta: SIM.

2.791.035 é constituído de algarismos que ***somados***: 2 + 7 + 9 + 1 + 0 + 3 + + 5 = **27**, gera um número divisível por **3** (pois 27 ÷ 3 = 9, *número natural*).

Divisibilidade por 4:

Um ***número natural*** é divisível por **4** quando seus dois últimos algarismos são **00** ou formam outro número natural que é divisível por **4**.

Exemplos:

a) 5.400 é divisível por **4**?

Resposta: SIM.

5.4**00** é um número divisível por **4**, pois termina em **00**.

b) 653.524 é divisível por **4**?

Resposta: SIM.

653.5**24** termina em **24**, que é um número divisível por **4** (pois 24 ÷ 4 = 6, *número natural*);

c) 1.749.836 é divisível por **4**?

Resposta: SIM.

1.749.8**36** termina em **36**, que é um número divisível por **4** (pois 36 ÷ 4 = 9, *número natural*).

Divisibilidade por 5:

Um ***número natural*** é divisível por **5** quando termina em **0** ou **5.**

Exemplos:

a) 13.245 é divisível por **5**?

Resposta: SIM.

324**5** é divisível por **5**, pois o número termina em **5.**

b) 678.940 é divisível por **5**?

Resposta: SIM.

67894**0** é divisível por **5**, pois o número termina em **0.**

Divisibilidade por 6:

Um ***número natural*** é divisível por **6** quando é divisível por **2** (número ***par***) e por **3**, simultaneamente.

Exemplos:

a) 72.450 é divisível por **6**?

Resposta: SIM.

72.450 é um número **par**, logo é divisível por **2**;

72 450 = 7 + 2 + 4 + 5 + 0 = **18**, que é divisível por **3** (pois 18 ÷ 3 = 6, *número natural*), logo o número 72.450 é divisível por **2** e **3**, simultaneamente, então, ele é divisível por **6**.

b) 112.704 é divisível por **6**?

Resposta: SIM.

12.704 é um número **par**, logo é divisível por **2**;

12.704 = 1 + 1 + 2 + 7 + 0 + 4 = **15**, que é divisível por **3** (pois 15 ÷ 3 = 5, *número inteiro*), logo o número 72.450 é divisível por **2** e **3**, simultaneamente, então, ele é divisível por **6**.

Divisibilidade por 7:

Um ***número natural*** é divisível por **7** quando a ***diferença*** entre as suas ***dezenas*** e o ***dobro*** do valor do seu algarismo das ***unidades*** é divisível por **7**.

Exemplos:

a) 819 é divisível por **7**?

Resposta: SIM.

81 – (2 × **9**) = 81 – 18 = **63**, que é um número divisível por **7** (pois 63 ÷ 7 = 9, *número natural*), então, o número 819 também é divisível por **7**.

b) 5.404 é divisível por **7**?

Resposta: SIM.

540 – (2 × **4**) = 540 – 8 = 532.

53 – (2 × **2**) = 53 – 4 = **49**, que é um número divisível por **7** (pois 49 ÷ 7 = 7, *número natural*), então, número 5.404 também é divisível por **7**.

c) 47.768 é divisível por **7**?

Resposta: SIM.

4.776 – (2 × **8**) = 4.776 **–** 16 = 4.760

476 – (2 × **0**) = 476 **–** 0 = 476

47 – (2 × **6**) = 47 **–** 12 = **35**, que é um número divisível por **7** (pois 35 ÷ 7 = 5, *número natural*), então, número 47.768 também é divisível por **7**.

Divisibilidade por 8:

Um ***número natural*** é divisível por **8** quando seus três últimos algarismos forem **000** ou esses três últimos algarismos formarem um número também divisível por **8**.

Exemplos:

a) 57**000** é divisível por **8**, pois seus três últimos algarismos são **000**.
b) 67**024** é divisível por **8**, porque seus três últimos algarismos formam o número **024**, que é divisível por **8** (pois 24 ÷ 8 = 3, *número natural*) .
c) 34.**125** ***não*** é divisível por **8**, porque seus três últimos algarismos formam o número **125**, que ***não*** é divisível por **8** (pois 125 ÷ 8 = 15,625, que ***não*** é um *número natural*).

Divisibilidade por 9:

Um ***número natural*** é divisível por **9** quando a ***soma*** de todos os seus algarismos formam um número que é divisível por **9.**

Exemplos:

a) 477 é divisível por **9**?

Resposta: SIM.

477 = 4 + 7 + 7 = **18**, como 18 é divisível por **9** (pois 18 ÷ 9 = 2, *número natural*), logo o número 477 é divisível por **9**.

b) 4.698 é divisível por **9**?

Resposta: SIM.

4.698 = 4 + 6 + 9 + 8 = **27**, como 27 é divisível por **9** (pois 27 ÷ 9 = 3, *número natural*), logo o número 4.698 é divisível por **9**.

Divisibilidade por 10:

Um ***número natural*** é divisível por **10** se for divisível por **2** (número **par**) e também por **5**, simultaneamente. Assim sendo, um número divisível por **10** termina obrigatoriamente em **0** (algarismo das unidades é **0**).

Exemplos:

a) 320 é divisível por **10**, pois o número termina em **0.**
b) 12.700 é divisível por **10**, pois o número termina em **0.**
c) 459.000 é divisível por **10**, pois o número termina em **0.**

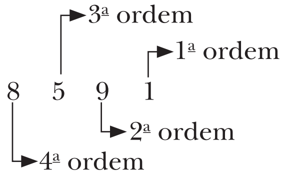
Divisibilidade por 11:

Um ***número natural*** é divisível por **11** quando o valor absoluto entre a ***diferença*** *da* ***soma*** dos algarismos de ***ordem ímpar*** para a ***soma*** dos algarismos de ***ordem par*** for **0** ou um número divisível por **11**.

Exemplos:

a) 8591 é divisível por **11**?

Resposta: SIM.



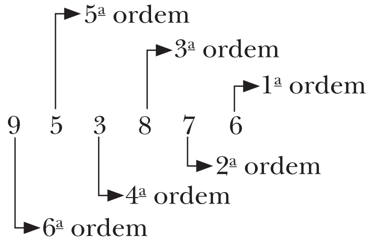
soma dos algarismos de ***ordem ímpar*** (1ª ordem + 3ª ordem): 1 + 5 = **6**;
soma dos algarismos de ***ordem par*** (2ª ordem + 4ª ordem): 9 + 8 = **17**;
diferença entre a ***soma*** dos algarismos de ***ordem ímpar*** e a ***soma*** dos algarismos de ***ordem par***:

6 **–** 17 = **–11**;

valor absoluto dessa diferença: **11**, que é um número divisível por **11** (pois 11 ÷ 11 = 1, *número natural*), logo o número 8.591 também é divisível por **11**.

b) 953.876 é divisível por **11**?

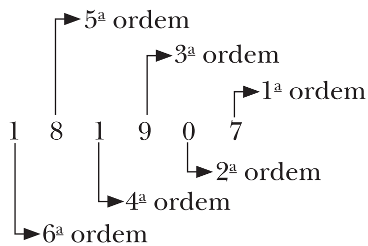
Resposta: SIM.



soma dos algarismos de ***ordem ímpar*** (1ª ordem + 3ª ordem + 5ª ordem): 6 + 8 + 5 = **19**;
soma dos algarismos de ***ordem par*** (2ª ordem + 4ª ordem + 6ª ordem): 7 + 3 + 9 = **19**;
diferença entre a ***soma*** dos algarismos de ***ordem ímpar*** e a ***soma*** dos algarismos de ***ordem par***: 19 **–** 19 = **0**;
valor absoluto dessa diferença: **0**, que é um número divisível por **11** (pois 0 ÷ 11 = 0, *número natural*), logo o número 953.876 também é divisível por **11**.

c) 181.907 é divisível por **11**?

Resposta: SIM.



soma dos algarismos de ***ordem ímpar*** (1ª ordem + 3ª ordem + 5ª ordem): 7 + 9 + 8 = **24**;
soma dos algarismos de **ordem par** (2ª ordem + 4ª ordem + 6ª ordem): 0 + 1 + 1 = **2**;
diferença entre a ***soma*** dos algarismos de ***ordem ímpar*** e a ***soma*** dos algarismos de ***ordem par***:

24 – 2 = **22**;
valor absoluto dessa diferença: **22**, que é um número divisível por **11** (pois 22 ÷ 11 = 2, *número natural*), logo o número 181.907 também é divisível por **11**.

Obs.: Outra forma de determinar se um ***número natural*** é divisível por **11** é isolar o algarismo que representa a unidade, tomar o número formado pelos demais algarismos e subtrair desse algarismo que isolamos, inicialmente, da seguinte forma:

Exemplos:

a) 671 é divisível por **11**?

Resposta: SIM.

67 – 1 = 66, que é um número divisível por **11** (pois 66 ÷ 11 = 6, *número natural*);

b) 5.962 é divisível por **11**?

5.96**2** = 596 – **2** = 594

59**4** = 59 – **4** = 55, que é um número divisível por **11** (pois 55 ÷ 11 = 5, *número natural*).

Divisibilidade por 12:

Um ***número natural*** é divisível por **12** quando for divisível por **3** e **4**, simultaneamente.

Exemplos:

a) 231.456 é divisível por **12**?

Resposta: SIM.

231.456 = 2 + 3 + 1 + 4 + 5 + 6 = **21**, que é um número divisível por **3** (pois 21 ÷ 3 = 7, *número natural*);

231.4**56** termina em **56**, que é um número divisível por **4** (pois 56 ÷ 4 = 14, *número natural*).

Logo, o número 231.456 é divisível por **12**, porque é divisível por **3** e **4**, simultaneamente (231.456 ÷ 12 = 19.288).

b) 674.952 é divisível por **12**?

Resposta: SIM.

674.952 = 6 + 7 + 4 + 9 + 5 + 2 = **33**, que é um número divisível por **3** (pois 33 ÷ 3 = 11, *número natural*);

674.9**52** termina em **52**, que é um número divisível por **4** (pois 52 ÷ 4 = 13, *número natural*).

Logo, o número 674.952 é divisível por **12**, porque é divisível por **3** e **4**, simultaneamente (674.952 ÷ 12 = 56.246).

c) 573.900 é divisível por **12**?

Resposta: SIM.

573.900 = 5 + 7 + 3 + 9 + 0 + 0 = **24**, que é um número divisível por **3** (pois 24 ÷ 3 = 8, *número natural*);

573.9**00** termina em **00**, logo trata-se de um número divisível por **4**.

Logo, o número 573.900 é divisível por **12**, porque é divisível por **3** e **4**, simultaneamente (573.900 ÷ 12 = 47.825).

Divisibilidade por 13:

Um ***número natural*** é divisível por **13** quando a ***soma*** da sua ***quantidade de dezenas*** com o ***quádruplo*** do valor do seu ***algarismo das unidades*** dá origem a um número divisível por **13**.

Exemplos:

a) 481 é divisível por **13**?

Resposta: SIM.

48 + (4 × **1**) = 48 + 4 = **52**, que é um número divisível por **13** (pois 52 ÷ 13 = 4, *número natural*), logo o número 481 é divisível por **13**.

b) 2.847 é divisível por **13**?

Resposta: SIM.

284 + (4 × **7**) = 284 + 28 = **312**;

31 + (4 × **2**) = 31 + 8 = **39** (pois 39 ÷ 13 = 3, *número natural*), logo o número 2.847 é divisível por **13** (2.847 ÷ 13 = 219).

Divisibilidade por 14:

Um ***número natural*** é divisível por **14** quando for divisível por **2** (número **par**) e por **7**, simultaneamente.

Exemplo:

a) 938 é divisível por **14**?

Resposta: SIM.

938 é um número **par**, logo é divisível por **2**;

93 – (2 × **8**) = 93 – 16 = **77**, que é um número divisível por **7** (pois 77 ÷ 7 = 11, *número natural*), então o número 938 também é divisível por **7;** logo, 938 é divisível por **2** e **7**, simultaneamente, então ele é divisível por **14**, logo **:** 938 ÷ 14 = 67.

b) 26.376 é divisível por **14**?

Resposta: SIM.

26.376 é um número **par**, logo é divisível por **2**;

2637 – (2 × **6**) = 2637– 12 = 2625;

262 – (2 × **5**) = 262 – 10 = 252

25 – (2 × **2**) = 25 – 4 = **21**, que é um número divisível por **7** (pois 21 ÷ 7 = 3, *número natural*), então o número 26.376 também é divisível por **7.**

Logo, 26.376 é divisível por **2** e **7**, simultaneamente, então ele é divisível por **14** (26.376 ÷ 14 = 1.884).

Divisibilidade por 15:

Um ***número natural*** é divisível por **15** quando for divisível por **3** e por **5**, simultaneamente. Assim sendo, um número divisível por **15** termina obrigatoriamente em **0** (algarismo das unidades é **0**) ou **5** (algarismo das unidades é **5**).

Exemplos:

a) 3.720 é divisível por **15**?

Resposta: SIM.

3.720 é divisível por **3**, pois 3 + 7 + 2 + 0 = **12**, que é um número divisível por **3** (pois 12 ÷ 3 = 4, *número natural*);

3.72**0** é divisível por **5**, pois o número termina em **0**, logo o número 3.720 é divisível por **3** e **5**, simultaneamente, então ele é divisível por **15** (3.720 ÷ 15 = 248).

b) 81.345 é divisível por **15**?

Resposta: SIM.

81.345 é divisível por **3**, pois 8 + 1 + 3 + 4 + 5 = **21**, que é um número divisível por **3** (pois 21 ÷ 3 = 7, *número natural*);

81.34**5** é divisível por **5**, pois o número termina em **5**, logo, 81.345 é divisível por **3** e **5**, simultaneamente, então ele é divisível por **15** (81.345 ÷ 15 = 5.423).

2.2. Conjunto dos divisores de um número natural

Um *número natural não nulo* ***b*** é *divisor* do número natural ***a*** quando ***a*** é *divisível* por ***b*.** O conjunto dos divisores do número natural ***a*** é o conjunto **D(a)** formado por todos os números naturais que são divisores de ***a***.

Exemplo:

a) Quais e quantos são os divisores de **24**?

Vamos supor que precisamos descobrir quais números são **divisores de 24**. Para isso, escrevemos todos os números naturais de **1** a **24**, e examinaremos se cada um deles **é** ou **não** um divisor de **24**, assinalando em negrito aqueles que são:

1	**2**	**3**	**4**	5	**6**
7	**8**	9	10	11	**12**
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	**24**

Portanto, teremos:

D(24) = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24 }

Total de divisores de **24** : **8** divisores.

b) Quais e quantos são os divisores de **96?**

1	**2**	**3**	**4**	5	6	7	**8**
9	10	11	**12**	13	14	15	**16**
17	18	19	20	21	22	23	**24**
25	26	27	28	29	30	31	**32**
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	**48**
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	**96**

Portanto, teremos:

D(96) = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 32; 48; 96}

Total de divisores de **96: 12** divisores.

c) Quais e quantos são os divisores de **144**?

Existe, entretanto, um ***dispositivo prático*** que permite encontrar o ***conjunto dos divisores*** de um número. Vamos explicar esse dispositivo, aplicando-o ao número **144**.

Decompomos o número **144** em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Colocamos um traço vertical ao lado dos fatores primos. À direita desse traço, numa linha acima do primeiro fator primo, colocamos o ***número* 1**, que é ***divisor natural*** de ***todos os números***.

$$\begin{array}{r|l|l} & & 1 \\ 144 & 2 & \\ 72 & 2 & \\ 36 & 2 & \\ 18 & 2 & \\ 9 & 3 & \\ 3 & 3 & \\ 1 & & \end{array}$$

Multiplicamos o primeiro fator primo pelo **divisor 1** e colocamos o resultado na linha correspondente a ele.

$$\begin{array}{r|l|l} & & 1 \\ 144 & 2 & 2 \\ 72 & 2 & \\ 36 & 2 & \\ 18 & 2 & \\ 9 & 3 & \\ 3 & 3 & \\ 1 & & \end{array}$$

Multiplicamos, agora, cada um dos fatores primos seguintes pelos divisores obtidos que estiverem à direita do traço vertical e acima desses fatores, colocando o produto nas linhas correspondentes, sem repetir os produtos.

		1
144	2	2
72	2	4
36	2	
18	2	
9	3	
3	3	
1		

		1
144	2	2
72	2	4
36	2	8
18	2	
9	3	
3	3	
1		

		1
144	2	2
72	2	4
36	2	8
18	2	16
9	3	
3	3	
1		

O próximo fator primo, 3, multiplicará, além da unidade, todos os valores obtidos anteriormente pela multiplicação do fator primo de número 2, ou seja, multiplicará os valores 1, 2, 4, 8 e 16.

		1				
144	2	2				
72	2	4				
36	2	8				
18	2	16				
9	3	3	6	12	24	48
3	3					
1						

A seguir, o próprio fator primo 3, que se repete, multiplicará apenas os valores obtidos pela linha anterior, ou seja, pelos números 3, 6, 12, 24 e 48, obtendo, finalmente, os seguintes divisores:

		1				
144	2	2				
72	2	4				
36	2	8				
18	2	16				
9	3	3	6	12	24	48
3	3	9	18	36	72	144
1						

D(144) = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 36; 48; 72; 144}

Total de divisores de **144: 15** divisores.

d) Quais e quantos são os divisores de **360?**

		1											
360	2	2											
180	2	4											
90	2	8											
45	3	3	6	12	24								
15	3	9	18	36	72								
5	5	5	10	20	40	15	30	60	120	45	90	180	360
1													

D(360) = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 18; 20; 24; 30; 36; 40; 45; 60; 72; 90; 120; 180; 360}

Total de divisores de **360: 24** divisores.

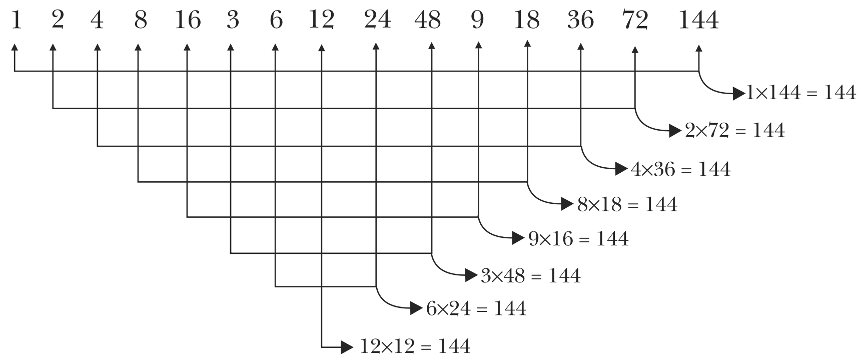
2.3. Propriedade dos divisores de um número natural

Tomemos como exemplo os valores encontrados para os divisores de 144.

		1				
144	2	2				
72	2	4				
36	2	8				
18	2	16				
9	3	3	6	12	24	48
3	3	9	18	36	72	144
1						

Os divisores, na ordem em que aparecem, são: 1; 2; 4; 8; 16; 3; 6; 12; 24; 48; 9; 18; 36; 72; 144.

Ao determinarmos os ***divisores*** de um ***número natural***, os valores encontrados, na ***ordem*** em que aparecem, formam a seguinte relação: se multiplicarmos o **1º divisor** (**"1"**) com o **último** (**"144"**), o **2º divisor** (**"2"**) com o **penúltimo** (**"72"**), o **3º divisor** (**"4"**) com o **antepenúltimo** (**"36"**) e, assim, sucessivamente, encontraremos sempre, do resultado obtido do ***produto*** entre eles, o valor correspondente a **"144"**, então veja:



2.4. Quantidade ou total de divisores naturais de um número natural composto

Considere um número natural composto **"N"** com a sua seguinte ***decomposição*** em ***fatores primos naturais***: ***a***; ***b***; ***c***;......; ***j***; ***k***; sejam seus respectivos ***expoentes*** os números naturais: ***p***; ***q***; ***r***;....... ***s***; ***t***. Assim podemos escrever que **"N"** vale:

$$N = a^p \times b^q \times c^r \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times j^s \times k^t$$

O ***número de divisores*** de **"N"**, ou seja, o número de elementos (**n**) pertencentes ao conjunto **D(N)** é calculado através da fórmula:

$$n(\mathbf{N}) = (p + 1) \times (q + 1) \times (r + 1) \times \ldots \times (s + 1) \times (t + 1)$$

Exemplo:

a) Quantos divisores tem o número **540**?
Decompomos o número **540** em fatores primos

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

540 $= 2^2 \times 3^3 \times 5^1$

n(**540**) $= (\mathbf{2} + 1) \times (\mathbf{3} + 1) \times (\mathbf{1} + 1) = 3 \times 4 \times 2 =$ **24**

n(**540**) = **24**.

Exercícios resolvidos

1. (CFC) O número de divisores naturais de 80, que são múltiplos de 5, é:
   a) 4.
   b) 5.
   c) 6.
   d) 7.
   e) 8.

Resolução:

Pelo método da fatoração, temos os seguintes divisores de 80:

	×	1				
80	2 ×	2				
40	2 ×	4				
20	2	8				
10	2	16				
5	5	5	10	20	40	80
1						

D(80) = {1; 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 40; 80}

Desses divisores, os que são múltiplos de 5 serão:

M(5) = {5; 10; 20; 40; 80}

Portanto, temos 5 divisores de 80 que são múltiplos de 5.

Gabarito:B.

2. (CFC) No maior número natural de três algarismos, divisível por 2 e por 3, simultaneamente, a diferença entre os valores absolutos dos algarismos das dezenas e das unidades é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Resolução:

Inicialmente, devemos lembrar que um número será ***divisível por* 2** quando ***for par*** e, por **3**, quando a ***soma de seus algarismos for um número divisível por 3***.

Assim, deduziremos, em ordem crescente, os números de três algarismos que são divisíveis por 2 e 3, ao mesmo tempo, iniciando-se pelo número 999.

999 ***não é*** divisível por 2, já que não é par.
é divisível por 3, já que a soma de seus algarismos (9 + 9 + 9 = 27) é um número divisível por 3.

998 ***é*** divisível por 2, já que é par.
não é divisível por 3, já que a soma de seus algarismos (9 + 9 + 8 = 26) ***não*** resulta em um número divisível por 3.

997 ***não é*** divisível por 2, já que o mesmo ***não é*** par.
não é divisível por 3, já que a soma de seus algarismos (9 + 9 + 7 = 25) ***não*** resulta em um número divisível por 3.

996 ***é*** divisível por 2, já que é par.
é divisível por 3, já que a soma de seus algarismos (9 + 9 + 6 = 24) é um número divisível por 3.

Portanto, o maior número de 3 algarismos que é divisível por 2 e 3, simultaneamente, é o 996. Assim, a diferença entre o número que representa o algarismo da casa das dezenas (**9**) pelo número que representa o algarismo das casas das unidades (**6**) vale:

9 – 6 = 3

Gabarito:C.

3. (CFC) É divisível, simultaneamente, por 6 e por 9 o número:

a) 732.
b) 734.
c) 736.
d) 738.
e) 740.

Resolução:

Lembramos que um número é divisível é visível por 6 quando for divisível por 2 e 3, simultaneamente e, divisível por 9, quando a soma dos algarismos que compõe esse número for divisível por 9. Assim, analisando cada alternativa, teremos:

732 ***é*** divisível por 2, pois o mesmo é par.
é divisível por 3, já que a soma de seus algarismos (7 + 3 + 2 = 12) é um número divisível por 3.
não é divisível por 9, já que a soma de seus algarismos (7 + 3 + 2 = 12) ***não é*** um número divisível por 9.

734 ***é*** divisível por 2, pois o mesmo é par.
não é divisível por 3, já que a soma de seus algarismos (7 + 3 + 4 = 14) ***não é*** um número divisível por 3.
não é divisível por 9, já que a soma de seus algarismos (7 + 3 + 4 = 14) ***não é*** um número divisível por 9.

736 ***é*** divisível por 2, pois o mesmo é par.
não é divisível por 3, já que a soma de seus algarismos (7 + 3 + 6 = 16) ***não é*** um número divisível por 3.
não é divisível por 9, já que a soma de seus algarismos (7 + 3 + 6 = 16) ***não é*** um número divisível por 9.

738: ***é*** divisível por 2, pois o mesmo é par.
é divisível por 3, já que a soma de seus algarismos (7 + 3 + 8 = 18) ***é*** um número divisível por 3.
é divisível por 9, já que a soma de seus algarismos (7 + 3 + 8 = 18) ***é*** um número divisível por 9.

740 ***é*** divisível por 2, pois o mesmo é par.
não é divisível por 3, já que a soma de seus algarismos (7 + 4 + 0 = 11) ***não é*** um número divisível por 3.
não é divisível por 9, já que a soma de seus algarismos (7 + 4 + 0 = 11) ***não é*** um número divisível por 9.

A única alternativa que satisfez as três condições foi a alternativa D.

Gabarito: D

4. (FCC) Numa reunião, o número de mulheres presentes excede o número de homens em 20 unidades. Se o produto do número de mulheres pelo de homens é 156, o total de pessoas presentes nessa reunião é:

a) 24.
b) 28.
c) 30.
d) 32.
e) 36.

Resolução:

Inicialmente, devemos montar o seguinte sistema linear com duas incógnitas, em função de "x" (que representará o número total de homens) e "y" (que representará o número total de mulheres). Assim, pelo enunciado, temos que:

"o número de mulheres presentes excede o número de homens em 20 unidades"

$y = x + 20$ ou ainda $y - x = 20$

"o produto do número de mulheres pelo de homens é 156"

$y \times x = 156$

Observe que, dessa última relação ($y \times x = 156$), podemos concluir que "$\boldsymbol{x}$" e "$\boldsymbol{y}$" são ***divisores*** de 156, ou ainda, 156 é ***múltiplo*** de "x" e "y". Portanto, para determinarmos os possíveis valores de "$\boldsymbol{x}$" e "$\boldsymbol{y}$" devemos determinar os possíveis ***divisores*** de 156.

		1
156	2	2
78	2	4
39	3	3, 6, 12
13	13	13, 26, 52, 39, 78, 156
1		

Observe que, se multiplicarmos o primeiro divisor (1) com o último (156), o segundo divisor (2) com o penúltimo (78), o terceiro divisor (4) como antepenúltimo (39) e, assim, sucessivamente, encontraremos sempre, no produto entre eles, o valor 156, então veja:

$1 \times 156 = 156$,

$2 \times 78 = 156$,

$4 \times 39 = 156$,

$3 \times 52 = 156$,

$6 \times 26 = 156$, e

$12 \times 13 = 156$.

Para que a diferença entre o maior divisor de 156 e o menor divisor seja 20 ($y - x = 20$), teremos, como valores de "x" e "y", 6 e 26.

$26 - 6 = 20$

Portanto, o total de funcionários será dado por: $6 + 26 = 32$ funcionários.

Gabarito: D

5. (CESd) O número de divisores naturais do número 720 é:

a) 15.
b) 20.
c) 30.
d) 60.
e) 72.

Resolução:

Utilizando-se do processo prático pela fatoração, teremos:

$$
\begin{array}{r|l}
720 & 2 \\
360 & 2 \\
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
\hline
1 & 720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1
\end{array}
$$

O número 720, em sua forma fatorada ($2^4 \times 3^2 \times 5^1$), apresenta os seguintes expoentes: 4, 2 e 1. Pela relação que define o número de divisores, tem-se:

$\mathbf{n(720)} = (\mathbf{4} + 1) \times (\mathbf{2} + 1) \times (\mathbf{1} + 1) = 5 \times 3 \times 2 = \mathbf{30}$

Gabarito: C

6. (CFC) Três divisores comuns de 120 e 60, diferentes de 1, são:

a) 10, 12 e 120.
b) 0, 60 e 120.
c) 3, 4 e 8.
d) 10, 15 e 30.
e) 10, 15 e 40.

Resolução:

Determinando-se os divisores de 120 e 60, teremos:

$$
\begin{array}{r|c|llllll}
 & & 1 & & & & & \\
60 & 2 & 2 & & & & & \\
30 & 2 & 4 & & & & & \\
15 & 3 & 3 & 6 & 12 & & & \\
5 & 5 & 5 & 10 & 20 & 15 & 30 & 60 \\
1 & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|c|llllllll}
 & & 1 & & & & & & & \\
120 & 2 & 2 & & & & & & & \\
60 & 2 & 4 & & & & & & & \\
30 & 2 & 8 & & & & & & & \\
15 & 3 & 3 & 6 & 12 & 24 & & & & \\
5 & 5 & 5 & 10 & 20 & 40 & 15 & 30 & 60 & 120 \\
1 & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Observando-se os divisores obtidos:

D(60) = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60}

D(120) = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60; 120}

Os divisores comuns serão:

D(60) ∩ D(120) = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60**}**

Gabarito:D

7. (FEC) Qual o menor inteiro positivo pelo qual devemos dividir 2.016 para que tenhamos um inteiro quadrado perfeito?

a) 30.
b) 2.
c) 3.
d) 21.
e) 14.

Resolução:

Chamaremos de "*x*" o menor inteiro positivo pelo qual devemos dividir 2.016 para que tenhamos um número inteiro quadrado perfeito que denominaremos de "*y*". Assim, podemos escrever a seguinte relação:

$\frac{2.106}{x} = y$, onde "*x*" é um ***número inteiro*** e "*y*" é um ***número inteiro e quadrado perfeito***.

Obs.: Lembramos que um número é dito quadrado perfeito quando sua raiz quadrada for um número inteiro exato.

Observe, pela relação anterior, que além de "*x*", "*y*" também é um divisor de 2.016, ou seja, dividindo-se 2.016 por "*y*" encontramos o valor de "*x*":

$$\frac{2.106}{y} = x \text{ ou ainda: } 2.106 = x \times y$$

Determinando os divisores de 2.016, obtemos:

		1
2.016	2	2
1008	2	4
504	2	8
252	2	16
126	2	32
63	3	3, 6, 12, 24, 48, 96
21	3	9, 18, 36, 72, 144, 288
7	7	7, 14, 28, 56, 112, 224, 21, 42, 84,
1		168, 336, 672, 63, 126, 252, 504, 1.008, 2.016

Em ordem crescente: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 28, 32, 36, 42, 48, 56, 63, 72, 84, 96, 112, 126, 144, 168, 224, 252, 288, 336, 504, 672, 1.008, 2.016

Assim, os possíveis valores de "*y*" (um quadrado perfeito) serão determinados pela divisão entre 2.016 e seus divisores. Veja os possíveis valores na tabela a seguir.

	$\frac{2.016}{x}$	Condição para que seja um quadrado perfeito
$x = 1$	2.016	2.016 não é um quadrado perfeito, pois $\sqrt{2.016} = 44{,}899888...$
$x = 2$	1.008	1.008 não é um quadrado perfeito, pois $\sqrt{1.008} = 31{,}749015...$
$x = 3$	672	672 não é um quadrado perfeito, pois $\sqrt{672} = 25{,}922962...$
$x = 4$	504	504 não é um quadrado perfeito, pois $\sqrt{504} = 22{,}449944...$
$x = 6$	336	336 não é um quadrado perfeito, pois $\sqrt{336} = 18{,}330302...$
$x = 7$	288	288 não é um quadrado perfeito, pois $\sqrt{288} = 16{,}970562...$

$x = 8$	252	252 não é um quadrado perfeito, pois $\sqrt{252} = 15{,}874507...$
$x = 9$	224	224 não é um quadrado perfeito, pois $\sqrt{224} = 14{,}966629...$
$x = 12$	168	168 não é um quadrado perfeito, pois $\sqrt{168} = 12{,}961481...$
$x = 14$	144	144 **é um quadrado perfeito**, pois $\sqrt{144} = 12$ (valor exato)

Portanto, o menor valor de "x" pelo qual devemos dividir 2.016 para que tenhamos um inteiro quadrado perfeito "y" é o valor 14, pois $\frac{2.016}{14} = 144$ que um número quadrado perfeito.

Gabarito: E

8. (FCC) Seja X um número qualquer, inteiro e positivo, e seja Y o inteiro que se obtém invertendo a ordem dos algarismos de X. Por exemplo, se X = 834, então Y = 438. É correto afirmar que a diferença X – Y é sempre um número:

a) par.
b) positivo.
c) quadrado perfeito.
d) divisível por 9.
e) múltiplo de 6.

Resolução:

Seja um número qualquer de três algarismos "X", do tipo: "abc". Então, um número "Y", invertendo-se a ordem dos algarismos de "X" será dado por: "cba".

Decompondo em unidade, dezena e centena, teremos, para cada número:

$abc = 100a + 10b + c$

$cba = 100c + 10b + a$

Subtraindo-se "abc" de "cba", teremos:

$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a - a + 10b - 10b + c - 100c = 99a - 99c = 99(a - c)$

Observando-se o resultado anterior "$99(a - c)$", podemos verificar que o mesmo é múltiplo de 9, portanto, será divisível por 9.

Gabarito: D

9. (FCC) Das alternativas a seguir, o único número ímpar entre 100 e 200, que é divisível por 7 é:

a) 107.
b) 133.
c) 141.
d) 163.
e) 185.

Resolução:

Lembramos que um número natural é divisível por **7** quando a ***diferença*** entre as suas ***dezenas*** e o ***dobro*** do valor do seu algarismo das ***unidades*** é divisível por **7**. Assim, testando essa definição para cada alternativa, teremos:

107: 10 – 2 × **7** = 10 – 14 = –4; como –4 ***não é*** divisível por 7, então **107** também ***não será***.

133: 13 – 2 × **3** = 13 – 6 = 7; como 7 ***é*** divisível por 7, então **133** também ***será***.

141: 14 – 2 × **1** = 14 – 2 = 12; como 12 ***não é*** divisível por 7, então **141** também ***não será***.

163: 16 – 2 × **3** = 16 – 6 = 10; como 10 ***não é*** divisível por 7, então **163** também ***não será***.

185: 18 – 2 × **5** = 18 – 10 = 8; como 8 ***não é*** divisível por 7, então **185** também ***não será***.

Logo,

Gabarito: B

10. (FCC/2007) Seja X a diferença entre o maior número inteiro com quatro algarismos distintos e o maior número inteiro com três algarismos. Assim sendo, é correto afirmar que X é um número:

a) par.
b) divisível por 3.
c) quadrado perfeito.
d) múltiplo de 5.
e) primo.

Resolução:

Seja o ***maior*** número de **quatro *algarismos***, todos ***distintos*** entre si: **9876**

Seja, agora, o ***maior*** número inteiro com **três *algarismos***: **999**

Determinando "X", que representa a diferença entre esses dois números, teremos:

9876 – 999 = 8877

Observando-se a soma de seus algarismos: 8 + 8 + 7 + 7 = **30**, logo, concluímos que esse número será divisível por 3.

Gabarito: B

11. (PMB) Sendo $A = 2 \times 3 \times 5^2$ e $B = 2^2 \times 3^3$, então, o número de divisores de A × B é:

a) 60.
b) 70.
c) 80.
d) 90.
e) 95.

Resolução:

Determinando o produto A × B:

$A \times B = (2 \times 3 \times 5^2) \times (2^2 \times 3^3) \Rightarrow A \times B = 2^{1+2} \times 3^{1+3} \times 5^2 \Rightarrow A \times B = 2^3 \times 3^4 \times 5^2$

Calculando o número de divisores de "A × B", tomando os expoentes encontrados:

$\mathbf{n}(A \times B) = (\mathbf{3} + 1) \times (\mathbf{4} + 1) \times (\mathbf{2} + 1) = 4 \times 5 \times 3 = \mathbf{60}$

Gabarito: A

12. (EsSA) Assinale a alternativa INCORRETA.

a) Se um número é divisor de 8, então, também é divisor de 32.
b) Se um número é divisor de 20, então, também é divisor de 100.
c) Se um número é múltiplo de 4, então, também é múltiplo de 2.
d) Se um número é múltiplo de 10, então, também é múltiplo de 20.
e) Se um número é divisor de 12, então, também é divisor de 60.

Resolução:

Analisando cada alternativa:

a) Se um número é divisor de 8, então também é divisor de 32.

Comparando os divisores de 8 e 32:

D(8) = {1; 2 ; 4; 8}

D(32) = {1; 2 ; 4; 8; 16; 32}

Logo, os divisores de 8 estão contidos nos divisores de 32. Portanto, se um número é divisor de 8, então, também é divisor de 32.

Alternativa correta.

b) Se um número é divisor de 20, então também é divisor de 100.

Comparando os divisores de 20 e 100:

D(20) = {1; 2; 4; 5; 10; 20}

D(100) = {1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100}

Logo, os divisores de 20 estão contidos nos divisores de 100. Portanto, se um número é divisor de 20, então, também é divisor de 100.

Alternativa correta.

c) Se um número é múltiplo de 4, então também é múltiplo de 2.

Comparando os múltiplos de 4 e 2:

M(4) = {0; 4; 8; 12; 16; 20; 24; ...}

M(2) = {0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; ...}

Logo, os múltiplos de 4 também são múltiplos de 2. Portanto, se um número é múltiplo de 4, então, também é múltiplo de 2.

Alternativa correta.

d) Se um número é múltiplo de 10, então também é múltiplo de 20.

Comparando os múltiplos de 10 e 20:

M(10) = {0; 10; 20; 30; 40; 50; 60; ...}

M(20) = {0; 20; 40; 60; 80; 100; 120; 140; 160; 180; 200; 220; 240; ...}

Nem todos os múltiplos de 10 são múltiplos de 20. Portanto,

Alternativa incorreta.

e) Se um número é divisor de 12, então também é divisor de 60.

Comparando os divisores de 12 e 60:

D(12) = {1; 2; 3; 4; 6; 12}

D(60) = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60}

Logo, os divisores de 12 estão contidos nos divisores de 60. Portanto, se um número é divisor de 12, então, também é divisor de 60.

Alternativa correta.

Gabarito: D

13. (EsSA) Decompondo o número M em seus fatores primos, obtemos $M = 2^n \times 3^2 \times 5$. Sabendo-se que M tem 30 divisores, então, M está entre:

a) 400 e 500.
b) 500 e 600.
c) 600 e 700.
d) 700 e 800.
e) 800 e 900.

Resolução:

A relação que define a quantidade de divisores de um determinado número envolve os expoentes que encontramos na forma fatorada desse referido número.

Sendo "M" o número em questão e sua forma fatorada dada por $M = 2^n \times 3^2 \times 5$ e quantidade de divisores igual a 30, então teremos:

$$(n+1)\times(2+1)\times(1+1) = 30 \Rightarrow (n+1)\times3\times2 = 30 \Rightarrow (n+1) = \frac{30}{6} \Rightarrow (n+1) = 5$$

$\Rightarrow n = 5 - 1 \Rightarrow n = 4$

Logo, o numero M será representado por:

$M = 2^n \times 3^2 \times 5 \Rightarrow M = 2^4 \times 3^2 \times 5 \Rightarrow M = 16 \times 9 \times 5 \Rightarrow M = 720$

Gabarito: D

14. (CESd) O produto dos divisores do número 16 é:

a) 16.
b) 625.
c) 1.024.
d) 1.830.
e) 2.024.

Resolução:

Sejam os divisores de 16: D(16)

D(16) = {1; 2; 4; 8; 16}

O produto de seus divisores será dado por: $1\times2\times4\times8\times16 = 1024$.

Gabarito: C

15. (CFC) O número 2A35 será divisível por 3 desde que o algarismo "A" assuma valores cuja soma seja:

a) 15.
b) 14.
c) 13.
d) 12.
e) 11.

Resolução:

Observe na tabela a seguir as possíveis somas que resultam em um número divisível por 3:

2	**A**	3	5	soma obtida	é divisível por 3?
2	**0**	3	5	2 + **0** + 3 + 5 = 10	não
2	**1**	3	5	2 + **1** + 3 + 5 = 11	não
2	**2**	3	5	2 + **2** + 3 + 5 = 12	**sim**
2	**3**	3	5	2 + **3** + 3 + 5 = 13	não
2	**4**	3	5	2 + **4** + 3 + 5 = 14	não
2	**5**	3	5	2 + **5** + 3 + 5 = 15	**sim**
2	**6**	3	5	2 + **6** + 3 + 5 = 16	não
2	**7**	3	5	2 + **7** + 3 + 5 = 17	não
2	**8**	3	5	2 + **8** + 3 + 5 = 18	**sim**
2	**9**	3	5	2 + **9** + 3 + 5 = 19	não

Somente para "A" igual a **2**, **5** e **8**, o número formado será divisível por 3, logo, a soma desses algarismos vale:

$2 + 5 + 8 = 15$

Gabarito: A

Capítulo 3

Máximo Divisor Comum

O ***máximo divisor comum*** **(MDC)** entre dois ou mais ***números naturais*** é o ***maior*** de seus ***divisores comuns***.

3.1. Processos para determinar o MDC

Utilizaremos três processos, mostrados a seguir, para determinar o **MDC** entre ***dois*** ou ***mais números*** e, por último, utilizaremos o algoritmo de Euclides, outro processo prático, para determinar o ***máximo divisor comum***.

a) Por intersecção (U = N*)

Qual o máximo divisor comum (MDC) entre **18**, **27** e **45?**

Primeiro determinamos os divisores dos números **18**, **45** e **27**.

D(**18**) = {1, 2, 3, 6, 9, 18};

D(**27**) = {1, 3, 9, 27};

D(**45**) = {1, 3, 5, 9, 15, 45}.

Fazendo a intersecção entre D(**18**), D(**27**) e D(**45**), temos:

D(**18**) = {1, 2, 3, 6, 9, 18};

D(**27**) = {1, 3, 9, 27};

D(**45**) = {1, 3, 5, 9, 15, 45}.

D(**18**) $\cap$ D(**27**) $\cap$ D(**45**) = {1, 3, 9}

Dentre os ***divisores comuns*** achados, consideramos que o ***maior*** deles corresponde ao **MDC**:

MDC(18, 27, 45) = 9

b) Por *decomposição em fatores primos* (***fatoração completa***):

Achar o máximo divisor comum (MDC) dos números **54** e **405**.

Para isso, basta tomar os fatores comuns aos dois ou mais números naturais com seu ***menor expoente***.

Decompondo os números em fatores primos, obtemos: $54 = 2 \cdot 3^3$ e $405 = 3^4 \cdot 5$

O fator comum a **54** e **405** com menor expoente é $\mathbf{3^3}$. Logo o **MDC**(**54, 405**) = $\mathbf{3^3 = 27}$

c) Pelo processo prático:

Achar o máximo divisor comum (MDC) dos números **180**, **240** e **270**.

Fatorando-se, simultaneamente, os três valores anteriores:

180	;	240	;	270	2
90	;	120	;	135	2
45	;	60	;	135	2
45	;	30	;	135	2
45	;	15	;	135	3
15	;	5	;	45	3
5	;	5	;	15	3
5	;	5	;	5	5
1	;	1	;	1	

divisores comuns entre 180, 240 e 270

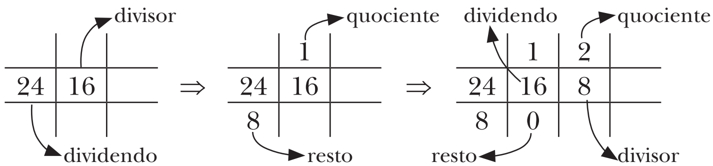
MDC(180; 240; 270) = 2 × 3 × 5 = 30

3.2. Algoritmo de Euclides

Use o algoritmo de Euclides (ou método das divisões sucessivas) para calcular o MDC (16, 24).

Resolução:

O algoritmo de Euclides é descrito a seguir.



Logo, temos que MDC(16,24) = 8 (***último resto não nulo***).

3.2.1. Propriedades básicas do MDC

1ª propriedade: se o MDC(a ; b) = 1 então, a e b são denominados ***primos relativos*** ou ***primos entre si***.

Exemplo: MDC(8 ; 15) = 1, então 8 e 15 são **primos entre si**.

2ª propriedade: se MDC(a ; b) = q, então MDC($k \times a$; $k \times b$) = kq, com $k \neq 0$.

Exemplo: MDC(5 ; 11) = 1. Então, MDC(30 ; 66) = 6, pois: MDC(6 × 5 ; 6 × 11) = 6 × 1 = 6

3ª propriedade: dois ***números consecutivos*** são sempre ***primos entre si***, ou seja: MDC(k ; $k + 1$) = 1

Exemplo: MDC(21 ; 22) = 1

3.2.2. Outras propriedades do MDC

1ª propriedade: Dividindo-se dois números pelo máximo divisor comum entre eles, os quocientes obtidos são ***números primos entre si***:

$$\frac{A}{MDC(A, B)} = a \quad ; \quad \frac{B}{MDC(A, B)} = b$$

Logo, "a" e "b" são primos entre si.

Exemplo: MDC(18 ; 42) = 6 (A = 18 e B = 42)

$$\frac{18}{\underbrace{\text{MDC}(18\ ;\ 42)}_{6}} = 3 \quad ; \quad \frac{42}{\underbrace{\text{MDC}(18\ ;\ 42)}_{6}} = 7$$

Logo, 3 e 7 são primos entre si.

2ª propriedade: Dividindo-se a soma de dois ou mais números pelo máximo divisor comum entre eles, o quociente obtido é igual à ***soma de dois ou mais números primos entre si***.

$$\frac{A + B}{\text{MDC}(A, B)} = a + b$$

Onde, "*a*" e "*b*" são primos entre si.

Exemplo: MDC(18 ; 42) = 6 (A = 18 e B = 42)

$$\frac{18 + 42}{\underbrace{\text{MDC}(18\ ;\ 42)}_{6}} = \frac{60}{6} = 10, \text{ logo, } \frac{18 + 42}{\text{MDC}(18\ ;\ 42)} = 3 + 7$$

3ª propriedade: Dividindo-se a diferença de dois números pelo máximo divisor comum entre eles, o quociente obtido é igual à ***diferença de dois números primos entre si***.

$$\frac{A - B}{\text{MDC}(A, B)} = a - b$$

Onde, "*a*" e "*b*" são primos entre si.

Exemplo: MDC(18 ; 42) = 6 (A = 18 e B = 42)

$$\frac{42 - 18}{\underbrace{\text{MDC}(18\ ;\ 42)}_{6}} = \frac{24}{6} = 4, \text{ logo, } \frac{42 - 18}{\text{MDC}(18\ ;\ 42)} = 7 - 3$$

4ª propriedade: Dividindo-se o produto de dois números pelo quadrado do máximo divisor comum entre eles, o quociente obtido é igual ao ***produto de dois números primos entre si***.

$$\frac{A \times B}{[\text{MDC}(A, B)]^2} = a \times b$$

Onde, "*a*" e "*b*" são primos entre si.

Exemplo: MDC(18 ; 42) = 6 (A = 18 e B = 42)

$$\frac{18 \times 42}{\underbrace{[\text{MDC}(18\ ;\ 42)]^2}_{6^2}} = \frac{756}{36} = 21, \text{ logo, } \frac{18 \times 42}{[\text{MDC}(18\ ;\ 42)]^2} = 3 \times 7$$

Exercícios resolvidos

1. (CFC) O máximo divisor comum entre 11, 18 e 25 é:

a) 5.
b) 4.
c) 3.
d) 2.
e) 1.

Resolução:

Neste exercício, devemos observar, inicialmente, se os números são primos entre si. Analisando os divisores de cada número:

D(**11**) = {1; 11}

D(**18**) = {1; 2; 3; 6; 9; 18}

D(**25**) = {1; 5; 25}

Como o único divisor comum é o número **1**, então os números 11; 18 e 25 são ***primos entre si;*** então, neste caso:

MDC(11; 18; 25) = **1**

Gabarito: E.

2. (CESd) O MDC(420, 480, 600) é um número múltiplo de:

a) 12.
b) 16.
c) 18.
d) 25.
e) 36.

Resolução:

Pelo método das fatorações simultâneas:

$$
\begin{array}{rcrcr|c}
420 & ; & 480 & ; & 600 & 2 \\
210 & ; & 240 & ; & 300 & 2 \\
105 & ; & 120 & ; & 150 & 2 \\
105 & ; & 60 & ; & 75 & 2 \\
105 & ; & 30 & ; & 75 & 2 \\
105 & ; & 15 & ; & 45 & 3 \\
35 & ; & 5 & ; & 15 & 3 \\
35 & ; & 5 & ; & 5 & 5 \\
7 & ; & 1 & ; & 1 & 7 \\
1 & ; & 1 & ; & 1 &
\end{array}
$$

divisores comuns entre 420, 480 e 600

MDC(420; 480; 600) = $2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Das alternativas apresentadas, verificamos que 60 é múltiplo de 12.

Gabarito: A.

3. (EsSA) O MDC de dois números "A" e "B" é $2^5 \times 3^2 \times 5^4 \times 7$. Sendo "A" = $2^x \times 3^4 \times 5^z \times 7$ e "B" = $2^6 \times 3^y \times 5^5 \times 7$, então "*xyz*" é igual a:

a) 20.
b) 80.
c) 60.
d) 40.
e) 11.

Resolução:

$$\text{Sejam: } \begin{cases} A = 2^x \times 3^4 \times 5^z \times 7 \\ B = 2^6 \times 3^y \times 5^5 \times 7 \end{cases}$$

Seja o MDC(A ; B) = $2^5 \times 3^2 \times 5^4 \times 7$

O MDC entre dois ou mais números, em suas formas fatoradas, é dado pelos ***menores expoentes*** de seus ***fatores comuns***, então, comparando os valores, podemos deduzir que:

$x = 5$, $y = 2$ e $z = 4$

Fazendo $x.y.z = 5 \times 2 \times 4 = 40$

Gabarito: D.

4. (Cespe/UnB) Considere que um tribunal tenha 24 motoristas e 36 auxiliares administrativos e que, para agilizar o atendimento aos magistrados e demais servidores da casa, o presidente determine que os motoristas e os auxiliares sejam divididos em equipes. Cada equipe deve ser formada apenas por profissionais do mesmo cargo, deve ter o mesmo número de elementos e esse número de elementos deve ser o maior possível. Nessa situação, o número de equipes de motoristas, o número de equipes de auxiliares administrativos e o número de elementos em cada equipe serão, respectivamente, iguais a:

a) 4, 6 e 6.
b) 6, 9 e 4.
c) 2, 3 e 12.
d) 8, 12 e 3.
e) 8, 9 e 2.

Resolução:

Se cada equipe deve ser formada apenas por profissionais do mesmo cargo, deve ter o ***mesmo número de elementos,*** o qual deve ser o ***maior possível***, então determinaremos ***máximo divisor comum*** entre essas duas quantidades.

MDC(24 ; 36) = MDC(12×2 ; 12×3) = 12, sendo 2 e 3 primos entre si, teremos o número 12 como maior divisor comum entre esses valores. Assim, o número de elementos em cada equipe será igual a 12.

Para o número de equipes de motoristas, o número de equipes de auxiliares administrativos, teremos, respectivamente:

$$\frac{24}{12} = 2 \text{ equipes de motoristas.}$$

$$\frac{36}{12} = 3 \text{ equipes de auxiliares administrativos.}$$

Portanto, teremos duas equipes de motoristas, três equipes de auxiliares administrativos e 12 elementos por equipe.

Gabarito: C.

5. (FCC) Um auxiliar de enfermagem pretende usar a menor quantidade possível de gavetas para acomodar 120 frascos de um tipo de medicamento, 150 frascos de outro tipo e 225 frascos de um terceiro tipo. Se ele colocar a mesma quantidade de frascos em todas as gavetas, e medicamentos de um único tipo em cada uma delas, quantas gavetas deverá usar?

a) 33.
b) 48.
c) 75.
d) 99.
e) 165.

Resolução:

Se o auxiliar colocar a ***mesma quantidade de frascos*** em todas as gavetas, e medicamentos de um único tipo em cada uma delas, quantas gavetas deverá usar, sabendo-se que ele deve usar a ***menor quantidade de gavetas***, ou seja, o ***maior número de frascos possível em cada gaveta***?

Como devemos dividir três quantidades distintas em ***partes iguais*** e de ***maior valor possível***, então devemos determinar o ***máximo divisor comum*** entre essas quantidades.

Utilizando-se o método das fatorações simultâneas:

$$
\begin{array}{rcrcr|l}
120 & ; & 150 & ; & 225 & 2 \\
60 & ; & 75 & ; & 225 & 2 \\
30 & ; & 75 & ; & 225 & 2 \\
15 & ; & 75 & ; & 225 & 3 \\
5 & ; & 25 & ; & 75 & 3 \\
5 & ; & 25 & ; & 25 & 5 \\
1 & ; & 5 & ; & 5 & 5 \\
1 & ; & 1 & ; & 1 &
\end{array}
$$

divisores comuns entre 120, 150 e 225

MDC(120; 150; 225) = 3 × 5 = 15

Logo, o total de gavetas utilizadas será determinado pela ***divisão*** entre o ***total de medicamentos*** pela ***quantidade de medicamentos que serão acomodadas em cada gaveta***.

$$\frac{120+150+225}{15} = \frac{495}{15} = 33 \text{ gavetas.}$$

Gabarito: A.

6. **(FCC) Uma Repartição Pública recebeu 143 microcomputadores e 104 impressoras para distribuir a algumas de suas seções. Esses aparelhos serão divididos em lotes, todos com igual quantidade de aparelhos. Se cada lote deve ter um único tipo de aparelho, o menor número de lotes formados deverá ser:**

a) 8.
b) 11.
c) 19.
d) 20.
e) 21.

Resolução:

Se esses aparelhos serão ***divididos*** em lotes, todos com ***igual quantidade de aparelhos*** e, se em cada lote deve ter um único tipo de aparelho, então para o ***menor número de lotes formados***, deveremos ter o ***máximo de aparelhos acomodados em cada lote***. Assim, determinando o máximo divisor comum entre essas quantidades:

Utilizando-se o método das fatorações simultâneas:

$$
\begin{array}{rcr|l}
104 & ; & 143 & 2 \\
52 & ; & 143 & 2 \\
26 & ; & 143 & 2 \\
13 & ; & 143 & 11 \\
13 & ; & 13 & 13 \\
1 & ; & 1 &
\end{array}
$$

único divisor comum entre 104, 143

MDC(104; 143) = 13

Para o número de lotes de aparelhos, teremos:

$$\frac{104}{13} = 8 \text{ lotes de impressoras.}$$

$$\frac{143}{13} = 11 \text{ lotes de computadores.}$$

Portanto, teremos 8 + 11 = 19 lotes de aparelhos.

Gabarito: C.

7. (FCC) No almoxarifado de certa empresa havia dois tipos de canetas esferográficas: 224 com tinta azul e 160 com tinta vermelha. Um funcionário foi incumbido de empacotar todas essas canetas de modo que cada pacote contenha apenas canetas com tinta de uma mesma cor. Se todos os pacotes devem conter igual número de canetas, a menor quantidade de pacotes que ele poderá obter é:

a) 8.
b) 10.
c) 12.
d) 14.
e) 16.

Resolução:

Se a ***divisão*** conterá apenas canetas com tinta de uma ***mesma cor*** e se todos os pacotes devem conter ***igual número de canetas***, contendo a ***menor quantidade de pacotes possível***, ou seja, contento o ***maior número de canetas possível em cada pacote***, então determinaremos o ***máximo divisor comum*** entre essas quantidades de canetas:

Utilizando-se o método das fatorações simultâneas:

160	;	224	$\boxed{2}$
80	;	112	$\boxed{2}$
40	;	56	$\boxed{2}$
20	;	28	$\boxed{2}$
10	;	14	$\boxed{2}$
5	;	7	5
1	;	7	7
1	;	1	

divisores comuns entre 160, 224

MDC(160; 224) = 2^5 = 32

Para a menor quantidade de pacotes, teremos:

$$\frac{160}{32} = 5 \text{ pacotes de canetas da cor vermelha.}$$

$$\frac{224}{32} = 7 \text{ pacotes de canetas da cor azul.}$$

Portanto, teremos 5 + 7 = 12 pacotes de canetas.

Gabarito: C.

8. (FCC) Uma enfermeira recebeu um lote de medicamentos com 132 comprimidos de analgésico e 156 comprimidos de antibiótico. Deverá distribuí-los em recipientes iguais, contendo, cada um, a maior quantidade possível de um único tipo de medicamento. Considerando que todos os recipientes deverão receber a mesma quantidade de medicamento, o número de recipientes necessários para essa distribuição é:

a) 24.
b) 16.
c) 12.
d) 8.
e) 4.

Resolução:

Se a distribuição (***divisão***) deverá ser feita em ***recipientes iguais*** contendo, cada um, a ***maior quantidade possível de um único tipo de medicamento***, então, determinaremos o ***máximo divisor comum*** entre essas quantidades:

Utilizando-se o método das fatorações simultâneas:

132	;	156	$\boxed{2}$
66	;	78	$\boxed{2}$
33	;	39	$\boxed{3}$
11	;	13	11
1	;	13	13
1	;	1	5
1	;	7	7
1	;	1	

divisores comuns entre 132, 156

MDC(120; 132; 156) = $2^2 \times 3 = 12$

Logo, o número de recipientes necessários para essa distribuição será determinado pela ***divisão*** do ***total de medicamentos*** entre analgésicos e antibióticos pela ***quantidade de medicamentos que serão acomodados em cada recipiente***.

$$\frac{132+156}{12} = \frac{288}{12} = 24 \text{ recipientes.}$$

Gabarito: A.

9. (FCC) Em um armário que tem 25 prateleiras vazias devem ser acomodados todos os 456 impressos de um lote: 168 de um tipo A e 288 de um tipo B. Incumbido de executar essa tarefa, um auxiliar recebeu as seguintes instruções:

– em cada prateleira deve ficar um único tipo de impresso;
– todas as prateleiras a serem usadas devem conter o mesmo número de impressos;
– deve ser usada a menor quantidade possível de prateleiras.

Nessas condições, é correto afirmar que:

a) serão usadas apenas 20 prateleiras;
b) deixarão de ser usadas apenas 11 prateleiras;
c) deixarão de ser usadas apenas 6 prateleiras;
d) serão necessárias 8 prateleiras para acomodar todos os impressos do tipo A;
e) serão necessárias 10 prateleiras para acomodar todos os impressos do tipo B.

Resolução:

De acordo com as instruções deixadas, devemos determinar o ***máximo divisor comum*** entre as duas quantidades dos dois tipos de impressos (168 e 288), já que, em cada prateleira, deve ficar um único tipo de impresso e deve haver o mesmo número de impressos, a maior quantidade possível de impressos em cada prateleira:

Utilizando-se o método das fatorações simultâneas:

$$\begin{array}{rcr|l} 168 & ; & 288 & 2 \\ 84 & ; & 144 & 2 \\ 42 & ; & 72 & 2 \\ 21 & ; & 36 & 2 \\ 21 & ; & 18 & 2 \\ 21 & ; & 9 & 3 \\ 7 & ; & 3 & 3 \\ 7 & ; & 1 & 7 \\ 1 & ; & 1 & \end{array}$$

divisores comuns entre 132, 156

MDC(168; 288) = $2^3 \times 3 = 24$

O total de prateleiras usadas foi de:

$$\frac{168+288}{24} = \frac{456}{24} = 19 \text{ prateleiras.}$$

Logo, deixaram de ser usadas: 25 – 19 = 6 prateleiras.

Gabarito: C

10. (FCC) Para participar de um programa de treinamento, todos os funcionários de uma empresa serão divididos em grupos, obedecendo ao seguinte critério:
- **todos os grupos deverão ter o mesmo número de componentes;**
- **em cada grupo, os componentes deverão ser do mesmo sexo.**

Se nessa empresa trabalham 132 homens e 108 mulheres, a menor quantidade de grupos que poderão ser formados é:

a) 15.
b) 18.
c) 20.
d) 24.
e) 26.

Resolução:

A ***divisão*** dos grupos deverá ter o ***mesmo número de componentes*** e, em cada grupo, os componentes ***deverão ser do mesmo sexo***, contendo ***o maior número possível de componentes***. Nessas condições deveremos obter o ***máximo divisor comum*** entre essas quantidades:

Utilizando-se o método das fatorações simultâneas:

$$\begin{array}{rcr|l} 108 & ; & 132 & \boxed{2} \\ 54 & ; & 66 & \boxed{2} \\ 27 & ; & 33 & \boxed{3} \\ 9 & ; & 11 & 3 \\ 3 & ; & 11 & 3 \\ 1 & ; & 11 & 11 \\ 1 & ; & 1 & \end{array}$$

divisores comuns entre 108, 132

MDC(108; 132) = $2^2 \times 3 = 12$

Logo, a menor quantidade de grupos que poderão ser formados será determinada pela ***divisão*** entre o ***total de pessoas*** pela ***quantidade de pessoas que serão colocadas em cada grupo***.

$$\frac{108+132}{12} = \frac{240}{12} = 20 \text{ grupos.}$$

Gabarito: C

11. (NCE) Um carpinteiro precisa dividir três tábuas de madeira em comprimentos iguais, sem que haja sobras. Ele também deseja que essas divisões tenham o maior comprimento possível. As tábuas medem 210 dm, 336 dm e 378 dm de comprimento. O número de partes em que a mais longa delas deve ser dividida é igual a:

a) 8.
b) 9.
c) 10.
d) 12.
e) 15.

Resolução:

Considerando que as tábuas deverão ter ***tamanhos iguais*** e de ***maior comprimento possível***, então deveremos calcular o ***máximo divisor comum*** entre esses comprimentos:

Utilizando-se o método das fatorações simultâneas:

$$\begin{array}{rcrcr|c}
210 & ; & 336 & ; & 378 & 2 \\
105 & ; & 168 & ; & 189 & 2 \\
105 & ; & 84 & ; & 189 & 2 \\
105 & ; & 42 & ; & 189 & 2 \\
105 & ; & 21 & ; & 189 & 3 \\
35 & ; & 7 & ; & 63 & 3 \\
35 & ; & 7 & ; & 21 & 3 \\
35 & ; & 7 & ; & 7 & 5 \\
7 & ; & 7 & ; & 7 & 7 \\
1 & ; & 1 & ; & 1 &
\end{array}$$

→ divisores comuns entre 210, 336 e 378

MDC(210; 336; 378) = 2 × 3 × 7 = 42

O número de partes em que a mais longa delas deve ser dividida é igual a:

$$\frac{378}{42} = 9 \text{ partes.}$$

Gabarito: B

12. (FCC) Num armazém há dois lotes de grãos: um com 1.152 kg de soja e outro com 2.100 kg de café. Todo o grão dos dois lotes deve ser acomodado em sacos iguais, de modo que cada saco contenha um único tipo de grão e seja usada a menor quantidade possível de sacos. Nessas condições, de quantas unidades o número de sacos de café excederá o de soja?

a) 12.
b) 37.
c) 48.
d) 64.
e) 79.

Resolução:

Se devemos acomodar todos os grãos em ***sacos iguais***, de modo que cada saco contenha ***um único tipo de grão*** e seja usada a ***maior quantidade possível de grãos em cada saco***, então determinaremos o ***máximo divisor comum*** entre essas duas quantidades:

Utilizando-se o método das fatorações simultâneas:

1152	;	2100	2
576	;	1050	2
288	;	525	2
144	;	525	2
72	;	525	2
36	;	525	2
18	;	525	2
9	;	525	3
3	;	175	3
1	;	175	5
1	;	35	5
1		7	7
1		1	

divisores comuns entre 1.152, 2.100

MDC(1.152; 2.100) = $2^2 \times 3 = 12$

Determinando-se as quantidades de sacos utilizados em cada tipo de grão:

$$\frac{1.152}{12} = 96 \text{ sacos de soja.}$$

$$\frac{2.100}{12} = 175 \text{ sacos de café.}$$

Portanto, o número de sacos de café que excederá o de soja é de:

$175 - 96 = 79$

Gabarito: E

13. (Cespe/UnB) Uma lanchonete precisa exatamente de 75 sachês de sal, 60 de açúcar e 45 de adoçante para colocar nos recipientes que ficam sobre suas mesas, de modo que todos os recipientes tenham as mesmas quantidades de cada um desses produtos. Nesse caso, o número máximo de mesas que essa lanchonete pode ter é igual a:

a) 3.
b) 5.
c) 12.
d) 18.
e) 20.

Resolução:

Dividindo-se as três quantidades de sachês em ***partes iguais*** e, sendo essas partes de ***maior valor possível***, então determinaremos o ***máximo divisor comum*** entre essas quantidades:

Utilizando-se o método das fatorações simultâneas:

45	;	60	;	75	2
45	;	30	;	75	2
45	;	15	;	75	3
15	;	5	;	25	3
5	;	5	;	25	5
1	;	1	;	5	5
1	;	1	;	1	

divisores comuns entre 45, 60 e 75

MDC(45; 60; 75) = $3 \times 5 = 15$

O número máximo de mesas que essa lanchonete pode ter é igual a:

$$\frac{45+60+75}{15}=\frac{180}{15}=12 \text{ mesas.}$$

Gabarito: C

14. (FCC) Um auxiliar judiciário foi incumbido de arquivar 360 documentos: 192 unidades de um tipo e 168 unidades de outro. Para a execução dessa tarefa recebeu as seguintes instruções:

- **todos os documentos arquivados deverão ser acomodados em caixas, de modo que todas fiquem com a mesma quantidade de documentos;**
- **cada caixa deverá conter apenas documentos de um único tipo.**

Nessas condições, se a tarefa for cumprida de acordo com as instruções, a maior quantidade de documentos que poderá ser colocada em cada caixa é:

a) 8.
b) 12.
c) 24.
d) 36.
e) 48.

Resolução:

De acordo com as instruções deixadas, deve-se acomodar em caixas as 192 unidades de um tipo e 168 unidades de outro tipo de arquivo de modo que todas fiquem com a ***mesma quantidade de documentos.*** Em cada caixa, deverá conter ***apenas documentos de um único tipo***, com a ***maior quantidade de documentos possível***, portanto, nesse caso basta determinarmos o ***máximo divisor comum*** entre essas quantidades:

Utilizando-se o método das fatorações simultâneas:

$$\begin{array}{rcr|l}
168 & ; & 192 & 2 \\
84 & ; & 96 & 2 \\
42 & ; & 48 & 2 \\
21 & ; & 24 & 2 \\
21 & ; & 12 & 2 \\
21 & ; & 6 & 2 \\
21 & ; & 3 & 3 \\
7 & ; & 1 & 7 \\
1 & ; & 1 &
\end{array}$$

divisores comuns entre 168, 192

MDC(168; 192) = $2^3 \times 3 = 24$

Logo, a maior quantidade de documentos que poderá ser colocada em cada caixa será igual a 24.

Gabarito: C

15. (FEC) Ana quer distribuir 45 maçãs, 60 peras e 90 laranjas em sacolas, de modo que cada sacola tenha a maior quantidade possível de frutas, sem que sobre fruta e sem misturas em uma mesma sacola de espécies de fruta diferentes. Em cada sacola, a quantidade de fruta que deverá ser colocada por Ana corresponde a:

a) 9.
b) 12.
c) 15.
d) 20.
e) 30.

Resolução:

A quantidade de fruta que deverá ser colocada por Ana, em cada sacola, corresponderá ao ***máximo divisor comum*** dessas três quantidades, já que devemos colocar o ***maior número*** possível de frutas, contendo ***a mesma quantidade***, assim, teremos:

45	;	60	;	90	2
45	;	30	;	45	2
45	;	15	;	45	3
15	;	5	;	15	3
5	;	5	;	5	5
1	;	1	;	1	

divisores comuns entre 45, 60 e 90

MDC(45; 60; 90) = 3 × 5 = 15

Gabarito: C

Capítulo 4

Números primos

Observe a tabela a seguir. Nela estão assinalados os ***divisores*** de alguns ***números naturais***, bem como a ***quantidade de divisores*** de cada um desses números naturais:

Número	Divisores															Total de divisores
1	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	1
2	**1**	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	**2**
3	**1**	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	**2**
4	**1**	**2**	3	**4**	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	3
5	**1**	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	**2**
6	**1**	**2**	**3**	4	5	**6**	7	8	9	10	11	12	13	14	15	4
7	**1**	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	14	15	**2**
8	**1**	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15	4
9	**1**	2	**3**	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15	3
10	**1**	**2**	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14	15	4
11	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**11**	12	13	14	15	**2**
12	**1**	**2**	**3**	**4**	5	**6**	7	8	9	10	11	**12**	13	14	15	6
13	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**	14	15	**2**
14	**1**	**2**	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	**14**	15	4
15	**1**	2	**3**	4	**5**	6	7	8	9	10	11	12	13	14	**15**	4

Observando-se o quadro anterior, nota-se que ***alguns*** números possuem **dois** ou ***mais divisores naturais***, excluindo-se a ***unidade***, já que esta possui ***um único divisor***.

Definições:

- Um número natural é ***primo***, quando possui apenas **dois** ***divisores distintos***: ***ele mesmo*** e o ***número 1*** (unidade).
- Um número natural é ***composto***, quando possui ***mais*** de **dois** ***divisores distintos***.
- Os números naturais **0** e **1** não são ***primos*** nem ***compostos***.

A tabela a seguir fornece os ***números primos*** inferiores a **1070**:

↓

2	53	127	199	283	383	467	577	661	769	877	983
3	59	131	211	293	389	479	587	673	773	881	991
5	61	137	223	307	397	487	593	677	787	883	997
7	67	139	227	311	401	491	599	683	797	887	1009

11	71	149	229	313	409	499	601	691	809	907	1013
13	73	151	233	317	419	503	607	701	811	911	1019
17	79	157	239	331	421	509	613	709	821	919	1021
19	83	163	241	337	431	521	617	719	823	929	1031
23	89	167	251	347	433	523	619	727	827	937	1033
29	97	173	257	349	439	541	631	733	829	941	1039
31	101	179	263	353	443	547	641	739	839	947	1049
37	103	181	269	359	449	557	643	743	853	953	1051
41	107	191	271	367	457	563	647	751	857	967	1061
43	109	193	277	373	461	569	653	757	859	971	1063
47	113	197	281	379	463	571	659	761	863	977	1069

4.1. Reconhecimento de um número primo

Para descobrirmos se um ***número natural*** é ***primo*** ou não, basta dividi-lo sucessivamente pelos números primos iniciais: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,...(ver tabela de números primos), até chegarmos, nessa sucessão, a um número primo que seja ***inferior*** à sua raiz quadrada (parte inteira).

Se pelo menos uma dessas divisões for ***exata***, ou seja, com resto igual a **0**, esse número analisado ***não é primo*** e sim ***composto***, caso contrário, se em ***nenhuma*** delas (divisões realizadas pela sequência de números primos escolhidos) ***der exata***, o número dado será ***primo***.

Exemplos:

1) O número **131** é primo ?.

Verificando a raiz quadrada: $\sqrt{131} \cong 11{,}4455$

Desprezando a <u>parte decimal</u> e tomando, apenas, a <u>parte inteira</u>: **11**, realizaremos as seguintes divisões por: 2; 3; 5;7 até 11.

Pelos ***critérios de divisibilidades*** estudados anteriormente temos:

- 131 não é **par**, logo não é divisível por **2** ;
- A ***soma*** dos seus algarismos: 1 + 3 + 1 = **5**, não é divisível por **3**;
- 131 não termina em **0** ou **5**, não é divisível por **5**.
- Por **7: 13 –** (2 × **1**) = 13 **–** 2 = **11**, que ***não é*** um número divisível por **7** (pois 11 ÷ 7, *não é número inteiro*), então o número 131 também ***não é*** divisível por **7**;
- Por **11:** 131: **13 – 1 =** 12 que ***não é*** um número divisível por **7** (pois 12 ÷ 7, *não é número inteiro*), então o número 131 também ***não é*** divisível por **11**

Conclusão: o número **131** ***é primo*** (confira na tabela anterior)

2) O número **551** é primo?

Verificando a raiz quadrada: $\sqrt{551} \cong 23{,}4733$

Testaremos as seguintes divisões até o ***número primo*** imediatamente ***inferior*** à sua raiz quadrada (23):

551 ÷ 2 = 275,5 (a divisão ***não*** é exata)
551 ÷ 3 ≅ 183,66 (a divisão ***não*** é exata)
551 ÷ 5 = 110,2 (a divisão ***não*** é exata)

$551 \div 7 \cong 78{,}71$ (a divisão ***não*** é exata)
$551 \div 11 \cong 50{,}09$ (a divisão ***não*** é exata)
$551 \div 13 \cong 42{,}38$ (a divisão ***não*** é exata)
$551 \div 17 \cong 32{,}41$ (a divisão ***não*** é exata)
$551 \div 19 = 29$ (a divisão ***é exata***)

Conclusão: o número **551** ***não é primo*** (confira na tabela anterior)

4.2. Decomposição de um número natural em fatores primos

Todo ***número natural***, maior do que 1, ou é ***primo*** ou pode ser ***decomposto*** num produto de ***fatores primos*** (***número composto***). Esse processo denomina-se ***Fatoração***.

Podemos dizer também que **fatorar** um número é transformá-lo em uma multiplicação de fatores primos.

Exemplos:

1) Decompor o número **210** em fatores primos ou, simplesmente, fatorar o número **210**.

1º passo: Escrevemos o número dado e colocamos um traço vertical ao lado dele;

$$\begin{array}{r|l} 210 & \\ & \\ & \\ \end{array}$$

2º passo: Descobrimos o menor número primo pelo qual o número dado é ***divisível***. Colocamos esse número primo no outro lado do traço;

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ & \\ & \\ \end{array}$$

3º passo: Efetuamos a divisão e colocamos o quociente sob o número dado;

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & \\ & \\ \end{array}$$

4º passo: Repetimos o processo para o quociente obtido, até encontrar ***quociente igual* a 1**, e escrevemos a decomposição, que pode ser dada usando potências, caso necessite.

210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Logo: **210** = 2 × 3 × 5 × 7, que é a sua ***forma fatorada***.

2) Decompor o número **69.300** em fatores primos.

69.300	2
34.650	2
17.650	3
5.775	3
1.925	5
385	5
77	7
11	11
1	

Logo: **69.300** = $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$, que é a sua ***forma fatorada***.

Exercícios resolvidos

1. A soma dos expoentes dos fatores primos da forma fatorada do número 8.820 vale:

Utilizando o processo prático de fatoração por meio das *divisões sucessivas*, teremos:

8.820	2
4.410	2
2.205	3
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

8.820 = 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 7 × 7

8.820 = $2^2 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2$

Somando-se os expoentes, teremos: 2 + 2 + 1 + 2 = 7

2. Quantos números primos existem entre 6^2 e 7^2?

Ou seja, quantos números primos existem entre 36 e 49?

Sejam as seguintes dezenas compreendidas entre 36 e 49:

37; 38; 39; 40; 41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48

Primeiro, eliminaremos todos os números pares, já que o único número par que é primo é o número 2:

37; ~~38~~; 39; ~~40~~; 41; ~~42~~; 43; ~~44~~; 45; ~~46~~; 47; ~~48~~

A seguir, eliminaremos todos os números múltiplos de 3. Lembramos que um número é múltiplo de 3 quando a soma de seus algarismos for 3 ou outro número divisível por 3, que, nesse caso, são os números 39 e 45.

37; ~~38~~; ~~39~~; ~~40~~; 41; ~~42~~; 43; ~~44~~; ~~45~~; ~~46~~; 47; ~~48~~

Podemos observar que os números restantes não são divisíveis por 5, 7, 11, 13, 17, 19,...; ou seja, são números primos.

37; 41; 43; 47

Portanto, entre 36 e 49, existem quatro números primos.

3. A diferença positiva entre os dois maiores números primos encontrados na forma fatorada do número 16.302, vale:

Fatorando o número 16.302:

$$\begin{array}{r|l} 16.302 & 2 \\ 8.151 & 3 \\ 2.717 & 11 \\ 247 & 13 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

A representação do número 16.302 na sua forma fatorada é dada por; $16.302 = 2 \times 3 \times 11 \times 13 \times 19$

Sendo 13 e 19 seus dois maiores números primos, então a diferença positiva entre esses primos, será de:

$19 - 13 = 6$

4. Decompondo o número 800, encontramos quantos fatores primos distintos?

Fatorando o número 800:

$$\begin{array}{r|l} 800 & 2 \\ 400 & 2 \\ 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, o número 800 poderá ser decomposto nos seguintes fatores:

$800 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$800 = 2^5 \times 5^2$

Portanto, teremos apenas dois primos distintos em sua decomposição, que são os algarismos 2 e 5.

5. A respeito dos números 72 e 108 é correto afirmar que:

a) eles têm os mesmos fatores primos?

Decompondo os números 72 e 108...

72	2	108	2
36	2	54	2
18	2	27	3
9	3	9	3
3	3	3	3
1		1	

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$

Resposta: ***sim***. Podemos observar que os números 72 e 108 possuem os mesmos fatores primos (2 e 3) em suas formas fatoradas.

b) eles possuem as mesmas quantidades de fatores primos, contando as repetições?

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

Resposta: ***sim***. Os números 72 e 108 possuem, cada um, em sua decomposição, cinco fatores primos, contando as devidas repetições.

6. Considerando os números 167, 299 e 701, quais desses números são considerados números primos?

Dividiremos cada número, sucessivamente, pelos números primos iniciais: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,... até um primo próximo da parte inteira da raiz quadrada desses números. E, caso a divisão por um desses números primos seja exata, então esse número não será considerado primo.

Vale lembrar algumas raízes exatas para termos como base a aproximação de suas raízes.

$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{169} = 13$
$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{225} = 15$	$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{361} = 19$
$\sqrt{400} = 20$	$\sqrt{441} = 21$	$\sqrt{484} = 22$	$\sqrt{529} = 23$	$\sqrt{576} = 24$	$\sqrt{625} = 25$
$\sqrt{676} = 26$	$\sqrt{729} = 27$	$\sqrt{784} = 28$	$\sqrt{841} = 29$	$\sqrt{900} = 30$	$\sqrt{961} = 31$

Tirando a raiz quadrada aproximada de cada um desses números (167, 299 e 701), teremos:

$$\sqrt{144} < \sqrt{167} < \sqrt{169} \quad \Rightarrow \quad 12 < \sqrt{167} < 13 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{167} \cong 12,...$$

$$\sqrt{289} < \sqrt{299} < \sqrt{324} \quad \Rightarrow \quad 17 < \sqrt{299} < 18 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{299} \cong 17,...$$

$$\sqrt{676} < \sqrt{701} < \sqrt{729} \quad \Rightarrow \quad 26 < \sqrt{701} < 27 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{701} \cong 26,...$$

Ao dividirmos 167 pelos primos 2, 3, 5, 7 e 11, verificaremos a ocorrência de alguma ***divisão exata***, caso não haja, esse número será dito ***primo***.

$167 \div 2 = 83{,}5$ (a divisão ***não*** é exata)
$167 \div 3 = 55{,}66$ (a divisão ***não*** é exata)
$167 \div 5 = 33{,}4$ (a divisão ***não*** é exata)
$167 \div 7 = 23{,}86$ (a divisão ***não*** é exata)
$167 \div 11 = 15{,}18$ (a divisão ***não*** é exata)

Conclusão: o número 167 ***é primo***.

A seguir, dividiremos 299 pelos primos 2, 3, 5, 7, 11, 13 e verificaremos a ocorrência de alguma ***divisão exata***, caso não haja, esse número será dito ***primo***.

$299 \div 2 = 149{,}5$ (a divisão ***não é*** exata)
$299 \div 3 = 99{,}66$ (a divisão ***não é*** exata)
$299 \div 5 = 59{,}8$ (a divisão ***não é*** exata)
$299 \div 7 = 47{,}71$ (a divisão ***não é*** exata)
$299 \div 11 = 27{,}18$ (a divisão ***não é*** exata)
$299 \div 13 = 23$ (a divisão ***é*** exata)

Conclusão: o número 299 ***não é primo***.

E, por último, dividiremos 701 pelos primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e 23, verificaremos a ocorrência de alguma ***divisão exata***, caso não haja, esse número será dito ***primo***.

$701 \div 2 = 350{,}5$ (a divisão ***não é*** exata)
$701 \div 3 = 233{,}66$ (a divisão ***não é*** exata)
$701 \div 5 = 140{,}2$ (a divisão ***não é*** exata)
$701 \div 7 = 100{,}14$ (a divisão ***não é*** exata)
$701 \div 11 = 27{,}18$ (a divisão ***não é*** exata)
$701 \div 13 = 53{,}92$ (a divisão ***é*** exata)
$701 \div 17 = 41{,}24$ (a divisão ***não é*** exata)
$701 \div 19 = 36{,}89$ (a divisão ***não é*** exata)
$701 \div 23 = 30{,}47$ (a divisão ***não é*** exata)

Conclusão: o número 701 ***é primo***.

Dos números citados, **167** e **701** são ditos ***primos***.

7. Considere a forma fatorada $2^x \times 5^y \times 11^z$ do número 4.840. Nesse caso, qual o valor de $x - y - z$?

$$\begin{array}{r|l} 4.840 & 2 \\ 2.420 & 2 \\ 1.210 & 2 \\ 605 & 5 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Representando em sua forma fatorada, teremos:

$4.840 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11 \times 11$

$4.840 = 2^3 \times 5^1 \times 11^2$

Comparando as formas fatoradas: $2^x \times 5^y \times 11^z = 2^3 \times 5^1 \times 11^2$, teremos para os valores de "x", "y"e "z":

$x = 3$, $y = 1$ e $z = 2$
$x - y - z = 3 - 1 - 2 = 0$

8. Fatorando o número 13.260 tem-se como fatores primos e divisores de 65:

Fatorando os números 13.260 e 65, verificaremos os primos comuns que serão, consequentemente, os seus divisores comuns:

13.260	2	65	5
6.630	2	13	13
3.315	3	1	
1.105	5		
221	13		
17	17		
1			

$13.260 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13 \times 17$; $65 = 5 \times 13$

Portanto, 5 e 13 são os primos de 13.260 que são divisores de 65.

9. Qual(ais) o número(s) primo(s) que está(ão) presente(s) nas três formas fatoradas dos números 1.326, 1.300 e 12.155.

Transformando os referidos números em multiplicações de fatores primos, teremos:

1.326	2	1.300	2	12.155	5
663	3	650	2	2.431	11
221	13	325	5	221	13
17	17	65	5	17	17
1		13	13	1	
		1			

$1.326 = 2 \times 3 \times \mathbf{13} \times 17$
$1.300 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times \mathbf{13}$
$12.155 = 5 \times 11 \times \mathbf{13} \times 17$

O único primo comum é o número **13**.

10. Qual o número primo, menor que 18, que não divide o número 39.270?

Inicialmente, devemos fatorar o número 39.270.

Fatorando o número 39.270:

39.270	2
19.635	3
6.545	5
1.309	7
187	11
17	17
1	

$39.270 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17$

Determinado os números primos inferiores a 18: 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17. Tem-se que, apenas o número primo 13 não divide o número 39.270.

Capítulo 5

Múltiplos de um número natural: D(n)

Um número natural "b" é um ***múltiplo*** de um número natural não nulo "a", quando "b" for ***divisível*** por "a", isto é, $b \div a = k$, onde $k \in IN$, ou seja, $\frac{b}{a} = k$ ou $b = k.a$, onde "a" é chamado de ***divisor*** de "b" ou, de uma outra forma, b é um ***múltiplo*** de "a".

O conjunto dos múltiplos de um número natural não nulo "a" é o conjunto denominado por M(a) e formado por todos os números naturais múltiplos de "a":

$M(a) = \{0, a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, ...\}$

Exemplos:

Eis alguns múltiplos do número 4:

M(4) = {0 ; 4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20 ; 24;...}

Eis alguns múltiplos do número 7:

M(7) = {0 ; 7 ; 14 ; 21 ; 28 ; 35 ; 42 ; ...}

Eis alguns múltiplos do número 13:

M(13) = {0 ; 13 ; 26 ; 39 ; 52 ; 65 ; 78;...}

Exercícios resolvidos

1. **(Cesgranrio) Quantos são os números inteiros, compreendidos entre 100 e 200, que são múltiplos de 3 e, simultaneamente, não são múltiplos de 5?**

   a) 13.
   b) 16.
   c) 21.
   d) 26.
   e) 27.

Resolução:

Para que um conjunto de números compreendidos entre 100 e 200 seja múltiplo de 3 e, simultaneamente, não seja múltiplo de 5, devemos levar em consideração que existem múltiplos de 3 que são também múltiplos de 5, simultaneamente. Se um número é múltiplo, simultaneamente, de dois números primos entre si (nesse caso, entre 3 e 5), dizemos que esse número é múltiplo do produto entre esses números primos (ou seja, $3 \times 5 = 15$); por exemplo, 135 é múltiplo de 3 (pois a soma de seus algarismos é um número múltiplo de 3: $1 + 3 + 5 = 9$) e também é múltiplo de 5 (pois, o número termina em 5), então esse número será múltiplo de 15 ($9 \times 15 = 135$).

Portanto, para determinarmos todos os números, compreendidos entre 100 e 200, que sejam múltiplos de 3 e, simultaneamente, não sejam múltiplos de 5, devemos determinar todos os múltiplos de 3 nesse intervalo e retirar desse conjunto os possíveis múltiplos de 15, também nesse intervalo, assim, teremos:

M(3) = {102, 105, 108, 111, 114, 117, 120, 123, 126, 129, 132, 135, 138, 141, 144, 147, 150, 153, 156, 159, 162, 165, 168, 171, 174, 177, 180, 183, 186, 189, 192, 195, 198}, ou seja, **33 elementos**.

M(15) = {105, 120, 135, 150, 165, 180, 195}, ou seja, **7 elementos**.

Retirando do conjunto dos múltiplos de 3, compreendidos entre 100 e 200, os múltiplos de 15 também nesse intervalo, obtemos:

M(3) = {102, **105**, 108, 111, 114, 117, **120**, 123, 126, 129, 132, **135**, 138, 141, 144, 147, **150**, 153, 156, 159, 162, **165**, 168, 171, 174, 177, **180**, 183, 186, 189, 192, **195**, 198}.

33 – 7 = 26 elementos

Gabarito: D

2. (PMB) O maior múltiplo comum de 12 e 60 que está entre 100 e 200 é:

a) 60.
b) 120.
c) 150.
d) 180.
e) 200.

Resolução:

Iniciaremos determinando os múltiplos de 12 e de 60 menores ou iguais a 200.

M(12) = {0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192}

M(60) = {0, 60, 120, 180}

Os múltiplos de 12 e 60 que estão compreendidos entre 100 e 200 são:

M(12) = {120, 132, 144, 156, 168, 180, 192}

M(60) = {120, 180}

Os múltiplos **comuns** entre 12 e 60, compreendidos entre 100 e 200, ou seja $100 < [M(12) \cap M(60)] < 200$, são:

$M(12) \cap M(60) = \{120, 180\}$

O **maior múltiplo comum** entre 12 e 60 compreendido no intervalo entre 100 e 200 será: **180**.

Gabarito: D

3. (NCE) A soma de três múltiplos consecutivos de 7 é 210. A soma dos valores absolutos dos algarismos do maior desses números é:

a) 7.
b) 9.
c) 11.
d) 14.
e) 15.

Resolução:

Para que um conjunto formado por números naturais seja múltiplo de 7, seus valores devem ser de tal forma que formem uma sequência numérica crescente com um intervalo de valor igual a 7, entre dois números consecutivos, por exemplo, 7, 14, 21, 28... Observem que essa sequência crescente aumenta de 7 unidades, o que caracteriza um subconjunto dos múltiplos do número 7.

Assim, para escrevermos três valores aleatórios múltiplos de 7, e considerando o primeiro múltiplo como sendo "n", teremos:

$n;\ n + 7;\ n + 14$

Se a soma desses três totaliza 210, então:

$(n) + (n + 7) + (n + 14) = 210 \quad \Rightarrow \quad 3n = 210 - 21$

$3n = 189 \quad \Rightarrow \quad \text{n} = \dfrac{189}{3} \quad \Rightarrow \quad n = 63$

Portanto, os números serão:

1º) 63

2º) 63 + 7 = 70

3º) 63 + 14 = 77

A soma dos valores absolutos dos algarismos do maior desses números é:

O maior dos números será o 77 ⇒ 7 + 7 = 14

Gabarito: D

4. Se "*x*" é um número natural múltiplo de 3 e de 5, tal que 50 < *x* < 100, então a soma dos valores que "*x*" pode assumir é:

a) 225.
b) 280.
c) 310.
d) 315.
e) 341.

Resolução:

Se um número é múltiplo de 3 e de 5, simultaneamente, então esse número será múltiplo de 15. Sejam, então, os primeiros múltiplos de 15:

M(15) = {0; 15; 30, 45; 60; 75; 90; 105; 120; ...}

Determinando os múltiplos de 15 compreendidos entre 50 e 100, teremos:

50 < M(15) < 100 = {60; 75; 90}

Somando-se esses valores, teremos:

60 + 75 + 90 = **225**

Gabarito: A

5. Qual destes números não é múltiplo de 12 nem de 16?

a) 84.
b) 80.
c) 48.
d) 192.
e) 98.

Resolução:

Sejam os primeiros múltiplos de 12 e 16:

M(12) = {0; 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120; ...}

M(16) = {0; 16; 32; 96; 128; 160; 192; 224; 256; ...}

Portanto, observando as alternativas dadas, o único número que não é múltiplo de 12 nem de 16 é o 80.

Gabarito: E

Capítulo 6

Mínimo Múltiplo Comum

Minimação (operação), ***menor múltiplo comum*** (resultado)

Minimação é a operação que associa a dois ou mais números naturais o seu ***menor múltiplo, comum***, cuja abreviatura é ***mmc***, excluindo-se o zero.

6.1. Processos para determinar o *mmc*

mmc(4; 6; 8) = ? ou 4 M 6 M 8 = ?

a) Por intersecção (U = N*):

$M_4 = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; 52; ...\}$

$M_6 = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; ...\}$

$M_8 = \{8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; 72; 80; 88; 96; ...\}$

$M_4 \cap M_6 \cap M_8 = \{24, 48, ...\}$

O *mmc* de dois ou mais números é dado pelo ***menor valor*** da ***intersecção*** dos ***conjuntos dos múltiplos*** desses números.

Portanto: *mmc*(4; 6; 8) = 24 ou 4 M 6 M 8 = 24

b) Por *decomposição em fatores primos* (*fatoração completa*):

$4 = 2^2$

$6 = 2 \times 3$

$8 = 2^3$

O *mmc* de dois ou mais números é o produto dos ***fatores primos comuns e não comuns***, cada um deles tomado com o seu ***maior expoente***.

Portanto: $4 = 2^2$ $6 = 2 \times 3$ $8 = 2^3$

$mmc(4; 6; 8) = 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$

c) Pelo processo tradicional:

$$\begin{array}{ccccc|l} 4 & ; & 6 & ; & 8 & 2 \\ 2 & ; & 3 & ; & 4 & 2 \\ 1 & ; & 3 & ; & 2 & 2 \\ 1 & ; & 3 & ; & 1 & 3 \\ \hline 1 & ; & 1 & ; & 1 & mmc\ (4; 6; 8) = 2^3 \times 3 = 24 \end{array}$$

6.2. Propriedades do *mmc*

1ª propriedade: O *mmc* de dois ***números primos entre si*** é o ***produto deles.***

Exemplo: *mmc*(6; 11) = 6 × 11 = 66.

2ª propriedade: O *mmc* de dois números em que o ***maior é divisível pelo menor*** é o ***maior deles.***

Exemplo: *mmc*(4; 12) = 12.

3ª propriedade: Multiplicando ou dividindo dois números por um outro número diferente de zero, o *mmc* aparece multiplicado ou dividido por esse outro.

Exemplo: *mmc*(12; 18) = 36, assim, *mmc*(12 × 2; 18 × 2) = 36 × 2

4ª propriedade: Dividindo-se o mínimo múltiplo comum de dois números pelo máximo divisor comum entre eles, o quociente obtido é igual ao produto de dois números primos entre si.

$$\frac{mmc(\mathrm{A,B})}{\mathrm{MDC(A,B)}} = \mathrm{a} \times \mathrm{b}$$

onde "*a*" e "*b*" são primos entre si.

Exemplo: Sejam os números A = 12, B = 18, o MDC(12; 18) = 6 e o *mmc*(12; 18) = 36.

$$\frac{mmc(12;18)}{\mathrm{MDC}(12;18)} = \frac{36}{6} = 6 = 2 \times 3 \begin{cases} \mathrm{a} = 2 \\ \mathrm{b} = 3 \end{cases}$$

5ª propriedade: Multiplicando-se o mínimo múltiplo comum de dois números pelo máximo divisor comum entre eles, o resultado obtido é o produto desses números.

$$mmc(\mathrm{A;B}) \times \mathrm{MDC(A;B)} = \mathrm{A} \times \mathrm{B}$$

$$mmc(\mathrm{A;B}) \times \mathrm{MDC(A;B)} = \mathrm{A} \times \mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{36 \times 6}_{216} = \underbrace{12 \times 18}_{216}$$

Exercícios resolvidos

1. **(NCE) Três números inteiros, M, N e O, quando decompostos em fatores primos, podem ser escritos como:**

$$\mathbf{M} = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e \times 13^f \times 17^g$$

$$\mathbf{N} = 2^h \times 3^i \times 5^j \times 7^k \times 11^l \times 13^m \times 17^n$$

$$\mathbf{O} = 2^o \times 3^p \times 5^q \times 7^r \times 11^s \times 13^t \times 17^u$$

onde os expoentes a, b, ..., h, i, ..., o, p, ..., u são todos números inteiros positivos. Nesse caso, NÃO é correto afirmar que:

a) M, N e O são divisíveis por 210;
b) M, N e O são múltiplos de 2 × 3 × 5 × 7 × 11 × 13 × 17;
c) M pode ser múltiplo de N e de O;
d) M, N e O *não* são múltiplos de 31;
e) O máximo divisor comum de M, N e O é 2 × 3 × 5 × 7 × 11 × 13 × 17.

Analisando cada item, temos:

a) M, N e O são divisíveis por 210;

Fatorando o número 210, temos:

210	2
105	3
35	5
7	7
1	$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

Observe que os números M, N e O, em sua forma fatorada, possuem como divisores os números 2, 3, 5 e 7, portanto, M, N e O poderão ser divisíveis por 210. Logo, o item está **CERTO**.

b) M, N e O são múltiplos de $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$;

De fato, pois o produto $2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1 \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1$ é um divisor inteiro de M, N e O. Logo, o item está **CERTO**.

c) M pode ser múltiplo de N e de O;

Sendo M, em sua forma fatorada, igual a $M = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e \times 13^f \times 17^g$ e seus respectivos expoentes de seus fatores primos, iguais a "a", "b", "c", "d", "e", "f" e "g", números inteiros, M será um múltiplo de O e N, se os expoentes de seus fatores primos correspondentes forem maiores ou iguais aos expoentes correspondentes dos fatores primos de N ("h", "i", "j", "k", "l", "m" e "n") e de O ("o", "p", "q", "r", "s", "t" e "u"), ou seja, se $a \geq o$ e $a \geq h$, se $b \geq i$ e $b \geq p$, se $c \geq j$ e $c \geq q$, se $d \geq k$ e $d \geq r$, se $e \geq l$ e $e \geq s$, se $f \geq m$ e $f \geq t$, se $g \geq n$ e $g \geq u$.

Como o enunciado não mencionou os possíveis valores dos respectivos expoentes, então, M pode ser um múltiplo de N e O. Logo, o item está **CERTO**.

d) M, N e O **não** são múltiplos de 31;

31 é um número primo, assim, só será divisível por 1 e por ele mesmo. Como tal número não aparece entre os fatores primos dos números M, N e O, logo, **não** são múltiplos de 31. Logo, o item está **CERTO**.

e) O máximo divisor comum de M, N e O é $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$.

Observe que nada foi mencionado a respeito dos valores dos expoentes dos respectivos fatores primos (2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17) dos números M, N e O, portanto, como o **MDC** entre esses fatores primos requer os menores fatores primos comuns entre esses três números, portanto nada podemos concluir. Logo, este item está **ERRADO**.

Gabarito: E

2. (NCE) A soma de três múltiplos consecutivos de 7 é 210. A soma dos valores absolutos dos algarismos do maior desses números é:

a) 7.
b) 9.
c) 11.
d) 14.
e) 15.

Resolução:

Para que um conjunto formado por números naturais seja múltiplo de 7, seus valores devem ser de tal modo que formem uma sequência numérica crescente com um intervalo de valor igual a 7, entre dois números consecutivos, por exemplo: 7, 14, 21, 28... Observem que essa sequência crescente aumenta em 7 unidades, o que caracteriza um subconjunto dos múltiplos do número 7.

Assim, para escrevermos três valores aleatórios múltiplos de 7, e considerando o primeiro múltiplo como sendo "n", teremos:

$n;\ n + 7;\ n + 14$

Se a soma desses três totaliza 210, então:

$(n) + (n + 7) + (n + 14) = 210 \quad \Rightarrow \quad 3n = 210 - 21$

$$3n = 189 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{189}{3} \quad \Rightarrow \quad n = 63$$

Portanto, os números serão:

1º) 63

2º) 63 + 7 = 70

3º) 63 + 14 = 77

A soma dos valores absolutos dos algarismos do maior desses números é:

O maior dos números será o 77 $\Rightarrow$ 7 + 7 = 14

Gabarito: D

3. **(FCC) Um patrulheiro florestal visita o manancial A a cada 20 dias, o manancial B a cada 35 dias e o manancial C a cada 40 dias. Hoje ele visitou os três. Ele visitará os três novamente no mesmo dia, daqui a:**

a) 2 meses.
b) 3 meses e 5 dias.
c) 4 meses.
d) 5 meses e 5 dias.
e) 9 meses e 10 dias.

Resolução:

Observe que o patrulheiro florestal visita o manancial **A a cada 20 dias**, ou seja, visita em intervalos de tempo (em dias) **múltiplos de 20**. Veja a tabela a seguir:

Visitas	1ª visita	2ª visita	3ª visita	4ª visita	5ª visita	6ª visita	......
Dias	20º dia	40º dia	60º dia	80º dia	100º dia	120º dia	......

O manancial **B**, **a cada 35 dias**, ou seja, visita em intervalos de tempo (em dias) **múltiplos de 35**. Veja a projeção na tabela a seguir:

Visitas	1ª visita	2ª visita	3ª visita	4ª visita	5ª visita	6ª visita	......
Dias	35º dia	70º dia	105º dia	140º dia	175º dia	210º dia	......

E o manancial **C, a cada 40 dias**, ou seja, visita em intervalos de tempo (em dias) **múltiplos de 40**. Veja a projeção na tabela a seguir:

Visitas	1ª visita	2ª visita	3ª visita	4ª visita	5ª visita	6ª visita	......
Dias	40º dia	80º dia	120º dia	160º dia	200º dia	240º dia	......

Para que, no futuro próximo, ocorra uma visita aos três mananciais novamente, o ***múltiplo*** entre os dias visitados deve ser ***comum***, portanto, basta determinar o

mínimo múltiplo comum entre 20, 35 e 40, para determinarmos em que dia ocorrerá a visita aos três mananciais.

Obs.: O termo *mínimo* requer o *primeiro* dos *múltiplos comuns*, ou seja, o primeiro encontro, novamente, aos três mananciais.

Fazendo o *mmc*(20; 35; 40):

$$\begin{array}{ccccc|l} 20 & , & 35 & , & 40 & 2 \\ 10 & , & 35 & , & 20 & 2 \\ 5 & , & 35 & , & 10 & 2 \\ 5 & , & 35 & , & 5 & 5 \\ 1 & , & 7 & , & 1 & 7 \\ \hline 1 & , & 1 & , & 1 & mmc(20, 35, 40) = 2^3 \times 5 \times 7 = 280 \end{array}$$

Portanto, o novo encontro aos três mananciais ocorrerá no 280º dia, ou simplesmente, 9 meses e 10 dias (considerando 1 mês igual a 30 dias).

Gabarito: E

Obs.: Utilizaremos o conceito de *mmc* em problemas que envolvam "***encontros futuros***".

4. (FCC) Um mecânico faz revisão nos freios dos veículos dos três diretores de uma empresa, um a cada 10 dias, outro a cada 12 dias e o terceiro a cada 15 dias, inclusive aos sábados, domingos e feriados. Se hoje ele fizer a revisão nos três veículos, daqui a quantos dias será a próxima vez em que fará a revisão dos três em um mesmo dia?

a) 37.
b) 40.
c) 45.
d) 48.
e) 60.

Resolução:

A revisão nos três carros distintos é feita de tal maneira que ocorre em dias múltiplos de 10, 12 e 15. Assim, o primeiro carro é revisado nos intervalos de dias múltiplos de 10, o segundo carro em intervalos de dias múltiplos de 12 e o terceiro carro em intervalos de dias múltiplos de 15. Com esses dados podemos montar a seguinte tabela de projeção de revisão.

Carros	1ª revisão	2ª revisão	3ª revisão	4ª revisão	5ª revisão	6ª revisão	......
1º carro	10º dia	20º dia	30º dia	40º dia	50º dia	**60º dia**	......
2º carro	12º dia	24º dia	36º dia	48º dia	**60º dia**	72º dia	......
3º carro	15º dia	30º dia	45º dia	**60º dia**	75º dia	90º dia	......

Observe que no sexagésimo dia (60º dia) todos os três carros serão revisados simultaneamente ou, simplesmente, quando o mínimo múltiplo comum entre os dias de revisão for igual, que pode ser demonstrado pelo cálculo do *mmc*(10 ; 12 ; 15).

$$\begin{array}{ccccc|l} 10 & , & 12 & , & 15 & 2 \\ 5 & , & 6 & , & 15 & 2 \\ 5 & , & 3 & , & 15 & 3 \\ 5 & , & 1 & , & 5 & 5 \\ \hline 1 & , & 1 & , & 1 & \text{mmm}(10; 12; 15) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60 \end{array}$$

Gabarito: E

5. (FCC) Dois vigilantes de um prédio público fazem ronda, um em cada bloco, respectivamente em 10 e 12 minutos. Se ambos iniciaram a ronda às 19 horas, darão inicio à nova ronda, simultaneamente, às:

a) 19 h 30.
b) 20 h.
c) 20 h 30.
d) 21 h.
e) 21 h 30.

Resolução:

As rondas dos dois vigilantes são feitas em múltiplos de 10 min e de 12 min e estão expressas na tabela a seguir:

Rondas do 1º vigilante	19h10min	19h20min	19h30min	19h40min	19 h 50 min	**20h**	20h10min
Rondas do 2º vigilante	19h12min	19h24min	19h36min	19h48min	**20h**	20h12min	20h24min

Podemos observar pela tabela anterior que, se começarem juntos as rondas às 19 horas, voltarão a se encontrar às 20h, quando os múltiplos de seus tempos de rondas serão comuns.

Gabarito: B

6. (FCC) Em uma secção, a cada 12 dias, faz-se uma arrumação nos armários e, a cada 15 dias, é feita uma limpeza nos equipamentos, inclusive aos sábados, domingos e feriados. Essas duas tarefas coincidiram no dia 10 de janeiro de 2003. A coincidência seguinte ocorreu no dia:

a) 15 de fevereiro.
b) 20 de fevereiro.
c) 01 de março.
d) 11 de março.
e) 21 de março.

Resolução:

Se a arrumação é feita a cada 12 dias, então, a partir do dia 10 de janeiro, de 12 em 12 dias serão feitas as arrumações nos armários, ou seja, sempre em múltiplos de 12 dias. Se a cada 15 dias é feita limpeza nos equipamentos, então de 15 em 15 dias, a partir do dia 10 janeiro, ocorrerão tais limpezas, assim, as obrigações ocorrerão novamente quando os múltiplos desses dois dias forem comuns, portanto, determinaremos o mínimo múltiplo comum desses dois dias, ou simplesmente, $mmc(12; 15)$:

$$\begin{array}{rcr|l} 12 & , & 15 & 2 \\ 6 & , & 15 & 2 \\ 3 & , & 15 & 3 \\ 1 & , & 5 & 5 \\ \hline 1 & , & 1 & mmc(12; 15) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60 \end{array}$$

Lembrando que, 2003 não é ano bissexto, portanto, o mês de fevereiro tem apenas 28 dias. Logo, contando 60 dias a partir do dia 11 de janeiro, no dia 11 de março ocorrerá nova coincidência dessas duas tarefas.

Gabarito: D

7. **(PMB) Um paciente toma duas medicações, uma de 6 em 6 horas e outra de 4 em 4 horas. Ele começou a tomar essa medicação às 6 horas do dia 12/01, tomando os dois remédios ao mesmo tempo. Então, ele voltará a tomar os dois remédios juntos às:**
a) 12h.
b) 14h.
c) 18h.
d) 20h.
e) 22h.

Resolução:

Os medicamentos são ministrados em múltiplos de 6 horas e de 4 horas. Se a ocorrência dos dois medicamentos ocorreu às 6 horas, voltarão a ser medicados no próximo ***múltiplo comum*** entre esses dois números, assim, teremos para próxima ocorrência um tempo equivalente ao *mmc*(4; 12):

$$\begin{array}{rcr|l} 4 & , & 6 & 2 \\ 2 & , & 3 & 2 \\ 1 & , & 3 & 3 \\ \cline{4-4} 1 & , & 1 & mmc(4; 6) = 2^2 \times 3 = 12 \end{array}$$

Logo, após 12 horas, a partir das 6 horas do dia 12/01 os medicamentos serão ministrados novamente, ou seja, às 6 + 12 = 18 horas desse mesmo dia.

Gabarito: C

8. **(Vunesp) Dois sinais de trânsito fecham ao mesmo tempo, mas enquanto um deles permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto, o outro permanece os mesmos 10 segundos fechado, porém fica 50 segundos aberto. O número mínimo de minutos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez, é:**
a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 7.

Resolução:

O intervalo de tempo entre dois fechamentos consecutivos para cada sinal será de: 10 + 40 = 50 segundos e 10 + 50 = 60 segundos.

Sendo assim, ocorrerá uma coincidência de ambos fecharem juntos, quando os ***múltiplos*** de seus intervalos coincidirem, ou seja, quando ***forem comuns***. Tal coincidência poderá ser determinada pelo *mmc*(50; 60):

$$\begin{array}{rcr|l} 50 & ; & 60 & 2 \\ 25 & ; & 30 & 2 \\ 25 & ; & 15 & 3 \\ 25 & ; & 5 & 5 \\ 5 & ; & 1 & 5 \\ \cline{4-4} 1 & ; & 1 & mmc(4; 6) = 2^2 \times 3 \times 5^2 = 300 \end{array}$$

Portanto, em 300 segundos os sinais voltarão a fechar simultaneamente ou, em minutos, 300 ÷ 60 = 5 minutos.

Gabarito: C

9. (FCC) Numa frota de veículos, certo tipo de manutenção é feito no veículo A a cada 3 dias, no veículo B a cada 4 dias e no veículo C a cada 6 dias, inclusive aos sábados, domingos e feriados. Se no dia 2 de junho de 2003 foi feita a manutenção dos três veículos, a próxima vez em que a manutenção dos três ocorreu no mesmo dia foi em:

a) 05/06/03.
b) 06/06/03.
c) 08/06/03.
d) 14/06/03.
e) 16/06/03.

Resolução:

As manutenções são feitas, a partir do dia 2 de junho, em múltiplos de 3, 4 e 6 dias. Portanto, as manutenções coincidirão novamente, quando os múltiplos forem comuns entre esses dias, logo, determinaremos tal coincidência pelo o $mmc(3; 4; 6)$:

$$\begin{array}{ccccc|l} 3 & ; & 4 & ; & 6 & 2 \\ 3 & ; & 2 & ; & 3 & 2 \\ 3 & ; & 1 & ; & 3 & 3 \\ \hline 1 & ; & 1 & ; & 1 & mmc(3; 4; 6) = 2^2 \times 3 = 12 \end{array}$$

Contados a partir do dia 2 de junho, daqui a 12 dias os três tipos manutenções serão feitas ao mesmo tempo novamente. Portanto, esse fato ocorrerá no dia 14 de junho desse mesmo mês.

Gabarito: D

10. (FCC) Sistematicamente, Fábio e Cíntia vão a um restaurante: Fábio a cada 15 dias e Cíntia a cada 18 dias. Se em 10 de outubro de 2004 ambos estiveram em tal restaurante, outro provável encontro dos dois nesse restaurante ocorrerá em:

a) 9 de dezembro de 2004.
b) 10 de dezembro de 2004.
c) 8 de janeiro de 2005.
d) 9 de janeiro de 2005.
e) 10 de janeiro de 2005.

Resolução:

Para esse "encontro futuro", dar-se-á pelo ***mínimo múltiplo comum*** de seus tempos.

Obs.: Lembramos que, de um modo prático, utilizaremos o conceito de *mmc* em problemas que envolvam "***encontros futuros***".

$$\begin{array}{ccc|l} 15 & ; & 18 & 2 \\ 15 & ; & 9 & 3 \\ 5 & ; & 3 & 3 \\ 5 & ; & 1 & 5 \\ \hline 1 & ; & 1 & mmc(15; 18) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90 \end{array}$$

Portanto, contaremos 90 dias após o dia 10 de outubro de 2004 para que Fábio e Cíntia vão a um restaurante e se encontrem. Logo, esse fato ocorrerá em: 8 de janeiro de 2005.

Gabarito: C

11. (NCE) Maria e Ana se encontram de três em três dias, Maria e Joana se encontram de cinco em cinco dias e Maria e Carla se encontram de dez em dez dias. Hoje as quatro amigas se encontraram. A próxima vez que todas irão se encontrar novamente será daqui a:

a) 15 dias.
b) 18 dias.
c) 28 dias.
d) 30 dias.
e) 50 dias.

Resolução:

Mais uma vez utilizaremos o conceito de "***encontros futuros***", já que os encontros ocorrem em múltiplos de 3, 5 e 10. Assim, o próximo encontro será um ***múltiplo comum*** desses intervalos citados.

Logo, calculando o $mmc(3; 5; 10)$:

$$\begin{array}{rcrcr|l} 3 & ; & 5 & ; & 10 & 2 \\ 3 & ; & 5 & ; & 5 & 3 \\ 1 & ; & 5 & ; & 5 & 5 \\ \hline 1 & ; & 1 & ; & 1 & mmc(3; 5; 10) = 2 \times 3 \times 5 = 30 \end{array}$$

Portanto, a partir data do 1º encontro, o próximo se dará daqui a 30 dias.

Gabarito: D

12. (FCC) O cometa Halley é visto da Terra de 76 em 76 anos, tendo sido visto a última vez em 1986. Sabendo-se que em 2002 será realizada uma copa do mundo de futebol, e que esse evento ocorre de quatro em quatro anos, a próxima data prevista para que o cometa Halley seja visto em um ano de realização de uma copa do mundo de futebol será:

a) 2062.
b) 2138.
c) 2214.
d) 2290.
e) 2366.

Resolução:

Se o cometa Halley é visto a cada 76 anos e a copa do mundo é realizada a cada quatro anos, então esses fatos ocorrem em múltiplos de 76 e de 4. Ocorrendo, simultaneamente, em 2002, a próxima ocorrência simultânea ocorrerá em um ano cuja dezena será um número que é múltiplo comum desses valores, ou seja: $mmc(4; 76)$

$$\begin{array}{rcr|l} 4 & ; & 76 & 2 \\ 2 & ; & 38 & 2 \\ 1 & ; & 19 & 19 \\ \hline 1 & ; & 1 & mmc(15; 18) = 2^2 \times 19 = 76 \end{array}$$

Se a última ocorrência registrada foi em 1986, a próxima ocorrência, juntamente com a realização da copa do mundo, será daqui a 76 anos, contado a partir de 1986, ou seja, em 2062.

Gabarito: A

13. (FCC) A verificação do funcionamento de três sistemas de segurança é feita periodicamente: o do tipo A a cada 2 horas e meia, o do tipo B a cada 4 horas e o do tipo C a cada 6 horas, inclusive aos sábados, domingos e feriados. Se, em 15/08/2001, às 10 horas, os três sistemas foram verificados, uma outra coincidência no horário de verificação dos três ocorreu em:

a) 22/08/2001 às 22 horas.
b) 22/08/2001 às 10 horas.
c) 20/08/2001 às 12 horas.
d) 17/08/2001 às 22 horas.
e) 15/08/2001 às 22 horas e 30 minutos.

Resolução:

Transformando em minutos os referidos tempos: 2,5 h (150 minutos); 4 horas (240 minutos) e 6 horas (360 minutos). Se a verificação é periódica, ou seja, ocorre a cada 150 minutos, a cada 240 minutos e a cada 360 minutos, então, uma ocorrência simultânea ocorrerá quando os múltiplos desses tempos forem comuns, portanto, determinando o ***mínimo múltiplo comum*** desses tempos $mmc(150; 240; 360)$, encontraremos o tempo necessário para que se verifique, simultaneamente, os três sistemas de segurança:

$$\begin{array}{rcrcr|l} 150 & ; & 240 & ; & 360 & 2 \\ 75 & ; & 120 & ; & 180 & 2 \\ 75 & ; & 60 & ; & 90 & 2 \\ 75 & ; & 30 & ; & 45 & 2 \\ 75 & ; & 15 & ; & 45 & 3 \\ 25 & ; & 5 & ; & 15 & 3 \\ 25 & ; & 5 & ; & 5 & 5 \\ 5 & ; & 1 & ; & 1 & 5 \\ \cline{6-6} 1 & ; & 1 & ; & 1 & mmc(150; 240; 360) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2 = 3.600 \end{array}$$

Transformando, novamente, em horas, teremos: 3.600 ÷ 60 = 60 horas. Em dias (considerando 1 dia = 24 horas), teremos:

60 horas = 2 dias e 12 horas.

Adicionando os 2 dias e 12 horas ao dia 15/08/2001 às 10 horas, a próxima verificação ocorrerá em: 17/08/2001 às 22 horas.

Gabarito: D

14. (FCC) Um médico receitou dois remédios a um paciente: um para ser tomado a cada 12 horas e outro a cada 15 horas. Se às 14 horas do dia 10/10/2000 o paciente tomou ambos os remédios, ele voltou a tomá-los juntos novamente às:

a) 17 horas do dia 11/10/2000.
b) 14 horas do dia 12/10/2000.
c) 18 horas do dia 12/10/2000.
d) 2 horas do dia 13/10/2000.
e) 6 horas do dia 13/10/2000.

Resolução:

A próxima vez que o paciente tomará, ao mesmo tempo, os dois medicamentos será quando os ***múltiplos*** dos intervalos de tempos forem ***comuns***, ou seja, no intervalo de tempo representado pelo $mmc(12; 15)$:

$$\begin{array}{rcr|l} 12 & ; & 15 & 2 \\ 6 & ; & 15 & 2 \\ 3 & ; & 15 & 3 \\ 1 & ; & 5 & 5 \\ \cline{4-4} 1 & ; & 1 & mmc(12; 15) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60 \end{array}$$

Portanto, contadas 60 horas (ou 2 dias e 12 horas) a partir das 14 horas do dia 10/10/2000, a próxima medicação será às: 2 horas do dia 13/10/2000.

Gabarito: D

15. (EEAr) Se o *mmc*(*x*; 45) = 360 e o MDC(*x*; 45) = 15, então o valor de *x* é:

a) 60.
b) 120.
c) 80.
d) 150.
e) 75.

Resolução:

Sabendo-se que o $mmc(A; B) \times MDC(A; B) = A \times B$, então, sendo o $mmc(x; 45) = 360$ e o $MDC(x; 45) = 15$, teremos para o valor de "x":

$$mmc(x; 45) \times MDC(x; 45) = x \times 45 \Rightarrow 360 \times 15 = x \times 45 \Rightarrow x = \frac{360 \times 15}{45} \Rightarrow x = 120$$

Gabarito: B

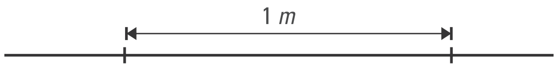
Capítulo 7

Sistema de unidades de medidas

7.1. Sistemas decimais

São aqueles em que os ***múltiplos*** e ***submúltiplos*** da unidade padrão variam de 10 em 10 unidades.

7.1.1. Unidades de comprimento



As unidades de comprimento são baseadas no ***metro*** (***m***), unidade principal, seus *múltiplos* e *submúltiplos*.

Os ***múltiplos*** formam-se da unidade principal, precedida dos prefixos gregos ***deca*** (dez), ***hecto*** (cem) e ***quilo*** (mil).

Os ***submúltiplos*** formam-se da unidade principal, precedida dos prefixos gregos **deci** (décimo), **centi** (centésimo) e **mili** (milésimo).

Assim, temos que:

m	***dm***	***cm***	***mm***
1			
0,	1		
0,	0	1	
0,	0	0	1

km	***hm***	***dam***	***m***
			1
		1	0
	1	0	0
1	0	0	0

Obs.: Dado um número qualquer representando certo comprimento, em uma das unidades, para transformá-los em uma unidade imediatamente ***superior***, basta deslocar a "vírgula" ***uma*** casa para a esquerda. Para transformá-lo na unidade imediatamente ***inferior***, basta deslocar a "vírgula" ***uma*** casa para a direita.

Exemplos:

1) Transformar 3,25 m (metros) em hm (hectômetros).

km	*hm*		*dam*	*m*		*dm*	*cm*	*mm*
				3	,	2	5	
	0	,	0	3		2	5	

Logo, 3,25 m equivalem a 0,0325 hm.

2) Transformar 0,128 km (quilômetros) em dm (decímetros)

km		*hm*	*dam*	*m*	*dm*	*cm*	*mm*
0	,	1	2	8			
1		2	8	0	0		

Logo, 0,128 km equivale a 12800 dm

7.1.2. Unidades de capacidade

As unidades de capacidade são baseadas no ***litro*** (*l*), unidade principal.

Os ***múltiplos*** formam-se da unidade principal, precedida dos prefixos gregos ***deca*** (dez), ***hecto*** (cem) e ***quilo*** (mil).

Os ***submúltiplos*** formam-se da unidade principal, precedida dos prefixos gregos ***deci*** (décimo), ***centi*** (centésimo) e ***mili*** (milésimo).

Assim, temos que:

l	***dl***	***cl***	***ml***
1			
0,	1		
0,	0	1	
0,	0	0	1

kl	***hl***	***dal***	***l***
			1
		1	0
	1	0	0
1	0	0	0

Observações:

- Para transformação de unidades, o procedimento é análogo ao de mudança de unidades de medidas de comprimento.
- O litro é definido como unidade de medida de volume, igual ao volume de um quilograma de água, sob pressão de 760 mm de mercúrio, na temperatura de 3,98º C. Na prática, esse volume é equivalente a 1 dm^3.

  1 litro ≈ 1 dm^3

7.1.3. Unidades de massa

A ***massa*** de um corpo é definida como sendo a ***quantidade de matéria*** de que é feito. A ***massa*** de um corpo qualquer é ***invariável*** ao longo da superfície terrestre.

A unidade principal, o ***grama***, é definido como sendo a ***quantidade de água destilada ocupando o volume de 1 cm³, na temperatura de quatro graus centígrados sob pressão atmosférica normal***.

Os ***submúltiplos*** e ***múltiplos*** são:

g	*dg*	*cg*	*mg*
1			
0,	1		
0,	0	1	
0,	0	0	1

kg	*hg*	*dag*	*g*
			1
		1	0
	1	0	0
1	0	0	0

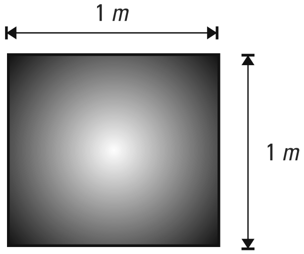
Obs.: Para transformação de unidades, o procedimento é análogo ao de mudança de unidades de medidas de comprimento.

7.2. Sistemas centesimais

São aqueles em que os ***múltiplos*** e ***submúltiplos*** da unidade padrão variam de 100 em 100 unidades.

7.2.1. Unidades de área ou de superfície

As unidades de área são quadrados cujos lados são tomados como unidade de comprimento. A unidade principal de ***área*** é o ***metro quadrado***, cujo lado mede um metro de comprimento.



Onde: $1\ m^2 = (1\ m).(1\ m)$

As unidades de área são baseadas no metro quadrado, seus múltiplos e submúltiplos são:

Os ***múltiplos***:

- $1\ km^2 = (1000\ m).(1000\ m) = (1000)^2\ m^2$
- $1\ hm^2 = (100\ m).(100\ m) = (100)^2\ m^2$
- $1\ dam^2 = (10\ m).(10\ m) = (10)^2\ m^2$

Os ***submúltiplos***:

- $1\ dm^2 = (0{,}1\ m).(0{,}1\ m) = (0{,}1)^2\ m^2$
- $1\ cm^2 = (0{,}01\ m).(0{,}01\ m) = (0{,}01)^2\ m^2$
- $1\ mm^2 = (0{,}001\ m).(0{,}001\ m) = (0{,}001)^2\ m^2$

Assim, temos que:

m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
	1						
	0,	0	1				
	0,	0	0	0	1		
	0,	0	0	0	0	0	1

km^2		hm^2		dam^2		m^2	
							1
					1	0	0
			1	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0

Obs.: Dado um número qualquer representando uma área, em uma das unidades, para transformá-los em uma unidade imediatamente ***superior***, basta deslocar a "vírgula" ***duas*** casa para a esquerda. Para transformá-lo na unidade imediatamente ***inferior***, basta deslocar a "vírgula" ***duas*** casas para a direita.

Exemplos:

1) Transformar 78,93 dm^2 (*decímetro ao quadrado*) em mm^2 (*milímetro ao quadrado*).

km²	hm²	dam²	m²	dm²		cm²	mm²
				78	,	93	
				78		93	00

Logo, 78,93 dm^2 equivalem a 789300 mm^2.

2) Transformar 50 dam^2 (*decâmetro ao quadrado*) em km^2 (*quilômetro ao quadrado*).

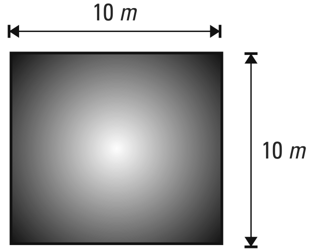
km²	*hm²*	*dam²*	*m²*	*dm²*	*cm²*	*mm²*
		50				
0,0	00	5				

Logo, 50 dam^2 equivalem a 0,0005 km^2 (ou 5.10^{-4} km^2).

7.2.2. Unidades agrárias

São unidades de medidas de áreas utilizadas para avaliar superfícies de terras cultivadas, campos, matas etc.

A unidade é o "***are***". O *múltiplo* do ***are*** é o ***hectare*** (100 vezes o ***are***) e o ***submúltiplo*** é o ***centiare*** (0,01 vezes o ***are***).

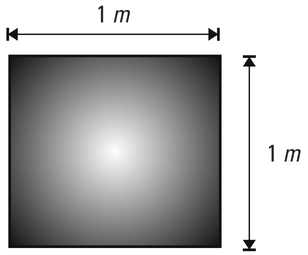


1 *are* = (10 *m*). (10 *m*) = 100 m²

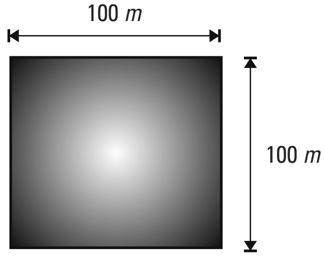
Observações:

- *hectare*: 1 $ha = 100\ a$
- *are*: 1 $a = 100\ m^2$
- *centiare*: 1 $ca = 0{,}01\ a = 1\ m^2$

Representações em ***metros***:



$1\ ca = (1\ m).(1\ m) = 1\ m^2$
(*submúltiplo do are*)



$1\ ha = (100\ m).(100\ m) = 10.000\ m^2$
(*múltiplo do are*)

Os lavradores e agricultores brasileiros medem suas terras em unidade diferente: o ***alqueire***. No entanto, vigoram duas espécies de ***alqueires***:

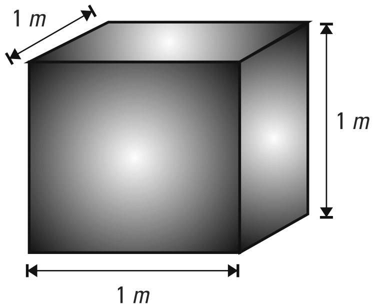
- 1 ***alqueire paulista*** é igual a **24.200 m**^{2}
- 1 ***alqueire mineiro*** é igual a **48.400 m**^{2}

7.3. Sistema milesimal

São aqueles em que os ***múltiplos*** e ***submúltiplos*** da unidade padrão variam de 1.000 em 1.000 unidades.

As unidades de ***volume*** são cubos cujas arestas são tomadas como unidades de comprimento.

A unidade principal de ***volume*** é o ***metro cúbico***, ou seja, o volume de um cubo cuja aresta mede um metro de comprimento.



$1\ m^3 = (1\ m).(1\ m).(1m)$

As unidades de volume são baseadas no ***metro cúbico***, seus ***múltiplos*** e ***submúltiplos***.

Os ***múltiplos***:

- $1\ km^3 = (1.000\ m).(1.000\ m).(1.000\ m) = (1.000)^3\ m^3$

- 1 $hm^3 = (100\ m).(100\ m).(100\ m) = (100)^3\ m^3$
- 1 $dam^3 = (10\ m).(10\ m).(10\ m) = (10)^3\ m^3$

Os ***submúltiplos***:

- 1 $dm^3 = (0{,}1\ m).(0{,}1\ m).(0{,}1\ m) = (0{,}1)^3\ m^3$
- 1 $cm^3 = (0{,}01\ m).(0{,}01\ m).(0{,}01\ m) = (0{,}01)^3\ m^3$
- 1 $mm^3 = (0{,}001\ m).(0{,}001\ m).(0{,}001\ m) = (0{,}001)^3\ m^3$

Assim, temos que:

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
		1									
		0,	0	0	1						
		0,	0	0	0	0	0	1			
		0,	0	0	0	0	0	0	0	0	1

km^3			hm^3			dam^3			m^3		
											1
								1	0	0	0
					1	0	0	0	0	0	0
		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Obs.: Dado um número qualquer representando um volume, em uma das unidades, para transformá-lo em uma unidade imediatamente ***superior***, basta deslocar a "vírgula" ***três*** casa para esquerda. Para transformá-lo na unidade imediatamente ***inferior***, basta deslocar a "vírgula" ***três*** casas para direita.

Exemplos:

Transformar 2 km^3 (quilômetros cúbicos) em cm^3 (centímetro cúbico)

km³ hm³ dam³ m³ dm³ cm³ mm³

2

2 000 000 000 000 000

Logo, 2 km^3 equivalem a 2.000.000.000.000.000 cm^3 (ou 2.10^{15} cm^3)

7.4. Sistema sexagesimal

São aqueles em que os ***múltiplos*** da unidade padrão, o ***segundo***, variam de 60 em 60 unidades.

7.4.1. Unidades de ângulo

Só possuem ***submúltiplos***: o ***minuto angular* 1'** e o ***segundo angular* 1"**.

Onde:

$1^o = 60'$

$1' = 60''$

$1^o = 60.60 = 3.600''$

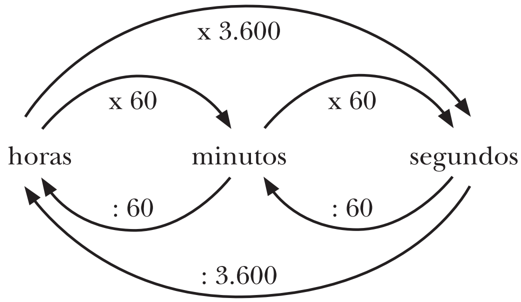
7.4.2. Unidades de tempo

Só possuem ***múltiplos***.

Suas principais relações de conversões são:

- 1 minuto = 60 segundos
- 1 hora = 60 minutos
- 1 hora = 3.600 segundos
- 1 dia = 24 horas
- 1 dia = 1.440 minutos
- 1 dia = 86.400 segundos
- 1 semana = 7 dias
- 1 quinzena = 15 dias
- 1 mês comercial = 30 dias
- 1 mês civil = do calendário
- 1 bimestre = 2 meses
- 1 trimestre = 3 meses
- 1 quadrimestre = 4 meses
- 1 semestre = 6 meses
- 1 ano = 12 meses
- 1 biênio = 2 anos
- 1 triênio = 3 anos
- 1 quadriênio = 4 anos
- 1 quinquênio = 1 lustro = 5 anos
- 1 década = 10 anos
- 1 século = 100 anos
- 1 milênio = 1.000 anos

Lembre-se de que:



Obs.: Um mês não possui quatro semanas já que quatro semanas equivalem a 28 dias.

7.5. Sistema Monetário Brasileiro

A moeda corrente brasileira é o ***Real***, dividido nos seguintes valores:

Cédulas de:

- 1 Real
- 5 Reais
- 10 Reais
- 20 Reais
- 50 Reais
- 100 Reais

Moedas de:

- 1 centavo que equivale a $\frac{1}{100}$ do Real;
- 5 centavos que equivale a $\frac{1}{20}$ do Real;
- 10 centavos que equivale a $\frac{1}{10}$ do Real;
- 25 centavos que equivale a $\frac{1}{4}$ do Real;
- 50 centavos que equivale a $\frac{1}{2}$ do Real;
- 1 Real que equivale ao próprio Real.

Exercícios resolvidos

1. **(Cespe/UnB) Considere que 6,2 kg de castanhas-do-pará serão acondicionados em embalagens com capacidade para 25 g. Se, em cada embalagem, for colocado o máximo possível de castanhas, então serão necessárias:**

a) 246 embalagens.
b) 247 embalagens.
c) 248 embalagens.
d) 249 embalagens.
e) 250 embalagens.

Resolução:

Inicialmente, transformaremos 6,2 kg em gramas.

	kg	*hg*	*dag*	*g*
em ***quilogramas***	6,	2		
em ***gramas***	6	2	0	0

Portanto, serão necessárias $\frac{6200\text{ g}}{25\text{ g}} = 248$ embalagens.

Gabarito: C

2. **(Consulplan) Uma tartaruga percorreu, em um dia, 50,35 m. No dia seguinte, percorreu mais 0,57 km e, no terceiro dia, mais 18.205 cm. Podemos afirmar que essa tartaruga percorreu nos três dias consecutivos, uma distância, em metros, de:**

a) 232,97.
b) 289,4.
c) 542,5.
d) 708,4.
e) 802,4.

Resolução:

Representação das distâncias percorridas:

	km	*hm*	*dam*	*m*	*dm*	*cm*	*mm*
1º dia = 50,35 m			5	0,	3	5	
2º dia = 0,57 km	0,	5	7				
3º dia = 18.205 cm		1	8	2	0	5	

Transformando 0,57 km e 18.205 cm, em metros:

	km	*hm*	*dam*	*m*	*dm*	*cm*	*mm*
1º dia = 50,35 m			5	0,	3	5	
2º dia = 0,57 km		5	7	0			
3º dia = 18.205 cm		1	8	2,	0	5	
total		8	0	2,	4	0	

Total percorrido: 802, 40 m

Gabarito:E

3. **(FCC) Se uma fazenda de área igual a 1,04 km² for vendida por R$46.800.000, então o preço de cada metro quadrado dessa fazenda custará, em média:**
a) R$4,50.
b) R$45,00.
c) R$450,00.
d) R$4.500,00.
e) R$45.000,00.

Resolução:

Transformando 1,04 km^2, em metros ao quadrado (m^2):

km²	*hm²*	*Dam²*	*m²*	*dm²*	*cm²*	*mm²*
1,	04					
1	04	00	00			

1,04 km^2 = 1.040.000 m²

Se a fazenda foi vendida por R$46.800.000,00, então, o preço de cada metro ao quadrado (R$/$m^2$) foi de:

$$\frac{\text{R\$ } 46.800.000{,}00}{1.040.000 \text{ m}^2} = \text{R\$ } 45{,}00 / \text{m}^2$$

Gabarito: B

4. **(Cespe/UnB) Considere que o guarda portuário Pedro substituiu Carlos, com problemas de saúde, durante 12 dias e, em cada dia, durante 2 horas e 25 minutos. Nessa situação, para que Carlos retribua a Pedro o mesmo espaço de tempo trabalhado, deve substituí-lo durante quantas horas?**
a) 28 h.
b) 29 h.
c) 30 h.
d) 31 h.
e) 32 h.

Resolução:

Carlos retribuirá a Pedro o mesmo espaço de tempo trabalhado equivalente a:

$$12 \text{ dias} \times (2 \text{ h } 25 \text{ min}) = 24 \text{ h} + 300 \text{ min} = 24 \text{ h} + \frac{300}{60} \text{ h} = 24 \text{ h} + 5 \text{ h} = 29 \text{ h}$$

Gabarito: B

5. (Cesgranrio) Marcelo precisava realizar uma tarefa em três dias, trabalhando seis horas por dia. Entretanto, no primeiro dia ele trabalhou 5/6 do tempo previsto e, no segundo dia, 11/12. Quantas horas a mais Marcelo terá de trabalhar no terceiro dia para que a tarefa seja concluída dentro do prazo?

a) 1 hora e 18 minutos.
b) 1 hora e 30 minutos.
c) 3 horas e 12 minutos.
d) 4 horas e 18 minutos.
e) 7 horas e 30 minutos.

Resolução:

No 1º dia, trabalhou: $\frac{5}{\cancel{6}} \times \cancel{6}$ horas $= 5$ horas (ficou "devendo" 1 hora)

No 2º dia, trabalhou: $\frac{11}{\cancel{12}} \times \cancel{6}$ horas $= \frac{11}{2} = 5{,}5$ horas (ficou "devendo" 0,5 hora ou 30 minutos)

No 3º dia, trabalhará: 6 horas + 1 hora e 30 minutos.

Portanto, Marcelo terá de trabalhar no terceiro dia, 1 hora e 30 minutos a mais do que planejado.

Gabarito: B

6. (IBGE) Em certas regiões rurais no Brasil, áreas são medidas em alqueires mineiros. Um alqueire mineiro é a área de um terreno quadrado de 220 metros de lado. Qual é a área, em quilômetros quadrados, de uma fazenda com 30 alqueires mineiros?

a) 1,452.
b) 14,52.
c) 145,2.
d) 1452.
e) 14520.

Resolução:

Se 1 alqueire mineiro = 220 metros × 220 metros = 48.400 m^2

Então, 30 alqueires mineiro será igual a = 30 × 48.400 m^2 = 1.452.000 m^2

Transformando 1.452.000 m^2 em km^2:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1	45	20	00			
1,	45	20	00			

1.452.000 m^2 = 1,452 km^2

Gabarito: A

7. (FCC) Certo dia, Jairo comentou com seu colega Luiz: "Hoje eu trabalhei o equivalente a $\frac{4}{9}$ do dia, enquanto você trabalhou apenas o equivalente a $\frac{7}{20}$ do dia."

Com base nessa informação, quanto tempo Jairo trabalhou a mais que Luiz?

a) 1 hora e 50 minutos.
b) 2 horas e 4 minutos.
c) 2 horas e 48 minutos.
d) 3 horas e 14 minutos.
e) 3 horas e 36 minutos.

Resolução:

Jairo: trabalhou o equivalente a $\frac{4}{9}$ do dia

$$\frac{4}{9}\times 24 \text{ horas} = \frac{4}{3}\times 8 \text{ horas} = \frac{32}{3} \text{ horas}$$

Luiz: trabalhou o equivalente a $\frac{7}{20}$ do dia

$$\frac{7}{20}\times 24 \text{ horas} = \frac{7}{5}\times 6 \text{ horas} = \frac{42}{5} \text{ horas}$$

O tempo Jairo trabalhou a mais que Luiz, foi de:

$$\frac{32}{3} - \frac{42}{5} = \frac{160-126}{15} = \frac{34}{15} = 2 \text{ horas } 4 \text{ minutos}$$

Gabarito: B

8. (FCC) Uma das caixas de água de um prédio mede 1,5 m de comprimento, 8 dm de largura e 120 cm de altura. O número de litros de água que ela comporta é:

a) 129,5.
b) 144.
c) 1 295.
d) 1 440.
e) 2 880.

Resolução:

Transformando as arestas que representam a largura e a altura, em decímetros, teremos:

comprimento = 1,5 m = 15 dm
largura = 8 dm
altura = 120 cm = 12 dm

O volume da referida caixa será dado por: V = comprimento × largura × altura

V_c = 15 dm × 8 dm × 12 dm = 1.440 dm^3

Sendo a equivalência de: 1 litro ≈ 1 dm^3

1.440 dm^3 = 1.440 *l*

Gabarito: D

9. (NCE) É correto afirmar que uma hora equivale a:

a) $\frac{1}{160}$ de uma semana;

b) $\frac{1}{712}$ de um mês de 30 dias;

c) $\frac{1}{24}$ de um dia;

d) $\frac{1}{8.700}$ de um ano de 365 dias;

e) nenhuma alternativa é correta.

Resolução:

Se um dia equivale a 24 horas, então uma hora equivale a $\frac{1}{24}$ de um dia.

Gabarito: C

10. (FCC) Certo dia, um Auxiliar Judiciário gastou 11.880 segundos para arquivar uma determinada quantidade de processos. Se ele iniciou essa tarefa às 12 horas e 45 minutos e trabalhou ininterruptamente até completá-la, então ele a concluiu às:

a) 15 horas e 13 minutos.
b) 15 horas e 24 minutos.
c) 16 horas e 3 minutos.
d) 16 horas e 26 minutos.
e) 16 horas e 42 minutos.

Resolução:

11.880 segundos equivalem a = 11.880 : 60 = 198 minutos.

Transformando-se 198 minutos em horas, resulta em:

$$\begin{array}{r|l} 198 & 60 \\ \hline -180 & 3\text{ h} \\ \hline 18\text{ min} & \end{array}$$

3 horas e 18 minutos

Se ele iniciou essa tarefa às 12 horas e 45 minutos e trabalhou ininterruptamente até completá-la, então ele a concluiu às:

$$\begin{array}{r} 12\text{ horas } 45\text{ minutos} \\ +\ \ 3\text{ horas } 18\text{ minutos} \\ \hline 15\text{ horas } 63\text{ minutos} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 1\text{ hora} \xleftarrow{60\text{ min} - 1\text{ h}} & \\ 15\text{ horas} & 3\text{ minutos} \\ \hline 16\text{ horas} & 3\text{ minutos} \end{array}$$

Gabarito: C

11. (Cesgranrio) Um incêndio provocado por uma queimada começou às 2 h 15 min e só foi controlado 40 minutos depois. A que horas acabou o incêndio?

a) 2 h 25 min.
b) 2 h 30 min.
c) 2 h 40 min.
d) 2 h 45 min.
e) 2 h 55 min.

Resolução:

Somando-se 40 minutos a 2 h e 15 minutos:

2 h e 15 min + 40 min = 2 h e 55 min

Gabarito: E

12. (Cesgranrio) Um decilitro é equivalente a:

a) $1 cm^3$.
b) $10 cm^3$.
c) $10^2 cm^3$.
d) $1 dm^3$.
e) $10 dm^3$.

Resolução:

Transpondo para a tabela de conversão:

m^3			dm^3			cm^3			mm^3			
					1							$1 dm^3$
					1	0	0	0				$1 dm^3 = 1.000 cm^3 = 10^3 cm^3$
					1	0	0	0	0	0	0	$1 dm^3 = 1.000.000 mm^3 = 10^6 mm^3$

Gabarito: C

13. (PMB) Assinale a alternativa correta.

a) 350 m = 35000 mm.
b) $6,4 dm^3 = 64 cm^3$.
c) $8,7 dam^2 = 870 m^2$.
d) 137,8 g = 1,378 kg.
e) 234 kg = 23400 g.

Resolução:

Analisando alternativa por alternativa:

a) 350 m = 35000 mm

km	*hm*	*dam*	*m*	*dm*	*cm*	*mm*
	3	5	0			
	3	5	0	0	0	0

350 m = 350.000 mm (alternativa incorreta)

b) 6,4 dm^3 = 64 cm^3

m^3			*dm^3*			*cm^3*			*mm^3*		
					6,	4					
					6	4	0	0			

6,4 dm^3 = 6.400 cm^3 (alternativa incorreta)

c) 8,7 dam^2 = 870 m^2

km^2		*hm^2*		*dam^2*		*m^2*		*dm^2*		*cm^2*		*mm^2*	
					8,	7							
					8	7	0						

8,7 dam^2 = 870 m^2 (alternativa correta)

d) 137,8 g = 1,378 kg

kg	*hg*	*dag*	*g*	*dg*	*cg*	*mg*
	1	3	7,	8		
0,	1	3	7	8		

137,8 g = 0,1378 kg (alternativa incorreta)

e) 234 kg = 23.400 g

		kg	*hg*	*dag*	*g*	*dg*	*cg*	*mg*
2	3	4						
2	3	4	0	0	0			

234 kg = 234.000 g (alternativa incorreta)

Gabarito: C

14. (FGV) Quantos mililitros há em um milímetro cúbico?

a) 10^3.
b) 1.
c) 10^{-3}.
d) 10^{-6}.
e) 10^{-9}.

Resolução:

1 mm equivale a 0,001 litro, ou seja, é a milésima parte do litro. Seu valor também será equivalente a 0,001 dm^3, já que, 1 litro equivale a 1 dm^3.

Transformando 0,001 dm^3 em cm^3, apenas multiplicaremos por 1.000 seu valor, o que resultará no deslocamento da "vírgula" três casas para direita: 0,001 dm^3 = 1 cm^3.

Deslocando-se a "vírgula" três casas para direita, novamente, determinaremos seu valor, agora, em mm^3: 1 cm^3 = 1.000 mm^3.

Portanto, existem $\frac{1\ mm^3}{1.000\ mm^3} = \frac{1}{1.000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$ mililitros em um milímetro cúbico.

Gabarito: C

15. (Cesgranrio) Quantos litros há em 1m^3?

a) 1.
b) 10.
c) 100.
d) 1.000.
e) 10.000.

Resolução:

Considerando que 1 litro equivale a 1 dm^3 e, 1 m^3 equivale a 1.000 dm^3. Então, teremos 1.000 litros contidos em 1000 dm^3.

Gabarito: D

16. (Cesgranrio) Um livro de 350 páginas tem 2 cm de espessura. Dentre os valores abaixo, o que representa com mais precisão a espessura aproximada de cada página, em milímetros, é:

a) 0,046.
b) 0,057.
c) 0,066.
d) 0,070.
e) 0,082.

Resolução:

Dividindo-se a espessura pelo total de páginas, teremos:

$$\frac{2 \text{ cm}}{350 \text{ pags}} \approx 0{,}0057 \text{ cm} \text{ (valor aproximado)}$$

Ou, simplesmente, 0,0057 cm = 0,057 mm

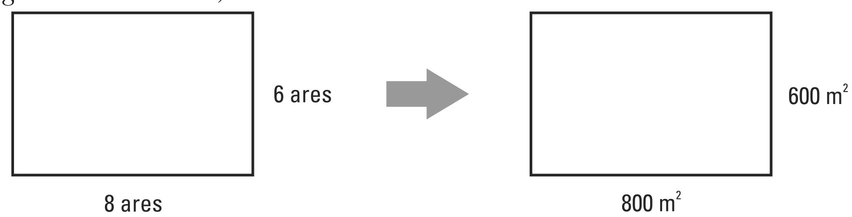
Gabarito: B

17. Dois sítios, um de 8 ares por 6 ares e outro de 200.000 m^2 foram unidos, formando uma propriedade única de:

a) 6800 ha.
b) 680 ha.
c) 68 ha.
d) 6,8 ha.
d) 0,68 ha.

Resolução:

Considerando que 1 are = 100 m^2, então, uma região de 8 ares por 6 ares terá as seguintes dimensões, em m^2.



Determinando a área, em m^2:

A = 800 m^2 × 600 m^2 = 480.000 m^2

Somando-se as áreas dadas: 200.000 m^2 + 480.000 m^2 = 680.000 m^2

Sabendo-se que 1 ha equivale a 10.000 m^2, então teremos:

$$\frac{680.000 \text{ m}^2}{10.000 \text{ m}^2} = 68 \text{ ha}$$

Gabarito: C

18. (Cesgranrio) Em uma garrafa de guaraná cabe 0,2 litros de bebida. Quantas garrafas é possível encher com a bebida contida num recipiente com capacidade de 28 m^3?

a) 100.000.
b) 130.000.
c) 140.000.
d) 170.000.
e) 185.000.

Resolução:

28 m^3 equivalem a 28.000 dm^3, ou seja, 28.000 litros. Dividindo-se o total da capacidade do reservatório pela capacidade volumétrica de uma garrafa de guaraná, teremos uma quantidade de garrafas de:

$$\frac{28.000\,l}{0,2\,l} = 140.000 \text{ garrafas de guaraná}$$

Gabarito: C

19. (Cesgranrio) Um laboratório importa 50 litros de uma vacina concentrada. Em seguida dilui o medicamento em 670 dm^3 de água destilada e coloca em ampolas de 2 cm^3 cada uma. Quantas ampolas podem ser produzidas dessa forma?

a) 340.000.
b) 360.000.
c) 380.000.
d) 400.000.
e) 420.000.

Resolução:

Sabendo-se que 1 dm^3 equivale a 1 *l*, então, 670 dm^3 equivalem a 670 litros.

Somando-se 50 litros de uma vacina concentrada em 670 litros de água destilada, obtemos:

50 + 670 = 720 litros

Considerando-se que 720 litros equivalem a 720 dm^3 e este, a 720.000 cm^3, então, o total de ampolas de 2 cm^3 cada uma será de:

$$\frac{720.000 \text{ cm}^3}{2 \text{ cm}^3} = 360.000 \text{ ampolas}$$

Gabarito: B

20. (Cesgranrio) A divisão de uma área de uma chácara e a de uma fazenda é de 0,001875. Se a área da chácara é de 8.700 m^2, qual, em hectares, vale a área da fazenda?

a) 464 ha.
b) 472 ha.
c) 532 ha.
d) 596 ha.
e) 612 ha.

Resolução:

Dividindo-se 8.700 m^2 (área da chácara) por x m^2 (área da fazenda), obtemos, como resultado da divisão: 0,001875, assim, teremos:

$$\frac{8.700 \text{ m}^2}{x} = 0,001875 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8.700 \text{ m}^2}{0,001875} \quad \Rightarrow \quad x = 4.640.000 \text{ m}^2$$

Considerando que 1 ha equivale a 10.000 m^2:

$$\frac{4.640.000 \text{ m}^2}{10.000 \text{ m}^2} = 464 \text{ ha}$$

Gabarito: A

Capítulo 8

Equação do 1º grau

8.1. Definição

Denomina-se ***equação*** a toda ***igualdade*** entre ***expressões algébricas***, que se transforma numa ***identidade numérica*** somente para ***um*** ou ***mais valores*** atribuídos às suas ***letras***.

$$5 + x = 8$$

Essa igualdade se transforma numa identidade, fazendo:

$$x = 3$$

A letra **"*x*"** é denominada ***variável*** ou ***incógnita***, e o número **3** é chamado de ***solução da equação, conjunto verdade ou raiz***.

O conjunto de termos da equação ou da identidade, que se encontra à ***esquerda*** do sinal de igualdade, constitui o ***primeiro membro,*** e os da ***direita***, o ***segundo membro*** da equação.

$$\underbrace{3x - 12}_{1^{o}\ \text{membro}} = \underbrace{7 + x}_{2^{o}\ \text{membro}}$$

8.2. Tipos

As equações podem apresentar ***uma*** ou ***mais incógnitas*** ou ***variáveis***:

Exemplos: $4 + 2x = 11 + 3x$ (***uma incógnita*** ou ***uma variável***)

$y - 1 = 6x + 13 - 4y$ (***duas incógnitas*** ou ***duas variáveis***)

$8x - 3 + y = 4 + 5z - 2$ (***três incógnitas*** ou ***três variáveis***)

8.3. Forma normal

Uma equação se apresenta sob a ***forma normal*** quando todos os seus termos estão ***no primeiro membro reduzido*** e ***ordenado*** segundo as ***potências decrescentes*** da ***variável***.

Exemplos: $5x - 20 = 0$

$x^2 - 3x - 40 = 0$

$x^3 + 2x^2 - 11x + 12 = 0$

$4x^4 + 13x^3 - 14x^2 - x + 41 = 0$

8.4. Classificação de uma equação

As ***equações algébricas*** podem ser ***racionais*** e ***irracionais***.

São ***racionais*** quando a ***variável*** não tem nenhum ***expoente fracionário***, ou seja, quando a incógnita não está sob ***radical***. Caso contrário, são ditas ***irracionais***.

Exemplo: $2x - 16 = 0$ (racional)

$3 + \frac{2}{x+1} = \frac{5}{x+1}$ (racional)

$\sqrt{2x} + 4 = x - 1$ (irracional)

As equações racionais classificam-se em ***inteiras*** e ***fracionárias***.

São ***inteiras*** se todos os ***expoentes*** das ***incógnitas*** são ***números inteiros e positivos***. Caso contrário, caso haja uma ***incógnita*** presente no ***denominador*** ou, com ***expoente inteiro e negativo***, a equação se diz ***fracionária***.

Exemplo: $2x - 16 = 0$ (racional inteira)

$3 + \frac{2}{x+1} = \frac{5}{x+1}$ (racional fracionária)

$x^{-1} - 16 = 2x^{1} + 4$ (racional fracionária)

8.5. Equações equivalentes

Duas ou ***mais*** equações são ***equivalentes*** quando admitem ***as mesmas soluções ou mesmos conjuntos verdade***.

Exemplo: $3x - 9 = 0 \Rightarrow$ admite **3** como ***solução*** (ou ***raiz***)

$4 + x = 7 \Rightarrow$ admite **3** como ***solução*** (ou ***raiz***)

Logo, as equações $3x - 9 = 0$ e $4 + x = 7$ são equivalentes.

8.6. Equações numéricas

É a equação que não tem nenhuma outra letra a não ser a das *incógnitas*.

Exemplos: $x - 5 = -2x + 22$

$4y - 11 + 8y = 3(y - 1) + 4$

$1 + \frac{2}{2z+2} = \frac{1}{2z+2} - 3$

8.7. Equações literais

É toda equação que contém ***outra letra***, além das que representam ***variáveis***.

Exemplos: $3ax - 5 = ax + 4$ (na ***variável "x"***)

$4by + 3(2b - y) = 1$ (na ***variável "y"***)

8.8. Equações possíveis e determinadas

São todas as equações que admitem um ***número finito de soluções*** que, neste caso, por ser uma equação do 1º grau só admite ***uma única solução***.

Exemplo: $x - 2(x + 1) = -3$ (admite, somente, o número **1** como solução)
S = V = {1} – conjunto unitário (conjunto que possui ***somente um elemento***)
$3x - 4 = 2(x + 6) + 3$ (admite, somente, o número **19** como solução)
S = V = {19} – conjunto unitário (conjunto que possui ***somente um elemento***)

8.9. Equações possíveis e indeterminadas

São todas as equações que admitem ***infinitas soluções***, ou seja, um ***número infinito de soluções***. São também denominadas de identidades, e seu conjunto verdade ou conjunto solução é representado pelos ***números reais***, que são capazes de verificar esse tipo de equação.

V = S = R (conjunto de ***todos os números reais***)

Exemplo: $5x - 2y = 105$ (admite um ***número infinito*** de soluções – ***infinitas soluções***)

8.10. Equações impossíveis

São todas aquelas equações que ***não admitem soluções***. Logo, o seu conjunto solução ou seu conjunto verdade é representado pelo ***conjunto vazio***.

V = S = { } = ∅ (***conjunto vazio***, não possui elementos)

Obs.: As ***equações possíveis e indeterminadas*** são, por definição, ***exatamente opostas*** às ***equações impossíveis***, pois as primeiras possuem um número infinito de soluções (R) e as segundas não possuem sequer alguma solução ({ } ou ∅)

8.11. Resoluções das equações do 1º grau com uma incógnita

Aplicaremos os processos práticos para as resoluções das equações do 1º grau, da seguinte forma:

a) Se as equações possuírem termos fracionários eliminam-se os denominadores;
b) Isolam-se num dos membros todos os termos que contêm a variável e, do outro, os valores que independem das variáveis (os números ou coeficientes);
c) Reduzem-se os termos semelhantes;
d) Dividem-se os dois membros pelo coeficiente da variável;
e) Representação da solução.

Exemplos:

I) $4x + 3 = 2x + 11$

Isolam-se num dos membros todos os termos que contêm a variável e, do outro, os valores que independem das variáveis (os números).

$4x - 2x = 11 - 3$

Reduzem-se os termos semelhantes.

$2x = 8$

Dividem-se os dois membros pelo coeficiente da variável

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Representação da solução.

$$S = \{4\} \text{ ou } V = \{4\}, \text{ onde: } \begin{cases} S: \text{conjunto solução} \\ V: \text{conjunto verdade} \end{cases}$$

II) $1 + \dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{3}{2x+1} - 2$

Eliminam-se os denominadores multiplicando-se todos os membros pelo valor do denominador:

$$2x+1 \times \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right) = 2x+1 \times \left(\frac{3}{2x+1} - 2\right) \quad \Rightarrow \quad 2x+1+1 = 3-2(2x+1)$$

$$\Rightarrow \quad 2x+2 = 3-4x-2 \quad \Rightarrow \quad 2x+2 = -4x+1$$

Isolam-se num dos membros todos os termos que contêm a variável e, do outro, os valores que independem das variáveis (os números).

$$2x + 4x = 1 - 2$$

Reduzem-se os termos semelhantes.

$$6x = -1$$

Dividem-se os dois membros pelo coeficiente da variável

$$\frac{6x}{6} = \frac{-1}{6} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{6}$$

Representação da solução.

$$S = \left\{-\frac{1}{6}\right\} \text{ ou } V = \left\{ \quad - \right\} \text{ onde: } \begin{cases} S: \text{conjunto solução} \\ V: \text{conjunto verdade} \end{cases}$$

III) $2ax - (a-2) = 3 + ax$

$$2ax - (a-2) = 3 + ax \Rightarrow 2ax - a + 2 = 3 + ax \Rightarrow 2ax - ax = 3 - 2 + a$$

$$\Rightarrow ax = 1 + a \Rightarrow x = \frac{1+a}{a}$$

Representação da solução.

$$S = V = \left\{\frac{1+a}{a}\right\}$$

8.12. Discussão de uma equação do 1º grau

Compreende-se por discussão de uma equação a sequência de raciocínio efetuado para concluir:

a) Se a equação tem ou não solução;
b) quando tem solução, se é determinada ou indeterminada.

Obs.: Quando a equação ***tem solução***, ela se diz ***possível***, caso contrário, denomina-se ***impossível***.

Toda equação do 1º grau com uma variável, após as eliminações de denominadores, parênteses, transposição de termos e redução, pode ser representada na seguinte forma: $ax + b = 0$. Ou, ainda, na forma simplificada: $ax = -b$

Para discuti-la, consideraremos três possíveis casos, a se ver:

1º caso: $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Neste caso, a equação admite uma única solução do tipo: $x = -\dfrac{b}{a}$

2º caso: $a = 0$ e $b \neq 0$.

Para esse caso, tem-se uma solução impossível, já que não existe qualquer número que seja divisível por 0: $x = -\dfrac{b}{0}$ $(\nexists)$

3º caso: $a = 0$ e $b = 0$.

Neste caso, prova-se que a relação obtida é uma identidade, pois qualquer número diferente de zero multiplicado por zero é nulo: $0x = 0$.

A presente discussão pode ser assim resumida:

$$a \neq 0 \ \{\text{equação possível e determinada (única solução)}$$

$$a = 0 \begin{cases} b \neq 0 \ \{\text{equação impossível (nenhuma solução)} \\ b = 0 \ \{\text{equação indeterminada (identidade)} \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

1. (FCC) Dada a equação $\dfrac{x-1}{4} + \dfrac{3x-7}{6} = \dfrac{2x-3}{3}$, sendo U = Q, podemos afirmar que:

a) a raiz da equação é um número par;
b) o quadrado da raiz da equação é 10;
c) a raiz da equação é um número negativo;
d) a raiz da equação é um número primo;
e) a raiz da equação é divisível por 10.

Resolução:

Eliminam-se os denominadores multiplicando-se todos os membros pelo valor do *mmc* dos respectivos denominadores

mmc(3; 4; 6) = 12

$$\left(\frac{x-1}{4} + \frac{3x-7}{6} = \frac{2x-3}{3}\right) \times 12 \ \Rightarrow \ 12 \times \left(\frac{x-1}{4}\right) + 12 \times \left(\frac{3x-7}{6}\right) = 12 \times \left(\frac{2x-3}{3}\right)$$

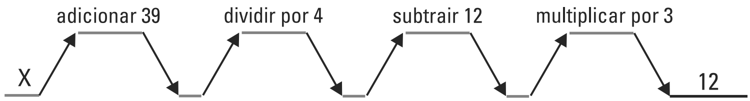
$$3(x-1) + 2(3x-7) = 4(2x-3) \ \Rightarrow \ 3x - 3 + 6x - 14 = 8x - 12 \ \Rightarrow \ 9x - 17 = 8x - 12$$

Isolam-se num dos membros todos os termos que contêm a variável e, do outro, os valores que independem das variáveis (os números).

$$9x - 17 = 8x - 12 \quad \Rightarrow \quad 9x - 8x = -12 + 17 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \quad \Rightarrow \quad S = V = \{5\}$$

Gabarito: D

2. **(FCC) No esquema seguinte têm-se indicadas as operações que devem ser sucessivamente efetuadas, a partir de um número X, a fim de obter-se como resultado final o número 12.**



É verdade que o número X é

a) primo.
b) par.
c) divisível por 3.
d) múltiplo de 7.
e) quadrado perfeito.

Resolução:

A ilustração anterior representa uma expressão na variável "*x*" dada por:

$$\underbrace{x+39}_{\text{x adicionar 39}} \rightarrow \underbrace{\frac{x+39}{4}}_{\text{dividir o resultado por 4}} \rightarrow \underbrace{\frac{x+39}{4}-12}_{\text{subtrair o resultado por 12}} \rightarrow \underbrace{\left(\frac{x+39}{4}-12\right)\times 3}_{\text{multiplicar o resultado por 3}} \rightarrow \underbrace{\left(\frac{x+39}{4}-12\right)\times 3 = 12}_{\text{igualar a 12}}$$

Desenvolvendo a última expressão:

$$\left(\frac{x+39}{4}-12\right)\times 3 = 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+39}{4} - 12 = \frac{12}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+39}{4} = 4 + 12$$

$$x + 39 = 16 \times 4 \quad \Rightarrow \quad x = 64 - 39 \quad \Rightarrow \quad x = 25$$

Sendo o número 25 um quadrado perfeito (pois $\sqrt{25} = 5$), então:

Gabarito: E

3. **(Consulplan) Para que valor de m as equações: *x* – 2(1 – *x*) = 2*x* – 3 e *mx* = 2, são equivalentes?**

a) 1.
b) –1.
c) 2.
d) – 2.
e) 0.

Resolução:

Determinado a solução da 1ª equação:

$x - 2(1 - x) = 2x - 3 \;\Rightarrow\; x - 2 + 2x = 2x - 3 \;\Rightarrow\; x + 2x - 2x = -3 + 2 \;\Rightarrow\; x = -1$

$S = V = \{-1\}$

Sabendo-se que as duas equações são ***equivalentes***, então a ***segunda equação*** admite a ***mesma solução*** ($x = -1$) da primeira. Substituindo-se o valor de "*x*" na segunda equação, tem-se que:

$mx = 2 \;\Rightarrow\; m(-1) = 2 \;\Rightarrow\; [m(-1) = 2] \times (-1) \;\Rightarrow\; m = -2$

Gabarito: D

4. Se $\frac{2x}{5}+\frac{15x-1}{20}$ = 1, então o valor de 3*x* + 1 é:

a) 1.
b) $\frac{84}{23}$.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Resolução:

Multiplicando-se todos os membros da equação por **20**, que representa o mínimo múltiplo comum entre 5 e 20:

$$\frac{2x}{5}+\frac{15x-1}{20}=1 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{2x}{5}+\frac{15x-1}{20}=1\right)\times 20 \quad\Rightarrow\quad 20\times\frac{2x}{5}+20\times\frac{(15x-1)}{20}=20\times 1$$

$$\Rightarrow \quad 8x+15x-1=20 \quad\Rightarrow\quad 23x=20+1 \quad\Rightarrow\quad 23x=21 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{21}{23}$$

$$S = V = \left\{\frac{21}{23}\right\}$$

Calculando o valor de $3x + 1$

$$3x+1=3\times\frac{21}{23}+1=\frac{63}{21}+1=\frac{63+21}{21}=\frac{84}{21}$$

Gabarito: B

5. A raiz da equação 6(*x* – 3) – 9(*x* – 5) = *x* – 1 é:

a) 5.
b) 4.
c) 7.
d) 15.
e) 18.

Resolução:

$$6(x-3)-9(x-5)=x-1 \quad\Rightarrow\quad 6x-18-9x+45=x-1 \quad\Rightarrow\quad 6x-9x-x=-1+18-45$$

$$\Rightarrow -4x=-28 \quad\Rightarrow\quad (-4x=-28)\times(-1) \quad\Rightarrow\quad 4x=28 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{28}{4} \quad\Rightarrow\quad x=7$$

S = V = {7}

Gabarito: C

6. Em $\frac{4}{3+x}+\frac{2}{6+2x}=\frac{5}{2}$, o valor de x é:

a) $x = -3$.
b) $x = 1$.
c) $x = -1$.
d) $x = 0{,}1$.
e) $x = \frac{15}{5}$.

Resolução:

$$\frac{4}{3+x}+\frac{2}{6+2x}=\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{3+x}+\frac{2}{2(3+x)}=\frac{5}{2}$$

mmc(2; 3 + *x*; 2(3 + *x*)) = 2(3 + *x*), logo, multiplicando-se por 2(3 + *x*) todos os membros da equação:

$$\left(\frac{4}{3+x}+\frac{2}{2(3+x)}=\frac{5}{2}\right)\times 2(3+x)=\frac{5}{2} \Rightarrow 2(3+x)\times\frac{4}{3+x}+2(3+x)\times\frac{2}{2(3+x)}=2(3+x)\times\frac{5}{2}$$

$$8+2=5(3+x) \Rightarrow 10=5(3+x) \Rightarrow 3+x=\frac{10}{5} \Rightarrow 3+x=2 \Rightarrow x=2-3$$

$x=-1$

S = V = {–1}

Gabarito: C

7. A raiz da equação $\frac{3x+5}{2}-\frac{2x-9}{3}=8$ é também raiz da equação:

a) $3x=-15$.
b) $3x=3$.
c) $3x=9$.
d) $3x=15$.
e) $3x = 12$.

Resolução:

Inicialmente, multiplicaremos todos os membros da equação por 6, que representa o mínimo múltiplo comum entre 2 e 3.

$$\frac{3x+5}{2}-\frac{2x-9}{3}=8 \Rightarrow \left(\frac{3x+5}{2}-\frac{2x-9}{3}=8\right)\times 6 \Rightarrow 6\times\frac{(3x+5)}{2}-6\times\frac{(2x-9)}{3}=6\times 8$$

$$3\times(3x+5)-2\times(2x-9)=48 \Rightarrow 9x+15-4x+18=48 \Rightarrow 5x=48-18-15$$

$$\Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=\frac{15}{5} \Rightarrow x=3$$

S = V = {3}

Agora, devemos verificar qual das alternativas vai gerar outra solução igual a 3. Analisando a alternativa:

a) $3x=-15 \Rightarrow x=\frac{-15}{3} \Rightarrow x=-5 \ (3\neq -5)$

b) $3x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{3} \Rightarrow x=1 \ (3\neq 1)$

c) $3x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{3} \Rightarrow x=3 \ (3=3)$

d) $3x=15 \Rightarrow x=\frac{15}{3} \Rightarrow x=5 \ (3\neq 5)$

e) $3x=12 \Rightarrow x=\frac{12}{3} \Rightarrow x=4 \ (3\neq 4)$

Gabarito: C

8. Calcular em Z (conjunto dos números inteiros relativos), o conjunto verdade da equação $\frac{3x-1}{4}+\frac{2x-3}{3}=\frac{3x+10}{6}$:

a) $\left\{\frac{45}{11}\right\}$.
b) {34}.
c) ∅.
d) {–4}.
e) {1}.

Resolução:

Multiplicando-se por 12 todos os membros da equação, já que *mmc*(3; 4; 6) = 12

$$\frac{3x-1}{4}+\frac{2x-3}{3}=\frac{3x+10}{6} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3x-1}{4}+\frac{2x-3}{3}=\frac{3x+10}{6}\right)\times 12$$

$$3\times(3x-1)+4\times(2x-3)=2\times(3x+10) \quad \Rightarrow \quad 9x-3+8x-12=6x+20$$

$$\Rightarrow \quad 9x+8x-6x=20+3+12 \quad \Rightarrow \quad 11x=35 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{35}{11}$$

Como o conjunto verdade está definido no conjunto dos números inteiros e, sendo que $\frac{35}{11} \notin Z$, então a solução é dita vazia: S = V = ∅.

Gabarito: C

9. (PUC/SP) Resolvendo a equação $2.(x+1)=3.(2-x)$, encontra-se para o valor de "*x*":

a) {0,1}.
b) {0,2}.
c) {0,25}.
d) {0,4}.
e) {0,5}.

Resolução:

$$2.(x+1)=3.(2-x) \quad \Rightarrow \quad 2x+2=6-6x \quad \Rightarrow \quad 2x+6x=6-2 \quad \Rightarrow \quad 8x=4$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{4}{8} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=0{,}5$$

$$S=V=\left\{\frac{1}{2}\right\}=\{0{,}5\}$$

Gabarito: E

10. (Fuvest/SP) Calcule "*x*" tal que : $\frac{1}{3}-\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$:

a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
b) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.
c) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.
d) $\left\{\frac{1}{5}\right\}$.
e) $\left\{\frac{1}{6}\right\}$.

Resolução:

Multiplicando-se por 12 todos os membros da equação, já que *mmc*(2; 3; 4) = 12

$$\frac{1}{3}-\frac{x}{2}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\right)\times 12 \quad \Rightarrow \quad 12\times\frac{1}{3}-12\times\frac{x}{2}=12\times\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 4-6x=3 \quad \Rightarrow \quad -6x=3-4 \quad \Rightarrow \quad -6x=-1 \quad \Rightarrow \quad (-6x=-1)\times(-1)$$

$$6x=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{6}$$

$$S=V=\left\{\frac{1}{6}\right\}$$

Gabarito: E

11. (Fuvest/SP) Se "S" é a solução da equação $\frac{1}{2}-x=6.\left(\frac{1}{3}-x\right)$, então ela está compreendida:

a) $-1 < S < 0$.
b) $0 < S < 1$.
c) $1 < S < 1{,}5$.
d) $1{,}5 < S < 2$.
e) $2 < S < 2{,}5$.

Resolução:

$$\frac{1}{2}-x=6.\left(\frac{1}{3}-x\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}-x=2-6x \quad \Rightarrow \quad 6x-x=2-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 5x=\frac{4-1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 5x=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{5.2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{10} \quad \text{ou} \quad x=0{,}3$$

S = V = {0,3}

Gabarito: B

12. (Unesp/SP) Resolvendo a equação: $3x-2.(x-5)+\frac{3x-5}{2}=0$, temos como solução:

a) –3.
b) 1.
c) –1.
d) 2.
e) –2.

Resolução:

$$3x-2(x-5)+\frac{3x-5}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad 3x-2x+10+\frac{3x-5}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad x+10+\frac{3x-5}{2}=0$$

Multiplicando-se por **2** todos os membros da igualdade anterior, teremos:

$$\Rightarrow \quad \left(x+10+\frac{3x-5}{2}=0\right)\times 2 \quad \Rightarrow \quad 2x+20+3x-5=0 \quad \Rightarrow \quad 5x=-15$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-15}{5} \quad \Rightarrow \quad x=-3$$

S = V = {–3}

Gabarito: A

13. (UCS/BA) Resolvendo a equação $\frac{x}{3}-\frac{2x}{5}=-\frac{x+2}{5}$, em R, encontramos como conjunto verdade o valor:

a) –3.
b) –2.
c) –1.
d) 1.
e) 2.

Resolução:

Multiplicando-se por 15 todos os membros da equação:

$$\frac{x}{3}-\frac{2x}{5}=-\frac{x+2}{5} \Rightarrow \left(\frac{x}{3}-\frac{2x}{5}=-\frac{x+2}{5}\right)\times 15 \Rightarrow 15\times\frac{x}{3}-15\times\frac{2x}{5}=-15\times\frac{(x+2)}{5}$$

$$\Rightarrow 5x-6x=-3(x+2) \Rightarrow -x=-3x-6 \Rightarrow 3x-x=-6 \Rightarrow 2x=-6$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6}{2} \Rightarrow x=-3$$

S = V = {–3}

Gabarito: A

14. (UFMT) A solução da equação $\frac{3.(x+2)}{5}-\frac{3x+1}{4}=2$ no conjunto universo dos inteiros, vale:

a) 3.
b) –1.
c) 0.
d) 1.
e) –3.

Resolução:

Multiplicando-se por 20 todos os membros da equação: *mmc*(4; 5) = 20

$$\frac{3.(x+2)}{5}-\frac{3x+1}{4}=2 \Rightarrow \left(\frac{3.(x+2)}{5}-\frac{3x+1}{4}=2\right)\times 20$$

$$\Rightarrow 20\times\frac{3.(x+2)}{5}-20\times\frac{(3x+1)}{4}=20\times 2 \Rightarrow 12.(x+2)-5.(3x+1)=40$$

$$\Rightarrow 12x+24-15x-5=40 \Rightarrow -3x=40+5-24 \Rightarrow -3x=21$$

$$\Rightarrow (-3x=21)\times(-1) \Rightarrow 3x=-21 \Rightarrow x=\frac{-21}{7} \Rightarrow x=-3$$

S = V = {–3}

Gabarito: E

15. (UFMT) O conjunto solução da equação 0,5x = 0,3 – 0,5x é:

a) 0,3.
b) 0,5.
c) 0,8.
d) 1,3.
e) 1,5.

Resolução:

$0,5x = 0,3 - 0,5x \quad \Rightarrow \quad 0,5x + 0,5x = 0,3 \quad \Rightarrow \quad x = 0,3$

S = V = {0,3}

Gabarito: A.

16. (UGF/RJ) A solução da equação $5.(x + 3) - 2.(x - 1) = 20$ é:

a) 0.
b) 1.
c) 3.
d) 9.
e) 11.

Resolução:

$$5.(x + 3) - 2.(x - 1) = 20 \quad \Rightarrow \quad 5x + 15 - 2x + 2 = 20 \quad \Rightarrow \quad 3x = 20 - 17$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

S = V = {1}

Gabarito: B

17. (PUC/RJ) A raiz da equação $\frac{x - 3}{7} = \frac{x - 1}{4}$ é:

a) $-\frac{3}{5}$.
b) $-\frac{5}{3}$.
c) $\frac{3}{5}$.
d) $\frac{5}{3}$.
e) 1.

Resolução:

Aplicando-se a propriedade básica das proporções, faremos o produto dos meios igual ao produto dos extremos:

$$\frac{x - 3}{7} = \frac{x - 1}{4} \quad \Rightarrow \quad 7(x - 1) = 4(x - 3) \quad \Rightarrow \quad 7x - 7 = 4x - 12 \quad \Rightarrow \quad 7x - 4x = -12 + 7$$

$$\Rightarrow \quad 3x = -5 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{5}{3}$$

$$S = V = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

Gabarito: B

18. (FCC) O número inteiro que é solução da equação $\frac{2x + 2}{3} + \frac{3x - 5}{2} = 9$ é:

a) 1.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

Resolução:

Multiplicando-se por 6 todos os membros da equação: *mmc*(2; 3) = 20

$$\frac{2x+2}{3}+\frac{3x-5}{2}=9 \Rightarrow \left(\frac{2x+2}{3}+\frac{3x-5}{2}=9\right)\times 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\times\frac{(2x+2)}{3}+6\times\frac{(3x-5)}{2}=6\times 9$$

$$\Rightarrow 2\times(2x+2)+3\times(3x-5)=54 \quad \Rightarrow \quad 4x+4+9x-15=54 \quad \Rightarrow \quad 13x=54+11$$

$$\Rightarrow 13x=65 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{65}{13} \quad \Rightarrow \quad x=5$$

S = V = {5}

Gabarito: D

19. (Cesgranrio) Resolva a equação: $\frac{3x-2}{2}-\frac{x+2}{3}=3$.

a) $x = 2$.
b) $x = 3$.
c) $x = 4$.
d) $x = 5$.
e) $x = 7$.

Resolução:

Multiplicando-se por 6 todos os membros da equação: *mmc*(2; 3) = 20

$$\frac{3x-2}{2}-\frac{x+2}{3}=3 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3x-2}{2}-\frac{x+2}{3}=3\right)\times 6 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 6\times\frac{(3x-2)}{2}-6\times\frac{(x+2)}{3}=6\times 3$$

$$3\times(3x-2)-2\times(x+2)=18 \quad \Rightarrow \quad 9x-6-2x-4=18 \quad \Rightarrow \quad 7x=18+10$$

$$\Rightarrow \quad 7x=28 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{28}{7} \quad \Rightarrow \quad x=4$$

S = V = {4}

Gabarito: C

20. (Cesgranrio) Qual das equações tem raiz igual a 2?

a) $k - (3 - k) = 1$.
b) $5 + x = -1$.
c) $\frac{x}{2} = 4$.
d) $-3x = 102$.
e) $2x - 1 = 14$.

Resolução:

Analisando alternativa por alternativa:

a) $k-(3-k)=1 \Rightarrow k-3+k=1 \Rightarrow 2k=1+3 \Rightarrow 2k=4 \Rightarrow$

$\Rightarrow k=\dfrac{4}{2} \Rightarrow k=2$

S = V = {2}

b) $5+x=-1 \Rightarrow x=-1-5 \Rightarrow x=-6$

S = V = {–6}

c) $\dfrac{x}{2}=4 \Rightarrow x=2\times 4 \Rightarrow x=8$

S = V = {8}

d) $-3x=102 \Rightarrow (-3x=102)(-1) \Rightarrow 3x=-102 \Rightarrow x=\dfrac{-102}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-34$

S = V = {–34}

e) $2x-1=15 \Rightarrow 2x=15+1 \Rightarrow 2x=16 \Rightarrow x=\dfrac{16}{2} \Rightarrow x=8$

S = V = {8}

Das soluções apresentadas:

Gabarito: A

21. (Vunesp) Qual das soluções representa a solução da equação $1+\dfrac{2x-5}{4}-\dfrac{3-x}{2}=\dfrac{4+4x}{4}-\dfrac{22}{8}$?

a) 0.
b) 1.
c) ∅.
d) IR.
e) impossível.

Resolução:

Fazendo, inicialmente, *mmc*(2; 4; 8) = 8 para reduzirmos a um denominador as frações de cada membro:

$$1+\frac{2x-5}{4}-\frac{3-x}{2}=\frac{4+4x}{4}-\frac{22}{8} \Rightarrow \frac{8}{8}+\frac{2.(2x-5)}{8}-\frac{4.(3-x)}{8}=\frac{2(4+4x)}{8}-\frac{22}{8}$$

$$\Rightarrow 8+2.(2x-5)-4.(3-x)=2(4+4x)-22 \Rightarrow 8+4x-10-12+4x=8+8x-22$$

$$\Rightarrow 8x-8x=8-22+12+10-8 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow S=IR$$

Gabarito: D

22. (Consulplan) Resolvendo a equação $\frac{2x-1}{2}=\frac{3x-2}{3}$, encontramos uma solução:

a) possível e determinada.
b) possível e indeterminada.
c) impossível.
d) complexa.
e) unitária e diferente de zero.

Resolução:

Utilizando-se da *propriedade fundamental das proporções*, em que o produto dos termos dos meios é igual ao produto dos termos dos extremos, tem-se que:

$$\frac{2x-1}{2}=\frac{3x-2}{3} \quad \Rightarrow \quad 3.(2x-1)=2.(3x-2) \quad \Rightarrow \quad 6x-3=6x-4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 6x-6x=-4+3$$

$$\Rightarrow \quad 0=-4+3 \quad \Rightarrow \quad 0=-1 \quad \Rightarrow \quad S=\text{impossível}$$

Gabarito: C

23. (PUC) As equações $x-\frac{x-2}{3}=2-\frac{2-x}{4}$ e $\frac{x+3}{2}+\frac{x+4}{3}+\frac{x+5}{4}=16$ possuem soluções S_1 e S_2, inteiras e positivas. Nesse caso, o valor de $\sqrt{S_2-S_1}$ é igual a:

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

Resolução:

Determinando as respectivas soluções:

Para S_1:

$$x-\frac{x-2}{3}=2-\frac{2-x}{4} \quad \Rightarrow \quad mmc(3\,;4)=12 \quad \Rightarrow \quad \frac{12.x}{12}-\frac{4.(x-2)}{12}=\frac{12.2}{12}-\frac{3.(2-x)}{12}$$

$$\Rightarrow \quad 12x-4x+8=24-6+3x \quad \Rightarrow \quad 12x-4x-3x=24-6-8 \quad \Rightarrow \quad 5x=10$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{10}{5} \quad \Rightarrow \quad x=2 \quad \Rightarrow \quad S_1=\{2\}$$

Para S_2:

$$\frac{x+3}{2}+\frac{x+4}{3}+\frac{x+5}{4}=16 \quad \Rightarrow \quad mmc(2;\,3\,;4)=12 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6.(x+3)}{12}+\frac{4.(x+4)}{12}+\frac{3.(x+5)}{12}=\frac{12.16}{12}$$

$$\Rightarrow \quad 6.(x+3)+4.(x+4)+3.(x+5)=12.16 \quad \Rightarrow \quad 6x+18+4x+16+3x+15=192$$

$$\Rightarrow \quad 6x+4x+3x=192-18-16-15 \quad \Rightarrow \quad 13x=143 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{143}{13} \quad x=11 \quad \Rightarrow \quad S_2=\{11\}$$

O valor de $\sqrt{S_1 - S_2}$ é igual a:

$\sqrt{S_2 - S_1} = \sqrt{11-2} = \sqrt{9} = 3$

Gabarito: D

24. (PUC) A solução da equação $\dfrac{\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{x+4}{3}}{\dfrac{x-2}{6}-\dfrac{x+3}{12}} = \dfrac{\dfrac{x-3}{3}-\dfrac{x+2}{6}}{\dfrac{x-4}{3}-\dfrac{x+3}{4}}$ **:**

a) 3.
b) 11/3.
c) 17.
d) 41/3.
e) 19/11.

Resolução:

$$\frac{\frac{x-3}{2}-\frac{x+4}{3}}{\frac{x-2}{6}-\frac{x+3}{12}} = \frac{\frac{x-3}{3}-\frac{x+2}{6}}{\frac{x-4}{3}-\frac{x+3}{4}} \quad \text{sejam}: \begin{cases} mmc(2\,;3)=6 \\ mmc(3\,;6)=6 \\ mmc(6\,;12)=12 \\ mmc(3\,;4)=12 \end{cases}$$

$$\frac{\frac{3.(x-3)}{6}-\frac{2.(x+4)}{6}}{\frac{2.(x-2)}{12}-\frac{1.(x+3)}{12}} = \frac{\frac{2.(x-3)}{6}-\frac{1.(x+2)}{6}}{\frac{4.(x-4)}{12}-\frac{3.(x+3)}{12}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3.(x-3)-2.(x+4)}{\cancel{6}}}{\frac{2.(x-2)-1.(x+3)}{\cancel{12}}} = \frac{\frac{2.(x-3)-1.(x+2)}{\cancel{6}}}{\frac{4.(x-4)-3.(x+3)}{\cancel{12}}}$$

$$\frac{3.(x-3)-2.(x+4)}{2.(x-2)-1.(x+3)} = \frac{2.(x-3)-1.(x+2)}{4.(x-4)-3.(x+3)} \quad \Rightarrow \quad \frac{3x-9-2x-8}{2x-4-x-3} = \frac{2x-6-x-2}{4x-16-3x-9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-17}{x-7} = \frac{x-8}{x-25} \quad \Rightarrow \quad (x-17).(x-25) = (x-7).(x-8) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 25x - 17x + 425 = x^2 - 8x - 7x + 56 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 42x + 425 = x^2 - 15x + 56$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - x^2 - 42x + 15x = 56 - 425 \quad \Rightarrow \quad (-27x = -369)\times(-1) \quad \Rightarrow \quad 27x = 369$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{369^{\div 9}}{27_{\div 9}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{41}{3} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{\frac{41}{3}\right\}$$

Gabarito: D

25. (Vunesp) A solução da equação $3.(x+2) = 2.(x+4) + x - 2$, sendo $x \in$ IR é igual a:

a) impossível.
b) unitária.
c) possível e determinada.
d) não nula.
e) IR.

Resolução:

$$3.(x+2)=2.(x+4)+x-2 \quad\Rightarrow\quad 3x+6=2x+8+x-2 \quad\Rightarrow\quad 3x-2x-x=8-2-6$$

$$\Rightarrow \quad 0=0 \quad\Rightarrow\quad S=IR$$

Gabarito: E

Capítulo 9

Sistemas lineares do 1º grau com duas variáveis

Sistemas lineares do 1º grau com duas variáveis são um conjunto de ***expressões algébricas*** de ***duas variáveis distintas***, geralmente definidas por "***x***" e "***y***", representadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} a.x + b.y = c \\ d.x + e.y = f \end{cases} \quad (\textit{\textbf{forma já reduzida}})$$

em que a ***parte literal*** dessas expressões algébricas é representada pelas letras "***x***" e "***y***" (***variáveis*** ou ***incógnitas***) elevadas ao ***expoente*** **1** (***um***) e, por isso, denominadas ***lineares*** (seus gráficos são representados, no ***plano cartesiano***, por ***retas*** ou ***linhas***); e a ***parte numérica***, nesse caso, os ***coeficientes*** das equações, é representada por "***a***", "***b***", "***c***", "***d***", "***e***" e "***f***".

Obs.: Os ***coeficientes*** "***c***" e "***f***" no ***sistema linear*** já reduzido na forma anterior são chamados ***termos independentes*** de "***x***" e de "***y***".

Exemplos:

$$\begin{cases} 3.x + 5.y = 13 \\ 2.x - 3.y = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + 7.y = 6 \\ 12.x + 5.y = 34 \end{cases}$$

Também podemos representar a ***parte literal*** por outras letras, por exemplo, ***variáveis*** por "***m***" e "***n***".

$$\begin{cases} m + 11.n = 19 \\ -2.m - 7.n = -16 \end{cases} \qquad \begin{cases} m + 8.n = 33 \\ m - 7.n = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9.m + 7.n = \dfrac{2}{3} \\ 4.m + 3.n = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Lembramos que existem **cinco *métodos de resolução*** de um ***sistema linear*** formado por equações do 1º grau com duas incógnitas: ***adição***, ***subtração***, ***substituição***, ***comparação*** e ***divisão***. É aconselhável praticar apenas um dos métodos citados, apesar de que, alguns desenvolvimentos podem inferir na utilização de outro método que não seja aquele com o qual o aluno teve mais afinidade.

Ressaltamos ainda que a montagem de um ***sistema linear*** através de valores mencionados separadamente no enunciado é o ***ponto crucial*** deste capítulo, portanto, é de bom alvitre (sábio) analisar as ***variáveis*** envolvidas cuidadosamente para que não haja conflito na montagem.

Vejamos agora quando usar cada ***método resolutivo***:

Método da adição: utiliza-se o método da ***adição*** quando a ***mesma variável***, em ***ambas*** as ***equações***, apresentarem o ***mesmo coeficiente***, porém de ***sinais opostos***.

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2.y = 14 \\ 5x - 2.y = 18 \end{cases}$$

Somando-se as duas equações, membro a membro e termo a termo, tem-se que:

$$+\begin{cases} 3x + 2.y = 14 \\ 5x - 2.y = 18 \end{cases}$$
$$\overline{3x + 5x + 2y - 2y = 14 + 18}$$

$$8x = 32 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{32}{8} \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Substituindo-se o valor de "***x***" encontrado em uma das equações anteriores, teremos:

$$3x + 2.y = 14 \quad \Rightarrow \quad 3.4 + 2y = 14 \quad \Rightarrow \quad 12 + 2y = 14 \quad \Rightarrow \quad 2y = 14 - 12$$

$$y = \frac{2}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

V = S = {(4 ; 1)}

Obs.: O ***conjunto verdade*** ou ***conjunto solução*** de um ***sistema linear*** é representado por um ***par ordenado*** de valores: $(x\,;\,y)$, sendo "***x***" a ***abscissa*** do par e "***y***" a sua respectiva ***ordenada***.

Método da subtração: Utiliza-se o método da ***subtração*** quando a ***mesma variável***, em ***ambas*** as ***equações***, apresentarem o ***mesmo coeficiente***, com os ***mesmos sinais***.

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$

Subtraindo-se a equação de cima pela equação de baixo, tem-se que:

$$-\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$
$$\overline{(3x + 4y) - (2x + 4y) = 14 - 12}$$

$$3x + 4y - 2x - 4y = 14 - 12 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2x + 4y - 4y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Substituindo-se o valor de "*x*" encontrado em uma das equações anteriores, teremos:

$$2x + 4y = 12 \quad \Rightarrow \quad 2.2 + 4y = 12 \quad \Rightarrow \quad 4 + 4y = 12 \quad \Rightarrow \quad 4y = 12 - 4$$

$$y = \frac{8}{4} \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

V = S = {(2 ; 2)}

<u>Método da substituição</u>: utiliza-se o método da ***substituição*** quando ***uma*** das ***variáveis*** aparece ***isolada*** (ou ***sozinha***) em ***uma*** das ***equações***, por conseguinte, ***substitui-se*** na outra equação o valor em destaque que aparece ***isolado***.

Exemplo:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ y = 3x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Substituindo-se o termo "3*x*" (que representa o valor de "***y***" ***isolado***) na equação (1), tem-se:

$$7x + 2y = 13 \quad \Rightarrow \quad 7x + 2.(3x) = 13 \quad \Rightarrow \quad 7x + 6x = 13$$

$$\Rightarrow \quad 13x = 13 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{13}{13} \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Substituindo-se o valor de "*x*" encontrado na equação (2), teremos:

$$y = 3x \quad \Rightarrow \quad y = 3 \times 1 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

V = S = {(1 ; 3)}

<u>Método da comparação</u>: utiliza-se o método da ***comparação*** quando ***uma*** das ***variáveis*** aparece ***isolada*** nas ***duas equações***, por conseguinte, comparam-se (ou igualam-se) os ***valores isolados***.

Exemplo:

$$\begin{cases} y = 5x - 15 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ y = x - 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Comparando-se ou igualando-se os dois valores de "*y*", teremos:

$$\underbrace{5x - 15}_{\text{valor de "y" da equação (1)}} = \underbrace{x - 3}_{\text{valor de "y" da equação (2)}} \quad \Rightarrow \quad 5x - x = 15 - 3 \quad \Rightarrow \quad 4x = 12$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{12}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Substituindo-se o valor de "*x*" encontrado na equação (2), teremos:

$$y = x - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

V = S = {(3 ; 0)}

Método da divisão: utiliza-se o método da ***divisão*** em condições equivalentes às do método da ***comparação***, ou seja, quando ***uma*** das ***variáveis*** aparece ***isolada*** (ou ***sozinha***) nas ***duas equações***.

Exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{4}x = 4y - 75 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \dfrac{10}{12}x = y - 25 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Dividindo-se a equação (1) pela equação (2), teremos:

$$\frac{\frac{5x}{4}}{\frac{10x}{12}} = \frac{4y - 75}{y - 25} \Rightarrow \frac{5x}{4} \times \frac{12}{10x} = \frac{4y - 75}{y - 25} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{4y - 75}{y - 25}$$

$$\Rightarrow 3(y - 25) = 2(4y - 75) \Rightarrow 3y - 75 = 8y - 150 \Rightarrow 150 - 75 = 8y - 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 75 = 5y \Rightarrow y = \frac{75}{5} \Rightarrow y = 15$$

Substituindo-se o valor de "*y*" encontrado na equação (1), teremos:

$$\frac{5x}{4} = 4y - 75 \Rightarrow \frac{5x}{4} = 4 \times 15 - 75 \Rightarrow \frac{5x}{4} = 4 \times 15 - 75$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{4} = 60 - 75 \Rightarrow \frac{5x}{4} = -15 \Rightarrow x = -\frac{15 \times 4}{5} \Rightarrow x = -12$$

S = {(–12 ; 15)}

Exercícios resolvidos

1. (FCC) Em dois mercados, as condições de equilíbrio de manteiga e margarina, onde P_b é o preço da manteiga, P_m é o preço da margarina, são dadas pelas equações a seguir:

$$\begin{cases} 8P_b - 3P_m = 7 \\ -P_b + 7P_m = 19 \end{cases}$$

Os preços da manteiga e da margarina que levarão o modelo ao equilíbrio são, respectivamente:

a) 2 e 3.
b) 3 e 2.
c) 3 e 4.
d) 4 e 2.
e) 4 e 3.

Resolução:

Como o sistema já está montado, apenas desenvolveremos seu cálculo utilizando o processo da ***adição***.

$$\begin{cases} 8P_b - 3P_m = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ -P_b + 7P_m = 19 \ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

Inicialmente, multiplicaremos todos os membros da equação (II) por 8:

$$\begin{cases} 8P_b - 3P_m = 7 \\ \left(-P_b + 7P_m = 19\right) \times 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8P_b - 3P_m = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ -8P_b + 56P_m = 152 \ldots\ldots\ldots\ldots(III) \end{cases}$$

Adicionando cada membro das igualdades, teremos:

$$+ \begin{cases} 8P_b - 3P_m = 7 \\ -8P_b + 56P_m = 152 \end{cases}$$
$$\overline{8P_b - 8P_b - 3P_m + 56P_m = 7 + 152}$$

$$53P_m = 159 \quad \Rightarrow \quad P_m = \frac{159}{53} \quad \Rightarrow \quad P_m = R\$3,00 \text{ (preço da margarina)}$$

Substituindo o valor encontrado de P_m em qualquer das relações anteriores, por exemplo, na equação (I), teremos, para o valor de P_b (preço da manteiga).

$$8P_b - 3P_m = 7 \quad \Rightarrow \quad 8P_b - 3 \times 3 = 7 \quad \Rightarrow \quad 8P_b = 7 + 9$$

$$8P_b = 16 \quad \Rightarrow \quad P_b = \frac{16}{8} \quad \Rightarrow \quad P_b = R\$2,00$$

Logo, o preço da manteiga (P_b) vale R$2,00 e o preço da margarina (P_m) vale R$3,00.

Gabarito: A

2. (FGV) A solução do sistema $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{4x-y}{4} = \dfrac{33}{4} \end{cases}$ **é um par ordenado (*x*, *y*), tal que *x* – *y* vale:**

a) 15.
b) – 3.
c) 3.
d) – 15.
e) 5.

Resolução:

Inicialmente, eliminaremos os denominadores de ambas as equações para melhor visualização do sistema. Isso é perfeitamente possível, já que ambos os denominadores são iguais.

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{\cancel{2}} = -\dfrac{3}{\cancel{2}} & \Rightarrow \quad x+y=-3 \\ \dfrac{4x-y}{\cancel{4}} = \dfrac{33}{\cancel{4}} & \Rightarrow \quad 4x-y=33 \end{cases}$$, o novo sistema linear será formado por:

$$\begin{cases} x+y=-3 \text{..............(I)} \\ 4x-y=33 \text{............(II)} \end{cases}$$

Utilizando o processo da ***adição***, somaremos membro a membro as equações (I) e (II)

$$\begin{array}{c} + \begin{cases} x+y=-3 \\ 4x-y=33 \end{cases} \\ \hline x + 4x + y - y = 33 + (-3) \end{array}$$

$$5x=30 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{30}{5} \quad \Rightarrow \quad x=6$$

Substituindo o valor encontrado (x = 6) na equação (I), determinaremos o valor de "y".

$x+y=-3 \quad \Rightarrow \quad 6+y=-3 \quad \Rightarrow \quad y=-3-6 \quad \Rightarrow \quad y=-9$

O par ordenado desejado é (6, –9) e $x - y$ vale: 6 – (–9) = 6 + 9 = 15

Gabarito: A

3. **(NCE) João, Marcos e Laura dividiram um trabalho de tal modo que João trabalhou o dobro de Marcos e Marcos o dobro de Laura. Receberam o total de R$560,00 pelo trabalho. Dividiram esse valor de forma proporcional à quantidade de trabalho de cada um. Marcos recebeu:**
   a) R$80,00.
   b) R$140,00.
   c) R$160,00.
   d) R$280,00.
   e) R$320,00.

Resolução:

Chamaremos de:

J → o valor recebido por João;
M → o valor recebido por Marcos;
L → o valor recebido por Laura.

Sendo o total recebido pelo trabalho realizado, pelos três, é igual a R$560,00, então concluímos que:

J + M + L = 560................(I)

Porém, de acordo com o enunciado da questão, João trabalhou o dobro de Marcos e Marcos o dobro de Laura. Assim, podemos montar as seguintes relações:

$$\begin{cases} J=2\times M \text{................(II)} \\ M=2\times L \text{...............(III)} \end{cases}$$

Como ambos ganharão proporcionalmente ao que trabalharam, então João ganhará o dobro de Marcos e, por sua vez, Marcos ganhará o dobro de Laura.

Para determinarmos o valor recebido por Marcos, ***substituiremos*** os valores das relações (II) e (III), em função do valor que Marcos receberá, em (I).

$$\begin{cases} J=2\times M \\ M=2\times L \end{cases} \Rightarrow \quad L=\frac{M}{2} \Rightarrow 2M+M+\frac{M}{2}=560 \quad \Rightarrow \quad 3M+\frac{M}{2}=560$$

$$\frac{6M+M}{2}=560 \quad \Rightarrow \quad \frac{7M}{2}=560 \quad \Rightarrow \quad M=\frac{2\times 560}{7} \quad \Rightarrow \quad M=R\$160,00$$

Gabarito: C

4. (FCC) Três agentes revistaram um total de 152 visitantes. Essa tarefa foi feita de forma que o primeiro revistou 12 pessoas a menos que o segundo e este 8 a menos que o terceiro. O número de pessoas revistadas pelo:

a) primeiro foi 40.
b) segundo foi 50.
c) terceiro foi 62.
d) segundo foi 54.
e) primeiro foi 45.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de:
"*x*" a quantidade de pessoas que o 1º agente revistou.
"*y*" a quantidade de pessoas que o 2º agente revistou.
"*z*" a quantidade de pessoas que o 3º agente revistou.

Pelo enunciado do texto, sabemos que o total de pessoas revistadas pelos três agentes foi de 152, ou seja:

$$x + y + z = 152\text{.............(I)}$$

E que tal tarefa foi feita de forma que o primeiro revistou 12 pessoas a menos que o segundo e este 8 a menos que o terceiro. Assim, teremos as seguintes relações:

$$\begin{cases} x=y-12 \text{ ("o primeiro revistou 12 pessoas a menos que o segundo")} \\ y=z-8 \text{ ("e este } -\text{o segundo}-\text{ 8 a menos que o terceiro")} \end{cases}$$

Colocando "*x*" e "*z*" em função de "*y*", obtemos as seguintes relações:

$$\begin{cases} x = y-12\text{...(II)} \\ y = z-8 \quad \Rightarrow \quad (-z=-y-8)\times(-1) \quad \Rightarrow \quad z = y+8\text{...........(III)} \end{cases}$$

Substituindo os valores de "*x*" e "*z*" na equação (I), teremos:

$$x + y + z = 152 \quad \Rightarrow \quad (y-12)+y+(y+8)=152 \quad \Rightarrow \quad 3y=152+12-8$$

$$3y = 156 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{156}{3} \quad \Rightarrow \quad y = 52 \text{ pessoas revistadas}$$

Substituindo o valor de "y" em (II) e (III), obteremos, respectivamente, para "x" e "z":

$$\begin{cases} x = y-12 \quad \Rightarrow \quad x = 52-12 \quad \Rightarrow \quad x = 40 \text{ pessoas revistadas} \\ z = y+8 \quad \Rightarrow \quad z = 52+8 \quad \Rightarrow \quad z = 60 \text{ pessoas revistadas} \end{cases}$$

Portanto:
O 1º agente revistou 40 pessoas;
O 2º agente revistou 52 pessoas;
O 3º agente revistou 60 pessoas.

Gabarito: A

5. (FCC) Um pai quer dividir certa quantia entre seus três filhos, de modo que um deles receba a metade da quantia e mais R$400,00, outro receba 20% da quantia e o terceiro receba 50% do que couber ao primeiro. O total a ser dividido é:

a) R$9.000,00.
b) R$10.000,00.
c) R$12.000,00.
d) R$15.000,00.
e) R$18.000,00.

Resolução:

Chamaremos "x" o valor da quantia a ser dividida entre os irmãos e
A: o valor que o primeiro irá receber;
B: o valor que o segundo irá receber;
C: o valor que o terceiro irá receber. E, de acordo com o texto, temos as seguintes relações:

"um deles receba a metade da quantia e mais R$400,00": $A = \frac{x}{2} + 400$

"outro receba 20% da quantia": $B = 20\% \text{ de } x \quad \Rightarrow \quad B = \frac{20}{100} \times x \quad \Rightarrow \quad B = \frac{x}{5}$

"o terceiro receba 50% do que couber ao primeiro": $C = 50\% \text{ de } \left(\frac{x}{2} + 400\right)$ ou ainda

$$C = \frac{50}{100} \times \left(\frac{x}{2} + 400\right) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} \times \left(\frac{x}{2} + 400\right) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{x}{4} + 200$$

Assim, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A = \frac{x}{2} + 400 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)} \\ B = \frac{x}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II)} \\ C = \frac{x}{4} + 200 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(III)} \\ A + B + C = x \ldots\ldots\ldots\text{(IV)} \end{cases}$$

Sabendo-se que a soma das três quantias recebida totaliza a quantia "*x*" distribuída, então, ***substituindo*** as relações (I), (II) e (III), em (IV), temos que:

$$A + B + C = x \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{x}{2} + 400}_{A} + \underbrace{\frac{x}{5}}_{B} + \underbrace{\frac{x}{4} + 200}_{C} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{5} + \frac{x}{4} + 600 = x$$

Fazendo o mmc(2 ; 4 ; 5) = 20 (ver Capítulo 10)

$$\begin{array}{ccc|l} 2\ , & 4\ , & 5 & 2 \\ 1\ , & 2\ , & 5 & 2 \\ 1\ , & 1\ , & 5 & 5 \\ \hline 1\ , & 1\ , & 1 & mmc(2; 4; 5) = 2^2 \times 5 = 20 \end{array}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{5} + \frac{x}{4} + 600 = x \qquad \frac{10 \times x + 4 \times x + 5 \times x + 20 \times 600}{20} = \frac{20 \times x}{20}$$

$$10x + 4x + 5x + 12.000 = 20x \quad \Rightarrow \quad 12.000 = 20x - 19x$$

$$x = R\$\ 12.000,00$$

Gabarito: C

6. **(FEC) No almoxarifado de uma empresa há canetas e borrachas num total de 305 unidades. Se o número de canetas é igual ao triplo do número de borrachas diminuído de 35 unidades, o número de canetas é:**
   a) 160.
   b) 190.
   c) 200.
   d) 220.
   e) 250.

Resolução:

Chamaremos de:

C: total de "canetas" no almoxarifado.

B: total de "borrachas" no almoxarifado.

Se o total de canetas e borrachas é de 305 unidades, então:

C + B = 305................(I)

Se o número de canetas é igual ao triplo do número de borrachas diminuído de 35 unidades, então, temos uma segunda equação, dada por:

$$C \quad = \quad \underbrace{3B - 35}_{\substack{\text{triplo de borrachas} \\ \text{diminuído de} \\ \text{35 unidades}}} \quad ....(II)$$

Formando um sistema linear do 1º grau com duas variáveis entre as relações (I) e (II):

$$\begin{cases} C + B = 305.............(I) \\ C = 3B - 35.............(II) \end{cases}$$

Desenvolvendo o sistema pelo processo de ***substituição***, ou seja, substituindo o valor de "C" da relação (II) em (I), obtemos:

$$3B - 35 + B = 305 \quad \Rightarrow \quad 4B = 305+35 \quad \Rightarrow \quad 4B = 340 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{340}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad B = 85 \text{ borrachas}$$

Substituindo o valor de "B" encontrado na relação (I), encontraremos para o valor de "C":

$C + B = 305 \quad \Rightarrow \quad C + 85 = 305 \quad \Rightarrow \quad C = 305 - 85 \quad \Rightarrow \quad C = 220$ canetas

Portanto, existem 220 canetas.

Gabarito: D

7. (FCC) Nos três andares de um prédio de apartamentos moram 68 pessoas. Sabe-se que: o número de residentes no segundo andar é o dobro do número dos que residem no primeiro; os residentes no terceiro andar excedem em 20 pessoas o número dos que residem no primeiro andar. Se *x*, *y* e *z* são os números de residentes no primeiro, segundo e terceiro andares, respectivamente, então:

a) $x = 15$.
b) $y = 25$.
c) $z = 36$.
d) $x = 12$.
e) $y = 20$.

Resolução:

De acordo com o enunciado da questão, temos que:

"*x*" equivale à quantidade de moradores referente ao 1º andar de um prédio;
"*y*" equivale à quantidade de moradores referente ao 2º andar de um prédio;
"*z*" equivale à quantidade de moradores referente ao 3º andar de um prédio;

Sendo o total de moradores igual a 68, então, concluímos que:

$x + y + z = 68$..................(I)

Também pelo enunciado sabe-se que o número de residentes no segundo andar é o dobro do número dos que residem no primeiro, ou seja:

$y = 2x$.................(II)

E os residentes no terceiro andar excedem em 20 pessoas o número dos que residem no primeiro andar. Portanto:

$z = x + 20$.................(III)

Formando um sistema linear entre as três relações anteriores, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 68 \\ y = 2x \\ z = x + 20 \end{cases}$$

Utilizando-se o processo de ***substituição***, substituiremos os valores de "*y*" e de "*z*", respectivamente, das relações (II) e (III), na relação (I).

$$x + y + z = 68 \quad \Rightarrow \quad x + 2x + x + 20 = 68 \quad \Rightarrow \quad 4x = 68 - 20$$

$$4x = 48 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{48}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 12 \text{ moradores}$$

Sendo $x = 12$, então, os demais valores são dados por:

$$y = 2x \quad \Rightarrow \quad y = 2 \times 12 \quad \Rightarrow \quad y = 24 \text{ moradores}$$

$$z = x + 20 \quad \Rightarrow \quad z = 12 + 20 \quad \Rightarrow \quad z = 32 \text{ moradores}$$

Gabarito: D

8. (FCC) Pretende-se dividir a quantia de R$2.500,00 em duas partes tais que a soma da terça parte da primeira com o triplo da segunda seja igual a R$2.700,00. A diferença positiva entre os valores das duas partes é de:

a) R$700,00.
b) R$800,00.
c) R$900,00.
d) R$1.000,00.
e) R$1.100,00.

Resolução:

"Pretende-se dividir a quantia de R$ 2.500,00 em duas partes". Inicialmente, chamaremos essas partes de "*x*" e "*y*", então, a soma dessas partes deve ser igual a R$ 2.500,00:

$$x + y = 2.500 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)}$$

Sendo a soma da terça parte da primeira com o triplo da segunda igual a R$2.700,00, então, podemos montar a seguinte relação (considerando "*x*" como sendo a 1ª parte e, "*y*", a 2ª parte):

$$\frac{x}{3} + 3y = 2.700 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II)}$$

Formando um sistema linear entre as relações (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} x + y = 2.500 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)} \\ \dfrac{x}{3} + 3y = 2.700 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II)} \end{cases}$$, multiplicando todos os membros da relação (II) por (–3), temos:

$$\left(\frac{x}{3} + 3y = 2.700\right) \times (-3) \quad \Rightarrow \quad -x - 9y = -8.100 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(III)}$$

$$\begin{cases} x + y = 2.500 \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)} \\ -x - 9y = -8.100 \ldots\ldots\ldots\text{(III)} \end{cases}$$

Pelo processo da ***adição***, somando-se membro a membro das igualdades, teremos:

$$+\begin{cases} x + y = 2.500 \\ -x - 9y = -8.100 \end{cases}$$
$$\overline{x - x + y - 9y = 2.500 - 8.100}$$

$$(-8y=-5.600)\times(-1) \quad\Rightarrow\quad 8y=5.600 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{5.600}{8} \quad\Rightarrow\quad y=\text{R\$}700{,}00$$

Substituindo o valor de "*y*" encontrado na relação (I), teremos como valor de "*x*":

$$x+y=2.500 \quad\Rightarrow\quad x+700=2.500 \quad\Rightarrow\quad x=2.500-700$$
$$x=\text{R\$ }1.800{,}00$$

A diferença positiva entre os valores das duas partes é de:
R$ 1.800,00 – R$ 700,00 = R$ 1.100,00
Gabarito: E

9. (FCC) Um lote de processos deve ser dividido entre os funcionários de uma seção para serem arquivados. Se cada funcionário arquivar 16 processos, restarão 8 a serem arquivados. Entretanto, se cada um arquivar 14 processos, sobrarão 32. O número de processos do lote é:

a) 186.
b) 190.
c) 192.
d) 194.
e) 200.

Resolução:

Inicialmente chamaremos de "*x*" o número total de funcionários de uma determinada seção e de "*y*" a quantidade correspondente de certo lote de processos.

Iniciaremos a montagem de acordo com o que foi proposto pelo enunciado: "Se cada funcionário arquivar 16 processos, restarão 8 a serem arquivados."

$x \times 16 + 8 = y$..............(I)

Observe que essa relação traduz que cada um dos "*x*" funcionários dessa seção arquivou 16 processos e, somados com os 8 processos que restaram, totalizam os "*y*" processos desse lote.

Para a segunda relação, tomaremos a segunda parte do enunciado: "Entretanto, se cada um arquivar 14 processos, sobrarão 32."

$x \times 14 + 32 = y$..............(II)

De forma análoga, observe que se cada um dos "*x*" funcionários dessa seção arquivar 14 processos e somar com os 32 processos restantes, totalizam os "*y*" processos desse lote.

Formando-se um sistema linear entre as relações (I) e (II), obtemos:

$$\begin{cases}16x+8=y\text{................(I)}\\14x+32=y\text{.............(II)}\end{cases}$$

Pelo processo de ***comparação***, igualando-se os valores de "*y*" entre as duas equações, obteremos a seguinte expressão:

$x \times 16 + 8 = x \times 14 + 32$

$$16x-14x=32-8 \;\Rightarrow\; 2x=24 \;\Rightarrow\; x=\frac{24}{2} \;\Rightarrow\; x=12 \text{ funcionários}$$

Para determinarmos o número de processos desse lote, basta substituir o valor de *x* (que representa o número total de funcionários dessa seção) na primeira ou na segunda equação encontrada. ***Substituindo*** na primeira relação, teremos, para o valor de "y" (que representa o total de processos no lote):

$y = x \times 14 + 32 \quad \Rightarrow \quad y = 12 \times 14 + 32 \quad \Rightarrow \quad y = 200$ processos

Gabarito: E

10. (FEC) Pedro é um ano mais velho do que José, que é um ano mais velho do que Afonso. A soma das idades dos três é igual a 138. Daqui a doze anos, Pedro terá a seguinte idade:

a) 55.
b) 56.
c) 57.
d) 58.
e) 59.

Resolução:

Inicialmente, determinaremos que: $\begin{cases} \text{P : idade de Pedro;} \\ \text{J : idade de José;} \\ \text{A : idade de Afonso.} \end{cases}$

De acordo com o enunciado da questão, temos:

$$\begin{cases} P = J + 1 & \text{(Pedro é um ano mais velho do que José)..............(I)} \\ J = A + 1 & \text{(José é um ano mais velho do que Afonso)...........(II)} \\ P + J + A = 138 & \text{(A soma das idades dos três é igual a 138)...........(III)} \end{cases}$$

De acordo com o enunciado da questão, formou-se um sistema linear do 1º grau com três incógnitas (P, J e A). Colocando as variáveis "P" e "A" em função de "J", em outras palavras, isolando as variáveis "P" e "A", teremos:

$$\left\langle \begin{matrix} P = J + 1 \\ A = J - 1 \end{matrix} \right.$$

Substituindo os valores encontrados em função de "P" e "A" em (III), obteremos:

$$\underbrace{P}_{J+1} + J + \underbrace{A}_{J-1} = 138 \quad \Rightarrow \quad J + 1 + J + J - 1 = 138 \quad \Rightarrow \quad 3J = 138 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{138}{3}$$

J = 46 anos, portanto José tem 46 anos, assim as demais idades serão de:

$P = 46 + 1 \quad \Rightarrow \quad P = 47$, idade de Pedro.

$A = 46 - 1 \quad \Rightarrow \quad A = 45$, idade de Afonso.

Assim, daqui a 12 anos, Pedro terá: $47 + 12 = 59$ anos.

Gabarito: E

11. (FCC) Curiosamente, três amigos, X, Y e Z, observaram que: o salário de X equivale a 80% do salário de Y e o salário de Y corresponde a 80% do salário de Z. Se os salários dos três totalizam R$3.355,00, então:

a) X recebe R$880,00.
b) X recebe R$960,00.
c) Y recebe R$1.200,00.
d) Z recebe R$1.275,00.
e) Z recebe R$1.350,00.

Resolução:

Pelo enunciado da questão, temos a seguinte relação entre os salários de X, Y e Z:

$$\begin{cases} X = 80\%Y & \text{(o salário de X equivale a 80\% do salário de Y)} \\ Y = 80\%Z & \text{(o salário de Y equivale a 80\% do salário de Z)} \\ X+Y+Z = R\$3.355,00 & \text{(os três salários totalizam R\$3.355,00)} \end{cases}$$

Desenvolvendo as relações anteriores, teremos:

$$\begin{cases} X = 80\%Y \quad \text{ou} \quad X = \dfrac{80}{100}\times Y \quad \text{ou} \quad X = \dfrac{4Y}{5}\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ Y = 80\%Z \quad \text{ou} \quad Y = \dfrac{80}{100}\times Z \quad \text{ou} \quad Y = \dfrac{4Z}{5}\ldots\ldots\ldots\ldots(II) \\ X+Y+Z = R\$3.355,00 \end{cases}$$

Colocando as relações (1) e (2) em função de "Z", ou seja, isolando "X" na relação (1) e isolando "Z" na relação (2), obteremos:

$$X = \frac{4Y}{5}\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \text{ e } Z = \frac{5Y}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

Substituindo os valores encontrados de "X" e de "Z" na relação X + Y + Z = R$ 3.355,00

$$\frac{4Y}{5} + Y + \frac{5Y}{4} = 3.355 \text{ ; fazendo o mmc}(4;5) = 20$$

Obs.: Como os números 4 e 5 são primos entre si, então o ***mínimo múltiplo comum*** (*mmc*) entre esses números será dado pelo produto entre eles. mmc(4;5) = 20

$$\frac{4Y}{5} + \frac{Y}{1} + \frac{5Y}{4} = \frac{3.355}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\times 4Y}{20} + \frac{20\times Y}{20} + \frac{5\times 5Y}{20} = \frac{20\times 3.355}{20}$$

$$16Y + 20Y + 25Y = 67.100 \quad \Rightarrow \quad 61Y = 67.100 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{67.100}{61}$$

Y = R$1.100,00 (valor do salário de *Y*)

Para os demais valores, teremos:

$$X = \frac{4Y}{5} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{4\times 1.100}{5} \quad \Rightarrow \quad X = R\$880,00$$

$$Z = \frac{5Y}{4} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{5\times 1.100}{4} \quad \Rightarrow \quad Y = R\$1.375,00$$

Gabarito: A

12. (NCE) No planejamento de um certo setor, o chefe distribuiu as 82 tarefas do mês por seus três funcionários de modo que Maria ficou com sete tarefas a mais que Josias que, por sua vez, recebeu menos 15 tarefas que Inácio. O produto entre o número de tarefas de Maria e de Inácio é igual a:

a) 945.
b) 894.
c) 732.
d) 710.
e) 697.

Resolução:

Inicialmente, denotaremos de:

$$\begin{cases} x : \text{número de tarefas destinadas a Maria;} \\ y : \text{número de tarefas destinadas a Josias;} \\ z : \text{número de tarefas destinadas a Inácio} \end{cases}$$

De acordo com o enunciado da questão, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 82 \text{ tarefas..............(I)} \\ x = y + 7 \text{ tarefas.......................(II)} \\ y = z - 15 \text{ tarefas......................(III)} \end{cases}$$

Isolando o valor de ***y*** na relação (II):

$y = x - 7$...................(IV)

Substituindo a relação (IV) em (III), obtemos:

$x - 7 = z - 15$, definindo a nova relação em função de *x*, temos:

$z - 15 = x - 7 \quad \Rightarrow \quad z = x - 7 + 15 \quad \Rightarrow \quad z = x + 8$.....................(V)

Substituindo os valores de *z* da relação (V) e de *y* da relação (IV) em (I), determinaremos o valor de *x*.

$$x + y + z = 82 \quad \Rightarrow \quad x + x - 7 + x + 8 = 82$$

$$3x + 1 = 82 \quad \Rightarrow \quad 3x = 82 - 1$$

$$3x = 81 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{81}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 27 \text{ tarefas}$$

Assim, temos os demais valores:

$$y = x - 7 \quad \Rightarrow \quad y = 27 - 7 \quad \Rightarrow \quad y = 20 \text{ tarefas}$$

$$z = x + 8 \quad \Rightarrow \quad z = 27 + 8 \quad \Rightarrow \quad z = 35 \text{ tarefas}$$

O produto entre o número de tarefas de Maria e de Inácio é igual a:

$x \times z = 27 \times 35 = 945$

Gabarito: A

13. (Cesgranrio) Uma empresa aluga saveiros para grupos de turistas por um preço fixo. Se o preço do aluguel for dividido igualmente entre 25 pessoas, cada uma pagará *x* reais. Se a divisão for entre 20 pessoas, o preço por pessoa será igual a (*x* + 5) reais. Sendo assim, pode-se concluir que o aluguel desses saveiros custa, em reais:

a) 600,00.
b) 500,00.
c) 450,00.
d) 250,00.
e) 200,00.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de:
"*y*": o valor do aluguel cobrado pela empresa;
"*x*": o valor que cada pessoa pagará, caso esse grupo seja de 25 pessoas;
"$(x+5)$": o valor que cada pessoa pagará, caso esse grupo seja formado por, apenas, 20 pessoas.

De acordo com o enunciado, podemos construir duas relações iniciais:

– "Se o preço do aluguel for dividido igualmente entre 25 pessoas, cada uma pagará *x* reais".

$$\frac{y}{25} = x \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, \text{(I)}$$

– "Se a divisão for entre 20 pessoas, o preço por pessoa será igual a $(x+5)$ reais".

$$\frac{y}{20} = x + 5 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, \text{(II)}$$

Formando um sistema entre as relações (I) e (II), obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{25} = x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)} \\ \dfrac{y}{20} = x + 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo o valor de "*x*" da relação (I), em (II), teremos:

$$\frac{y}{20} = \frac{y}{25} + 5 \quad \Rightarrow \quad \text{fazendo o mmc(20;25):}$$

$$\begin{array}{rr|l} 20 & 25 & 2 \\ 10 & 25 & 2 \\ 5 & 25 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \\ \hline 1 & 1 & mmc(20;\,25) = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 100 \end{array}$$

$$\frac{5 \times y}{100} = \frac{4 \times y}{100} + \frac{100 \times 5}{100} \quad \Rightarrow \quad 5y = 4y + 500 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y = \text{R\$}500{,}00}_{\text{valor do aluguel cobrado pela empresa}}$$

Gabarito: B

14. (Cesgranrio) Vinte pessoas se reuniram para organizar uma festa. Calcularam as despesas e decidiram dividir o total igualmente entre todos, mas, na semana da festa, três dessas pessoas precisaram viajar. Com isso, cada uma das demais teve de aumentar sua contribuição em R$ 9,00 para que todas as despesas fossem pagas. A quantia, em reais, que cada pessoa pagou para participar dessa festa foi:

a) 51,00.
b) 54,00.
c) 60,00.
d) 66,00.
e) 74,00.

Resolução:

Chamaremos inicialmente de

"*y*": o valor total, em reais, das despesas da festa.

"*x*": o valor que cada pessoa deverá contribuir para quitar as despesas dessa festa.

E, de acordo com o enunciado, podemos montar duas relações importantes:

Inicialmente, a despesa total foi "repartida" igualmente entre todas as 20 pessoas que se reuniram, assim, teríamos como valor cobrado para cada pessoa:

$$\frac{y}{20} = x \text{ .... relação (1)}$$

Contudo, na semana da festa, três dessas pessoas precisaram viajar, sobrando apenas 17 pessoas. Com isso, cada uma das demais teve de aumentar sua contribuição em R$9,00 para que todas as despesas fossem pagas, assim, a nova relação formada será dada por:

$$\frac{y}{17} = x + 9 \text{ .... relação (2)}$$

A quantia paga por cada pessoa que participou dessa festa será a quantia inicial prevista "*x* reais" mais a contribuição de R$9,00, após a saída de três pessoas. Para determinarmos esse valor, isolaremos o valor de "*y*" da relação (1) e substituiremos no mesmo valor de "*y*" da relação (2).

$$\frac{y}{20} = x \quad \Rightarrow \quad y = 20x$$

$$\underbrace{\frac{y}{17} = x + 9}_{\text{relação (2)}} \quad \Rightarrow \quad \frac{20x}{17} = x + 9 \quad \Rightarrow \quad 20x = 17(x + 9) \quad \Rightarrow \quad 20x = 17x + 153$$

$$20x - 17x = 153 \quad \Rightarrow \quad 3x = 153 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{153}{3} \quad \Rightarrow \quad x = R\$\ 51{,}00$$

Sendo "$x + 9$" o valor que foi pago por cada pessoa que participou da festa, então, esse valor pode ser expresso, por:

R$51,00 + R$9,00 = R$60,00

Gabarito: C

15. (Cesgranrio) Um clube formou, com seus 126 atletas, 16 equipes para os jogos de futebol e vôlei. Sabe-se que para os jogos de futebol cada equipe tem 11 atletas e, para os jogos de vôlei, 6. Quantas equipes participarão dos jogos de vôlei?

a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 10.
e) 11.

Resolução:

Chamaremos de:

"F": a quantidade de equipes formadas de futebol

"V": a quantidade de equipes formadas de vôlei.

De acordo com o enunciado, o clube formou um total de 16 equipes, ou seja, a quantidade de equipes de futebol mais a de vôlei totalizam 16. Matematicamente:

$F + V = 16$.................(I)

Sendo o número total de atletas que compõem essas equipes de 126 e previamente conhecida a quantidade de atletas por equipes: 11 atletas para o futebol e 6 atletas para o vôlei. Então, podemos montar a seguinte relação:

$11F + 6V = 126$.................(II)

Formando um sistema entre as relações encontradas, teremos:

$$\begin{cases} F + V = 16 \text{....................(I)} \\ 11F + 6V = 126 \text{............(II)} \end{cases}$$

Multiplicando todos os membros da relação (I) por (–6)

$$(F + V = 16) \times (-6) \quad \Rightarrow \quad -6F - 6V = -96$$

$$\begin{cases} -6F - 6V = -96 \\ 11F + 6V = 126 \end{cases}$$

Pelo processo da ***adição***, somaremos membro a membro os valores das relações.

$$+\begin{cases} -6F - 6V = -96 \\ 11F + 6V = 126 \end{cases}$$

$$\overline{11F - 6F + 6V - 6V = 126 - 96}$$

$$5F = 30 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{30}{5} \quad \Rightarrow \quad F = 6 \text{ equipes de futebol}$$

Portanto, teremos a seguinte quantidade de equipes de vôlei:

$$F + V = 16 \quad \Rightarrow \quad 6 + V = 16 \quad \Rightarrow \quad V = 16 - 6 \quad \Rightarrow \quad V = 10 \text{ equipes de vôlei}$$

Gabarito: D

16. (NCE) Na saída do trabalho, um grupo de amigos foi a uma padaria e três deles se encarregaram de pagar as despesas. O primeiro pagou R$ 3,30 por três cafés e dois pães com manteiga. O segundo pagou R$ 3,20 por dois cafés e três pães com manteiga. O terceiro pagou, por dois cafés e um pão com manteiga, a quantia de:

a) R$ 1,80.
b) R$ 1,90.
c) R$ 2,00.
d) R$ 2,10.
e) R$ 2,20.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de:

"x": o valor unitário do café;

"y": o valor unitário de um pão com manteiga;

Dos amigos, o primeiro pagou R$3,30 por três cafés e dois pães com manteiga, ou seja:

$3x + 2y = 3,30$..................(I)

O segundo pagou RS 3,20 por dois cafés e três pães com manteiga que, matematicamente, representa:

$2x + 3y = 3,20$..................(II)

Formando um sistema entre as relações encontradas, podemos determinar o valor unitário de um café e de um pão com manteiga.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3,30 \text{..................(I)} \\ 2x + 3y = 3,20 \text{..................(II)} \end{cases}$$

Multiplicando-se todos os membros da relação (I) por (–2) e os membros da relação (II) por (3), obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (3x + 2y = 3,30) \times (-2) \\ (2x + 3y = 3,20) \times (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + -4y = -6,60 \\ 6x + 9y = 9,60 \end{cases}$$

Adicionando os membros do mesmo lado da igualdade:

$$+\begin{cases} -6x + -4y = -6,60 \\ 6x + 9y = 9,60 \end{cases}$$
$$\overline{6x - 6x + 9y - 4y = 9,60 - 6,60}$$

$$5y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad y = R\$\ 0,60$$

Substituindo o valor encontrado na relação (I), obteremos para o valor de "*y*":

$$3x + 2y = 3,30 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2(0,60) = 3,30 \quad \Rightarrow \quad 3x = 3,30 - 1,20$$

$$3x = 2,1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2,1}{} \quad \Rightarrow \quad x = R\$\ 0,70$$

Portanto, o terceiro pagou, por dois cafés e um pão com manteiga, a quantia de:
$2 \times$ R$0,70 + $1 \times$ R$0,60 = R$2,00

Gabarito: C

17. (FCC) Em um estacionamento há 31 veículos, alguns de duas rodas e os demais de quatro rodas. Se o total de rodas é 100, de quantas unidades o número de veículos de quatro rodas excede o de duas?

a) 13.
b) 11.
c) 9.
d) 7.
e) 5.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de:
"D": a quantidade de veículos com duas rodas;
"Q": a quantidade de veículos com quatro rodas;

Se, em um estacionamento há 31 veículos, então:

$D + Q = 31$.................(I)

Se o total de rodas é 100, então podemos escrever uma nova relação em função do número de rodas dos veículos.

$2D + 4Q = 100$..................(II)

Formando um sistema linear entre as duas relações encontradas, teremos:

$$\begin{cases} D + Q = 31 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ 2D + 4Q = 100 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

Dividindo todos os membros da relação (II) por (–2):

$$(2D + 4Q = 100) \div (-2) \quad \Rightarrow \quad -D - 2Q = -50 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

$$\begin{cases} D + Q = 31 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ -D - 2Q = -50 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

Pelo processo da ***adição***, adicionaremos os membros do mesmo lado da igualdade:

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} D + Q = 31 \\ -D - 2Q = -50 \end{cases} \\ \hline D - D + Q - 2Q = -19 \end{array}$$

$$(-Q = -19) \times (-1) \quad \Rightarrow \quad Q = 19 \text{ veículos com quatro rodas}$$

Substituindo o valor encontrado na relação (I), teremos para o valor de "D":

$$D + Q = 31 \quad \Rightarrow \quad D + 19 = 31 \quad \Rightarrow \quad D = 12 \text{ veículos com duas rodas}$$

Pelos valores encontrados, podemos perceber que existem sete veículos com quatro rodas a mais que os de duas rodas.

Gabarito: D

18. (Vunesp) Numa fazenda há ovelhas e avestruzes, totalizando 90 cabeças e 260 patas. Comparando-se o número de avestruzes com o das ovelhas, pode-se afirmar que há:

a) igual número de ovelhas e de avestruzes;
b) dez cabeças a mais de ovelhas;
c) dez cabeças a mais de avestruzes;
d) oito cabeças a mais de ovelhas;
e) oito cabeças a mais de avestruzes.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de:

"O": a quantidade de ovelhas na fazenda;

"A": a quantidade de avestruz na fazenda;

Como na fazenda existem 90 cabeças de animais, entre ovelhas e avestruzes, então, podemos concluir que:

$O + A = 90$.................(I)

Sendo o número de patas igual a 260, lembramos que: ovelha possui quatro patas e avestruz, duas, assim, podemos montar a seguinte relação entre os números de patas de cada animal.

$4O + 2A = 260$................(II)

Com as relações (I) e (II) podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} O + A = 90 \text{.................(I)} \\ 4O + 2A = 260 \text{...........(II)} \end{cases}$$

Dividindo-se todos os membros da relação (II) por (–2):

$$(4O + 2A = 260) \div (-2) \quad \Rightarrow \quad -2O - A = -130$$

$$\begin{cases} O + A = 90 \text{.....................(I)} \\ -2O - A = -130 \text{...........(III)} \end{cases}$$

Pelo processo da ***adição***, adicionaremos os membros do mesmo lado da igualdade:

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} O + A = 90 \\ -2O - A = -130 \end{cases} \\ \hline O - 2O + A - A = 90 - 130 \end{array}$$

$$(-O = -40) \times (-1) \quad \Rightarrow \quad O = 40 \text{ ovelhas}$$

Para o número de avestruzes, teremos, pela relação (I):

$O + A = 90 \quad \Rightarrow \quad 40 + A = 90 \quad \Rightarrow \quad A = 90 - 40 \quad \Rightarrow \quad A = 50$ avestruzes

Gabarito: C

19. (Cesgranrio) Numa distribuidora de combustível há dois turnos de trabalho, A e B, totalizando 80 funcionários. Se quatro funcionários do turno B passassem para o turno A, os dois turnos passariam a ter o mesmo número de funcionários. Quantos funcionários há no turno B?

a) 36.
b) 38.
c) 40.
d) 42.
e) 44.

Resolução:

"Numa distribuidora de combustível há dois turnos de trabalho, A e B, totalizando 80 funcionários", então podemos escrever:

$A + B = 80$...............(I)

"Se quatro funcionários do turno B passassem para o turno A, os dois turnos passariam a ter o mesmo número de funcionários". Observe a montagem a seguir:

$$\underbrace{B - 4}_{\text{saíram 4}} = \underbrace{A + 4}_{\text{entraram 4}} \quad \text{ou ainda } B - A = 8 \text{................(II)}$$

Com as relações (I) e (II) podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 80 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ B - A = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II) \end{cases}$$

Pelo processo da ***adição***, adicionaremos os membros do mesmo lado da igualdade:

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} A + B = 80 \\ B - A = 8 \end{cases} \\ \hline A - A + B + B = 88 \end{array}$$

$$2B = 88 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{88}{2} \quad \Rightarrow \quad B = 44 \text{ funcionários}$$

Gabarito: E

20. (FEC) João comprou duas bermudas e uma camisa para levar na viagem de férias que fará daqui a duas semanas. O preço de cada bermuda excede o preço de uma camisa em R$20,00, e João gastou R$139,00 nessa compra. Cada bermuda custou:

a) R$53,00.
b) R$33,00.
c) R$46,00.
d) R$26,00.
e) R$39,00.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de;
"B": o valor unitário da bermuda.
"C": o valor unitário da camisa.

De acordo com o enunciado, o preço de cada bermuda excede o preço de uma camisa em R$20,00, ou seja:

$B = C + 20 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

Se, João gastou R$139,00 em uma compra, então, a expressão que melhor representa essa compra, em função dos preços da bermuda e da camisa, é:

$2B + C = 139 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

Formando um sistema entre as relações encontradas:

$$\begin{cases} B = C + 20 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ 2B + C = 139 \ldots\ldots\ldots\ldots (II) \end{cases}$$

Pelo processo de ***substituição***, substituiremos o valor de "B" correspondente à relação (I) em (II).

$$2(C + 20) + C = 139 \quad \Rightarrow \quad 2C + 40 + C = 139 \quad \Rightarrow \quad 3C = 139 - 40$$

$$3C = 99 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{99}{3} \quad \Rightarrow \quad C = R\$\ 33{,}00$$

Para determinarmos o valor de uma bermuda, ***substituiremos*** o valor de "C" em (I)

$$B = C + 20 \quad \Rightarrow \quad B = 33 + 20 \quad \Rightarrow \quad B = R\$\ 53{,}00$$

Gabarito: A

21. Acrescentando 199 à soma de dois números, obtém–se 1000. Retirando-se 323 da diferença dos dois números, obtém-se 100. Determine a diferença entre a nona parte do maior número pela terça parte do menor.

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
d) 7.

Resolução:

Sejam "*x*" e "*y*" os referidos números do enunciado. Acrescentando 199 à soma desses dois números, obtém-se 1000, ou seja:

$(x + y) + 199 = 1.000$ .... (1)

Retirando-se 323 da diferença dos dois números, obtém-se 100.

$(x - y) - 323 = 100$ .... (2)

Formando um sistema linear entre as relações (1) e (2), tem-se:

$$\begin{cases}(x+y)+199=1.000\\(x-y)-323=100\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=1.000-199\\x-y=100+323\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=801\\x-y=423\end{cases} \quad (x > y)$$

Resolvendo por meio do *método da solução trivial*:

$$x = \frac{801+423}{2} = \frac{1224}{2} = 612$$

$$y = \frac{801-423}{2} = \frac{378}{2} = 189$$

Determinando a diferença entre a nona parte do maior número pela terça parte do menor, tem-se:

$$\frac{1}{9}\times 612 - \frac{1}{3}\times 189 = \frac{612}{9} - \frac{189}{3} = 68 - 63 = 5$$

Gabarito: C

22. Um caminhão tanque recolhe leite nas fazendas e sítios produtores e o transporta para o beneficiamento em laticínio. Em determinado dia, o tanque do caminhão continha 240 litros de leite em seu interior e, após recolher a produção nos sítios A e B, passou a ter 380 litros. Sabe-se que, naquele dia, o sítio B produziu 30 litros a mais que o sítio A. Nesse caso, a produção do sítio A naquele dia foi de:

a) 45.
b) 55.
c) 65.
d) 75.
e) 85.

Resolução:

De acordo com o enunciado, após recolher a produção nos sítios A e B, o caminhão passou a ter 380 litros em seu tanque. Se inicialmente o caminhão tinha 240 litros em seu tanque, concluímos que.

$A + B = 380 - 240$; ou $A + B = 140$..............(1)

Ainda pelo enunciado, foi afirmado que: (...)Sabe-se que, naquele dia, o sítio B produziu 30 litros a mais que o sítio A(...). Nesse caso, o dia referido é do recolhimento dos sítios A e B. Portanto, teremos:

$B = A + 30\ litros$; ou $B - A = 30$..................(2)

Agrupando as equações (1) e (2), determinaremos as quantidades A e B através de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

$$\begin{cases} A + B = 140 \\ B - A = 30 \end{cases}$$ somando-se as equações, obtemos:

$$2B = 170 \quad \Rightarrow B = \frac{170}{2} \quad \Rightarrow B = 85 \textit{ litros}$$

Substituindo a quantidade B encontrada na equação (1), temos:

$A + B = 140$...............(1)

$A = 140 - B \quad \Rightarrow \quad A = 140 - 85 \quad \Rightarrow \quad A = 55 \textit{ litros}$

Gabarito: B

23. (Cespe/UnB) Paulo e Roberto têm, juntos, R$340,00. Paulo comprou ingresso para jogo de futebol com 1/5 do que possuía. Roberto gastou 2/3 do que possuía na compra de ingresso para show de um artista internacional. Efetuadas essas despesas, eles ficaram com quantias iguais. Nesse caso, Roberto tinha, a mais que Paulo:

a) menos de R$150,00;
b) mais de R$150,00 e menos de R$160,00;
c) mais de R$160,00 e menos de R$170,00;
d) mais de R$170,00.

Resolução:

Chamaremos, inicialmente, de "x" e "y", respectivamente, as quantias pertencentes a Paulo e Roberto, e, de acordo com o enunciado, essas quantias somam R$340,00, ou seja:

$[x + y = 340]$.....................(1)

Paulo comprou ingresso para jogo de futebol com $\frac{1}{5}$ do que possuía, e Roberto gastou $\frac{2}{3}$ do que possuía na compra de ingresso para show de um artista internacional. Assim, podemos dizer que:

Valor do ingresso para o jogo = $\frac{1}{5}x$ (Paulo)

Valor do ingresso para o show = $\frac{2}{3}y$ (Roberto)

Efetuadas essas despesas, eles ficaram com quantias iguais.

$$\underbrace{\left(x - \frac{x}{5}\right)}_{\text{quantia que Paulo ficou}} = \underbrace{\left(y - \frac{2y}{3}\right)}_{\text{quantia que Roberto ficou}} \quad \Rightarrow \quad \frac{5x}{5} - \frac{x}{5} = \frac{3y}{3} - \frac{2y}{3}$$

$$\frac{5x - x}{5} = \frac{3y - 2y}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{5} = \frac{y}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{5} = \frac{y}{4 \times 3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{5} = \frac{y}{12} \text{.................(2)}$$

Considerando a proporção simples anterior dada pela equação (2):

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{12}=k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x}{5}=k \quad \Rightarrow \quad x=5k \\ \dfrac{y}{12}=k \quad \Rightarrow \quad y=12k \end{cases}$$

Substituindo os valores encontrados em função da constante de proporcionalidade (*k*), na relação (1), teremos:

$$x+y=340 \;\Rightarrow\; 5k+12k=340 \;\Rightarrow\; 17k=340 \;\Rightarrow\; k=\frac{340}{17} \;\Rightarrow\; \underbrace{k=20}_{\substack{\text{constante de}\\ \text{proporcionalidade}}}$$

Determinando os valores de "*x*" (quantidade que Paulo recebeu) e de "*y*" (quantidade que Roberto recebeu), teremos:

$$\begin{cases} x=5k \quad \Rightarrow \quad x=5\times 20 \quad \Rightarrow \quad x=100 \text{ reais} \\ y=12k \quad \Rightarrow \quad y=12\times 20 \quad \Rightarrow \quad y=240 \text{ reais} \end{cases}$$

Nesse caso, Roberto tinha a mais que Paulo:

$y-x=240-100=$ R\$ 140,00 (*valor inferior a R\$150,00*)

Gabarito: A

24. Joãozinho e Pedrinho travam um diálogo:
Diz Joãozinho: dá-me cinco das tuas bolas de gude e ficaremos com o mesmo número.
Responde Pedrinho: dá-me cinco das tuas e ficarei com o triplo das que te restam.
A quantidade de bolas de gude que Pedrinho e Joãozinho possuíam, eram de:

a) 20 e 20.
b) 15 e 25.
c) 25 e 15.
d) 10 e 30.
e) 30 e 10.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de:

"*x*": o número de bolas de gude de Joãozinho;

"*y*": o número de bolas de gude de Pedrinho.

Pelos dizeres de Joãozinho "dá-me cinco das tuas bolas de gude e ficaremos com o mesmo número", teremos que:

Joãozinho recebendo cinco bolas de Pedrinho fica com: $(x+5)$ bolas de gude

Pedrinho entregando cinco bolas a Pedrinho fica com: $(y-5)$ bolas de gude

De acordo com Joãozinho, ficarão com o mesmo número de bolas, ou seja:

$$\underbrace{x+5=y-5}_{\substack{\text{ficaremos com o mesmo}\\ \text{número de bolas de gude}\\ \textbf{Conclusão}\text{ de Joãzinho}}} \qquad \text{.......... (1)}$$

Pela resposta de Pedrinho "dá-me cinco das tuas e ficarei com o triplo das que te restam", chegaremos à seguinte conclusão:

Pedrinho recebendo cinco bolas de Joãozinho fica com: $(y + 5)$ bolas de gude;
Joãozinho entregando cinco bolas a Pedrinho resta-lhe: $(x - 5)$ bolas de gude.
Pela conclusão de Pedrinho:

$$\underbrace{y + 5 = 3 \times (x - 5)}_{\substack{\text{ficarei com o triplo das} \\ \text{que te restam}}} \quad .... \ (2)$$

Conclusão de Pedrinho

Formando um sistema do 1º grau com duas variáveis com as relações (1) e (2), teremos:

$$\begin{cases} x + 5 = y - 5 \\ y + 5 = 3(x - 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + 5 = y - x \\ y + 5 = 3x - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = y - x \\ 5 + 15 = 3x - y \end{cases}$$

$\begin{cases} y - x = 10 \\ 3x - y = 20 \end{cases}$, somando membro a membro as duas equações resultantes:

$$y - x + 3x - x - y = 10 + 20 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{2} \Rightarrow x = \underbrace{15 \text{ bolas de gude}}_{\text{de Joãozinho}}$$

Determinando o valor de "*y*":

$$y - x = 10 \Rightarrow y - 15 = 10 \Rightarrow y = 15 + 10 \Rightarrow y = \underbrace{25 \text{ bolas de gude}}_{\text{de Pedrinho}}$$

Gabarito: C

25. Um número é composto de três algarismos cuja soma dos valores absolutos é 6. O valor absoluto do algarismo das unidades é a soma dos valores absolutos dos algarismos das centenas e o das dezenas. O valor absoluto do algarismo das centenas é igual ao dobro do das dezenas, qual é esse número?

a) 213.
b) 312.
c) 321.
d) 123.
e) 132.

Resolução:

Seja um número qualquer formado por três algarismos representado por: A B C, onde C é o algarismo da casa das unidades, B da casa das dezenas e C da casa das centenas.

De acordo com o enunciado, temos que:

I) A soma dos seus algarismos igual a 6: $A + B + C = 6$ .... (1)
II) O valor absoluto do algarismo das unidades é a soma dos valores absolutos dos algarismos das centenas e das dezenas: $C = A + B$ .... (2)
III) O valor absoluto do algarismo das centenas é igual ao dobro do das dezenas: $A = 2B$ .... (3)

Substituindo a equação (2) em (1), teremos:

$$\underbrace{A + B}_{C} + C = 6 \quad \Rightarrow \quad C + C = 6 \quad \Rightarrow \quad 2C = 6 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 3$$

De acordo com valor de "C" (C = 2) encontrado, podemos formar o seguinte sistema do 1º grau com duas incógnitas:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ A = 2B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2B + B = 3 \quad \Rightarrow \quad 3B = 3 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{3} \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

Para o valor de "A", teremos:

$$A = 2B \quad \Rightarrow \quad A = 2 \times 1 \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

Portanto, o número será: 213

Gabarito: A

26. Sabendo que a soma entre dois números é 33 e a diferença, 15, qual o valor do produto entre esses números?

a) 108.
b) 216.
c) 64.
d) 128.
e) 256.

Resolução:

Seja "*x*" o valor do maior número e "*y*" o valor do menor número. De acordo com o enunciado do problema, tem-se: "a soma entre dois números é 33, e a diferença, 15".

$\begin{cases} x + y = 33 \\ x - y = 15 \end{cases}$, esse sistema admite uma ***solução trivial***, determinada por:

$x = \dfrac{S + D}{2}$ e $y = \dfrac{S - D}{2}$, onde "*S*" é o valor da soma entre os números e "*D*", o valor da diferença entre esses mesmos números.

Portanto, os valores serão:

$$x = \frac{33 + 15}{2} = \frac{48}{2} = 24 \quad e \quad y = \frac{S - D}{2} = \frac{33 - 15}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Logo, o produto entre esses números será dado por: $x \times y = 24 \times 9 = 216$

Gabarito: B

27. Numa sala encontram-se reunidas 135 pessoas, entre rapazes, moças e crianças. O número de rapazes excede o de moças em 10, e o número de ambos excede em cinco o de crianças. Quantos rapazes, moças e crianças existem?

a) 40 crianças, 65 rapazes, 30 moças.
b) 65 crianças, 40 rapazes, 30 moças.
c) 30 crianças, 40 rapazes, 65 moças.
d) 65 crianças, 30 rapazes, 40 moças.
e) 40 crianças, 30 rapazes, 40 moças.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de "C" o número de crianças, de "R" o número de rapazes e de "M" o número de moças presentes em uma sala. Sendo o total de 135 pessoas, então concluímos que:

$$\underbrace{C + R + M = 135}_{\text{o total de pessoas na sala é igual a 135}} \quad \text{...............} \ (1)$$

Sendo que "o número de rapazes excede o de moças em 10 e o número de ambos excede de em 5 o de crianças", ou seja, matematicamente, podemos construir as seguintes relações:

$$\underbrace{R = M + 10}_{\text{o número de rapazes excede o de moças em 10 unidades}} \quad \text{...............} \ (2)$$

$$\underbrace{R + M = C + 5}_{\text{o número de rapazes e de moças excede em 5 unidades o número de crianças}} \quad \text{...............} \ (3)$$

Formando um sistema linear entre essas três relações (1), (2) e (3), tem-se:

$$\begin{cases} C + R + M = 135 \text{...............}(1) \\ R = M + 10 \text{........................}(2) \\ R + M = C + 5 \text{.................} \ (3) \end{cases}, \text{ substituindo a relação (3) em (1), tem-se:}$$

$$C + \underbrace{R + M}_{C+5} = 135 \quad \Rightarrow \quad C + C + 5 = 135 \quad \Rightarrow \quad 2C = 135 - 5 \quad \Rightarrow \quad 2C = 130$$

$$C = \frac{130}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 65 \text{ crianças.}$$

Substituindo o valor encontrado de "C" na relação (1), formaremos um novo sistema de equações do 1º grau, porém, com duas variáveis "R" e "M".

$$\begin{cases} 65 + R + M = 135 \\ R = M + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R + M = 135 - 65 \\ R - M = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R + M = 70 \\ R - M = 10 \end{cases}$$

Utilizando a resolução trivial, onde R > M, tem-se:

$$R = \frac{70 + 10}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ rapazes,}$$

$$M = \frac{70 - 10}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ moças}$$

Gabarito: B

28. Um lote de processos deve ser dividido entre os funcionários de uma seção para serem arquivados. Se cada funcionário arquivar 16 processos, restarão 8 a serem arquivados. Entretanto, se cada um arquivar 14 processos, sobrarão 32. O número de processos do lote é:

a) 186.
b) 190.
c) 192.
d) 194.
e) 200.

Resolução:

Inicialmente chamaremos de "x" o número total de funcionários de uma determinada seção e de "y" a quantidade correspondente de um certo lote de processos.

Iniciaremos a montagem de acordo com que foi proposto pelo enunciado: "Se cada funcionário arquivar 16 processos, restarão 8 a serem arquivados."

$x \times 16 + 8 = y$..............(I)

Observe que essa relação traduz que cada um dos "x" funcionários dessa seção arquivou 16 processos e, somados com os 8 processos que restaram, totalizam os "y" processos desse lote.

Para a segunda relação, tomaremos a segunda parte do enunciado: "Entretanto, se cada um arquivar 14 processos, sobrarão 32."

$x \times 14 + 32 = y$..............(II)

De forma análoga, observe que, se cada um dos "x" funcionários dessa seção arquivar 14 processos e somar com os 32 processos restantes, totalizarão os "y" processos desse lote.

Formando-se um sistema linear entre as relações (I) e (II), obtemos:

$$\begin{cases} 16x + 8 = y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I) \\ 14x + 32 = y \ldots\ldots\ldots\ldots (II) \end{cases}$$

Pelo processo de *comparação*, igualando-se os valores de "y" entre as duas relações, obteremos a seguinte expressão:

$x \times 16 + 8 = x \times 14 + 32$

$$16x - 14x = 32 - 8 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{2} \Rightarrow x = 12 \text{ funcionários}$$

Para determinarmos o número de processos desse lote, basta substituir o valor de x (que representa o número total de funcionários dessa seção) na primeira ou na segunda relação encontrada. Substituindo na primeira relação, teremos, para o valor de "y" (que representa o total de processos no lote):

$y = x \times 14 + 32 \Rightarrow y = 12 \times 14 + 32 \Rightarrow y = 200$ processos

Gabarito: E

29. O vovô Severino tinha muitos netos. No Natal, resolveu presenteá-los com um dinheirinho. Separou uma quantia em dinheiro e percebeu que, se ele der R$12,00 a cada garoto, ainda ficará com R$60,00. Se ele der R$15,00 a cada um, precisará de mais R$6,00. Quantos netos o vovô Severino tem?

a) 16 netos.
b) 18 netos.
c) 20 netos.
d) 22 netos.
e) 24 netos.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de "*x*" o valor a ser repartido entre os netos, e de "*y*" o número de netos que vovô Severino possui.

De acordo com o enunciado, no momento de repartir o dinheiro, vovô Severino percebeu duas situações distintas:

– "se ele der R$12,00 a cada garoto, ainda ficará com R$60,00", ou seja:

$$x = y \times \text{R\$ } 12{,}00 + \text{R\$ } 60{,}00 \quad \Rightarrow \quad \left[\ x = 12y + 60\ \right] \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

– "Se ele der R$15,00 a cada um, precisará de mais R$6,00", ou seja:

$$x = y \times \text{R\$ } 15{,}00 - \text{R\$ } 6{,}00 \quad \Rightarrow \quad \left[\ x = 15y - 6\ \right] \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Igualando as relações (1) e (2), teremos:

$$\begin{cases} x = 12y + 60 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x = 15y - 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$$12y + 60 = 15y - 6 \quad \Rightarrow \quad 12y - 15y = -6 - 60 \quad \Rightarrow \quad (-3y = -66) \times (-1)$$

$$3y = 66 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{66}{3} \quad \Rightarrow \quad y = 22 \text{ netos}$$

Gabarito: D

Capítulo 10

Problemas do 1º grau

Este capítulo prima demonstrar, por meio de ***exercícios comentados***, os principais ***Problemas Algébricos*** cobrados em Concursos Públicos. A análise será feita por meio de resoluções de exercícios de forma ***convencional*** e ***objetiva*** utilizando-se dos conceitos de ***operações aritméticas*** e/ou ***algébricas***.

10.1. Linguagem textual e linguagem matemática

A seguir demonstraremos algumas representações importantes que porventura podem aparecer nos problemas que envolvam formações de equações do 1º grau:

linguagem textual	linguagem matemática
um certo número	"x"
o dobro de um número	"$2x$"
o triplo de um número	"$3x$"
o quádruplo de um número	"$4x$"
o quíntuplo de um número	"$5x$"
o sêxtuplo de um número	"$6x$"
o sétuplo de um número	"$7x$"
o óctuplo de um número	"$8x$"
a metade de um número	"$x/2$"
a terça parte de um número	"$x/3$"
a quarta parte de um número	"$x/4$"
a quinta parte de um número	"$x/5$"
a sexta parte de um número	"$x/6$"
a sétima parte de um número	"$x/7$"
a oitava parte de um número	"$x/8$"
a nona parte de um número	"$x/9$"
o quadrado de um número	"x^2"

linguagem textual	linguagem matemática
sejam dois números	"x" e "y"
o quadrado da soma de dois números	"$(x + y)^2$"
a soma dos quadrados de dois números	"$x^2 + y^2$"
a soma dos inversos de dois números	"$1/x + 1/y$"

linguagem textual	linguagem matemática
seja um número natural "n" qualquer	$n = 0, 1, 2, \ldots$
um número par qualquer...	$2n$
números pares consecutivos	"$2n$"; "$2n + 2$"; "$2n + 4$"; ...
um número ímpar qualquer...	"$2n + 1$"
números ímpares consecutivos	"$2n + 1$"; "$2n + 3$"; "$2n + 5$"; ...
três números consecutivos	"n"; "$n + 1$" e "$n + 2$"

Exercícios resolvidos

1. (Cespe/UnB) Um motorista, após ter enchido o tanque de seu veículo, gastou 1/5 da capacidade do tanque para chegar à cidade A; gastou mais 28 L para ir da cidade A até a cidade B; sobrou, no tanque, uma quantidade de combustível que corresponde a 1/3 de sua capacidade. Com base nessas informações, julgue os itens ① e ② a seguir.

Desenvolvimento do enunciado para julgar os itens subsequentes.

Vamos considerar, inicialmente, que o veículo possua uma capacidade total de: "***x***" **litros de combustível**.

De acordo com o enunciado, um motorista, ao sair do posto de combustível, gastou 1/5 da capacidade do tanque para chegar até uma cidade A, ou seja:

Posto de combustível → Cidade A		
tinha = x litros	**gastou** $\frac{1}{5}$ de $x = \frac{x}{5}$ litros	**ficou** $= x - \frac{x}{5} = \frac{4x}{5}$ litros

Pela sequência dos fatos, temos ainda que, "gastou mais 28 L para ir da cidade A até a cidade B".

Cidade A → Cidade B		
tinha $= \frac{4x}{5}$ litros	**gastou** 28 litros	**ficou** $= \left(\frac{4x}{5} - 28\right)$ litros

Sobrou, no tanque, uma quantidade de combustível que corresponde a 1/3 de sua capacidade.

Ao chegar na cidade B, o veículo possuía $\left(\frac{4x}{5} - 28\right)$ litros o que, de acordo com o enunciado, corresponde a $\frac{1}{3}$ da capacidade do tanque, ou seja: $\frac{1}{3}$ de x litros ou $\frac{x}{3}$ litros, assim, teremos:

$$\frac{4x}{5} - 28 = \frac{x}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{mmc}(3;5) = 3 \times 5 = 15 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{\cancel{5}_{3}} - \frac{28}{\cancel{1}_{15}} = \frac{x}{\cancel{3}_{5}}$$

$$3 \times 4x - 15 \times 28 = 5 \times x \quad \Rightarrow \quad 12x - 420 = 5x \quad \Rightarrow \quad 12x - 5x = 420$$

$$7x = 420 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{420}{7} \quad \Rightarrow \quad x = 60 \text{ litros (capacidade total do tanque)}$$

① O veículo gastou mais de 15 L para chegar à cidade A.

Resolução:

Para o veículo chegar à cidade A, ele gastou $\frac{x}{5}$ litros, ou seja:

$\frac{60}{5} = 12$ litros

Valor esse inferior a 15 litros, o que torna esse item **ERRADO**.

② Quando o veículo chegou à cidade B, havia, no tanque menos de 21 L de combustível.

Resolução:

"Sobrou, no tanque, uma quantidade de combustível que corresponde a 1/3 de sua capacidade". Portanto, teremos:

$\frac{1}{3}$ de 60 litros $= \frac{60}{3} = 20$ litros

Valor esse inferior a 21 litros, o que torna esse item **Certo**.

2. Um número somado aos seus 2/3 resulta 30. Esse número é:

a) ímpar;
b) divisor de 30;
c) múltiplo de 9;
d) múltiplo de 8;
e) número primo.

Resolução:

Chamaremos de "*x*" o referido número do enunciado. Se esse número somado aos seus 2/3 resulta 30, então teremos a seguinte expressão representativa:

$x + \frac{2}{3}x = 30$, multiplicando todos os membros dessa igualdade por 3, teremos:

$$3x + \cancel{3} \times \frac{2}{\cancel{3}}x = 3 \times 30 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2x = 90 \quad \Rightarrow \quad 5x = 90 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{90}{5}$$

$x = 18$

Pelas alternativas, podemos observar que:

a) 18 não é um número ímpar;
b) 18 não é um divisor de 30, pois os divisores de 30 são: D(30) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30};
c) 18 é um múltiplo de 9, pois os múltiplos de 9 são: M(9) = {0, 9, **18**, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, ...};
d) 18 não é múltiplo de 8, pois os múltiplos de 8 são: M(8) = {0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, ...};
e) 18 não é um número primo, pois os números primos são: P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...}.

Gabarito: C

3. Achar dois números consecutivos cuja soma seja igual a 2/3 do menor mais 9/7 do maior.

a) 4 e 5.
b) 5 e 6.
c) 6 e 7.
d) 7 e 8.
e) 8 e 9.

Resolução:

Sejam os números consecutivos representados por: "*n*" e "*n* + 1", sendo que: "soma seja igual a 2/3 do menor mais 9/7 do maior".

$$n + n + 1 = \frac{2}{3}n + \frac{9}{7}(n+1) \quad \Rightarrow \quad 2n + 1 = \frac{2n}{3} + \frac{9n}{7} + \frac{9}{7} \quad \Rightarrow \quad \text{mmc}(3;\,7) = 21$$

$$\frac{2n}{1/21} + \frac{1}{1/21} = \frac{2n}{3/7} + \frac{9n}{7/3} + \frac{9}{7/3} \quad \Rightarrow \quad 21 \times 2n + 21 \times 1 = 7 \times 2n + 3 \times 9n + 3 \times 9$$

$$42n + 21 = 14n + 27n + 27 \quad \Rightarrow \quad 42n - 41n = 27 - 21 \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

Portanto, os números serão: $\begin{cases} n : 6 \\ n + 1 : 6 + 1 = 7 \end{cases}$

Gabarito: C

4. No almoxarifado de certa empresa há 68 pacotes de papel sulfite, dispostos em quatro prateleiras. Se as quantidades de pacotes em cada prateleira correspondem a quatro números pares sucessivos, então, dos números seguintes, o que representa uma dessas quantidades é o:

a) 8.
b) 12.
c) 18.
d) 22.
e) 24.

Resolução:

Inicialmente, forneceremos a representação de um *número par* (qualquer), em função de "*n*", sendo $n \in IN$ (lê-se: sendo *n* pertencente aos números naturais):
"2*n*" (Representação de um número par qualquer – ver **Anexo 1** no final do livro)

Se "2*n*" é a representação de um *número par* qualquer e sabendo-se que a soma de dois números pares quaisquer resulta em outro número par, então, podemos montar a seguinte expressão que representa a soma de quatro números pares:
$(2n) + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) \rightarrow$ soma de quatro números pares quaisquer.

De acordo com o problema, essa soma de quatro números pares representa o total de pacotes de papel sulfite, que foram dispostos em quatro prateleiras que, nesta questão, é igual a 68, então, teremos a seguinte expressão:

$$(2n) + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) = 68 \quad \Rightarrow \quad 8n + 12 = 68 \quad \Rightarrow \quad 8n = 68 - 12$$

$$8n = 56 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{56}{8} \quad \Rightarrow \quad n = 7$$

Portanto, cada prateleira terá a seguinte quantidade de papel sulfite:
1ª prateleira: $2n = 2 \times 7 = 14$ pacotes de papel sulfite.
2ª prateleira: $2n + 2 = 2 \times 7 + 2 = 14 + 2 = 16$ pacotes de papel sulfite.
3ª prateleira: $2n + 4 = 2 \times 7 + 4 = 14 + 4 = 18$ pacotes de papel sulfite.
4ª prateleira: $2n + 6 = 2 \times 7 + 6 = 14 + 6 = 20$ pacotes de papel sulfite.

Gabarito: C

5. Em uma sequência de cinco números consecutivos, o termo central é ímpar. Sabendo-se que o maior dos números ímpares é o quíntuplo do menor menos 16 unidades, então a soma dos termos pares vale:

a) 10.
b) 14.
c) 16.
d) 18.
e) 20.

Resolução:

Inicialmente, lembraremos as representações dos números naturais ímpares e pares, em função de "n". Sendo $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$

Número par qualquer: $2n$ $\because$ Número ímpar qualquer: $2n + 1$

Uma sequência formada por cinco números consecutivos, em que o termo central é um número ímpar, pode ser escrita por:

$(2n + 1 ; 2n + 2 ; 2n + 3 ; 2n + 4 ; 2n + 5)$

Sabendo-se que o maior dos números ímpares é o quíntuplo do menor menos 16 unidades,

$$2n + 5 = 5 \times (2n + 1) - 16 \quad \Rightarrow \quad 2n + 5 = 10n + 5 - 16 \quad \Rightarrow \quad 2n - 10n = 5 - 5 - 16$$

$$(-8n = -16) \times (-1) \quad \Rightarrow \quad 8n = 16 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{16}{8} \quad \Rightarrow \quad n = 2$$

Os referidos números serão:

$(2 \times 2 + 1 ; 2 \times 2 + 2 ; 2 \times 2 + 3 ; 2 \times 2 + 4 ; 2 \times 2 + 5)$

$(4 + 1 ; 4 + 2 ; 4 + 3 ; 4 + 4 ; 4 + 5)$

$(5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9)$

A soma dos números pares será: $6 + 8 = 14$

Gabarito: B

6. A soma de três múltiplos consecutivos de 7 é 210. A soma dos valores absolutos dos algarismos do maior desses números é:

a) 7.
b) 9.
c) 11.
d) 14.
e) 15.

Resolução:

Para que um conjunto formado por números naturais seja múltiplo de 7, seus valores devem ser de tal forma que formem um sequência numérica crescente com um intervalo de valor igual a 7, entre dois números consecutivos, por exemplo, 7, 14, 21, 28... Observem que essa sequência crescente aumenta em sete unidades, o que caracteriza um subconjunto dos múltiplos do número 7.

Assim, para escrevermos três valores aleatórios múltiplos de 7, e, considerando o primeiro múltiplo como sendo "n", teremos:

n; $n + 7$; $n + 14$

Se a soma desses três totaliza 210, então, teremos que:

$(n) + (n + 7) + (n + 14) = 210 \quad \Rightarrow \quad 3n = 210 - 21$

$3n = 189 \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{189}{3} \quad \Rightarrow \quad n = 63$

Portanto, os números serão:

1º) 63
2º) 63 + 7 = 70
3º) 63 + 14 = 77

A soma dos valores absolutos dos algarismos do maior desses números é:

O maior dos números será o 77 $\Rightarrow$ 7 + 7 = 14

Gabarito: D

7. Um estudante recebe do pai R$30,00 para cada problema de matemática que acerta e paga R$20,00 cada vez que erra. No fim de 50 exercícios recebeu R$150,00. Quantos problemas o estudante errou?

a) 23.
b) 17.
c) 13.
d) 27.
e) 31.

Resolução:

Valores mencionados pelo problema:

- Total de exercícios: 50
- Valor recebido pelo estudante: R$150,00

De acordo com o enunciado, chamaremos de:

"x" : .... número de problemas certos.
"$(50 - x)$" : .... número de problemas errados.
"$30x$" : .... quantia recebida pelos problemas certos.
"$20(50 - x)$" .... quantia paga pelos problemas errados.

Descontado do que tem a receber o que deve pagar, resta o que recebeu, isto é:

$30x - 20(50 - x) = 150 \quad \Rightarrow \quad 30x - 1000 + 20x = 150 \quad \Rightarrow \quad 50x = 150 + 1000$

$50x = 1.150 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1.150}{50} \quad \Rightarrow \quad x = 23$ problemas certos

Portanto, o número de problemas errados será de: 50 – 23 = 27 problemas errados.

Gabarito: D

8. Qual o número que somado com sua metade, mais a sua quinta parte é igual a 34?

a) 20.
b) 30.
c) 40.
d) 50.
e) 60.

Resolução:

Chamaremos esse número desconhecido de "*x*" e, pelo enunciado, teremos:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 34 \quad \Rightarrow \quad mmc(2;5) = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1/10} + \frac{x}{2/5} + \frac{x}{5/2} = \frac{34}{1/10}$$

$$10x + 5x + 2x = 340 \quad \Rightarrow \quad 17x = 340 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{340}{17} \quad \Rightarrow \quad x = 20$$

Gabarito: A

9. O produto de dois números ímpares consecutivos é igual ao primeiro desses números, ao quadrado, mais 78. O valor do maior deles vale:

a) 37.
b) 39.
c) 41.
d) 43.
e) 45.

Resolução:

Sejam dois números ímpares consecutivos dados por: "$2n + 1$" e "$2n + 3$"

De acordo com o enunciado, "o produto de dois números ímpares consecutivos é igual ao primeiro desses números, ao quadrado, mais 78".

$$\underbrace{(2n+1)\times(2n+3)}_{\text{o produto de dois números ímpares consecutivos}} = \underbrace{(2n+1)^2}_{\text{igual ao primeiro desses números ao quadrado}} + 78$$, desenvolvendo a relação anterior:

$$2n\times 2n + 2n\times 3 + 1\times 2n + 1\times 3 = (2n)^2 + 2\times 2n\times 1 + 1^2 + 78$$

$$4n^2 + 6n + 2n + 3 = 4n^2 + 4n + 1 + 78 \quad \Rightarrow \quad 4n^2 - 4n^2 + 6n + 2n - 4n = -3 + 1 + 78$$

$$4n = 76 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{76}{4} \quad \Rightarrow \quad n = 19$$

Portanto, os números referidos serão:

$2n + 1 = 2\times 19 + 1 = 39$; e

$2n + 3 = 2\times 19 + 3 = 41$

Portanto, o maior deles vale 41.

Gabarito: C

10. Qual o número que somado com o dobro e mais 10 é igual ao quádruplo do mesmo número?

a) 5.
b) 10.
c) 15.
d) 20.
e) 30.

Resolução:

Chamaremos esse número desconhecido de "*x*" e, pelo enunciado, teremos:

$$\underbrace{x + 2x + 10}_{\text{número somado com o dobro mais 10}} = \underbrace{4x}_{\text{é igual ao seu quádruplo}} \Rightarrow 3x - 4x = -10 \Rightarrow -x = -10$$

$$(-x = -10)\times(-1) \Rightarrow x = 10$$

Gabarito: B

11. A soma de dois números inteiros positivos é 5/6; a soma dos quadrados desse mesmo número é igual a 13/36. Então, o quádruplo do produto entre esses números, vale:

a) 1/3.
b) 2/3.
c) 3/3.
d) 4/3.
e) 5/3.

Resolução:

Sejam "*x*" e "*y*" os respectivos números inteiros. De acordo com o enunciado tem-se que: "A soma de dois números inteiros positivos é 5/6".

$$x + y = \frac{5}{6}$$

E que "a soma dos quadrados desse mesmo número é igual a 13/36".

$$x^2 + y^2 = \frac{13}{36}$$

Vamos partir do princípio do *quadrado da soma de números inteiros*, ou simplesmente, pelo produto *notável* dado por $(x + y)^2$:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Modificando a ordem das posições do segundo membro dessa igualdade e substituindo os valores mencionados, tem-se:

$$(\underbrace{x + y}_{\frac{5}{6}})^2 = 2xy + \underbrace{x^2 + y^2}_{\frac{13}{36}} \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 2xy + \frac{13}{36} \Rightarrow \frac{25}{36} - \frac{13}{36} = 2xy$$

$$\frac{25 - 13}{36} = 2xy \Rightarrow \frac{12^{\div 12}}{36_{\div 12}} = 2xy \Rightarrow 2xy = \frac{1}{3}$$

Então, o quádruplo do produto entre esses números ($4xy$) vale:

$$\left(2xy = \frac{1}{3}\right) \times 2 \quad \Rightarrow \quad 4xy = \frac{2}{3}$$

Gabarito: B

12. (FCC) Considere a seguinte situação hipotética. Um juiz tem quatro servidores em seu gabinete. Ele deixa uma pilha de processos para serem divididos igualmente entre seus auxiliares. O primeiro servidor conta os processos e retira a quarta parte para analisar. O segundo, achando que era o primeiro, separa a quarta parte da quantidade que encontrou e deixa 54 processos para serem divididos entre os outros dois servidores. Nessa situação, o número de processos deixados inicialmente pelo juiz era igual a:

a) 48.
b) 96.
c) 100.
d) 108.
e) 112.

Resolução:

Chamando de "x", o número de processos que o juiz deixou para serem analisados, teremos:

(1º) servidor ⇒ analisará a quarta parte de "x" processos, logo: $\dfrac{x}{4}$

Restante de processos, até aqui, que sobraram para serem analisados: $x - \dfrac{x}{4}$, ou seja:

$$x - \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{x}{1} - \frac{x}{4} \text{ sendo m.m.c}(1,4) = 4\text{, temos}: \frac{x}{1\!\!\!/_4} - \frac{x}{4\!\!\!/_4} = \frac{4x - x}{4} = \frac{3x}{4}$$ processos restantes para serem analisados.

(2º) servidor ⇒ analisará também a quarta parte desses processos restantes. Logo:

$$\frac{\overbrace{\frac{3x}{4}}^{\text{a quarta parte do que restou}}}{4} = \frac{3x}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3x}{16}$$ processos a serem analisados pelo segundo servidor;

Restante dos processos, até aqui, que sobraram para serem analisados:

$$\overbrace{x}^{\text{total de processos}} - \underbrace{\frac{x}{4}}_{\text{processos a serem analisados pelo 1º servidor.}} - \overbrace{\frac{3x}{16}}^{\text{processos a serem analisados pelo 2º servidor}}$$ logo:

$$x - \frac{x}{4} - \frac{3x}{16} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1} - \frac{x}{4} - \frac{3x}{16} \quad \text{sendo m.m.c}(1,4,16) = 16\text{, temos :}$$

$$\frac{x}{1\!\!/\!16} - \frac{x}{4\!\!/\!16} - \frac{3x}{16\!\!/\!16} = \frac{16x - 4x - 3x}{16} = \frac{9x}{16}$$

$\frac{9x}{16}$ $\Rightarrow$ número de processos restantes para serem ainda analisados pelos outros dois servidores.

Então, pelo enunciado do item referido, conclui-se que:

$$\frac{9x}{16} = 54 \quad \Rightarrow \quad 9x = 16 \times 54 \quad \Rightarrow \quad 9x = 864 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{864}{9} \quad \Rightarrow \quad x = 96$$

Assim sendo, foram deixados inicialmente 96 processos pelo juiz.

Gabarito: B

13. (Cespe/UnB) Do total de funcionários de uma repartição pública, metade faz atendimento ao público, um quarto cuida do cadastramento dos processos e um sétimo faz as conferências. Os três funcionários restantes realizam serviços de apoio, contratados com recursos especiais. Sabendo que nenhuma das funções é acumulativa, então, nessa repartição trabalham:

a) 24 funcionários.
b) 25 funcionários.
c) 27 funcionários.
d) 28 funcionários.
e) 30 funcionários.

Resolução:

De acordo com o texto considere os seguintes dados:

- x*: **total de funcionários*** da repartição pública;
- $\frac{x}{2}$: a ***metade*** que faz atendimento ao público;
- $\frac{x}{4}$: ***um quarto*** dos funcionários que cuida do cadastramento dos processos.
- $\frac{x}{7}$: ***um sétimo*** dos funcionários que faz as conferências.
- 3: ***três funcionários restantes*** realizam serviços de apoio.

Assim, o total de funcionários "*x*" pode ser descrito como a soma dos funcionários que trabalham nas diversas áreas referidas:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 \;\Rightarrow\; \text{mmc}(2,4,7) = 28 \quad \text{ou seja:} \quad \frac{x}{1\!\!/\!28} = \frac{x}{2\!\!/\!28} + \frac{x}{4\!\!/\!28} + \frac{x}{7\!\!/\!28} + \frac{3}{1\!\!/\!28}$$

$$28x = 14x + 7x + 84 \quad \Rightarrow \quad 28x = 25x + 84 \quad \Rightarrow \quad 28x - 25x = 84$$

$$3x = 84 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{84}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 28 \text{ funcionários}$$

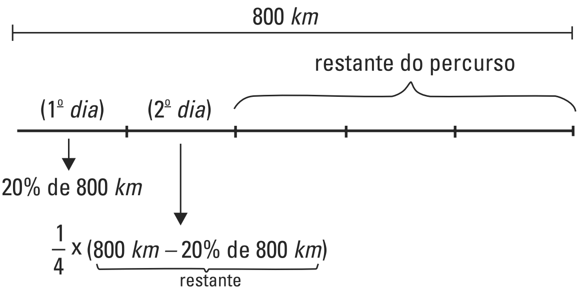
Gabarito: D

14. (Cespe/UnB) Um ciclista deseja percorrer 800 km em cinco dias. Se, no primeiro dia, ele consegue percorrer 20% do total e, no segundo dia, ele percorre $\frac{1}{4}$ do restante do percurso, então, nos três dias subsequentes, ele deverá percorrer:

a) 240 km.
b) 360 km.
c) 400 km.
d) 440 km.
e) 480 km.

Resolução:

Imaginemos a situação descrita pelo problema:



$$1^{\underline{o}}\ dia\text{: } 20\%\ \ de\ 800km = \frac{20}{100} \times 800 = 160\text{km}$$

$$2^{\underline{o}}\ dia\text{: } \frac{1}{4} \times \underbrace{(800\text{km} - 20\%\text{ de }800\text{km})}_{\text{restante}} = \frac{1}{4} \times (800 - 160) = \frac{1}{4} \times 640 = 160\text{km}$$

Restante do percurso: $800 - (\underbrace{160}_{1^o\text{ dia}} + \underbrace{160}_{2^o\text{ dia}}) = 800 - 320 = 480km.$

Gabarito: E

15. (Cespe/UnB) Antônio e Roberto trabalham em uma fábrica de rádios. Antônio trabalha no turno matutino e monta, diariamente, 21 rádios nesse período. Roberto trabalha à tarde, empacotando e despachando os rádios montados por Antônio. Ele consegue empacotar e despachar 35 aparelhos por dia. Com base nessas informações, julgue os itens ① e ② a seguir:

Desenvolvimento do enunciado para julgar os itens subsequentes.

Vamos analisar dois dados importantes:

- Antônio trabalha no turno matutino e monta 21 rádios por dia, nesse período.
- Roberto trabalha à tarde, empacotando e despachando os rádios montados por Antônio. Consegue empacotar e despachar 35 aparelhos por dia.

① Em apenas dois dias, Roberto consegue empacotar e despachar os aparelhos que são montados por Antônio em cinco dias consecutivos de trabalho.

Em cinco dias trabalhados por Antônio e dois dias trabalhados por Roberto, temos as seguintes situações a serem concluídas:

- Antônio, monta, no turno matutino, 21 rádios por dia, então, em cinco dias, montará 5 × 21 = 105 rádios.
- Roberto, trabalhando no turno vespertino, consegue empacotar e despachar 35 aparelhos por dia, portanto, em dois dias, empacotará e despachará 2 × 35 = 70 aparelhos.

Logo, em dois dias, Roberto NÃO conseguirá empacotar e despachar os 105 rádios montados por Antônio, pois seu rendimento lhe permite apenas empacotar e despachar 70 rádios em dois dias.

Portanto, o item está **ERRADO**.

② Em um mês com 20 dias úteis de trabalho, Roberto deve trabalhar oito dias a menos que Antônio para cumprir toda a sua tarefa.

De acordo com o item, temos que:

- Antônio trabalhará 20 dias úteis;
- Roberto trabalhará oito dias a menos que Antônio, logo, 20 – 8 = 12 dias úteis.

Assim, podemos determinar, através dos seus *rendimentos diários*, os números de aparelhos que serão montados por Antônio e empacotados e despachados por Roberto.

- Em 20 dias úteis, Antônio montará: 20 × 21 = 420 rádios.
- Em 12 dias úteis, Roberto empacotará e despachará: 12 × 35 = 420 rádios.

Logo, como o número de rádios montados por Antônio é igual ao número de aparelhos empacotados e despachados por Roberto (total de 420 unidades), em um mês com 20 dias úteis de trabalho para Antônio e 12 dias úteis de trabalho para Roberto (Roberto trabalhando oito dias a menos que Antônio), toda a tarefa será realizada pelos dois operários.

Portanto, o item é **CERTO**.

16. Pagou-se uma dívida de R$860,00 com notas de R$50,00 e de R$20,00 ao todo 28 notas. A quantidade de notas de R$50,00 e de R$20,00 são, respectivamente:

a) 18 e 10.
b) 10 e 20.
c) 10 e 18.
d) 20 e 10.
e) 18 e 20.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de "*x*" o número total de notas de R$50,00 e, de acordo com o enunciado, de 28 o total de notas entre R$50,00 e R$20,00.

Portanto, teremos:

"*x*" notas de R$50,00; e

"(28 – *x*)" notas de R$20,00.

Os valores pagos por cada quantidade de notas será dado por:

$x \times R\$\ 50{,}00$: valor total pago com notas de R$50,00;

$(20 - x) \times R\$\ 20{,}00$: valor total pago com notas de R$20,00.

Sendo o valor da conta total dado por R$860,00, então teremos a seguinte relação válida:

$x \times R\$\ 50,00 + (28 - x) \times 20 = R\$\ 860,00 \quad \Rightarrow \quad 50x + 20(28 - x) = 860$

Dividindo todos os membros dessa igualdade por 10, teremos:

$$\left(50x + 20(28 - x) = 860\right) \div 10 \quad \Rightarrow \quad 5x + 2(28 - x) = 86 \quad \Rightarrow \quad 5x + 56 - 2x = 86$$

$$5x - 2x = 86 - 56 \quad \Rightarrow \quad 3x = 30 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{30}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 10 \text{ notas de R\$ } 50,00$$

Assim, teremos a seguinte quantidade de notas de R$20,00:

28 – 10 = 18 notas de R$20,00

Gabarito: C

17. (Cespe/UnB) O primeiro andar de um prédio vai ser reformado e os funcionários que lá trabalham serão removidos. Se 1/3 do total dos funcionários deverão ir para o segundo andar, 2/5 do total para o terceiro andar e os 28 restantes para o quarto andar, o número de funcionários que serão removidos é:

a) 50.
b) 84.
c) 105.
d) 120.
e) 150.

Resolução:

Vamos chamar de "*x*", o número que representa o total de funcionários que trabalhavam no primeiro andar. De acordo com o enunciado da questão, podemos estruturar a seguinte equação do 1º grau, com relação à remoção dos funcionários para os segundo, terceiro e quarto andares do mesmo prédio.

$\frac{1}{3}x$: "$\frac{1}{3}$ do total dos funcionários (***x***) deverão ir para o segundo andar";

$\frac{2}{5}x$: "$\frac{2}{5}$ do total dos funcionários (***x***) para o terceiro andar";

28: "os 28 restantes para o quarto andar".

A soma do total dos funcionários removidos para os segundo, terceiro e quarto andares deverá ser igual ao número total ***x*** de funcionários, portanto, temos que:

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + 28 = x \quad \Rightarrow \quad mmc(3;5) = 15 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3/5}x + \frac{2}{5/3}x + \frac{28}{1/15} = \frac{x}{1/15}$$

$5x + 6x + 420 = 15x \Rightarrow 420 = 15x - 11x \Rightarrow 4x = 420$

$x = 105$ funcionários.

Gabarito: C

18. (Cespe/UnB) Num prédio de apartamentos de 15 andares, cada andar possui dois apartamentos e em cada um moram quatro pessoas. Sabendo-se que, diariamente, cada pessoa utiliza 100 L de água e que, além do volume total gasto pelas pessoas, se dispõe de uma reserva correspondente a 1/5 desse total, a capacidade mínima do reservatório de água desse prédio, em litros, é:

a) 1.200.
b) 2.400.
c) 9.600.
d) 12.000.
e) 14.400.

Resolução:

De acordo com o enunciado da questão, podemos determinar o consumo total de todos os moradores do prédio, de acordo com o esquema a seguir:

- Num prédio de 15 andares, com dois apartamentos por andar, teremos um total de 30 *apartamentos* no prédio.
- Se, em cada apartamento moram quatro pessoas, teremos um total de moradores de $4 \times 30 = 120$ *moradores*.
- Sabendo que, diariamente, cada pessoa utiliza 100 litros de água, então, podemos concluir que 120×100 litros = 12.000 *litros são consumidos diariamente.*
- Além do volume total gasto pelas pessoas, se dispõe de uma reserva correspondente a $\frac{1}{5}$ desse total (12.000 litros). Calculando esse valor:

$$\frac{1}{5} \times 12.000 = 2.400 \text{ litros}$$

Logo, a capacidade mínima do reservatório será de:

12.000 litros + 2.400 litros = 14.400 litros

Gabarito: E

19. O produto de um número natural por 23 é igual a 31.625. Se subtrairmos 3 unidades do algarismo das dezenas desse número, o novo produto será igual a...

a) 30.975.
b) 31.935.
c) 35.970.
d) 30.935.
e) 31.795.

Resolução:

Chamaremos de "*x*" o número natural que será multiplicado por 23, resultando em 31.625, ou seja:

$$x \times 23 = 31.625 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{31.625}{23} \quad \Rightarrow \quad x = 1.375$$

"Se subtrairmos três unidades do algarismo das dezenas desse número, o novo produto será igual a"...

$1.375 \leftrightarrow 1.345$

O novo produto será dado por: $1.345 \times 23 = 30.935$

Gabarito: D

20. (FCC) Uma pessoa gastou 1/5 do que tinha; a seguir, a metade do que lhe sobrou e depois R$600,00, ficando com R$600,00. Sua quantia primitiva equivale a:

a) R$1.000,00.
b) R$1.500,00.
c) R$2.000,00.
d) R$3.000,00.
e) R$3.500,00.

Resolução:

Vamos interpretar a sequência dos fatos por meio de uma tabela:

	o que tinha	*o que gastou*	*com quanto ficou*
1ª etapa:	"*x*" reais	$\frac{1}{5}x$	$x - \frac{x}{5} = \frac{4x}{5}$
2ª etapa	$\frac{4x}{5}$	$\frac{\frac{4x}{5}}{2} = \frac{4x}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{4x}{10}$	$\frac{4x}{5} - \frac{4x}{10} = \frac{4x}{10}$
3ª etapa	$\frac{4x}{10}$	600	$\frac{4x}{10} - 600 = 600$

Resolvendo a última equação encontrada, teremos:

$$\frac{4x}{10} - 600 = 600 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{10} = 600 + 600 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{10} = 1.200 \quad \Rightarrow \quad 4x = 10 \times 1.200$$

$$4x = 12.000 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12.000}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \text{R\$ } 3.000,00$$

Gabarito: D

21. (FCC) A premiação de uma corrida rústica foi feita da seguinte maneira: ao primeiro colocado caberia como prêmio o dobro do prêmio recebido pelo segundo colocado e, a este, caberia de prêmio o triplo do valor recebido pelo terceiro colocado acrescido de R$100,00. Sabe-se que o prêmio total distribuído pela comissão organizadora foi de R$10.000,00. Nessas condições, ao segundo colocado coube a importância de:

a) R$4.210,00.
b) R$4.126,00.
c) R$3.650,00.
d) R$3.010,00.
e) R$2.950,00.

Resolução:

Chamaremos de "*x*" o prêmio (em dinheiro) recebido pelo terceiro colocado dessa corrida rústica, então, pelo enunciado do texto, teremos a seguinte relação de premiação:

$$\begin{cases} 1^{\circ}\text{ colocado}: 2 \times (3x + 100) & \text{(ganhou o dobro do prêmio recebido pelo } 2^{\circ}\text{ colocado)} \\ 2^{\circ}\text{ colocado}: 3x + 100 & \text{(ganhou o triplo do valor recebido pelo } 3^{\circ}\text{ colocado} \\ & \text{acrescido de R\$ 100,00)} \\ 3^{\circ}\text{ colocado}: x & \text{(valor recebido pelo } 3^{\circ}\text{ colocado)} \end{cases}$$

Sabendo-se que o prêmio total distribuído pela comissão organizadora foi de R$10.000,00, então, a soma dos valores recebidos pelos três primeiros colocados resulta nos R$10.000,00, ou seja:

$2 \times (3x + 100) + (3x + 100) + x = 10.000 \quad \Rightarrow \quad 6x + 200 + 3x + 100 + x = 10.000$

$10x + 300 = 10.000 \quad \Rightarrow \quad 10x = 10.000 - 300 \quad \Rightarrow \quad 10x = 9.700$

$$x = \frac{9.700}{10} \quad \Rightarrow \quad x = \text{R\$}970{,}00 \text{ (valor recebido pelo terceiro colocado)}$$

O segundo colocado receberá uma quantia de:

$3x + 100 = 3 \times 970 + 100 = \text{R\$}3.010{,}00$

Gabarito: D

22. (Cespe/UnB) Marcos e Pedro receberam no início de abril mesadas de valores iguais. No final do mês, Marcos havia gastado 4/5 de sua mesada e Pedro, 5/6 da sua. Sabendo que Marcos ficou com R$10,00 a mais que Pedro, o valor da mesada recebida por cada um deles é:

a) inferior a R$240,00;
b) superior a R$240,00 e inferior a R$280,00;
c) superior a R$280,00 e inferior a R$320,00;
d) superior a R$320,00 e inferior;
e) superior a R$360,00.

Resolução:

Marcos: mesada inicial de x reais.

Pedro: mesada inicial de x reais.

Marcos gastou $\frac{4}{5}$ da sua mesada e ficou com: $\overbrace{x}^{\text{mesada}} - \underbrace{\frac{4}{5}x}_{\text{parte que gastou}} = \frac{5x - 4x}{5} = \frac{x}{5}$

Pedro gastou $\frac{5}{6}$ da sua mesada e ficou com: $\overbrace{x}^{\text{mesada}} - \underbrace{\frac{5}{6}x}_{\text{parte que gastou}} = \frac{6x - 5x}{6} = \frac{x}{6}$

Sabendo-se que Marcos ficou com R$10,00 a mais que Pedro, então podemos escrever que:

$$\overbrace{\frac{x}{5}}^{\substack{\text{restante} \\ \text{de Marcos}}} = 10 + \overbrace{\frac{x}{6}}^{\substack{\text{restante} \\ \text{de Pedro}}} \quad \Rightarrow \quad mmc(5,6) = 30 \quad \Rightarrow \quad \frac{6x}{30} = \frac{300 + 5x}{30}$$

$6x - 5x = 300 \quad \Rightarrow \quad x = 300$

Ou seja, R$300,00 de mesadas iniciais para cada um.

Gabarito: C

23. Repartir R$2.100,00 entre quatro pessoas de modo que a segunda receba a metade da primeira; a terceira a metade da soma da primeira com a segunda e a quarta a metade da terceira. A diferença entre a maior quantia e a menor quantia, vale:

a) R$500,00.
b) R$300,00.
c) R$800,00.
d) R$600,00.
e) R$1.100,00.

Resolução:

Chamaremos de "*x*" o valor da quantia recebida pela primeira pessoa

Pelo enunciado, podemos montar as seguintes relações de acordo com a sentença dada: "a segunda receba a metade da primeira; a terceira a metade da soma da primeira com a segunda e a quarta a metade da terceira".

$$\begin{cases} 1^{a} \text{ pessoa}: x \\ 2^{a} \text{ pessoa}: \dfrac{x}{2} \\ 3^{a} \text{ pessoa}: \dfrac{x+\dfrac{x}{2}}{2} = \dfrac{\dfrac{2x+x}{2}}{2} = \dfrac{\dfrac{3x}{2}}{2} = \dfrac{3x}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{3x}{4} \\ 4^{a} \text{ pessoa}: \dfrac{\dfrac{3x}{4}}{2} = \dfrac{3x}{4}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{3x}{8} \end{cases}$$

Sabendo que a soma de todas as quantias recebidas resulta em R$2.100,00, então:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{3x}{4} + \frac{3x}{8} = 2.100 \Rightarrow \text{mmc}(2,4,8) = 8 \Rightarrow \frac{x}{1/8} + \frac{x}{2/4} + \frac{3x}{4/2} + \frac{3x}{8/1} = \frac{2.100}{1/8}$$

$$8x + 4x + 6x + 3x = 16.800 \Rightarrow 21x = 16.800 \Rightarrow x = \frac{16.800}{21} \Rightarrow \underbrace{x = \text{R\$}800{,}00}_{\text{valor recebido pela primeira pessoa}}$$

Para os demais valores, teremos:

$$\begin{cases} 1^{a} \text{ pessoa}: x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{R\$}800{,}00 \text{ (maior valor)} \\ 2^{a} \text{ pessoa}: \dfrac{x}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{800}{2} = \text{R\$ } 400{,}00 \\ 3^{a} \text{ pessoa}: \dfrac{3x}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{3\times 800}{4} = \text{R\$ } 600{,}00 \\ 4^{a} \text{ pessoa}: \dfrac{3x}{8} \ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{3\times 800}{8} = \text{R\$ } 300{,}00 \text{ (menor valor)} \end{cases}$$

A diferença entre o maior e o menor valor será:

R$800,00 – R$300,00 = R$500,00

Gabarito: A

24. **(FCC/2004) Um homem gastou tudo o que tinha no bolso em três lojas. Em cada uma gastou 1 real a mais do que a metade do que tinha ao entrar. Quanto o homem tinha ao entrar na primeira loja?**

a) R$10,00.
b) R$12,00.
c) R$14,00.
d) R$24,00.
e) R$26,00.

Resolução:

Vamos representar o gasto desse homem por meio de uma tabela demonstrativa a seguir, considerando que a quantia inicial, ao entrar na primeira loja, seja de "*x*" reais.

	o que tinha	***o que gastou***	***o que sobrou***
1ª loja	x	$\frac{x}{2}+1=\frac{x+2}{2}$	$x-\left(\frac{x+2}{2}\right)=\frac{x-2}{2}$
2ª loja	$\frac{x-2}{2}$	$\frac{\frac{}{}}{2}+1=\frac{}{4}+1=\frac{}{4}$	$\frac{x-2}{2}-\frac{x+2}{4}=\frac{2x-4-x-2}{4}= =\frac{x-6}{4}$
3ª loja	$\frac{x-6}{4}$	$\frac{\frac{x-6}{4}}{2}+1=\frac{x-6}{8}+1=\frac{x+2}{8}$	$\frac{x-6}{4}-\frac{x+2}{8}=0$ Resolvendo a equação acima, tem-se:

$$\frac{x-6}{4}-\frac{x+2}{8}=0 \Rightarrow mmc(4;8)=8 \Rightarrow \frac{2\times(x-6)-(x+2)}{8}=\frac{0}{8}$$

$$2\times(x-6)-(x+2)=0 \Rightarrow 2x-12-x-2=0 \Rightarrow x-14=0 \Rightarrow x = R\$\ 14{,}00$$

Gabarito: C

25. **(FCC/2007) R$520,00 foi dividido entre três pessoas de modo que a segunda recebeu 2/5 da primeira e a terceira 5/6 da segunda, assim, o valor recebido pela segunda pessoa foi de:**

a) R$300,00.
b) R$240,00.
c) R$120,00.
d) R$100,00.
e) R$80,00.

Resolução:

Se "*x*" reais foi o valor recebido pela primeira pessoa, então:

$$\text{Valores distribuídos: }\begin{cases}\text{primeira pessoa}: x\\ \text{segunda pessoa}: \frac{2}{5}x \text{ ou } \frac{2x}{5}\\ \text{terceira pessoa}: \frac{5}{6}\times\frac{2x}{5}=\frac{10x}{30}=\frac{x}{3}\end{cases}$$

Se o valor total distribuído foi de R$520,00, então a soma dos valores parciais será igual a R$520,00, ou seja:

$$x + \frac{2x}{5} + \frac{x}{3} = 520 \quad \Rightarrow \quad mmc(3;5) = 15 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1/15} + \frac{2x}{5/3} + \frac{x}{3/5} = \frac{520}{1/15}$$

$$15x + 6x + 5x = 7.800 \quad \Rightarrow \quad 26x = 7.800 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7.800}{26} \quad \Rightarrow \quad x = R\$\ 300{,}00$$

Portanto, o valor recebido pela segunda pessoa será de:

$$\text{Segunda pessoa}: \frac{2x}{5} = \frac{2 \times 300}{5} = 2 \times 60 = R\$\ 120{,}00$$

Gabarito: C

26. **(Cespe/UnB) A prova de um concurso público é composta de 40 questões. Cada questão respondida corretamente vale cinco pontos positivos, cada questão respondida incorretamente vale três pontos negativos, enquanto às questões não respondidas não é atribuída nenhuma pontuação. Um candidato obteve o total de 72 pontos, tendo deixado oito questões sem resposta. O número de questões respondidas corretamente por esse candidato foi:**
a) 8.
b) 11.
c) 16.
d) 21.
e) 32.

Resolução:

Inicialmente discriminaremos o que foi mencionado no texto da questão:
Total de questões da prova: **40**
Total de questões não respondidas: **8**
Total de questões respondidas: **32**
Ganha: **5 pontos para cada questão certa**.
Perde: **3 pontos para cada questão que erra**.
Número de questões certas: ***x***
Número de questões erradas: **32 – *x***
Total de pontos obtidos: 72 **pontos**.

A equação do 1º grau será montada de acordo com o valor dos pontos recebidos por esse candidato, tendo como raciocínio a seguinte estrutura:

(o que ganhou) – (o que perdeu) = com quanto ficou

- o que ganhou: **5*x*** .... (ganha **5 pontos** para cada **questão certa**)
- o que perdeu: **3(32 – *x*)** .... (perde **3 pontos** para cada **questão errada**)
- com quanto ficou: **72 pontos**

$5x - 3(32 - x) = 72$

$5x - 3(32 - x) = 72 \Rightarrow 5x - 96 + 3x = 72 \Rightarrow 8x = 72 + 96 \Rightarrow 8x = 168$

$$x = \frac{168}{8} \Rightarrow x = 21$$

Gabarito: D

27. (Consulplan) Há cinco anos, a idade de Juliana era o dobro da idade de Lucas. Dentro de cinco anos, será somente 4/3. Qual a idade de Lucas atualmente?

a) 15 anos.
b) 14 anos.
c) 12 anos.
d) 10 anos.
e) 8 anos.

Resolução:

Uma ***dica*** importante quando se trata de ***problemas com idades*** é, inicialmente, denotar as ***idades atuais*** (***idades no presente***) das pessoas envolvidas que, neste caso, chamaremos de.

J: idade atual de Juliana.

L: a idade atual de Lucas

Foi dito que: "**Há** cinco anos (***no passado***), a idade de Juliana era o dobro da idade de Lucas".

$J - 5 = 2 \times (L - 5)$...............(1)

Também foi dito que: "Dentro de cinco anos (***no futuro***), será somente 4/3".

$J + 5 = \dfrac{4}{3}(L + 5)$.............(2)

Desenvolvendo as equações (1) e (2), teremos:

Equação (1)

$J - 5 = 2 \times (L - 5) \Rightarrow J - 5 = 2L - 10 \Rightarrow J - 2L = -10 + 5 \Rightarrow (J - 2L = -5) \times (-1)$

$2L - J = 5$

Equação (2)

$J + 5 = \dfrac{4}{3}(L + 5) \Rightarrow 3(J + 5) = 4(L + 5) \Rightarrow 3J + 15 = 4L + 20 \Rightarrow 3J - 4L = 20 - 15$

$3J - 4L = 5$

Formando-se um sistema linear com as referidas equações:

$$\begin{cases} 2L - J = 5 \text{................(1)} \\ 3J - 4L = 5 \text{.............(2)} \end{cases}$$

Isolando a variável "J" na equação (1), teremos:

$J = 2L - 5$, substituindo-se o valor encontrado na equação (2)

$3 \times (2L - 5) - 4L = 5 \Rightarrow 6L - 15 - 4L = 5 \Rightarrow 6L - 4L = 15 + 5 \Rightarrow 2L = 20$

$L = \dfrac{20}{2} \Rightarrow L = 10$ anos

Gabarito: D

28. (Funiversa) Há vinte anos, Maria tinha o dobro da idade atual de José. Hoje, Maria tem a idade que José terá daqui a 43 anos. Daqui a 15 anos, a idade de Maria, em anos, será igual a:

a) 23.
b) 43.
c) 48.
d) 66.
e) 81.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de: $\begin{cases} M: \text{idade atual de Maria} \\ J: \text{idade atual de José} \end{cases}$;

Foi dito que: "**Há** vinte anos (***no passado***), Maria tinha o dobro da **idade atual** de José".

$M - 20 = 2J$

Também foi dito que: "**Hoje** (***no presente***), Maria tem a idade que José **terá daqui** a 43 anos (***no futuro***)".

$M = J + 43$

Formando-se um sistema linear com as referidas equações:

$$\begin{cases} M - 20 = 2J................(1) \\ M = J + 43.................(2) \end{cases}$$

Substituindo-se a equação (2) em (1), tem-se que:

$M - 20 = 2J \Rightarrow J + 43 - 20 = 2J \Rightarrow 23 = 2J - J \Rightarrow J = 23$ anos

Portanto, Maria tem a seguinte idade atual:

$M = J + 43 \Rightarrow M = 23 + 43 \Rightarrow M = 66$ anos

Logo, daqui a 15 anos Maria terá:

$66 + 15 = 81$ anos

Gabarito: E

29. (Consulplan) Um pai tem atualmente 45 anos e os filhos, respectivamente, 17, 20 e 22 anos. Há quantos anos foi a idade do pai igual à soma das idades dos filhos?

a) 4.
b) 5.
c) 7.
d) 9.
e) 12.

Resolução:

Idades atuais: $\begin{cases} \text{pai}: 45 \text{ anos} \\ \text{filho}_1: 17 \text{ anos;} \\ \text{filho}_2: 20 \text{ anos;} \\ \text{filho}_3: 22 \text{ anos} \end{cases}$ Idades há "*x*" anos: $\begin{cases} \text{pai}: (45 - x) \text{ anos} \\ \text{filho}_1: (17 - x) \text{ anos;} \\ \text{filho}_2: (20 - x) \text{ anos;} \\ \text{filho}_1: (22 - x) \text{ anos} \end{cases}$

"Há quantos anos (há "*x*" anos) foi a idade do pai igual à soma das idades dos filhos".

$$\underbrace{45 - x}_{\text{a idade do pai foi}} = \underbrace{17 - x + 20 - x + 22 - x}_{\text{igual a soma das idades dos filhos}} \Rightarrow 45 - x = -3x + 59$$

$$3x - x = 59 - 45 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{2} \Rightarrow x = 7 \text{ anos}$$

Gabarito: C

30. (FCC) Um pai tem 48 anos e seu filho 18. Há quantos anos a idade do pai foi o triplo da idade do filho?

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 7.

Resolução:

Idades atuais: $\begin{cases} \text{pai : 48 anos} \\ \text{filho : 18 anos} \end{cases}$ Idades há "x" anos: $\begin{cases} \text{pai : (48 - x) anos} \\ \text{filho : (18 - x) anos} \end{cases}$

"Há quantos anos (há "x" anos) a idade do pai foi o triplo da idade do filho".

$$\underbrace{48 - x}_{\text{a idade do pai}} = \underbrace{3 \times (18 - x)}_{\text{era o triplo da idade do filho}} \Rightarrow 48 - x = 54 - 3x \Rightarrow 3x - x = 54 - 48$$

$$2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ anos}$$

Gabarito: A

31. Qual a idade atual de uma pessoa se daqui a oito anos ela terá exatamente o triplo da idade que tinha há oito anos?

a) 15 anos.
b) 16 anos.
c) 24 anos.
d) 30 anos.
e) 36 anos.

Resolução:

Determinaremos que a idade atual de uma pessoa seja "x anos", assim, de acordo com o enunciado, teremos que:

Daqui a oito anos sua idade será: $x + 8$

Há oito anos sua idade era de: $x - 8$

Retornando ao enunciado da questão, podemos formar a seguinte equação do 1º grau com uma variável, referente ao enunciado: "Qual a idade atual de uma pessoa se daqui a oito anos ela terá exatamente o triplo da idade que tinha há oito anos?"

$$x + 8 = 3 \times (x - 8) \Rightarrow x + 8 = 3x - 24 \Rightarrow x - 3x = -24 - 8 \Rightarrow (-2x = -32) \times (-1)$$

$$2x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{2} \Rightarrow x = 16 \text{ anos}$$

Gabarito: B

32. Hoje, minha idade e a do meu filho somam 70 anos. Daqui a 10 anos:

a) nossas idades serão as mesmas;
b) nossas idades terão diferença de 10 anos a mais que do que diferem hoje;
c) nossas idades serão 70 anos e 10 anos;
d) nossas idades somarão 90 anos;
e) nossas idades terão diferença de 20 anos a menos que do que diferem hoje.

Resolução:

Seja "x" o valor da minha idade e "y" o valor da idade do meu filho. Se hoje nossas idades somam 70 anos, então:

$x + y = 70$ anos

Daqui a 10 anos, teremos: $\begin{cases} \text{minha idade: } (x+10) \text{ anos} \\ \text{idade do meu filho: } (y+10) \text{ anos} \end{cases}$

Somando nossas idades, obteremos:

$x + 10 + y + 10 = x + y + 20 \Rightarrow$ como $x + y = 70$, então, teremos:

$x + y + 20 = 70 + 20 = 90$ anos

Gabarito: D

33. Um pai tem hoje 32 anos mais do que seu filho. Daqui a 24 anos a sua idade será o dobro da de seu filho. Quais são as idades atuais?

a) 4 e 6.
b) 6 e 12.
c) 10 e 36.
d) 8 e 40.
e) 9 e 56.

Resolução:

Idades atuais: $\begin{cases} \text{pai: } y = x + 32 \\ \text{filho: } x \text{ anos} \end{cases}$ Idades daqui a 24 anos: $\begin{cases} \text{pai: } y + 24 = 2(x + 24) \text{ anos} \\ \text{filho: } (x + 24) \text{ anos} \end{cases}$

Formando um sistema linear com as relações encontradas referentes às idades do pai, teremos:

$\begin{cases} y = x + 32 \text{ .... (1)} \\ y + 24 = 2(x + 24) \text{ .... (2)} \end{cases}$, Substituindo o valor de "y" da relação (1) em (2), teremos:

$x + 32 + 24 = 2(x + 24) \quad \Rightarrow \quad x + 56 = 2x + 48 \quad 56 - 48 = 2x - x$

$x = 8$ anos (*idade atual do filho*)

Determinando o valor de "y", tem-se:

$y = x + 32 \quad \Rightarrow \quad y = 8 + 32 \quad \Rightarrow \quad y = 40$ anos (idade atual do pai)

Gabarito: D

34. A metade da idade de uma pessoa aumentada de 15 é igual ao dobro da mesma idade menos 45. Quantos anos tem essa pessoa?

a) 60 anos.
b) 40 anos.
c) 35 anos.
d) 32 anos.
e) 20 anos.

Resolução:

Sendo de "x anos" a suposta idade de uma pessoa, então, pelo enunciado da questão, teremos:

$$\underbrace{\frac{x}{2}+15}_{\text{metade da idade aumentado de 15}} = \underbrace{2x-45}_{\text{dobro da mesma idade menos 45}} \Rightarrow \left(\frac{x}{2}+15 = 2x-45\right)\times 2 \Rightarrow x+30 = 4x-90$$

$$-4x + x = -90 - 30 \Rightarrow (-3x = -120)\times(-1) \Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{3}$$

$x = 40$ anos

Gabarito: B

35. Daqui a 8 anos a idade do pai será igual ao dobro da soma das idades de seus dois filhos. Se a diferença das idades de seus filhos é 5 e o pai é 47 anos mais velho que seu primogênito, determine a idade atual do irmão mais velho.

a) 9 anos.
b) 10 anos.
c) 11 anos.
d) 12 anos.
e) 13 anos.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos as idades atuais do pai e dos dois filhos de:

$$\begin{cases} x: \text{pai} \\ y: \text{filho mais velho (primogênito)} \\ z: \text{filho mais novo} \end{cases}$$

De acordo com as afirmativas do enunciado, construiremos as seguintes relações:

I) "Daqui a 8 anos a idade do pai será igual ao dobro da soma das idades de seus dois filhos".

$\underbrace{x+8}_{\text{idade do pai}} = \underbrace{2\times(y+8+z+8)}_{\text{igual ao dobro da soma das idades dos filhos}}$, ou seja.

$$x + 8 = 2\times(y + 8 + z + 8) \Rightarrow x + 8 = 2\times(y + z + 16) \Rightarrow x + 8 = 2y + 2z + 32$$

$$x = 2y + 2z + 32 - 8 \Rightarrow \left[\, x = 2y + 2z + 24 \,\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

II) "Se a diferença das idades de seus filhos é 5"

$[\, y - z = 5 \,] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

III) "e o pai é 47 anos mais velho que seu primogênito". Em outras palavras, a diferença entre as idades do pai e do seu filho mais velho é de 47 anos.

$\lfloor\, x - y = 47 \text{ anos} \,\rfloor \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

Formando um sistema linear com as relações (1), (2) e (3), tem-se:

$$\begin{cases} x = 2y + 2z + 24 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ y - z = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ x - y = 47 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Isolando a variável "*z*" da relação (2) e substituindo na relação (1):

$$y - z = 5 \quad \Rightarrow \quad \left(-z = 5 - y\right)\times(-1) \quad \Rightarrow \quad \left[\ z = y - 5\ \right] \text{............. (4)}$$

$$x = 2y + 2z + 24 \quad \Rightarrow \quad x = 2y + 2(y - 5) + 24 \quad \Rightarrow \quad x = 2y + 2y - 10 + 24$$

$$x = 4y + 14 \quad \Rightarrow \quad \left[\ x - 4y = 14\ \right] \text{............ (5)}$$

Formando um sistema, somente entre as relações (3) e (5), teremos para o valor de "*y*":

$$\begin{cases} x - y = 47 \text{ .... (3)} \\ x - 4y = 14 \text{ .... (5)} \end{cases}, \text{ subtraindo as relações, tem-se:}$$

$$(x - y) - (x - 4y) = 47 - 14 \quad \Rightarrow \quad x - y - x + 4y = 33 \quad \Rightarrow \quad 4y - y = 33$$

$$3y = 33 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{33}{3} \quad \Rightarrow \quad y = 11 \text{ anos}$$

Gabarito: C

Capítulo 11

Inequações do 1º grau

Toda sentença matemática envolvendo uma variável real que pode ser expressa de uma das formas sem que seu conjunto solução se altere é chamada inequação do 1º grau.

$ax + b \geq 0$ ou

$ax + b > 0$ ou

$ax + b \leq 0$ ou

$ax + b < 0$, com $a \neq 0$,

Exemplo:

$8x + 3 < 5x + 2$ é uma inequação do 1º grau, pois pode ser transformada, na forma reduzida, em:

$$3x + 1 < 0$$

11.1. Propriedades fundamentais das desigualdades

1ª Propriedade: Adicionando ou subtraindo um mesmo número aos dois membros de uma desigualdade, obtemos uma nova desigualdade, de mesmo sentido.

$$\boxed{\text{Se } a > b \text{ então } a + c > b + c \text{ e } a - c > b - c}$$

2ª Propriedade: Multiplicando ou dividindo os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número positivo, obtemos uma nova desigualdade, de mesmo sentido.

$$\boxed{p \cdot a > p \cdot b \quad \text{e} \quad \frac{a}{p} > \frac{b}{p}}$$

3ª Propriedade: Multiplicando ou dividindo os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número negativo, obtemos uma nova desigualdade, de sentido contrário.

$$\boxed{\text{Se } a > b \text{ e } n < 0 \text{ então } n \cdot a < n \cdot b \text{ e } \frac{a}{n} < \frac{b}{n}}$$

11.2. Estudo do sinal da expressão ax + b, a ≠ 0

Determinar a ***solução*** de uma inequação do 1º grau é determinar os valores de "x" que transformam a inequação em uma ***sentença matemática verdadeira***. Para resolver uma inequação do 1º grau, utilizamos a regra prática:

Para $x = \dfrac{-b}{a}$, a expressão $ax + b$ se anula.

Para $x > \dfrac{-b}{a}$, a expressão $ax + b$ possui o mesmo sinal que o coeficiente "a".

Para $x < \dfrac{-b}{a}$, a expressão $ax + b$ possui sinal contrário ao do coeficiente "a".

Exemplo 1:

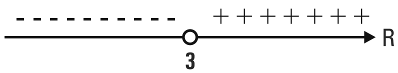
Procurar a solução da inequação $2x - 6 < 0$, ou seja, os possíveis valores de "x" que tornam a expressão $2x - 6$ negativa.

Resolvendo a inequação dada, temos: $2x - 6 < 0 \therefore 2x < 6 \therefore x < \dfrac{6}{2} \therefore x < 3$

Estudando o sinal da expressão "$2x - 6$", temos que ela se anula para:

$$x = \frac{-b}{a} \Rightarrow x = \frac{-(-6)}{2} = 3$$

Assim, teremos que os possíveis sinais de "$2x - 6$" representados na reta real (R):



Ou seja:

Para o valor de "x" igual a 3 $(x = 3)$, a expressão $2x - 6$ será nula.

Para qualquer valor de "x" menor que 3 $(x < 3)$, a expressão $2x - 6$ será negativa.

Para qualquer valor de "x" maior que 3 $(x > 3)$, a expressão $2x - 6$ será positiva.

Solução procurada: $\{x \in R \;/\; x < 3\}$

Exemplo 2:

Procurar a solução da inequação $-5x + 30 \geq 0$

Nesse caso, devemos determinar os possíveis valores de "x" que tornam a expressão "$-5x + 30$" maior ou igual a zero.

Resolvendo a inequação dada, temos:

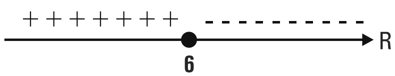
$$-5x \geq -30 \therefore (-5x \geq -30) \times (-1) \therefore 5x \leq 30 \therefore x \leq \frac{30}{5} \therefore x \leq 6$$

Obs.: Quando multiplicamos todos os membros de uma inequação por (-1), o sinal de desigualdade se inverte.

Estudando o sinal da expressão "$-5x + 30$", temos que ela se anula para:

$$x = \frac{-b}{a} \Rightarrow x = \frac{-(30)}{-5} = 6$$

Assim, os possíveis sinais de "$-5x + 30$" representados na reta real (R) são:



Ou seja,
Para o valor de "x" igual a 6 ($x = 6$), a expressão "$-5x + 30$" será nula, igual a zero.
Para qualquer valor de "x" maior que 6 ($x > 6$), a expressão "$-5x + 30$" será negativa.
Para qualquer valor de "x" menor que 6 ($x < 6$), a expressão "$-5x + 30$" será positiva.
Solução procurada: $\{x \in R \ / \ x \leq 6\}$

Exercícios resolvidos

1. O conjunto verdade da inequação $\frac{x-3}{4} - \frac{3}{2} - 3x > \frac{2x-5}{3}$ é:

a) $x < \frac{-7}{21}$.
b) $x > \frac{-7}{41}$.
c) $x > \frac{-3}{2}$.
d) $x < \frac{-7}{41}$.
e) $x > 1$.

Resolução:

Inicialmente, determinaremos o $mmc(2; 3; 4) = 12$

$$\frac{x-3}{4} - \frac{3}{2} - 3x > \frac{2x-5}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{3.(x-3)}{12} - \frac{6.3}{12} - \frac{12.3x}{12} > \frac{4.(2x-5)}{12} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3.(x-3) - 18 - 36x > 8x - 20 \quad \Rightarrow \quad 3x - 9 - 18 - 36x > 8x - 20 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -41x > 7 \quad \Rightarrow \quad (-41x > 7) \times (-1) \quad \Rightarrow \quad 41x < -7 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{-7}{41}$$

Gabarito: D

2. O conjunto solução da inequação $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} > \frac{2x}{4} + \frac{1}{3}$, no universo IN, é:

a) unitário.
b) vazio.
c) formado por dois elementos.
d) formado por três elementos.
e) infinitos elementos.

Resolução:

Inicialmente, determinaremos o $mmc(2; 3; 4) = 12$

$$\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} > \frac{2x}{4} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4.x}{12} - \frac{6.(x+1)}{12} > \frac{3.2x}{12} + \frac{4.1}{12} \Rightarrow 4x - 6.(x+1) > 6x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 6x - 6 > 6x + 4 \Rightarrow 4x - 6x - 6x > 4 + 6 \Rightarrow -8x > 10 \Rightarrow (-8x > 10) \times (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 8x < -10 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{-10}{8} \quad \Rightarrow \quad x < -1{,}25$$

Estando a solução definida nos conjuntos dos naturais, a solução dessa inequação será representada pelo conjunto vazio:

$S = \varnothing$ ou $S = \{\ \}$

Gabarito: B

3. O menor número natural que satisfaz a inequação 3*x* – 10 < 4*x* – 15 é:

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

Resolução:

$$3x - 10 < 4x - 15 \Rightarrow 3x - 4x < -15 + 10 \Rightarrow -x < -5 \Rightarrow (-x < -5) \times (-1) \Rightarrow x > 5$$

A referida solução anterior pode ser representada sob a forma de conjunto:

S = {6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; ...}

Portanto, o menor valor, nesse caso, será representado pelo elemento 6.

Gabarito: C

4. O maior valor inteiro de x que satisfaz a inequação $x - \frac{x \quad 1}{\quad}$ < 0, é:

a) –2.
b) –1.
c) 0.
d) 1.
e) 2.

Resolução:

$$x - \frac{x-1}{4} < 0 \Rightarrow x < \frac{x-1}{4} \Rightarrow 4x < x - 1 \Rightarrow 4x - x < -1 \Rightarrow 3x < -1 \Rightarrow x < \frac{-1}{3}$$

Possíveis soluções inteiras dessa inequação:

S = {–1; –2; –3; –4; –5; –6; ...}

Gabarito: B

5. Determinar o menor valor inteiro negativo de *x* que satisfaz: $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{4} < \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$.

a) –3.
b) –4.
c) –5.
d) –6.
e) –7.

Resolução:

Inicialmente, determinaremos o *mmc*(2; 3; 4) = 12

$$\frac{x}{2} - \frac{x-1}{4} < \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{6.x}{12} - \frac{3.(x-1)}{12} < \frac{4.x}{12} + \frac{4.2}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 3.(x-1) < 4x + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 3x + 3 < 4x + 8 \Rightarrow 6x - 3x - 4x < 8 - 3 \Rightarrow -x < 5 \Rightarrow (-x < 5) \times (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x > -5$$

A solução da inequação anterior, pertencente aos números inteiros, será todos os inteiros maiores que –5, portanto, teremos:

S = {–4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; ...}

O menor deles: "–4".

Gabarito: B

6. O menor número primo positivo que satisfaz a inequação $\frac{3(x-2)}{4} - 3x < 5 - \frac{x-1}{2}$ é:

a) 2.
b) 3.
c) 5.
d) 7.
e) 11.

Resolução:

Inicialmente, determinaremos o $mmc(2; 4) = 4$

$$\frac{3.(x-2)}{4} - 3x < 5 - \frac{x-1}{2} \Rightarrow \frac{3.(x-2)}{4} - \frac{4.3x}{4} < \frac{4.5}{4} - \frac{2.(x-1)}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x-2) - 12x < 20 - 2(x-1) \Rightarrow 3x - 6 - 12x < 20 - 2x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 12x + 2x < 20 + 2 + 6 \Rightarrow -7x < 28 \Rightarrow (-7x < 28) \times (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x > -28 \Rightarrow x > \frac{-28}{7} \Rightarrow x > -4$$

Números primos positivos maiores que –4: {2; 3; 5; 7; 11; ...}

Portanto, o menor será o primo "2".

Gabarito: A

7. A solução da inequação $\frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{4} \leq x - \frac{x-1}{8}$ em R é:

a) $x \geq 3$.
b) $x \leq 3$.
c) $x \geq 2$.
d) $0 < x < 3$.
e) $x \leq 0$.

Resolução:

Inicialmente, determinaremos o $mmc(2; 4; 8) = 8$

$$\frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{4} \leq x - \frac{x-1}{8} \Rightarrow \frac{4.(x+3)}{8} - \frac{2.(x-2)}{8} \leq \frac{8.x}{8} - \frac{x-1}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4.(x+3) - 2.(x-2) \leq 8x - (x-1) \Rightarrow 4x + 12 - 2x + 4 \leq 8x - x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 2x - 8x + x \leq 1 - 12 - 4 \Rightarrow -5x \leq -15 \Rightarrow (-5x \leq -15) \times (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x \geq 15 \Rightarrow x \geq \frac{15}{5} \Rightarrow x \geq 3$$

Gabarito: A

8. Dada a inequação 3.(3 – *x*) + 3 – 2.(4 – 3*x*) < 0, os números que a satisfazem são todos:

a) menores que –4/3;
b) menores que 3/4;
c) maiores que –1/3;
d) maiores que 1/4;
e) menores que –8/3.

Resolução:

$$3.(3-x) + 3 - 2.(4-3x) < 0 \Rightarrow 9 - 3x + 3 - 8 + 6x < 0 \Rightarrow -3x + 6x < -9 - 3 + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x < -4 \Rightarrow x < \frac{-4}{3}$$

Gabarito: A

9. Pertence ao conjunto solução da inequação 2.(2*x* + 6) – 3(8*x* – 9) < 2.(3 – 4*x*) o número inteiro:

a) –2.
b) 0.
c) 2.
d) –3.
e) 3.

Resolução:

$$2.(2x+6)-3(8x-9)<2.(3-4x) \quad \Rightarrow \quad 4x+12-24x+27<6-8x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4x-24x+8x<6-27-12 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -12x<-33 \quad \Rightarrow \quad (-12x<-33)\times(-1) \quad \Rightarrow \quad 12x>33 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{33}{12} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x>2{,}75$$

Solução desejada: $S=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$, portanto, de acordo com as alternativas, 3 é o elemento procurado.

Gabarito: D

10. Quantos números inteiros positivos satisfazem a inequação $-3x+2(x+2)>2.(x-4{,}5)$?

a) um.
b) dois.
c) três.
d) quatro.
e) cinco.

Resolução:

$$-3x+2(x+2)>2.(x-4{,}5) \quad \Rightarrow \quad -3x+2x+4>2x-9 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -3x+2x-2x>-9-4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -3x>-13 \quad \Rightarrow \quad (-3x>-13)\times(-1) \quad \Rightarrow \quad 3x<13 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{13}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x<4{,}333...$$

Solução desejada: S = {1, 2, 3, 4}, portanto, quatro elementos.

Gabarito: D

Capítulo 12

Equação do 2º grau

É toda e qualquer equação da forma:

$ax^2 + bx + c = 0$, com: $a \neq 0$

"a" → coeficiente de "x^2" ou do termo de 2º grau;

"b" → coeficiente de "x" ou do termo de 1º grau;

"c" → coeficiente do termo de grau ("x^0") zero ou também chamado de *termo independente* "x";

"x" → valor da incógnita a ser procurada na equação

Obs.: Os *possíveis* valores ***reais*** de "x" que satisfazem a equação do 2º grau são chamados de ***raízes*** da equação (são os valores que tornam a sentença dada – **equação** – *verdadeira*)

12.1. Resolução das equações incompletas

1º tipo: $ax^2 + c = 0$, com $b = 0$

$$ax^2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 = -c \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{-c}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Exemplos:

a) Resolva a equação em R: $x^2 - 9 = 0$

Para $a = 1$ e $c = -9$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{-(-9)}{1}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{9}{1}} \quad \Rightarrow \quad x' = 3 \text{ e } x'' = -3 \text{ ou } x = \pm 3 \therefore$$

V = {–3; 3} ou V = {±3}

b) Resolva a equação em R: $2x^2 - 32 = 0$

Para $a = 2$ e $c = -32$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{-(-32)}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{32}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{16}$$

$\Rightarrow x' = 4$ e $x'' = -4 \Rightarrow x = \pm 4 \therefore$

$\therefore$ V = {–4; 4} ou V = {±4}

c) Resolva a equação em R: $4x^2 + 100 = 0$

Para $a = 4$ e $c = 100$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{-(100)}{4}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-25} \therefore \text{V} = \{\varnothing\} = \{\ \}$$

Logo: $x', x'' \notin R$ (lê-se: as duas raízes ***não pertencem*** ao conjunto dos reais)

Obs. 1: A *solução* da equação é um *conjunto vazio*, pois o *radicando* é *negativo* (–25) tornando impossível sua determinação para o *conjunto dos números reais.*

Obs. 2: Quando o *conjunto* ***verdade*** ou ***solução*** da *equação incompleta* do 2º grau e desse tipo ***não*** for *vazio* e também *diferente de zero*, esse *conjunto* será constituído sempre por dois elementos (*duas raízes*) *reais* e *simétricos* **ou** *reais* e *opostos.*

Obs. 3: Neste caso, as raízes sendo reais e simétricas (ou opostas) sua soma será nula ($S = 0$).

$x' + x'' = 0$

2º tipo: $ax^2 + bx = 0$, com $c = 0$

$ax^2 + bx = 0 \quad \Rightarrow \quad x.(ax + b) = 0$

Então, para que um produto seja ***nulo***, pelo menos um dos *fatores* deve ser *nulo* (igual a *zero*).

Então: $x' = 0 \therefore$ 1ª raiz (uma *raiz nula*), ou:

$$ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad ax = -b \quad \Rightarrow \quad x'' = -\frac{b}{a}: \text{ 2ª raiz}$$

Obs.: Quando o *termo independente* de "x" for *nulo* ($c = 0$), a equação do 2º grau terá, pelo menos, uma das raízes ***nula***.

Exemplos:

a) $3x^2 - 27x = 0 \quad \Rightarrow \quad x.(3x - 27) = 0$

$x` = 0$, ou:

$$3x - 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = 27 \Rightarrow x = \frac{27}{3} \quad \Rightarrow \quad x'' = 9 \therefore$$

V = {0; 9}

b) $4x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x.(4x + 12) = 0$

$x` = 0$, ou:

$$4x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = -12 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{12}{4} \quad \Rightarrow \quad x'' = -3$$

$\therefore$ V = {–3; 0}

3º tipo: $ax^2 = 0$, com $b = c = 0$

$$ax^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{0}{a}, \text{ como } a \neq 0 \text{ por definição, } x' = x'' = 0$$

Conclusão: A equação do 2º grau terá sempre *duas raízes reais* e *nulas* ou *uma raiz dupla nula*, quando $b = c = 0$, com $a \neq 0$ por definição.

12.2. Resumo analítico da relação entre os coeficientes

O estudo analítico entre os coeficientes "a", "b" e "c" dada a equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, poderá, assim, ser resumido da seguinte forma:

I) Se "$c = 0$": pelo menos *uma raiz será nula*;

II) Se "$b = 0$": as duas raízes serão *simétricas* ou *opostas*;

III) Se "$a = c$": uma raiz será *inversa* da oura ou as duas raízes são *recíprocas*;

IV) Se "$|a| > |c|$": *pelo menos* uma raiz será *fracionária*;

12.3. Resolução da equação completa do 2º grau

$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Fórmula resolvente ou ***Fórmula de Bhaskara***:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (*Fórmula de Bhaskara*)

onde, $\Delta = b^2 - 4ac$.

"Δ" (lê-se: delta) é chamado de *discriminante* da **equação do 2º grau**, pois é ele quem "*discrimina*" (ou avalia) os diversos tipos de *raízes* dessa equação.

Obs.: Quando o coeficiente "*a*" for negativo, devemos multiplicar os dois membros da igualdade da equação por "–1"; por essa razão, consideraremos *sempre positivo* o *coeficiente* de "x^2", salvo indicação expressa em contrário.

Exemplos:

a) Resolva a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, em R:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x' = \frac{5+1}{2.} = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow \quad x' = 3\text{ , e}$$

$$x'' = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x'' = 2$$

S = V = {2; 3}

b) Resolva a equação $x^2 + 4x - 8 = 0$, em R:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -8 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (4)^2 - 4.1.(-8) = 16 + 32 = 48$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2.1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{3 \times 16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -2 \pm 2\sqrt{3}$$

$$x' = -2 + \sqrt{3} \text{ e } x'' = -2 - \sqrt{3}$$

$V = \{-2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\}$

12.4. Relações entre os coeficientes *a*, *b* e *c* e suas raízes da equação completa do 2º grau (ou relações de *Girard*)

- Soma das raízes (*S*)

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad S = -\frac{b}{a}$$

- Produto das raízes (*P*)

$$P = x' . x'' = \frac{c}{a} \quad P = \frac{c}{a}$$

- Módulo da diferença das raízes (*D*)

$$D = |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

Obs.: Se o problema afirmar que $x_1 = 2x_2$ (uma raiz é o dobro da outra), utilize a relação de *soma* ($x_1 + x_2 = -b/a$) e *produto* ($x_1 \times x_2 = c/a$), denotando $x_2 = y$ e $x_1 = 2y$

12.5. Composição ou determinação da equação do 2º grau completa, conhecendo-se as suas raízes

É calculada ou obtida por meio da fórmula resolvente:

$$x^2 - \boldsymbol{S}x + \boldsymbol{P} = 0$$

$$\text{Onde: } \begin{cases} S = x' + x'' \text{ (soma das 2 raízes)} \\ P = x'.x'' \text{ (produto das 2 raízes)} \end{cases}$$

Exemplo: Qual é a equação do 2º grau completa cuja soma e o produto valem, respectivamente, 4 e – 6?

$$\begin{cases} S = x' + x'' \Rightarrow S = 2 + (-6) \;\; S = -4 \\ P = 2.(-6) \Rightarrow P = -12 \end{cases}$$

$$x^2 - \boldsymbol{S}x + \boldsymbol{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - (-4)\,x + (-12) = 0$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

12.6. Forma fatorada da equação completa do 2º grau

A *forma fatorada* será dada por:

$a.(x - x').(x - x'') = 0$, com com: $a \neq 0$

Exemplo: para a = 6, $x' = \frac{1}{2}$ e $x'' = \frac{1}{3}$

$$a.(x - x').(x - x'') = 0 \quad \Rightarrow \quad 6.\left(x - \frac{1}{2}\right).\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

Que produz a equação:

$$6.\left(x^2 - \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - \frac{6x}{3} - \frac{6x}{2} + \frac{6}{6} = 0$$

$$6x \;\; - 2x - 3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

12.7. Discussão da existência das raízes de uma equação do 2º grau

A existência ou não das *raízes* de uma **equação do 2º grau** depende *exclusivamente* do sinal do *discriminante* dessa equação ("Δ").

Como, $\Delta = b^2 - 4ac$ esse valor de "Δ" pode ser de três casos: ***positivo***, ***nulo*** ou ***negativo***.

Vamos considerar essas três análises:

1º caso: discriminante ***positivo*** $\Rightarrow \boxed{\Delta > 0}$

Conclusão: A equação admitirá ***duas raízes reais*** e ***desiguais*** (ou ***diferentes*** ou ***distintas***)

2º caso: discriminante ***nulo*** $\Rightarrow \boxed{\Delta = 0}$

Conclusão: A equação admitirá ***duas raízes reais*** e ***iguais*** (ou ***raiz real dupla***)

3º caso: discriminante ***negativo*** $\Rightarrow \boxed{\Delta < 0}$

Conclusão: A equação não admitirá ***raízes reais*** (*não possui raízes no campo real*)

12.8. Toda discussão analítica pode ser resumida no seguinte esquema

Considerando, inicialmente, que: $\Delta > 0$ (duas raízes reais e diferentes).

$$c > 0 \begin{cases} b > 0 \text{ ambas as raízes serão } \textbf{\textit{negativas}} \\ b < 0 \text{ ambas as raízes serão } \textbf{\textit{positivas}} \end{cases}$$

$$c = 0 \begin{cases} \text{uma raiz nula } (x = 0) \\ \text{outra igual a } (x = -b/a) \end{cases}$$

$$c < 0 \begin{cases} \text{raízes de sinais} \\ \quad \text{contrários} \end{cases} \begin{cases} b < 0\text{: a maior raiz é a } \textbf{\textit{positiva}} \\ b > 0\text{: a maior raiz é a } \textbf{\textit{negativa}} \end{cases}$$

Considerando agora, que: $\Delta = 0$ (duas raízes reais e iguais)

$$\begin{cases} b > 0 : \text{uma raiz dupla negativa} \\ b < 0 : \text{uma raiz dupla positiva} \end{cases}$$

E, por último: $\Delta < 0$ (não existem raízes reais).

Exercícios resolvidos

1. (FCC) As raízes que satisfazem a equação $2x^2 + 3x - 2 = 0$ são:

a) +1; −2.
b) +1/2; +2.
c) +1/2; −2.
d) −1/2; +2.
e) −1/2; −2.

Resolução:

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara*, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde "Δ" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$, sendo *a*, *b* e *c* as constantes da equação do 2º grau na forma: $ax^2 + bx + c = 0$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c*, da equação $2x^2 + 3x - 2 = 0$, igual a:

$$\begin{cases} a = 2. \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 9 + 16 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \times 2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm 5}{12} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{2^{\div 2}}{4_{\div 2}} = +\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-3-5}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2 \end{array} \right.$$

Portanto, as raízes são $+\frac{1}{2}$ e -2

Gabarito: C

2. **(MULT-SAI) A equação: $x + \frac{x}{x-2} = 2 + \frac{x}{x-2}$ tem:**

a) uma única raiz inteira negativa;
b) exatamente duas raízes diferentes;
c) uma única raiz fracionária positiva;
d) solução vazia;
e) solução infinita.

Resolução:

Inicialmente, determinaremos a *condição de existência* dessa equação fracionária.

$x - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2$

Se o valor da incógnita "*x*" for igual a 2, então teremos para o denominador um valor nulo, o que torna uma *indeterminação matemática*, pois não existe nenhum número divisível por "0".

Desenvolvendo a equação $x + \frac{x}{x-2} = 2 + \frac{x}{x-2}$, onde, dessa igualdade, o mmc será dado por: "$x - 2$":

$$x + \frac{x}{x-2} = 2 + \frac{x}{x-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x(x-2)}{x-2} + \frac{x}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{x}{x-2}$$

$$x(x-2) + x = 2(x-2) + x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + x = 2x - 4 + x$$

$$x^2 - 2x + x - 2x - x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara*, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c*, da equação $x^2 - 4x + 4 = 0$, igual a: $\begin{cases} a = 1. \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 16 - 16 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \times 1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Através da condição de existência em que o valor de "x" deve ser diferente de $2 (x \neq 2)$, conclui-se que a solução será um conjunto vazio.

$S = \varnothing$ ou $S = \{\ \}$

Gabarito: D

3. (FGV) Dadas as afirmações:

I. A equação $6x^2 + x - 1 = 0$ possui duas raízes fracionárias reais.

II. A equação $7x^2 + 3x + 1 = 3x^2$ possui uma raiz fracionária real.

III. A equação $x^2 - 11x = x - 36$ não possui raízes reais.

Quantas dessas afirmações são verdadeiras?

a) 3.
b) 2.
c) 1.
d) 0.

Resolução:

Inicialmente, julgaremos as afirmações I, II e III.

I. A equação $6x^2 + x - 1 = 0$ possui duas raízes fracionárias reais.

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara*, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde "Δ" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c*, da equação $6x^2 + x - 1 = 0$, igual a: $\begin{cases} a = 6. \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1^2 - 4 \times 6 \times (-1) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1 + 24 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm 5}{12} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{-1+5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-1-5}{12} = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2} \end{array} \right.$$

Portanto, essa afirmação é *verdadeira*, pois a equação $6x^2 + x - 1 = 0$ possui duas raízes reais e fracionárias: $\frac{1}{3}$ e $\frac{-1}{2}$.

II. A equação $7x^2 + 3x + 1 = 3x^2$ possui uma raiz fracionária real.

Inicialmente, reduziremos a equação $7x^2 + 3x + 1 = 3x^2$ para a sua menor forma possível:

$$7x^2 + 3x + 1 = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad 7x^2 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$$
$$4x^2 + 3x + 1 = 0$$

Utilizando-se novamente da fórmula de *Bhaskara*, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c*, da equação $4x^2 + 3x + 1 = 0$, igual a: $a = 4$, $b = 3$ e $c = 1$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = 3^2 - 4 \times 4 \times 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 9 - 16 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -7$$

Sendo o valor do discriminante de *Bhaskara* negativo ($\Delta < 0 \rightarrow \Delta = -7$) a equação $4x^2 + 3x + 1 = 0$ não possuirá raízes reais, portanto, a afirmação está FALSA.

III. A equação $x^2 - 11x = x - 36$ não possui raízes reais.

Inicialmente, reduziremos a equação $x^2 - 11x = x - 36$ para a sua menor forma possível:

$$x^2 - 11x = x - 36 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 11x - x + 36 = 0$$
$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

Utilizando-se apenas do discriminante de *Bhaskara* (Δ), onde $\Delta = b^2 - 4ac$, discutiremos a natureza das raízes dessa equação.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c*, da equação $x^2 - 12x + 36 = 0$, igual a: $a = 1$, $b = -12$ e $c = 36$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 36 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 144 - 144 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0$$

Sendo o discriminante nulo ($\Delta = 0$), então a equação $x^2 - 12x + 36 = 0$ possuirá duas raízes reais e iguais, logo, esse item está FALSO.

Gabarito: C

4. (NCE) As raízes da equação $x^2 + mx + n = 0$ são 5 e –1. A soma dos valores das constantes *m* e *n* é igual a:

a) –9.
b) –5.
c) 0.
d) 1.
e) 5.

Resolução:

Dada a equação do 2º grau $x^2 + mx + n = 0$, temos que: $\begin{cases} a = 1 \\ b = m \\ c = n \end{cases}$

Sabemos que a soma das raízes de uma equação do 2º grau é dada por:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{(Relação de Girard)}$$

Sendo $x_1 = 5$ e $x_2 = -1$ e substituindo na relação de Girard temos:

$$5 + (-1) = \frac{-m}{1} \quad \Rightarrow \quad 5 - 1 = -m \quad \Rightarrow \quad m = -4$$

E o produto das raízes dessa equação é dado pela relação:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{(Relação de Girard)} \text{. Ou seja,}$$

$$5 \times (-1) = \frac{n}{1} \quad \Rightarrow \quad -5 = n \quad \Rightarrow \quad n = -5$$

Somando-se os valores das constantes *m* e *n* encontradas, obtemos:

$m + n = -4 + (-5) \quad \Rightarrow \quad m + n = -4 - 5 \quad \Rightarrow \quad m + n = -9$

Gabarito: A

5. (FEC) O maior valor de "*m*" para que as raízes da equação $x^2 - mx + 9 = 0$ sejam reais e iguais é:

a) –3.
b) 0.
c) 2.
d) 6.
e) 10.

Resolução:

Com relação ao ***discriminante*** de *Bhaskara*, ele avaliará as raízes, em relação ao conjunto dos números reais (*IR*), de forma que:

- se $\Delta > 0$, a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ possuirá duas raízes reais e distintas;
- se $\Delta = 0$, a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ possuirá duas raízes reais e iguais;
- se $\Delta < 0$, a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ não possuirá raízes reais.

A condição necessária para que a equação $x^2 - mx + 9 = 0$ tenha duas raízes reais e iguais ocorrerá se, e somente se, o descriminante de *Bhaskara* for nulo, ou seja, $\Delta = 0$. Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, então, o valor de "*m*" para que isso ocorra será igual a:

$$x^2 - mx + 9 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -m \\ c = 9 \end{cases} \Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad (-m)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 - 36 = 0$$

$$m^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad m = \pm\sqrt{36} \quad \Rightarrow \quad m = \pm 6$$

Gabarito: D

6. (EsSA) A equação: $ax^2 + bx + c = 0$, com "$a \neq 0$" e "$c \neq 0$" tem duas raízes reais distintas. O valor da soma dos simétricos dessas raízes é:

a) $-c/a$.
b) $-b/a$.
c) b/a.
d) c/a.
e) $-b/c$.

Resolução:

Para determinar o valor da soma dos simétricos das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, faremos:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 . x_2} = \frac{\text{soma das raízes}}{\text{produto das raízes}} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{\cancel{a}} \times \frac{\cancel{a}}{c} = -\frac{b}{c}$$

Gabarito: E

7. (FEC) Qual o menor valor de "*x*" que satisfaz a equação: $2x^2 - 3x + 1 = 0$?

a) zero.
b) 1.
c) −1.
d) 0,5.
e) 2.

Resolução:

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara*, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde "Δ" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c*, da equação $2x^2 - 3x + 1 = 0$, igual a: $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 9 - 8 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \times 2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm 1}{4} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3+1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \end{array} \right.$$

Gabarito: D

8. (FEC) Resolvendo-se a equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$, encontram-se duas raízes reais distintas. O produto dessas raízes é:

a) −1/4.
b) 1/4.
c) −1.
d) 2.
e) 1.

Resolução:

Dada a equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$, onde: $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases}$

Podemos obter o produto entre as raízes utilizando-se das relações de Girard, dadas por:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{-2}{2} \quad \Rightarrow \quad P = -1$$

Gabarito: C

9. (CFC) Os valores de *k* para que a equação $kx^2 + (2k - 1)x + (k - 2) = 0$ não tenha raízes reais vale:

a) $k > \frac{1}{4}$.
b) $k < \frac{1}{4}$.
c) $k > -\frac{1}{4}$.
d) $k < -\frac{1}{4}$.
e) $k < -4$.

Resolução:

Uma equação do 2º grau não apresenta raízes reais, quando seu determinante for negativo, ou seja, menor que zero: $\Delta < 0$.

Seja a equação $kx^2 + (2k - 1)x + (k - 2) = 0$, onde: $\begin{cases} a = k \\ b = 2k - 1 \\ c = k - 2 \end{cases}$.

$$b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \underbrace{(2k-1)^2}_{\text{produto notável}} - 4.k.(k-2) < 0 \Rightarrow (2k)^2 - 2.2k.1 + 1^2 - 4k^2 + 8k < 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 8k < 0 \Rightarrow 1 + 4k < 0 \Rightarrow 4k < -1 \Rightarrow k < -\frac{1}{4}$$

Gabarito: D

10. Sendo "*m*" e "*n*" raízes da equação *x*.(*x* – 2) = *x* + 4, o valor de $(2^m)^n$ é:

a) 16.
b) 8.
c) 1/16.
d) –8.
e) –16.

Resolução:

Desenvolvendo a equação $x.(x - 2) = x + 4$:

$$x.(x-2) = x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x = x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara*, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde "$\Delta$" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c*, da equação $x^2 - 3x - 4 = 0$, igual a: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -4 \end{cases}$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) \Rightarrow \Delta = 9 + 16 \Rightarrow \Delta = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

S = V = {–1 ; 4}

Para o valor de $(2^m)^n$, onde "*m*" e "*n*" são as raízes da equação, teremos:

$$(2^m)^n = \left(2^4\right)^{-1} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

Gabarito: C

11. O valor do discriminante da equação do 2º grau: $x^2 - 8x - 16 = 0$ é:

a) 0.
b) 16.
c) 32.
d) 64.
e) 128.

Resolução:

"Δ" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c*, da equação $x^2 - 8x - 16 = 0$, igual a:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = -16 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (-16) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 64 + 64 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 128$$

Gabarito: E

12. O conjunto solução da equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$ é:

a) {2, –1/2}.
b) {14/5, 1}.
c) {0}.
d) {4, –2}.
e) {–1/2, 4}.

Resolução:

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara,* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde "Δ" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c*, da equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$, igual a:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 9 + 16 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \times 2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm 5}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+5}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-5}{4} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$S = V = \{2, -1/2\}$

Gabarito: A

13. A equação $x^2 - 6x + p + 3 = 0$ tem uma raiz igual ao dobro da outra. O valor de "p" é:

a) 9.
b) 8.
c) 7.
d) 6.
e) 5.

Resolução:

De acordo como enunciado tem-se que: $x_1 = 2x_2$. Fazendo $x_2 = y$ e $x_1 = 2y$ e utilizando-se da relação da soma das raízes (*relação de Girard*), teremos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad 2y + y = -\frac{(-6)}{1} \quad \Rightarrow \quad 3y = 6 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{6}{3} \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Portanto, as raízes serão: $x_2 = 2$ e $x_1 = 4$.

Utilizando-se, novamente, das relações dos coeficientes, agora, a relação do produto entre as raízes:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad 2 \times 4 = \frac{p+3}{1} \quad \Rightarrow \quad 8 = p + 3 \quad \Rightarrow \quad p = 8 - 3 \quad \Rightarrow \quad p = 5$$

Gabarito: E

14. A soma dos possíveis valores de "*x*", para que a expressão: $x^2 + \frac{5}{9}x$ seja igual a $\frac{4}{9}$, é:

a) –1/3.
b) –5/9.
c) 1/3.
d) 5/9.
e) 16/9.

Resolução:

Igualando-se os termos dados: $x^2 + \frac{5}{9}x = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{5}{9}x - \frac{4}{9} = 0.$

A soma dos possíveis valores de "*x*" será representada por uma das relações de Girard, a se ver:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad S = -\frac{\frac{5}{9}}{1} \quad \Rightarrow \quad S = -\frac{5}{9}$$

Gabarito: B

15. A soma e o produto das raízes da equação $Mx^2 - 5Nx + 18x - 3 = 0$ são, respectivamente, $\frac{2}{5}$ e $-\frac{3}{5}$. Assim, o valor de "M – N" é:

a) –2.
b) –1.
c) 1.
d) 2.
e) 3.

Resolução:

Seja a equação:

$$Mx^2 - 5Nx + 18x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Mx^2 - (5N - 18)x - 3 = 0 \quad \begin{cases} a = M \\ b = -(5N - 18) \\ c = -3 \end{cases}$$

Utilizando-se as relações de Girard da soma e do produto:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{5} = \frac{-3}{M} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{5 \times (-3)}{-3} \quad \Rightarrow \quad M = 5$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} = -\frac{-(5N - 18)}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\cancel{5}} = \frac{5N - 18}{\cancel{5}} \quad \Rightarrow \quad 5N - 18 = 2$$

$$\Rightarrow \quad 5N = 2+18 \quad \Rightarrow \quad 5N = 20 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{20}{5} \quad \Rightarrow \quad N = 4$$

Fazendo "M – N": 5 – 4 = 1

Gabarito: C

16. A soma dos valores reais de "*m*", para os quais a equação $x^2 + (6m + 2)x + 8m^2 + 1 = 0$ tem duas raízes reais iguais, é:

a) 3.
b) 0.
c) –4.
d) –6.
e) –8.

Resolução:

A condição necessária para que uma equação quadrática tenha duas raízes reais e iguais, é que o discriminante seja igual a zero $(\Delta = 0)$.

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad (6m+2)^2 - 4\times 1\times(8m^2+1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (6m)^2 + 2.6m.2 + 2^2 - 32m^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 36m^2 + 24m + 4 - 32m^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4m^2 + 24m = 0 \quad \Rightarrow \quad 4m(m+6) = 0 : \begin{cases} 4m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{0}{4} \quad \Rightarrow \quad m = 0 \\ m + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -6 \end{cases}$$

Somando-se os possíveis valores de "*m*": 0 + (–6) = –6

Gabarito: D

17. Se $x^2 - mx + m^2 - m - 12 = 0$ é uma equação do 2º grau em "*x*", que possui uma raiz nula, então o valor de "*m*" pode ser:

a) 5.
b) 4.
c) –1.
d) –2.
e) 3.

Resolução:

De acordo com as relações entre os coeficientes, tem-se que, quando "$c = 0$", uma das raízes será, necessariamente, nula. Neste caso, para: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -m \\ c = m^2 - m - 12 \end{cases}$

Fazendo "$c = 0$".

$$m^2 - m - 12 = 0, \text{ onde}: \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -12 \end{cases}$$

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara,* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde "Δ" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-12) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1 + 48 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+7}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{1-7}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Gabarito: B

18. É correto afirmar: "Se uma equação do 2º grau tem discriminante:

a) positivo, ela tem duas raízes reais iguais".
b) nulo, ela possui raízes reais iguais".
c) negativo, ela tem uma raiz nula".
d) nulo, ela não tem raízes reais".
e) positivo, ela pode vir a ter raízes reais".

Resolução:

Com relação ao ***discriminante*** de *Bhaskara*, ele avaliará as raízes, em relação ao conjunto dos números reais (*IR*), de forma que:

- se $\Delta > 0$, a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ possuirá duas raízes reais e distintas.
- se $\Delta = 0$, a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ possuirá duas raízes reais e iguais.
- se $\Delta < 0$, a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ não possuirá raízes reais.

Gabarito: B

19. A menor raiz da equação $2x^2 - 9x + 10 = 0$ é um número:

a) ímpar negativo.
b) ímpar positivo.
c) par negativo.
d) par positivo.
e) primo ímpar.

Resolução:

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara*, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde "$\Delta$" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c*, da equação $2x^2 - 9x + 10 = 0$, igual a:

$$\begin{cases} a = 2. \\ b = -9, \text{ então:} \\ c = 10 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (10) \Rightarrow \Delta = 81 + 80 \Rightarrow \Delta = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{1}}{2 \times 2} \Rightarrow x = \frac{9 \pm 1}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{9+1}{4} = \dfrac{10^{\div 2}}{4_{\div 2}} = \dfrac{5}{2} \\ x_2 = \dfrac{9-1}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

Portanto, a menor raiz dessa equação vale 2, um número par e positivo.

Gabarito: D

20. Seja a equação $kx^2 - 3x - 2 = 0$, onde $k \neq 0$. Se o produto de suas raízes é –1, então a soma delas é:

a) 3/2.
b) 5/2.
c) – 3.
d) – 5.
e) 1.

Resolução:

De acordo com as relações de Girard estudadas anteriormente, tem-se que o produto das raízes de uma equação do 2º grau é dado por:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{(Relação de Girard)}$$

Se esse produto vale "–1" e os coeficientes da equação representados por: $\begin{cases} a = k \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases}$, então determinaremos, inicialmente, o valor do coeficiente "*a*" representado pela letra "*k*".

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad -1 = \frac{-2}{k} \quad \Rightarrow \quad (-k = -2) \times (-1) \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

Para a soma das raízes, utilizaremos a outra relação de Girard, dada pela soma das raízes:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{(Relação de Girard)}$$

Para a soma, teremos: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = \frac{-(-3)}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$

Gabarito: A

Capítulo 13

Problemas do 2º grau com números naturais, inteiros e racionais

Neste capítulo, demonstraremos por meio de ***exercícios comentados*** os principais ***Problemas Algébricos*** cobrados em Concursos Públicos relacionados às ***equações do 2º grau***. De maneira análoga ao **Capítulo 10**, tal análise será feita por meio de ***resoluções de exercícios*** de forma ***convencional*** e ***objetiva*** utilizando-se dos conceitos de ***operações aritméticas*** e/ou ***algébricas***.

Exercícios resolvidos

1. (Cespe/UnB) Sabendo-se que o produto dos números inteiros positivos *m* e *n* é igual a 572, que a divisão de *m* por *x* tem quociente 4 e resto 2, e que a divisão de *n* por *x* + 1 tem também quociente 4 e resto 2, é correto afirmar que o valor de *m* + *n* é igual a:

a) 40.
b) 42.
c) 44.
d) 46.
e) 48.

Resolução:

Seja o produto dado: $m \times n = 572$

A divisão de m por x tem quociente 4 e resto 2, que podemos escrever da seguinte forma:

$$m = x \times 4 + 2 \quad \Rightarrow \quad [\ m = 4x + 2\ ] \text{.......... (1)}$$

Ainda foi afirmado que a divisão de n por $x + 1$ tem também quociente 4 e resto 2, que também podemos escrever da seguinte forma:

$$n = (x+1) \times 4 + 2 \ \Rightarrow \ n = 4(x+1) + 2 \ \Rightarrow \ n = 4x + 4 + 2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ [\ n = 4x + 6\ ] \text{........ (2)}$$

Substituindo as relações (1) e (2) encontradas no produto $m \times n = 572$, teremos:

$$m \times n = 72 \ \Rightarrow \ \underbrace{(4x+2)}_{m} \times \underbrace{(4x+6)}_{n} = 572 \ \Rightarrow \ 4x \times 4x + 4x \times 6 + 2 \times 4x + 2 \times 6 = 572$$

$$16x^2 + 24x + 8x + 12 = 572 \ \Rightarrow \ 16x^2 + 32x + 12 - 572 = 0 \ \Rightarrow \ 16x^2 + 32x - 560 = 0$$

$$(16x^2 + 32x - 560 = 0) \div 16 \ \Rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0$$

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara*, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde "Δ" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$, sendo *a*, *b* e *c* as constantes da equação do 2º grau na forma: $ax^2 + bx + c = 0$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $x^2 + 2x - 35 = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -35 \end{cases}$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-35) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 + 140 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 144$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2 \times 1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm 12}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-2+12}{2} = \dfrac{10^{\div 2}}{2_{\div 2}} = 5 \\ x_2 = \dfrac{-2-12}{2} = \dfrac{-14^{\div 2}}{2_{\div 2}} = -7 \text{ (não convém)} \end{array} \right.$$

Para $x = 5$, teremos:

$$\begin{cases} m = 4x + 2 \quad \Rightarrow \quad m = 4 \times 5 + 2 \quad \Rightarrow \quad m = 20 + 2 \quad \Rightarrow \quad m = 22 \\ n = 4x + 6 \quad \Rightarrow \quad n = 4 \times 5 + 6 \quad \Rightarrow \quad n = 20 + 6 \quad \Rightarrow \quad n = 26 \end{cases}$$

Para $m + n = 22 + 26 = 48$

Gabarito: E

2. (Cespe/UnB) Maurício atendeu determinado número de pessoas na segunda-feira. Na terça-feira, ele atendeu seis pessoas a menos do que atendeu na segunda-feira. Se o produto do número de pessoas que ele atendeu nos dois dias é igual a 91, então Maurício atendeu, nesses dois dias:

a) 20.
b) 30.
c) 40.
d) 50.
e) 60.

Resolução:

Inicialmente, determinaremos o número de pessoas que Maurício atendeu na segunda-feira e na terça-feira.

Chamaremos de:

" x ": número de pessoas que Maurício atendeu na segunda-feira

" $x - 6$ ": o número de pessoas que Maurício atendeu na terça-feira.

"Se o produto do número de pessoas que ele atendeu nos dois dias é igual a 91(...)". Ou seja:

$x\,(x-6) = 91$, desenvolvendo, temos:

$$x^2 - 6x = 91 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2 - 6x - 91 = 0}_{\substack{\text{equação do 2º grau do tipo} \\ ax^2 + bx + c = 0}} \quad \text{, onde :} \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = -91 \end{cases}$$

Determinando o valor de "x", pela fórmula de Bhaskara:

$$\left(x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4.a.c \right)$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-91) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 36 + 364 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 400$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{400}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \pm 20}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{6 \pm 20}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+20}{2} = \dfrac{26}{2} = 13 \text{ pessoas} \\ x_2 = \dfrac{6-20}{2} = \dfrac{-14}{2} = \underbrace{-7 \text{ pessoas}}_{\text{valor desconsiderado}} \end{cases}$$

Portanto, na segunda-feira, Maurício atendeu 13 pessoas e na terça-feira, 13 – 6 = 7 pessoas. Sendo assim, nos dois dias, Maurício atendeu 13 + 7 = 20 pessoas.

Gabarito: A

3. (FEC) Uma bola foi arremessada do alto de um prédio com certa velocidade vertical. Sua altura *h* em metros, como função do tempo t em segundos, é dada por $h(t) = 15 + 10t - 5t^2$. A altura máxima atingida por essa bola é:

a) 3,0 m.
b) 5,0 m.
c) 15 m.
d) 20 m.
e) 25 m.

Resolução:

A curva característica do gráfico $h(t)$, representativa da função $h(t) = 15 + 10t - 5t^2$, é uma parábola de concavidade voltada para baixo $(a < 0 \rightarrow a = -5)$.

Para representar uma função quadrática através de um gráfico (parábola) é conveniente determinar cinco *pontos* importantes, que são eles: a abscissa do vértice(x_v), a ordenada do vértice(y_v), os dois pontos em que a parábola intercepta o eixo das abscissas(ou seja, os zeros da função, caso existam) e o ponto em que a parábola intercepta o eixo das ordenadas(ou seja, o valor da constante "c" da função $y = ax^2 + bx + c$).

Valor da abscissa do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-10}{2(-5)} \Rightarrow x_v = \frac{-10}{-10} \Rightarrow x_v = 1$$

Valor da ordenada do vértice:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \frac{-(10^2 - 4 \times (-5) \times 15)}{4(-5)} \Rightarrow y_v = \frac{-(100+300)}{4(-5)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_v = \frac{-400}{-20} \Rightarrow y_v = 20$$

Zeros da função:

Utilizando-se novamente da fórmula de *Bhaskara*, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $-5t^2 + 10t + 15 = 0$ iguais a: $a = -5$, $b = 10$ e $c = 15$, então:

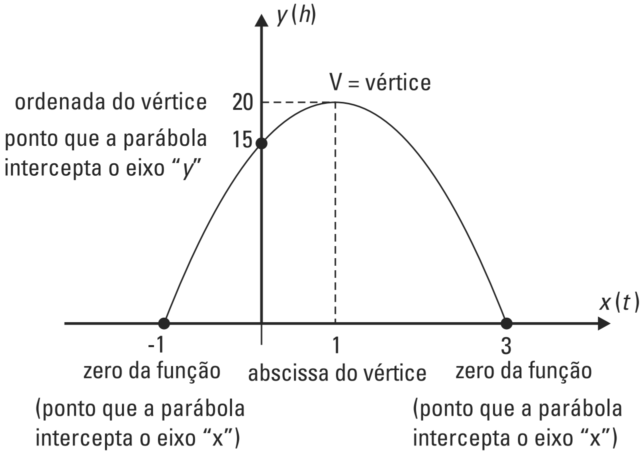
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 10^2 - 4 \times (-5) \times 15 \Rightarrow \Delta = 100 + 300 \Rightarrow \Delta = 400$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{400}}{2 \times (-5)} \Rightarrow x = \frac{-10 \pm 20}{-10} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{-10+20}{-10} = \frac{10}{-10} = -1 \\ x_2 = \frac{-10-20}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3 \end{array} \right.$$

Ponto em que a parábola intercepta o eixo das ordenadas(eixo *y*):

$c = 15$

Montando o gráfico da altura(h) em função do tempo(t): $h(t) = 15 + 10t - 5t^2$.



Através do gráfico representativo da função $h(t) = 15 + 10t - 5t^2$, podemos observar que o maior valor que a função assume é a própria ordenada do vértice, ou seja, $y = 20$. Sendo "*y*" o eixo que representa a altura atingida por uma bola em função do tempo, então, podemos concluir que a altura máxima atingida pela bola será de 20.

Obs.: Para uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, dizemos que essa função possui um valor máximo quando a constante "*a*" for negativa ($a < 0$) e seu valor pode ser calculado pela ordenada do vértice $\left(y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$. Caso a constante "*a*" seja positiva ($a > 0$), dizemos que essa função possuirá um valor mínimo e seu valor também será calculado pela ordenada do vértice $\left(y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

Gabarito: D

4. (FCC) Numa reunião, o número de mulheres presentes excede o número de homens em 20 unidades. Se o produto do número de mulheres pelo de homens é 156, o total de pessoas presentes nessa reunião é:

a) 16.
b) 26.
c) 30.
d) 32.
e) 42.

Resolução:

Chamaremos de "*x*" o número de mulheres presentes na reunião e de "*y*" o número de homens.

Sabemos que o número de mulheres presentes *excede* o número de homens em 20 unidades, portanto:

$x = y + 20$ .... (1)

E que o produto do número de mulheres pelo de homens é 156.

$x \times y = 156$ .... (2)

Resolvendo o sistema do 1º grau com duas variáveis (x e y) entre as equações (1) e (2), temos:

$\begin{cases} x = y + 20 \text{ .... (1)} \\ x \times y = 156 \text{ ....(2)} \end{cases}$, substituindo o valor de "*x*" da relação (1) em (2), teremos:

$$x \times y = 156 \;\Rightarrow\; (y + 20)y = 156 \;\Rightarrow\; y^2 + 20y = 156 \;\Rightarrow\; y^2 + 20y - 156 = 0$$

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara*, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde "Δ" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$, sendo *a*, *b* e *c* as constantes da equação do 2º grau na forma: $ay^2 + by + c = 0$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $y^2 + 20y - 156 = 0$ iguais a: $\begin{cases} a = 1. \\ b = 20 \\ c = -156 \end{cases}$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac \;\Rightarrow\; \Delta = 20^2 - 4 \times 1 \times (-156) \;\Rightarrow\; \Delta = 400 + 624 \;\Rightarrow\; \Delta = 1.024 = 2^{10}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2^{10}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-20 \pm 32}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-20+32}{2} = \dfrac{12^{\div 2}}{2_{\div 2}} = 6 \\ y_2 = \dfrac{-20-32}{2} = \dfrac{-52^{\div 2}}{2_{\div 2}} = -26 \text{ não convém} \end{cases}$$

Portanto, $y = 6$ homens. Para o valor de "x", que representa o número de mulheres, teremos:

$x = y + 20 \quad \Rightarrow \quad x = 6 + 20 \quad \Rightarrow \quad x = 26$ mulheres

O total de participantes nessa reunião será dado pela soma da quantidade de homens e mulheres, ou seja:

$6 + 26 = 32$ pessoas ao total

Gabarito: D

5. (FCC) Em certo momento, o número de funcionários presentes em uma agência bancária era tal que, se ao seu quadrado somássemos o seu quádruplo o resultado obtido seria 572. Se 10 deles saíssem da agência, o número de funcionários na agência passaria a ser:

a) 12.
b) 13.
c) 14.
d) 15.
e) 16.

Resolução:

De acordo com o enunciado, podemos montar a seguinte equação do 2º grau, em função de "x" que representa a quantidade de funcionários presentes na agência bancária.

"(...) o número de funcionários presentes em uma agência bancária era tal que, se ao seu quadrado somássemos o seu quádruplo o resultado obtido seria 572."

$$\underbrace{x^2}_{\substack{\text{o quadrado} \\ \text{do número} \\ \text{de funcionários}}} + \underbrace{4x}_{\substack{\text{o quádruplo} \\ \text{do número de} \\ \text{funcionários}}} = 572 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x - 572 = 0$$

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara*, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde "Δ" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $x^2 + 4x - 572 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = 4 \\ c = -572 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-572) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 16 + 2288 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2304$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{2304}}{2 \times 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm 48}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+48}{2} = \dfrac{44}{2} = 22 \text{ funcionários} \\ x_2 = \dfrac{-4-48}{2} = \dfrac{-52}{2} = -26 \text{ funcionários} \end{cases}$$

Portanto, o número que melhor expressa a quantidade inicial de funcionários dentro da agência bancária é 22.

Se saíssem 10 funcionários da agência, ela ficaria com: 22 – 10 = 12 funcionários.

Gabarito: A

6. (FCC) Os 60 soldados de uma equipe foram igualmente divididos em grupos para participarem de uma aula prática sobre um novo programa de computador, ficando cada grupo em uma máquina. Entretanto, na hora da aula, três dos computadores "travaram", e os outros grupos tiveram de receber uma pessoa a mais. Após essa redistribuição, o número de grupos era:

a) 15.
b) 12.
c) 10.
d) 9.
e) 5.

Resolução:

Inicialmente chamaremos de:

"x": a quantidade inicial de computadores, antes de começar a palestra;
"y": a quantidade de grupos formados pelos 60 soldados;
"$(x – 3)$": a quantidade de computadores que se iniciou a palestra;
"$(y + 1)$": a formação final de cada grupo, com a inclusão de mais um soldado.

De acordo com o enunciado, podemos construir duas relações iniciais:

"Os 60 soldados de uma equipe foram igualmente divididos em grupos para participarem de uma aula prática sobre um novo programa de computador, ficando cada grupo em uma máquina."

$$\frac{60}{x} = y \text{ .... relação (1)}$$

Essa relação implica que o total de soldados (60) divididos pela quantidade inicial de computadores "x" será igual à quantidade de grupos formados ("y") por computador.

Para a segunda parte do enunciado, temos: "Entretanto, na hora da aula, três dos computadores "travaram" e os outros grupos tiveram de receber uma pessoa a mais."

$$\frac{60}{x-3} = \underbrace{y+1}_{\text{formação final dos grupos}} \text{ .... relação (2)}$$

Dessa nova relação depreende-se que, com três computadores a menos, cada grupo recebeu um soldado a mais.

Substituindo o valor encontrado na relação (1), em (2), teremos:

$$\frac{60}{x-3} = y+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{60}{x-3} = \frac{60}{x} + 1 \quad \Rightarrow \text{ fazendo o mmc}(x\,;\, x-3) = x(x-3)$$

$$\frac{60\times x}{x(x-3)} = \frac{60\times(x-3)}{x(x-3)} + \frac{1\times x(x-3)}{x(x-3)} \quad \Rightarrow \quad 60x = 60(x-3) + x(x-3)$$

$$60x = 60x - 180 + x^2 - 3x \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 60x - 60x + 3x + 180 = 0$$

$$(-x^2 + 3x + 180 = 0)\times(-1) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x - 180 = 0$$

Utilizando-se da fórmula de *Bhaskara*, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde "Δ" é denominado de discriminante de *Bhaskara* e tem valor igual a $\Delta = b^2 - 4ac$.

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $x^2 - 3x - 180 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = -3 \\ c = -180 \end{cases} \text{, então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-3)^2 - 4\times 1\times(-180) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 9 + 720 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 729$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{729}}{2\times 1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm 27}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{3+27}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ computadores} \\ x_2 = \frac{3-27}{2} = \frac{-24}{2} = -12 \text{ computadores} \end{cases}$$

Portanto, o número de grupos formados, após a pane desses três computadores, foi de:

$$\underbrace{y+1}_{\text{formação final dos grupos}} = \frac{60}{x-3} \quad \Rightarrow \quad y+1 = \frac{60}{15-3} \quad \Rightarrow \quad y+1 = \frac{60}{12} \quad \Rightarrow \quad y+1 = 5$$

Gabarito: E

7. (FCC) Alguns técnicos, designados para fazer a manutenção dos 48 microcomputadores de certa empresa, decidiram dividir igualmente entre si a quantidade de micros a serem vistoriados. Entretanto, no dia em que a tarefa seria realizada, dois dos técnicos faltaram ao serviço e, assim, coube a cada um dos presentes vistoriar quatro micros a mais que o previsto. Quantos técnicos executaram a tarefa?

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

Resolução:

Inicialmente chamaremos de:
"x": a quantidade inicial de técnicos designados para fazer a manutenção dos 48 microcomputadores;
"y": a quantidade de micros a serem vistoriados, inicialmente, para cada um dos "x" técnicos;
"$(x-2)$": a quantidade final dos técnicos que terminaram o serviço;
"$(y+4)$": a quantidade final de micros que coube para cada um dos $(x-2)$ técnicos fazer a manutenção.

De acordo com o enunciado, podemos construir duas relações iniciais:

"Alguns técnicos, designados para fazer a manutenção dos 48 microcomputadores de certa empresa, decidiram dividir igualmente entre si a quantidade de micros a serem vistoriados."

$$\frac{48}{x} = y \text{ .... relação (1)}$$

Essa relação implica que os "x" técnicos designados inicialmente dividiram igualmente entre si os 48 micros a serem vistoriados resultando, para cada funcionário, uma quantidade de "y" micros.

Para a formação da segunda relação, temos que: "Entretanto, no dia em que a tarefa seria realizada, dois dos técnicos faltaram ao serviço e, assim, coube a cada um dos presentes vistoriar quatro micros a mais que o previsto", ou seja:

$$\frac{48}{x-2} = y + 4 \text{ .... relação (2)}$$

Tal relação informa que, com a ausência de dois funcionários, a nova divisão acarretou em um acréscimo de quatro micros a mais do que o previsto inicialmente.

Substituindo o valor encontrado na relação (1), em (2), teremos:

$$\frac{48}{x-2} = \frac{48}{x} + 4 \quad \Rightarrow \quad \text{sendo o } mmc(x\,;\,x-2) = x \times (x-2)$$

$$\frac{48x}{x(x-2)} = \frac{48(x-2)}{x(x-2)} + \frac{4x(x-2)}{x(x-2)} \quad \Rightarrow \quad 48x = 48(x-2) + 4x(x-2)$$

$$48x = 48x - 96 + 4x^2 - 8x \quad \Rightarrow \quad -4x^2 + 48x - 48x + 8x + 96 = 0$$

$$\left(-4x^2 + 8x + 96 = 0\right) \div (-4) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 24 = 0$$

Sendo os valores das constantes a, b e c da equação $x^2 - 2x - 24 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = -2 \\ c = -24 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-2)^2 - 4\times1\times(-24) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 + 96 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2\times1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 10}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+10}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 \text{ técnicos} \\ x_2 = \dfrac{2-10}{2} = \dfrac{-8}{2} = \underbrace{-4 \text{ técnicos}}_{\text{não convém}} \end{cases}$$

Sendo 6 o número inicial de técnicos, então, o número de técnicos que executaram a tarefa foi de: 6 – 2 = 4 técnicos.

Gabarito: A

8. (FCC) Alguns técnicos judiciários de certo Cartório Eleitoral combinaram dividir igualmente entre si um total de 84 processos a serem arquivados. Entretanto, no dia em que o serviço deveria ser executado, dois deles faltaram ao trabalho e, assim, coube a cada um dos presentes arquivar sete processos a mais que o previsto. Quantos processos cada técnico arquivou?

a) 14.
b) 18.
c) 21.
d) 24.
e) 28.

Resolução:

Inicialmente chamaremos de:

"x": a quantidade inicial de técnicos judiciários para fazer o arquivamento dos 84 processos;

"y": a quantidade de processos a serem arquivados, inicialmente, para cada um dos "x" técnicos;

"$(x-2)$": a quantidade final dos técnicos que terminaram o serviço;

"$(y+7)$": a quantidade final de processos que coube para cada um dos $(x-2)$ técnicos fazer o arquivamento.

De acordo com o enunciado, podemos construir duas relações iniciais:

Para a primeira relação, teremos: "Alguns técnicos judiciários de certo Cartório Eleitoral combinaram dividir igualmente entre si um total de 84 processos a serem arquivados."

$$\frac{84}{x} = y \text{ .... relação (1)}$$

Essa relação implica que os "x" técnicos designados inicialmente dividiram igualmente entre si os 84 processos a serem arquivados resultando, para cada funcionário, uma quantidade de "y" processos.

Para a formação da segunda relação, temos que: "Entretanto, no dia em que o serviço deveria ser executado, dois deles faltaram ao trabalho e, assim, coube a cada um dos presentes arquivar sete processos a mais que o previsto", ou seja:

$$\frac{84}{x-2} = y + 7 \text{ .... relação (2)}$$

Tal relação informa que, com a ausência de dois funcionários, a nova divisão acarretou em um acréscimo de sete processos a mais do que o previsto inicialmente.

Substituindo o valor encontrado na relação (1), em (2), teremos:

$$\frac{84}{x-2} = \frac{84}{x} + 7 \quad \Rightarrow \quad \text{sendo o mmc}(x\,;\,x-2) = x \times (x-2)$$

$$\frac{84x}{x(x-2)} = \frac{84(x-2)}{x(x-2)} + \frac{7x(x-2)}{x(x-2)} \quad \Rightarrow \quad 84x = 84(x-2) + 7x(x-2)$$

$$84x = 84x - 168 + 7x^2 - 14x \quad \Rightarrow \quad -7x^2 + 84x - 84x + 14x + 168 = 0$$

$$\left(-7x^2 + 14x + 168 = 0\right) \div (-7) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 24 = 0$$

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $x^2 - 2x - 24 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = -2 \\ c = -24 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-24) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 + 96 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 10}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2+10}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 \text{ técnicos} \\ x_2 = \dfrac{2-10}{2} = \dfrac{-8}{2} = \underbrace{-4 \text{ técnicos}}_{\text{não convém}} \end{array} \right.$$

A quantidade final que cada técnico arquivou foi de: $\underbrace{y + 7}_{\text{quantidade final que cada técnico arquivou}} = \dfrac{84}{x-2}$

$$\frac{84}{x-2} = \frac{84}{6-2} = \frac{84}{4} = 21 \text{ arquivos}$$

Gabarito: C

9. (FCC) Alguns técnicos judiciários combinaram dividir igualmente entre si a tarefa de digitar as 245 páginas de um texto. Entretanto, no dia da divisão, o grupo foi acrescido de mais dois técnicos e, assim, coube a cada membro do novo grupo digitar 14 páginas a menos do que inicialmente previsto. O número de técnicos que cumpriu a tarefa era:

a) 7.
b) 6.
c) 5.
d) 4.
e) 3.

Resolução:

Inicialmente chamaremos de:

"x": a quantidade inicial de técnicos judiciários para digitar 245 páginas de um texto;
"y": a quantidade de páginas a serem digitadas, inicialmente, para um dos "x" técnicos;
"$(x+2)$": a quantidade final dos técnicos que terminaram o serviço de digitação;
"$(y-14)$": a quantidade final de páginas que coube para cada um dos $(x+2)$ técnicos completarem a digitação.

De acordo com o enunciado, podemos construir duas relações iniciais:

Para a primeira relação, teremos: "Alguns técnicos judiciários combinaram dividir igualmente entre si a tarefa de digitar as 245 páginas de um texto".

$$\frac{245}{x} = y \text{ .... relação (1)}$$

Essa relação implica que os "x" técnicos designados inicialmente dividiram igualmente entre si as 245 páginas a serem digitadas, resultando, para cada funcionário, uma quantidade de "y" páginas.

Para a formação da segunda relação, temos que: "Entretanto, no dia da divisão, o grupo foi acrescido de mais dois técnicos e, assim, coube a cada membro do novo grupo digitar 14 páginas a menos do que inicialmente previsto", ou seja:

$$\frac{245}{x+2} = y - 14 \text{ .... relação (2)}$$

Tal relação informa que, com o acréscimo de dois funcionários, a nova divisão acarretou em um decréscimo de 14 páginas do que o previsto inicialmente.

Substituindo o valor encontrado na relação (1), em (2), teremos:

$$\frac{245}{x+2} = \frac{245}{x} - 14 \quad \Rightarrow \quad \text{sendo o mmc}(x\,;\,x+2) = x \times (x+2)$$

$$\frac{245x}{x(x+2)} = \frac{245(x+2)}{x(x+2)} - \frac{14x(x+2)}{x(x+2)} \quad \Rightarrow \quad 245x = 245(x+2) - 14x(x+2)$$

$$245x = 245x + 490 - 14x^2 - 28x \quad \Rightarrow \quad 14x^2 + 245x - 245x + 28x - 490 = 0$$

$$\left(14x^2 + 28x - 490 = 0\right) \div (14) \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 35 = 0$$

Sendo os valores das constantes a, b e c da equação $x^2 + 2x - 35 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = 2 \\ c = -35 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-35) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 + 140 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 144$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(2) \pm \sqrt{144}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 12}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{-2+12}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ técnicos} \\ x_2 = \frac{-2-12}{2} = \frac{-14}{2} = \underbrace{-7 \text{ técnicos}}_{\text{não convém}} \end{array} \right.$$

O número de técnicos que cumpriram a tarefa foi de: $x + 2 \Rightarrow 5 + 2 = 7$ técnicos judiciários

Gabarito: A

10. (FCC) Uma pessoa sabe que, para o transporte de 720 caixas iguais, sua caminhonete teria de fazer no mínimo "*x*" viagens, levando em cada uma o mesmo número de caixas. Entretanto, ela preferiu usar sua caminhonete três vezes a mais e, assim, a cada viagem ela transportou 12 caixas a menos. Nessas condições, o valor de "*x*" é:

a) 6.
b) 9.
c) 10.
d) 12.
e) 15.

Resolução:

Inicialmente chamaremos de:

"x": a quantidade mínima de viagens, inicialmente (de acordo com o enunciado da questão);

"y": a quantidade de caixas transportadas, inicialmente, por cada viagem feita;

"$(x + 3)$": a quantidade final de viagens executadas pela caminhonete;

"$(y - 12)$": a quantidade final de caixas transportadas para cada uma das $(x + 3)$ viagens feitas pela caminhonete.

De acordo com o enunciado, podemos construir duas relações iniciais:

Para a primeira relação, teremos: "Uma pessoa sabe que, para o transporte de 720 caixas iguais, sua caminhonete teria de fazer no mínimo "x" viagens, levando em cada uma o mesmo número de caixas ("y")."

$$\frac{720}{x} = y \text{ .... Relação (1)}$$

Essa relação implica que as 720 caixas idênticas seriam transportadas em "x" viagens, contendo em cada viagem "y" caixas.

Para a formação da segunda relação, temos que: "Entretanto, ela preferiu usar sua caminhonete três vezes a mais e, assim, a cada viagem ela transportou 12 caixas a menos", ou seja:

$$\frac{720}{x+3} = y - 12 \text{ .... Relação (2)}$$

Tal relação informa que, com o acréscimo de três viagens, a nova divisão acarretou um decréscimo de 12 caixas do que o previsto inicialmente.

Substituindo o valor encontrado na relação (1), em (2), teremos:

$$\frac{720}{x+3} = \frac{720}{x} - 12 \quad \Rightarrow \quad \text{sendo o mmc}(x\,;\,x+3) = x \times (x+3)$$

$$\frac{720x}{x(x+3)}=\frac{720(x+3)}{x(x+3)}-\frac{12x(x+3)}{x(x+3)} \Rightarrow 720x = 720(x+3)-12x(x+3)$$

$$720x = 720x + 2.160 - 12x^2 - 36x \Rightarrow 12x^2 + 720x - 720x + 36x - 2.160 = 0$$

$$\left(12x^2 + 36x - 2.160 = 0\right) \div (12) \Rightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$$

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $x^2 + 3x - 180 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = 3 \\ c = -180 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4\times 1 \times (-180) \Rightarrow \Delta = 9 + 720 \Rightarrow \Delta = 729$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(3) \pm \sqrt{729}}{2\times 1} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 27}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-3+27}{2} = \dfrac{24}{2} = 12 \text{ viagens} \\ x_2 = \dfrac{-3-27}{2} = \dfrac{-30}{2} = \underbrace{-15 \text{ viagens}}_{\text{não convém}} \end{array} \right.$$

Portanto, o valor de "*x*" é: 12

Gabarito: D

11. (FCC) Certo dia, um técnico judiciário observou que, durante a sua jornada de trabalho, havia falado 55 vezes ao telefone. Se o quadrado do número de ligações que realizou, acrescido de 69 unidades, era igual a 15 vezes o número das que recebeu, quantas ligações ele realizou?

a) 15.
b) 18.
c) 21.
d) 28.
e) 34.

Resolução:

$$\text{Inicialmente, denotaremos por: } \begin{cases} 55 : \text{total de vezes que falou ao telefone.} \\ x : \text{número de ligações efetuadas (que realizou).} \\ 55 - x : \text{número de ligações recebidas.} \end{cases}$$

Pelo enunciado foi dito que: "...o quadrado do número de ligações que realizou, acrescido de 69 unidades, era igual a 15 vezes o número das que recebeu...", transcrevendo para linguagem matemática, teremos:

$$x^2 + 69 = 15.(55 - x)$$

$$x^2 + 69 = 15.(55 - x) \Rightarrow x^2 + 69 = 825 - 15x \Rightarrow x^2 + 15x + 69 - 825 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + 15x - 756 = 0$$

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $x^2 + 15 - 756 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = 15 \\ c = -756 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = 15^2 - 4 \times 1 \times (-756) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 225 + 3024 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 3249$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(15) \pm \sqrt{3249}}{2 \times 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-15 \pm 57}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-15+57}{2} = \dfrac{42}{2} = 21 \text{ ligações} \\ x_2 = \dfrac{-15-57}{2} = \dfrac{-72}{2} = \underbrace{-36 \text{ ligações}}_{\text{não convém}} \end{array} \right.$$

Portanto, o valor de "*x*" é: 21

Gabarito: C

12. (FEC) A representação geral de um número ímpar é 2*n* + 1, para qualquer "*n*" natural (ou inteiro). A soma de dois número ímpares naturais e consecutivos cujo produto é igual a 195 vale:

a) 28.
b) 26.
c) 24.
d) 22.
e) 20.

Resolução:

Partindo da representação de um ***número ímpar*** (qualquer) "**2*n* + 1**", podemos definir os demais ***números ímpares consecutivos*** a partir desse recurso, que serão representados por:

"$2n + 1$"; "$2n + 3$"; "$2n + 5$"; "$2n + 7$"; "$2n + 9$"; ... e. assim, consecutivamente.

Portanto, tomando-se apenas os dois primeiros números ímpares, teremos que:

$$(2n + 1).(2n + 3) = 195$$

$$(2n + 1).(2n + 3) = 195 \Rightarrow 4n^2 + 6n + 2n + 3 = 195 \Rightarrow 4n^2 + 8n + 3 - 195 = 0$$

$$(4n^2 + 8n - 192 = 0) \div 4 \Rightarrow n^2 + 2n - 48 = 0$$

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $n^2 + 2n - 48 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = 2 \\ c = -48 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-48) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 + 192 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 196$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow n = \frac{-(2) \pm \sqrt{196}}{2 \times 1} \Rightarrow n = \frac{-2 \pm 14}{2} \left\langle \begin{array}{l} n_1 = \dfrac{-2+14}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 \\ n_2 = \dfrac{-2-14}{2} = \dfrac{-16}{2} = \underbrace{-8}_{\text{não convém}} \end{array} \right.$$

Portanto, os referidos números ímpares serão: $(2n+1)$ e $(2n+3)$

$(2.6+1)$ e $(2.6+3) \Rightarrow 13$ e 15

A soma de seus valores será de: $13 + 15 = 28$

Gabarito: A

13. (FCC) Em certo momento, o número "*x*" de soldados em um policiamento ostensivo era tal que subtraindo-se do seu quadrado o seu quádruplo, obtinha-se 1845. O valor de "*x*" é de:

a) 42.
b) 45.
c) 48.
d) 50.
e) 52.

Resolução:

De acordo com o enunciado, temos a seguinte estrutura matemática:

$$\underbrace{x^2-4x}_{\substack{\text{o quadrado de}\\ \text{um número menos}\\ \text{seu quádruplo}}} = 1845 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x-1845=0$$

Sendo os valores das constantes a, b e c da equação $x^2 - 4x - 1845 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = -4 \\ c = -1845 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \;\Rightarrow\; \Delta = (-4)^2 - 4\times1\times(-1845) \;\Rightarrow\; \Delta = 16+7380 \;\Rightarrow\; \Delta = 7396$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \;\Rightarrow\; x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{7396}}{2\times1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; n = \frac{4 \pm 86}{2} \begin{cases} n_1 = \dfrac{4+86}{2} = \dfrac{90}{2} = 45 \\ n_2 = \dfrac{4-86}{2} = \dfrac{-82}{2} = \underbrace{-41}_{\text{não convém}} \end{cases}$$

Logo, $x = 45$.

Gabarito: B

14. (FEC) O quadrado de um número inteiro positivo diminuído de 15 unidades é igual ao seu dobro. Se "*x*" é esse número, então o valor de "3*x* – 14" é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Resolução:

Formando-se a equação do 2º grau, de acordo com que foi dito no enunciado:

$$\underbrace{x^2-15}_{\substack{\text{o quadrado de}\\ \text{um número diminuído}\\ \text{de 15 unidades}}} = \underbrace{2x}_{\substack{\text{o dobro}\\ \text{desse número}}} \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-15=0$$

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $x^2 - 2x - 15 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = -2 \\ c = -15 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 + 60 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \times 1} \Rightarrow n = \frac{2 \pm 8}{2} \left\langle \begin{array}{l} n_1 = \dfrac{2+8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ n_2 = \dfrac{2-8}{2} = \dfrac{-6}{2} = \underbrace{-3}_{\text{não convém}} \end{array} \right.$$

Determinando o valor de "$3x - 14$":

$3 \times 5 - 14 = 15 - 14 = 1$

Gabarito: A

15. **(FCC) Uma pessoa adquiriu certo número de frutas por R\$160,00. Se comprasse quatro frutas a mais pelo mesmo preço, cada fruta custaria 1/3 de R\$10,00 mais barato. Então, se essa pessoa comprasse 24 dessas frutas, ela deveria pagar um valor de:**

a) R\$196,00.
b) R\$240,00.
c) R\$264,00.
d) R\$320,00.
e) R\$480,00.

Resolução:

Denotaremos, inicialmente, que: $\begin{cases} x : \text{total de frutas compradas por essa pessoa.} \\ y : \text{o preço por unidade de cada uma dessas frutas.} \end{cases}$

Então, podemos concluir que: se ela comprou "x" frutas e cada uma custava "y reais", logo, o total desembolsado por essa pessoa, que foi de R\$160,00, poderá ser expresso pelo seguinte produto:

$$\boxed{x \times y = \text{R\$ } 160{,}00} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Comprando-se quatro frutas a mais, essa pessoa pagaria 1/3 de R\$10,00 a ***menos*** em cada uma dessas frutas, ou seja, o novo número total de frutas: "$x + 4$" e o novo preço unitário de cada uma das frutas passará a ser de: "$y + \frac{10}{3}$". Assim, a nova despesa total poderá ser expressa por:

$$\boxed{(x+4) \times \left(y - \frac{10}{3} \right) = \text{R\$ } 160{,}00} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Com essas informações, equações (1) e (2), podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x.y = 160 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ (x+4) \times \left(y - \dfrac{10}{3} \right) = 160 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Desenvolvendo a equação (2), teremos:

$$(x+4)\times\left(y-\frac{10}{3}\right)=160 \quad\Rightarrow\quad x.y-\frac{10x}{3}+4y-\frac{4\times 10}{3}=160 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x.y-\frac{10x}{3}+4y-\frac{40}{3}=160$$

Se, pela equação (1), tem-se que "$x.y = 160$", então, substituindo no desenvolvimento anterior:

$$x.y-\frac{10x}{3}+4y-\frac{40}{3}=160 \quad\Rightarrow\quad 160-\frac{10x}{3}+4y-\frac{40}{3}=160 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{10x}{3}+4y-\frac{40}{3}=160-160$$

$$\Rightarrow\quad \left(-\frac{10x}{3}+4y-\frac{40}{3}=0\right)\times 3 \quad\Rightarrow\quad -10x+12y-40=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad (12y-10x=40)\div 2$$

$$\Rightarrow\quad 6y-5x=20 \quad\Rightarrow\quad 6y=20+5x \quad\Rightarrow\quad \boxed{y=\frac{20+5x}{6}}$$

Substituindo o valor encontrado de "y", anteriormente, na equação (1), teremos:

$$x\times y=160 \quad\Rightarrow\quad x\times\left(\frac{20+5x}{6}\right)=160 \quad\Rightarrow\quad \frac{20x+5x^2}{6}=160 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 5x^2+20x=6\times 160$$

$$\Rightarrow\quad 5x^2+20x=960 \quad\Rightarrow\quad (5x^2+20x-960=0)\div 5 \quad\Rightarrow\quad x^2+4x-192=0$$

Sendo os valores das constantes a, b e c da equação $x^2 + 4x - 192 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = 4 \\ c = -192 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2-4ac \quad\Rightarrow\quad \Delta=(4)^2-4\times 1\times(-192) \quad\Rightarrow\quad \Delta=16+768 \quad\Rightarrow\quad \Delta=784$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-(4)\pm\sqrt{784}}{2\times 1} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{2\pm 8}{2}\left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-4+28}{2}=\dfrac{24}{2}=12 \\ x_2=\dfrac{-4-28}{2}=\dfrac{-32}{2}=\underbrace{-16}_{\text{não convém}} \end{array}\right.$$

Portanto, o preço unitário de cada fruta será:

$$y=\frac{20+5x}{6} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{20+5\times 12}{6} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{20+60}{6} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{80^{\div 2}}{6_{\div 2}} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{40}{3}\text{ reais.}$$

Logo, se comprasse 24 dessas frutas, então essa pessoa pagaria uma quantia equivalente a:

$$24 \times \frac{40}{3} = 8 \times 40 = R\$320,00$$

Gabarito: D

16. (Consulplan) O triplo de um número natural subtraído do quíntuplo de sua raiz quadrada vale 78. Então, a razão entre o dobro do quadrado deste número natural pelo seu cubo é de:

a) 1/2.
b) 1/4.
c) 1/8.
d) 1/16.
e) 1/18.

Resolução:

De acordo com o enunciado, podemos montar a seguinte equação matemática: "O triplo de um ***número natural*** subtraído do quíntuplo de sua raiz quadrada vale 78."

$$3x - 5\sqrt{x} = 78$$

$$3x - 78 = 5\sqrt{x} \Rightarrow (3x - 78)^2 = (5\sqrt{x})^2 \Rightarrow (3x)^2 - 2 \times 3x \times 78 + (78)^2 = 25 \times x$$

$$9x^2 - 468x + 6084 = 25x \Rightarrow 9x^2 - 468x - 25x + 6084 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 493x + 6084 = 0$$

Sendo os valores das constantes a, b e c da equação $9x^2 - 493x + 6084 = 0$ iguais a: $\begin{cases} a = 9. \\ b = -493 \\ c = 6084 \end{cases}$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-493)^2 - 4 \times 9 \times (6084) \Rightarrow \Delta = 243.049 - 219.024 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta = 24.025$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-493) \pm \sqrt{24.025}}{2 \times 9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{493 \pm 155}{18} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{493 + 155}{18} = \frac{648}{18} = 36 \\ x_2 = \frac{493 - 155}{18} = \frac{338}{18} = \underbrace{18,777...}_{\text{não convém}} \end{array} \right.$$

Logo, $x = 36$.

Portanto, a razão entre o dobro do quadrado desse número natural ("36") pelo seu cubo é de

$$\frac{2 \times 36^2}{36^3} = \frac{2 \times 36^2}{36^3} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Gabarito: E

17. (INST.CIDADES) Um trem percorre a distância de 300 km com uma velocidade uniforme. Se a velocidade fosse de 5 km a mais por hora, a distância seria percorrida em duas horas a menos. Qual é a velocidade inicial do trem?

a) 50 km/h.
b) 45 km/h.
c) 35 km/h.
d) 30 km/h.
e) 25 km/h.

Resolução:

O conceito de ***velocidade*** é dado pela ***razão*** entre a ***distância percorrida*** pelo ***tempo*** gasto para percorrê-la; assim, teremos:

$$v = \frac{d}{t}$$

Sabendo-se que um trem percorre uma distância de 300 km com uma velocidade uniforme, gastando-se um tempo "*t*", então teremos a seguinte relação entre essas grandezas anunciadas:

$$v = \frac{300}{t} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Se a velocidade fosse de 5 km a mais por hora, a distância seria percorrida em duas horas a menos, logo, tem-se que (mantendo-se a distância como uma grandeza invariável):

$$v + 5 = \frac{300}{t-2} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Formando-se um sistema linear com as equações (1) e (2), tem-se:

$$\begin{cases} v = \dfrac{300}{t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ v + 5 = \dfrac{300}{t-2} \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

Trocando os extremos das igualdades (1) e (2): $\begin{cases} t = \dfrac{300}{v} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ t - 2 = \dfrac{300}{v+5} \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$

Substituindo (1), em (2):

$$t - 2 = \frac{300}{v+5} \quad \Rightarrow \quad \frac{300}{v} - 2 = \frac{300}{v+5} \quad \Rightarrow \quad \frac{300}{v} - \frac{300}{v+5} = 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{300(v+5) - 300v}{v.(v+5)} = 2$$

$$\Rightarrow \quad 300v + 1500 - 300v = 2v.(v+5) \quad \Rightarrow \quad 1500 = 2v^2 + 10v \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2v^2 + 10v - 1500 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2v^2 + 10v - 1500 = 0) \div 2 \quad \Rightarrow \quad v^2 + 5v - 750 = 0$$

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $v^2 + 5v - 750 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = 5 \\ c = -750 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (5)^2 - 4 \times 1 \times (-750) \Rightarrow \Delta = 25 + 3000 \Rightarrow \Delta = 3025$$

$$v = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow v = \frac{-(5) \pm \sqrt{3025}}{2 \times 1} \Rightarrow v = \frac{-5 \pm 55}{2} \left\langle \begin{array}{l} v_1 = \dfrac{-5+55}{2} = \dfrac{50}{2} = 25 \\ v_2 = \dfrac{-5-55}{2} = \dfrac{-60}{2} = \underbrace{-30}_{\text{não convém}} \end{array} \right.$$

$v = 25$ km/h

Gabarito: E

18. (Cesgranrio) Duas pessoas partem, simultaneamente, para uma cidade distante de 72 km. O primeiro, que anda 2 km por hora mais do que o segundo, chega três horas antes do outro. Quantos quilômetros por hora andou o mais lento?

a) 8 km/h.
b) 12 km/h.
c) 4 km/h.
d) 6 km/h.
e) 3 km/h.

Resolução:

De acordo com o conceito de ***velocidade***, temos que: $v = \dfrac{d}{t}$

De acordo com o enunciado, teremos as seguintes grandezas distribuídas:

$$\begin{cases} d = 72 \text{ km} \\ \text{primeiro}: \begin{cases} v_1 = v + 2 \\ t_1 = t - 3 \end{cases} . \\ \text{segundo}: \begin{cases} v_2 = v \\ t_2 = t \end{cases} \end{cases}$$

Utilizando-se da relação da ***velocidade***, e substituindo os valores, teremos:

$$\begin{array}{l} v_1 = \dfrac{72}{t_1} \Rightarrow v + 2 = \dfrac{72}{t-3} \text{ ....(1)} \\ v_2 = \dfrac{72}{t_2} \Rightarrow v = \dfrac{72}{t} \text{ ....(2)} \end{array} \text{, substituindo (2) em (1).}$$

$$v + 2 = \frac{72}{t-3} \Rightarrow \frac{72}{t} + 2 = \frac{72}{t-3} \Rightarrow \frac{72}{t} - \frac{72}{t-3} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{72.(t-3) - 72t}{t.(t-3)} = -2$$

$$\Rightarrow \quad 72.(t-3)-72t=-2t.(t-3) \quad \Rightarrow \quad 72t-216-72t=-2t^2+6t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -216=-2t^2+6t$$

$$\Rightarrow \quad \left(2t^2-6t-216=0\right)\div 2 \quad \Rightarrow \quad t^2-3t-108=0$$

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $t^2-3t-108=0$ iguais a:

$$\begin{cases} a=1. \\ b=-3 \\ c=-108 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta=b^2-4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta=(-3)^2-4\times 1\times(-108) \quad \Rightarrow \quad \Delta=9+432 \quad \Rightarrow \quad \Delta=441$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t=\frac{-(-3)\pm\sqrt{441}}{2\times 1} \Rightarrow t=\frac{3\pm 21}{2}\left\langle \begin{array}{l} t_1=\dfrac{3+21}{2}=\dfrac{24}{2}=12 \\ t_2=\dfrac{3-21}{2}=\dfrac{-18}{2}=\underbrace{-9}_{\text{não convém}} \end{array}\right.$$

t = 12 horas

Portanto, as respectivas velocidades serão dadas por:

$$v_1=\frac{72}{t-3} \quad \Rightarrow \quad v_1=\frac{72}{12-3} \quad \Rightarrow \quad v_1=\frac{72}{9} \quad \Rightarrow \quad v_1=8\ km/h$$

$$v_2=\frac{72}{t} \quad \Rightarrow \quad v_2=\frac{72}{12} \quad \Rightarrow \quad v_2=6\ km/h$$

Gabarito: D

19. (Consulplan) Um joalheiro comprou uma caixa de pedras semipreciosas por R$2.000,00. Ao transportar essa caixa, 60 pedras foram danificadas; as restantes foram vendidas por R$6,00 acima do seu preço de custo. Sabendo-se que houve um lucro de R$2.400,00, qual foi o preço de compra de uma das pedras semipreciosas?

a) R$4,00.
b) R$3,00.
c) R$2,00.
d) R$1,00.
e) R$1,50.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de:

$$\begin{cases} x: \text{preço de custo inicial.} \\ x+6: \text{preço de venda após a perda de 60 pedras preciosas.} \\ y: \text{número de pedras preciosas inicial.} \\ y-60: \text{número de pedras preciosas que restaram.} \end{cases}$$

Equação do custo inicial: $2.000 = x.y$

Equação de venda: $V = (x+6).(y-60)$

Equação do lucro obtido: $L = V - C \Rightarrow 2.400 = (x+6).(y-60) - x.y$

Desenvolvendo a relação de lucro, teremos:

$2.400 = (x + 6).(y - 60) - x.y \quad \Rightarrow \quad 2.400 = (x + 6).(y - 60) - x.y$

$\Rightarrow \quad 2.400 = x.y - 60x + 6y - 360 - x.y \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 2.400 + 360 = 6y - 60x \quad \Rightarrow \quad (2.760 = 6y - 60x) \div 6 \quad \Rightarrow \quad 460 = y - 10x$

$y = 460 + 10x$

Substituindo a equação encontrada anteriormente na equação do custo inicial, teremos:

$2.000 = x.y \quad \Rightarrow \quad 2.000 = x.(460 + 10x) \quad \Rightarrow \quad 2.000 = .460x + 10x^2$

$\Rightarrow \quad 460x + 10x^2 - 2.000 = 0 \quad \Rightarrow \quad (10x^2 + 460x - 2.000 = 0) \div 10$

$\Rightarrow \quad x^2 + 46x - 200 = 0$

Sendo os valores das constantes a, b e c da equação $x^2 + 46x - 200 = 0$ iguais a:

$$\begin{cases} a = 1. \\ b = 46 \\ c = -200 \end{cases}, \text{ então:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (46)^2 - 4 \times 1 \times (-200) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2.116 + 800 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = 2.916$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-(46) \pm \sqrt{2.916}}{2 \times 1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-46 \pm 54}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-46 + 54}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{-46 - 54}{2} = \dfrac{-100}{2} = \underbrace{-50}_{\text{não convém}} \end{array} \right.$$

$x = \text{R\$}4{,}00$

Gabarito: A

20. (Fuvest) Dois capitais são colocados a juros simples, a diferentes taxas. O primeiro, que excede o segundo em R$500,00, rende R$85,00 por ano; o segundo rende R$84,00 anualmente. A taxa anual do segundo excede a do primeiro em 2%. Qual é a soma desses capitais?

a) R$1.700,00.
b) R$2.900,00.
c) R$1.200,00.
d) R$2.700,00.
e) R$3.100,00.

Resolução:

Dados os capitais: $\begin{cases} C_1 : C + 5.000 \\ C_2 : C \end{cases}$

Dados os juros auferidos por ano: $\begin{cases} J_1 : \text{R\$ } 85{,}00 \\ J_2 : \text{R\$ } 84{,}00 \end{cases}$

Dadas as taxas percentuais anuais: $\begin{cases} i_1 : i \\ i_2 : i + 2\% \end{cases}$

Sendo os ***juros simples*** dados por: $J = C.i.t$ $\begin{cases} \text{C : capital aplicado.} \\ \text{i : taxa percentual anual.} \\ \text{t : período de aplicação do capital.} \end{cases}$

E aplicando a ***fórmula resolutiva*** para os dados anteriores, considerando o ***período*** de aplicação para ambos de **um *ano***, teremos:

$$J_1 = C_1.i_1.t \Rightarrow 85 = (C + 500).i.1 \Rightarrow 85 = (C + 500)i \Rightarrow \Rightarrow 85 = Ci + 500i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$J_2 = C_2.i_2.t \Rightarrow 84 = C.(i + 2\%).1 \Rightarrow 84 = C.(i + 2\%) \Rightarrow \Rightarrow 84 = Ci + 2\%C \quad \ldots\ldots\ldots.(2)$$

Formando-se um sistema linear com as relações anteriores: $\begin{cases} 85 = Ci + 500i \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 84 = Ci + 2\%C \ldots\ldots\ldots..(2) \end{cases}$

Subtraindo-se (1) de (2), teremos:

$$85 - 84 = Ci - Ci + 500i - 2\%C \Rightarrow 1 = 500i - 2\%C$$

$$\Rightarrow 1 = 500i - \frac{2C}{100} \Rightarrow 1 = 500i - \frac{C}{50} \Rightarrow 1 + \frac{C}{50} = 500i \Rightarrow \frac{50 + C}{50} = 500i$$

$$\Rightarrow i = \frac{50 + C}{25.000} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$$

Substituindo (3) em (1), teremos:

$$85 = (C + 500)i \Rightarrow 85 = (C + 500)\left(\frac{50 + C}{25.000}\right) \Rightarrow 85 = \frac{50C + C^2 + 25.000 + 500C}{25.000}$$

$$\Rightarrow 85 \times 25.000 = C^2 + 550C + 25.000 \Rightarrow C^2 + 550C + 25.000 - 2.125.000 = 0$$

$$\Rightarrow C^2 + 550C - 2.100.000 = 0$$

Sendo os valores das constantes *a*, *b* e *c* da equação $C^2 + 550C - 2.100.000 = 0$ iguais a: $\begin{cases} a = 1. \\ b = 550 \\ c = -2.100.000 \end{cases}$, então:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (550)^2 - 4 \times 1 \times (-2.100.000) \Rightarrow \Delta = 302.500 + 8.400.000 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta = 8.702.500$$

$$C = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{-(550) \pm \sqrt{8.702.500}}{2 \times 1}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{-550 \pm 2950}{2} \left\langle \begin{array}{l} C_1 = \dfrac{-550 + 2950}{2} = \dfrac{2.400}{2} = 1.200 \\ C_2 = \dfrac{-550 - 2950}{2} = \dfrac{-3.500}{2} = \underbrace{-1.750}_{\text{não convém}} \end{array} \right.$$

C = R$1.200,00

O outro capital será de: 1.200 + 500 = R$1.700,00

Logo, a soma dos capitais aplicados será de: R$1.200,00 + R$1.700,00 = R$2.900,00

Gabarito: B

Capítulo 14

Equações Irracionais

Uma equação é dita ***irracional*** quando pelo menos um termo com a incógnita está ***sob radical*** ou, ainda, sua variável possui, ao menos, um ***expoente fracionário***.

Exemplos:

$$\sqrt{x} - x = 12$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2} = 7$$

$$18 - 2x = \sqrt{x+1}$$

$$\sqrt[3]{x-1} = 2$$

$$x^{\frac{1}{2}} - 3x = 9$$

$$x^{\frac{1}{5}} - 4 = 3x^{\frac{1}{5}}$$

14.1. Método de resolução

Devemos ***eliminar*** os ***radicais*** existentes com a finalidade de converter tal ***equação irracional*** em uma ***equação racional***. Será possível, se elevarmos todos os membros dessa ***equação irracional*** a um ***expoente conveniente***.* Pode ocorrer, por meio desse método, o surgimento de ***raízes estranhas*** (raízes que não verificam esta equação).

Portanto, deve-se verificar, por meio da ***prova real***, substituindo o ***valor*** encontrado da ***incógnita*** na ***variável da equação***, para identificarmos se tal valor será ***válido*** ou ***não***.

Lembre-se de que:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2}\times 2} = x^{\frac{2}{2}} = x^1 = x$$

$$\left(\sqrt{8}\right)^2 = \left(\sqrt{2^3}\right)^2 = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{3}{2}\times 2} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$$

$$\left(\sqrt{64}\right)^2 = \left(\sqrt{2^6}\right)^2 = \left(2^{\frac{6}{2}}\right)^2 = \left(2^3\right)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6 = 64$$

---

* ***Expoente conveniente***: tal expoente será igual ao índice do radical.

$$\left(\sqrt[3]{27}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{3^3}\right)^3 = \left(3^{\frac{3}{3}}\right)^3 = \left(3^1\right)^3 = 3^3 = 27$$

$$\left(\sqrt[4]{625}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{5^4}\right)^4 = \left(5^{\frac{4}{4}}\right)^4 = \left(5^1\right)^4 = 5^4 = 625$$

De uma maneira prática, para eliminarmos o ***radical,*** basta elevarmos a uma ***potência*** igual ao ***índice*** desse ***radical***.

Exemplos:

$$\sqrt[3]{\pi} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{\pi}\right)^3 = \pi$$

$$\sqrt[5]{18} \Rightarrow \left(\sqrt[5]{18}\right)^5 = 18$$

$$\sqrt[7]{31} \Rightarrow \left(\sqrt[7]{31}\right)^7 = 31$$

Obs.: Quando se trata de equações, ao elevarmos um ***radical*** a uma determinada ***potência*** de um lado da igualdade, devemos elevar também o outro lado da igualdade à ***mesma potência***.

Exercícios resolvidos

1. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $\sqrt{x+1} = 5$.

Devemos, inicialmente, elevar os dois membros dessa equação ao ***quadrado***, pois o índice desse radical é igual a **2**.

$$\sqrt{x+1} = 5 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 5^2 \quad \Rightarrow \quad x+1 = 25 \quad \Rightarrow \quad x = 25-1 \quad \Rightarrow \quad x = 24$$

Substituindo o valor encontrado ($x = 24$) na equação irracional dada, teremos:

$$\sqrt{x+1} = 5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{24+1} = 5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \quad 5 = 5 \quad \textit{(identidade)}$$

Concluímos que a ***raiz*** **24** verifica a equação irracional. Portanto:

S = {24}

2. Determine o conjunto solução em R da equação irracional $\sqrt{3x-2} - 7 = 0$.

$$\sqrt{3x-2} - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3x-2} = 7$$

Devemos elevar os dois membros dessa equação irracional ao ***quadrado***, pois o índice do radical apresentado é igual a **2**.

$$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = 7^2 \quad \Rightarrow \quad 3x-2 = 49 \quad \Rightarrow \quad 3x = 49+2 \quad \Rightarrow \quad 3x = 51 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{51}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 17$$

Tirando a prova real:

$$\sqrt{3x-2} - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3.(17)-2} - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{51-2} - 7 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{49} - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 7-7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \ \textit{(identidade)}$$

Concluímos que a ***raiz*** **24** verifica a equação irracional. Portanto:

S = {17}

3. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $\sqrt[3]{9-\sqrt{x}}=2$.

Devemos, inicialmente, elevar os dois membros dessa equação irracional ao ***cubo***, pois o índice do radical apresentado é igual a **3**.

$$\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{x}}\right)^3=2^3 \Rightarrow 9-\sqrt{x}=8 \Rightarrow 9-8=\sqrt{x} \Rightarrow 1=\sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1^2=\left(\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x=1$$

Tirando a prova real:

$$\sqrt[3]{9-\sqrt{x}}=2 \Rightarrow \sqrt[3]{9-\sqrt{1}}=2 \Rightarrow \sqrt[3]{9-1}=2 \Rightarrow \sqrt[3]{8}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{2^3}=2 \Rightarrow 2=2 \ \textbf{\textit{(identidade)}}$$

Concluímos que a ***raiz* 1** verifica a equação irracional. Portanto:

S = {1}

4. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $\sqrt{6-\sqrt{x}}=2$.

Devemos, inicialmente, elevar os ***dois membros*** dessa equação irracional ao ***quadrado***, pois o índice do radical é igual a **2**.

$$\sqrt{6-\sqrt{x}}=2 \Rightarrow \left(\sqrt{6-\sqrt{x}}\right)^2=2^2 \Rightarrow 6-\sqrt{x}=4 \Rightarrow -\sqrt{x}=4-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{x}=-2$$

Elevando-se, novamente, os ***dois membros*** da igualdade ao ***quadrado***, teremos:

$$\Rightarrow \left(-\sqrt{x}\right)^2=(-2)^2 \Rightarrow x=4$$

Substituindo o valor encontrado $(x=4)$ na equação irracional, teremos:

$$\sqrt{6-\sqrt{x}}=2 \Rightarrow \sqrt{6-\sqrt{4}}=2 \Rightarrow \sqrt{6-2}=2 \Rightarrow \sqrt{4}=2 \Rightarrow 2=2$$

(*identidade*)

Concluímos que a ***raiz* 4** verifica a equação irracional. Portanto:

S = {4}

5. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $\sqrt{x}=6-x$.

Por apresentar um índice igual a **2**, devemos, inicialmente, elevar os ***dois membros*** da igualdade ao ***quadrado***.

$$\sqrt{x}=6-x \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=(6-x)^2$$

No membro da ***esquerda***, ***eliminaremos o radical*** e no membro da ***direita*** aplicaremos o ***produto notável*** do ***quadrado da diferença de dois termos*** (primeiro termo ao quadrado, menos duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo):

$$x=6^2-2.x.6+x^2 \Rightarrow x=36-12x+x^2 \Rightarrow -x^2+12x+x-36=0$$

$$-x^2+13x-36=0 \Rightarrow \left(-x^2+13x-36=0\right)\times(-1) \Rightarrow x^2-13x+36=0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** desta equação quadrática:

$$x^2-13x+36=0\begin{cases}a=1\\b=-13\\c=36\end{cases}$$, determinando-se o discriminante de Bhaskara:

$\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta=b^2-4.a.c \quad\Rightarrow\quad \Delta=(-13)^2-4.1.36 \quad\Rightarrow\quad \Delta=169-144 \quad\Rightarrow\quad \Delta=25$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{25}}{2.1} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{13\pm 5}{2}\begin{cases}x_1=\dfrac{13+5}{2}=\dfrac{18}{2}=9\\[2mm] x_2=\dfrac{13-5}{2}=\dfrac{8}{2}=4\end{cases}$$

A seguir, substituiremos as soluções encontradas na equação irracional a fim de verificarmos a ocorrência da identidade (***prova real***):

Para $x = 4$:

$$\sqrt{x}=6-x \quad\Rightarrow\quad \sqrt{4}=6-4 \quad\Rightarrow\quad 2=2$$ **(*identidade*)**

Logo, "4" ***é solução*** desta equação irracional.

Para $x = 9$:

$$\sqrt{x}=6-x \quad\Rightarrow\quad \sqrt{9}=6-9 \quad\Rightarrow\quad 3\neq -3$$

Logo, "9" ***não é solução***, pois se trata de uma ***raiz estranha*** a esta equação irracional.

S = {4}

6. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $x+\sqrt{6-x}=0$.

$$x+\sqrt{6-x}=0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{6-x}=-x$$

Elevando-se os ***dois membros*** ao ***quadrado***, teremos:

$$\Rightarrow\quad \left(\sqrt{6-x}\right)^2=(-x)^2 \quad\Rightarrow\quad 6-x=x^2 \quad\Rightarrow\quad -x^2-x+6=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left(-x^2-x+6=0\right)\times(-1) \quad\Rightarrow\quad x^2+x-6=0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** desta equação quadrática:

$$x^2+x-6=0\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-6\end{cases}$$, determinando-se o discriminante de Bhaskara: $\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta=b^2-4.a.c \quad\Rightarrow\quad \Delta=1^2-4.1.(-6) \quad\Rightarrow\quad \Delta=1+24 \quad\Rightarrow\quad \Delta=25$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-(1)\pm\sqrt{25}}{2.1} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-1\pm 5}{2}\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+5}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\[2mm] x_2=\dfrac{-1-5}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

Substituindo os valores encontrados para "*x*" na equação irracional, teremos:

Para $x = 2$

$$x+\sqrt{6-x}=0 \quad\Rightarrow\quad 2+\sqrt{6-2}=0 \quad\Rightarrow\quad 2+\sqrt{4}=0 \quad\Rightarrow\quad 2+2=0 \quad\Rightarrow\quad 4\neq 0$$

Concluímos que a ***raiz* 2** ***não*** verifica a equação.

Para $x = -3$

$$x+\sqrt{6-x}=0 \;\Rightarrow\; -3+\sqrt{6-(-3)}=0 \;\Rightarrow\; -3+\sqrt{9}=0 \;\Rightarrow\; -3+3=0 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow 0 = 0$ ***(identidade)***

Concluímos que a ***raiz*** **–3** verifica a equação.

S = {–3}

7. Determine o conjunto solução em R da equação irracional $\sqrt{15+\sqrt{2(x+40)}}=5$.

Devemos, inicialmente, elevar os ***dois membros*** dessa equação irracional ao ***quadrado***, pois o índice do radical é igual a **2**.

$$\sqrt{15+\sqrt{2(x+40)}}=5 \quad\Rightarrow\quad \left(\sqrt{15+\sqrt{2(x+40)}}\right)^2=5^2 \quad\Rightarrow\quad 15+\sqrt{2(x+40)}=25$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{2(x+40)}=25-15 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{2(x+40)}=10$$

Ao elevar, novamente, os ***dois membros*** da igualdade ao ***quadrado***, eliminaremos o ***radical*** de índice **2**.

$$\Rightarrow\quad \sqrt{2(x+40)}=10 \quad\Rightarrow\quad \left(\sqrt{2(x+40)}\right)^2=10^2 \quad\Rightarrow\quad 2(x+40)=100 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x+40=\frac{100}{2} \quad\Rightarrow\quad x+40=50 \quad\Rightarrow\quad x=50-40 \quad\Rightarrow\quad x=10$$

Verificaremos a seguir se o valor encontrado de "*x*" é ***solução*** da ***equação irracional***:

$$\sqrt{15+\sqrt{2(x+40)}}=5 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{15+\sqrt{2(10+40)}}=5 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{15+\sqrt{2.50}}=5 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{15+\sqrt{100}}=5 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{15+10}=5 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{25}=5 \quad\Rightarrow\quad 5=5 \textit{ (identidade)}$$

Logo, "10" é ***solução*** dessa equação irracional.

S = {10}

8. Determine o conjunto solução em R da equação irracional $\sqrt{12+2\sqrt{x}}=\sqrt{22-3\sqrt{x}}$.

Elevando-se os ***dois membros*** ao ***quadrado***, teremos:

$$\left(\sqrt{12+2\sqrt{x}}\right)^2=\left(\sqrt{22-3\sqrt{x}}\right)^2 \;\Rightarrow\; 12+2\sqrt{x}=22-3\sqrt{x} \;\Rightarrow\; 2\sqrt{x}+3\sqrt{x}=22-12$$

$$\Rightarrow\quad 5\sqrt{x}=10 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x}=\frac{10}{5} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x}=2 \quad\Rightarrow\quad \left(\sqrt{x}\right)^2=2^2 \quad\Rightarrow\quad x=4$$

Substituindo o valor encontrado $(x = 4)$ na equação irracional, teremos:

$$\sqrt{12+2\sqrt{x}}=\sqrt{22-3\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; \sqrt{12+2\sqrt{4}}=\sqrt{22-3\sqrt{4}} \;\Rightarrow\; \sqrt{12+2.2}=\sqrt{22-3.2}$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{12+4}=\sqrt{22-6} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{16}=\sqrt{16} \quad\Rightarrow\quad 4=4 \;\; \textbf{(\textit{identidade})}$$

Concluímos que a ***raiz* 4** verifica a equação irracional. Portanto:

S = {4}

9. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $\sqrt{3+\sqrt{x}}=\sqrt{12-\sqrt{4x}}$.

Elevando-se os ***dois membros*** ao ***quadrado***, eliminaremos, simultaneamente, os ***dois radicais*** que se apresentam nos ***dois membros*** desta ***igualdade***:

$$\sqrt{3+\sqrt{x}}=\sqrt{12-\sqrt{4x}} \Rightarrow \left(\sqrt{3+\sqrt{x}}\right)^2=\left(\sqrt{12-\sqrt{4x}}\right)^2 \Rightarrow 3+\sqrt{x}=12-\sqrt{4x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4x}+\sqrt{x}=12-3 \Rightarrow \sqrt{4x}+\sqrt{x}=9$$

Elevando-se, novamente, os ***dois membros*** ao ***quadrado***, teremos para o ***membro da esquerda*** o desenvolvimento de um ***produto notável*** (***quadrado da soma de dois termos***):

$$\Rightarrow \sqrt{4x}+\sqrt{x}=9 \Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{4x}+\sqrt{x}\right)^2}_{\text{produto notável}}=9^2 \Rightarrow \left(\sqrt{4x}\right)^2+2.\sqrt{4x}.\sqrt{x}+\left(\sqrt{x}\right)^2=81$$

$$\Rightarrow 4x+2.\sqrt{4x.x}+x=81 \Rightarrow 4x+2.\sqrt{4x^2}+x=81 \Rightarrow 4x+2.2x+x=81$$

$$\Rightarrow 4x+4x+x=81 \Rightarrow 9x=81 \Rightarrow x=\frac{81}{9} \Rightarrow x=9$$

Verificaremos se o valor encontrado é ***solução*** dessa ***equação irracional***:

$$\sqrt{3+\sqrt{x}}=\sqrt{12-\sqrt{4x}} \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{9}}=\sqrt{12-\sqrt{4.9}} \Rightarrow \sqrt{3+3}=\sqrt{12-\sqrt{36}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}=\sqrt{12-6} \Rightarrow \sqrt{6}=\sqrt{6} \quad (\textit{identidade})$$

Logo, “9” é ***solução*** desta equação irracional.

S = {9}

10. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5$.

Elevando-se os ***dois membros*** ao ***quadrado***, teremos para o ***membro da esquerda*** o desenvolvimento de um ***produto notável*** (***quadrado da soma de dois termos***):

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5 \Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}\right)^2}_{\text{produto notável}}=5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2+2.\sqrt{x+1}.\sqrt{2x+3}+\left(\sqrt{2x+3}\right)^2=25$$

$$\Rightarrow x+1+2.\sqrt{(x+1)(2x+3)}+2x+3=25 \Rightarrow 2.\sqrt{(x+1)(2x+3)}=25-4-3x$$

$$\Rightarrow 2.\sqrt{(x+1)(2x+3)}=21-3x$$

Elevando-se novamente os ***dois membros*** ao ***quadrado*** e aplicando o desenvolvimento do ***produto notável*** do ***quadrado da diferença de dois termos*** no membro (lado) ***direito*** dessa igualdade, teremos:

$$\Rightarrow\left(2.\sqrt{(x+1)(2x+3)}\right)^2=(21-3x)^2 \Rightarrow 4\left((x+1)(2x+3)\right)=(21)^2-2.21.3x+(3x)^2$$

$$\Rightarrow 4\left(2x^2+3x+2x+3\right)=441-126x+9x^2 \Rightarrow 8x^2+20x+12=9x^2-126x+441$$

$$\Rightarrow -9x^2+8x^2+20x+126x+12-441=0 \Rightarrow -x^2+146x-429=0$$

$$\Rightarrow x^2-146x+429=0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** desta equação quadrática:

$$x^2 - 146x + 429 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -146 \\ c = 429 \end{cases}$$, determinando-se o discriminante de Bhaskara:

$\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c. \Rightarrow \Delta = (-146)^2 - 4.1.(429) \Rightarrow \Delta = 21316 - 1716 \Rightarrow \Delta = 19600$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow x = \frac{-(-146) \pm \sqrt{19600}}{2.1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{146 \pm 140}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{146+140}{2} = \dfrac{286}{2} = 143 \\ x_2 = \dfrac{146-140}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

A seguir, substituiremos as ***soluções*** encontradas na ***equação irracional*** a fim de verificarmos a ocorrência da identidade (***prova real***):

Para $x = 143$:

$$\sqrt{143+1} + \sqrt{2.(143)+3} = 5 \Rightarrow \sqrt{144} + \sqrt{289} = 5 \Rightarrow 12 + 17 = 5 \Rightarrow 29 \neq 5$$

Logo, "143" ***não é solução***, pois se trata de uma ***raiz estranha*** a essa equação irracional.

Para $x = 3$:

$$\sqrt{3+1} + \sqrt{2.3+3} = 5 \Rightarrow \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5 \Rightarrow 2 + 3 = 5 \Rightarrow 5 = 5$$ (***identidade***)

Logo, "3" ***é solução*** desta equação irracional.

S = {3}

11. Determine o conjunto solução em R da equação irracional $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+1} = 7$.

Ao elevarmos os ***dois membros*** ao ***quadrado***, verifica-se o desenvolvimento do ***produto notável: quadrado da soma de dois termos***.

$$\underbrace{\left(\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+1}\right)^2}_{\text{produto notável}} = 7^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 + 2.\sqrt{2x-1}.\sqrt{3x+1} + \left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = 49$$

$$\Rightarrow 2x - 1 + 2.\sqrt{(2x-1).(3x+1)} + 3x + 1 = 49 \Rightarrow 2.\sqrt{(2x-1).(3x+1)} = 49 - 5x$$

Ao elevarmos novamente os ***dois membros*** ao ***quadrado***, verifica-se a <u>eliminação</u> do ***radical de índice 2*** no membro (lado) ***esquerdo*** da igualdade e o <u>desenvolvimento</u> do ***produto notável*** (***quadrado da diferença de dois termos***) do lado ***direito*** dessa igualdade:

$$\Rightarrow \left(2.\sqrt{(2x-1).(3x+1)}\right)^2 = (49-5x)^2 \Rightarrow 4(2x-1).(3x+1) = 49^2 - 2.49.5x + (5x)^2$$

$$\Rightarrow 4\left(6x^2 + 2x - 3x - 1\right) = 2401 - 490x + 25x^2 \Rightarrow 24x^2 - 4x - 4 = 2401 - 490x + 25x^2$$

$$\Rightarrow 24x^2 - 25x^2 - 4x + 490x - 4 - 2401 = 0 \Rightarrow -x^2 + 486x - 2405 = 0$$

$$\Rightarrow \left(-x^2 + 486x - 2405 = 0\right) \times (-1) \Rightarrow x^2 - 486x + 2405 = 0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** desta equação quadrática:

$$x^2 - 486x + 2405 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -486 \\ c = 2405 \end{cases}$$, determinando-se o discriminante de Bhaskara:

$\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c. \Rightarrow \Delta = (-486)^2 - 4.1.(2405) \Rightarrow \Delta = 236196 - 9620 \Rightarrow \Delta = 226576$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow x = \frac{-(-486) \pm \sqrt{226576}}{2.1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{486 \pm 476}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{486 + 476}{2} = \dfrac{962}{2} = 481 \\ x_2 = \dfrac{486 - 476}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

A seguir, substituiremos as ***soluções*** encontradas na ***equação irracional*** a fim de verificarmos a ocorrência da identidade:

Para $x = 481$.

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+1} = 7 \Rightarrow \sqrt{2.(481)-1} + \sqrt{3.(481)+1} = 7 \Rightarrow \sqrt{961} + \sqrt{1444} \neq 7$$

Logo, "481" ***não é solução***, pois se trata de uma ***raiz estranha*** a essa equação irracional.

Para $x = 5$.

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+1} = 7 \Rightarrow \sqrt{2.(5)-1} + \sqrt{3.(5)+1} = 7 \Rightarrow \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7 \Rightarrow 3 + 4 = 7$$

7 = 7 (***identidade***)

Concluímos que a **raiz 5** verifica a equação. Portanto:

S = {5}

12. Determine o conjunto solução em R da equação irracional $\sqrt{7x+2} - \sqrt{13-2x} = \sqrt{x-1}$.

Elevando-se os ***dois membros*** ao ***quadrado***, teremos para o ***membro da esquerda*** o desenvolvimento de um ***produto notável*** (***quadrado da diferença de dois termos***).

$$\sqrt{7x+2} - \sqrt{13-2x} = \sqrt{x-1} \Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{7x+2} - \sqrt{13-2x}\right)^2}_{\text{produto notável}} = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{7x+2}\right)^2 - 2.\sqrt{7x+2}.\sqrt{13-2x} + \left(\sqrt{13-2x}\right)^2 = x - 1$$

$$\Rightarrow 7x + 2 - 2.\sqrt{(7x+2).(13-2x)} + 13 - 2x = x - 1$$

$$\Rightarrow 7x - 2x - x + 2 + 13 + 1 = 2.\sqrt{(7x+2).(13-2x)}$$

$$\Rightarrow 4x + 16 = 2.\sqrt{(7x+2).(13-2x)} \Rightarrow \frac{4x+16}{2} = \sqrt{(7x+2).(13-2x)}$$

$$\Rightarrow 2x + 8 = \sqrt{(7x+2).(13-2x)}$$

Elevando-se mais uma vez os ***dois membros*** ao ***quadrado,*** verificaremos que, no ***lado esquerdo***, aplicaremos, novamente, o ***produto notável***, porém, sendo o ***quadrado da soma de dois termos*** e, no ***lado direito*** da igualdade, apenas eliminaremos o ***radical*** de índice **2**.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(2x+8)^2}_{\text{produto notável}} = \left(\sqrt{(7x+2).(13-2x)}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad (2x)^2 + 2.(2x).8 + 8^2 = (7x+2).(13-2x)$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 32x + 64 = 91x - 14x^2 + 26 - 4x$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 14x^2 + 32x - 91x + 4x + 64 - 26 = 0 \quad \Rightarrow \quad 18x^2 - 55x + 38 = 0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** desta equação quadrática:

$18x^2 - 55x + 38 = 0 \begin{cases} a = 18 \\ b = -55 \\ c = 38 \end{cases}$, determinando-se o discriminante de Bhaskara:

$\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = (-55)^2 - 4.(18).(38) \Rightarrow \Delta = 3025 - 2736 \Rightarrow \Delta = 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow x = \frac{-(-55) \pm \sqrt{289}}{2.(18)} \Rightarrow x = \frac{55 \pm 17}{36} \begin{cases} x_1 = \dfrac{55+17}{36} = \dfrac{72}{36} = 2 \\ x_2 = \dfrac{55-17}{36} = \dfrac{38}{36} = \dfrac{19}{18} \end{cases}$$

A seguir, verificaremos se os valores encontrados podem representar a **solução** da **equação irracional** dada:

Para $x = 2$:

$$\sqrt{7x+2} - \sqrt{13-2x} = \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{7.2+2} - \sqrt{13-2.2} = \sqrt{2-1} \Rightarrow \sqrt{16} - \sqrt{9} = \sqrt{1}$$

$$\Rightarrow \quad 4 - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 \quad (\textbf{\textit{identidade}})$$

Logo, "2" ***é solução*** desta equação irracional.

Para $x = \dfrac{19}{18}$:

$$\sqrt{7x+2} - \sqrt{13-2x} = \sqrt{x-1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7 \times \frac{19}{18} + 2} - \sqrt{13 - 2 \times \frac{19}{18}} = \sqrt{\frac{19}{18} - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{133}{18} + 2} - \sqrt{13 - \frac{38}{18}} = \sqrt{\frac{19}{18} - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{133 + 2.(18)}{18}} - \sqrt{\frac{(13).(18) - 38}{18}} = \sqrt{\frac{19-18}{18}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{169}{18}} - \sqrt{\frac{196}{18}} = \sqrt{\frac{1}{18}} \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{\sqrt{18}} - \frac{14}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{18}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{13-14}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{18}} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{18}} \neq \frac{1}{\sqrt{18}}$$

Logo, "$\frac{19}{18}$" ***não é solução***, pois se trata de uma ***raiz estranha*** a essa equação irracional.

S = {2}

13. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $\frac{\sqrt{4(x+5)}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

A equação do enunciado está representada por uma ***proporção simples***, portanto aplicaremos sua ***propriedade fundamental***: "A ***multiplicação*** formada pelos ***termos dos meios*** é igual à ***multiplicação*** dos ***termos dos extremos***."

$$\frac{\sqrt{4(x+5)}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \left(\sqrt{4(x+5)}\right).\left(\sqrt{x}\right) = \left(4+\sqrt{x}\right).\left(4-\sqrt{x}\right)$$

Para o ***lado esquerdo*** dessa igualdade, aplicaremos a ***propriedade*** *da* ***multiplicação*** entre dois radicais de mesmo índice, ou seja, apenas ***multiplicaremos*** seus ***radicandos***. Para o ***lado direito*** da igualdade desenvolveremos o ***produto notável***, denominado de ***diferença de dois quadrados***.

$$\sqrt{4x(x+5)} = \underbrace{\left(4+\sqrt{x}\right).\left(4-\sqrt{x}\right)}_{\text{produto notável}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4x(x+5)} = 4^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{4x(x+5)} = 16 - x$$

A seguir, devemos elevar os ***dois membros*** dessa igualdade ao ***expoente* 2,** já que é o ***mesmo número*** que se apresenta no ***índice desse radical***.

$$\Rightarrow \quad \sqrt{4x(x+5)} = 16 - x \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{4x(x+5)}\right)^2 = (16-x)^2$$

Com esse processo, ***eliminaremos*** o ***radical*** que se encontra no ***lado esquerdo*** dessa igualdade e, para o ***lado direito***, desenvolveremos o ***produto notável*** da "diferença entre dois quadrados".

$$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{4x(x+5)}\right)^2 = \underbrace{(16-x)^2}_{\text{produto notável}} \quad \Rightarrow \quad 4x(x+5) = 16^2 - 2.16.x + x^2$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 20x = 256 - 32x + x^2 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - x^2 + 20x + 32x - 256 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 + 52x - 256 = 0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** dessa equação quadrática:

$$3x^2 + 52x - 256 = 0 \begin{cases} a = 3 \\ b = 52 \\ c = -256 \end{cases}$$, determinando-se o discriminante de Bhaskara:

$\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = (52)^2 - 4.(3).(-256) \Rightarrow \Delta = 2704 + 3072 \Rightarrow \Delta = 5776$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}\Rightarrow x=\frac{-(52)\pm\sqrt{5776}}{2.3}\Rightarrow x=\frac{-52\pm 76}{6}\begin{cases}x_1=\dfrac{-52+76}{6}=\dfrac{24}{6}=4\\[2mm] x_2=\dfrac{-128}{6}=-\dfrac{64}{3}\end{cases}$$

A seguir, verificaremos se os valores encontrados podem representar a **solução** da **equação irracional** dada:

Para $x = 4$:

$$\frac{\sqrt{4(x+5)}}{4+\sqrt{x}}=\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\quad\Rightarrow\quad\frac{\sqrt{4(4+5)}}{4+\sqrt{4}}=\frac{4-\sqrt{4}}{\sqrt{4}}\quad\Rightarrow\quad\frac{\sqrt{4.9}}{4+\sqrt{4}}=\frac{4-\sqrt{4}}{\sqrt{4}}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{6}{4+2}=\frac{4-2}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{6}{6}=\frac{2}{2}\quad\Rightarrow\quad 1=1\ \ \textit{(identidade)}$$

Logo, "4" ***é solução*** dessa equação irracional.

Para $x=-\dfrac{64}{3}$:

$$\frac{\sqrt{4(x+5)}}{4+\sqrt{x}}=\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\quad\Rightarrow\quad\frac{\sqrt{4\left(\left(-\dfrac{64}{3}\right)+5\right)}}{4+\sqrt{-\dfrac{64}{3}}}=\frac{4-\sqrt{-\dfrac{64}{3}}}{\sqrt{-\dfrac{64}{3}}}$$

Como ***não existe*** um ***valor real*** definido para uma ***raiz de índice par*** e ***radicando negativo***, logo descartaremos essa possibilidade.

Logo, "$-\dfrac{64}{3}$" ***não é solução***, pois se trata de uma ***raiz estranha*** a essa equação irracional.

S = {4}

14. Determine o conjunto solução em R da equação irracional $2\sqrt{x^2-2x+9}-1=\dfrac{15}{\sqrt{x^2-2x+9}}$.

Para este exercício, utilizaremos um ***artifício*** muito usado em cálculos matemáticos, que é o emprego de ***incógnitas auxiliares***, também conhecido como ***mudança de variável***. A introdução de incógnitas auxiliares é relevante quando as expressões que contêm incógnita são ***iguais*** ou ***inversas***, pois, nesse caso, os **radicais** correspondentes podem ser ***representados*** apenas por ***uma letra***, evitando-se a ***elevação à potência***.

Faremos então: $\sqrt{x^2-2x+9}=y$ e lembramos que para essa situação teremos de ter $y>0$ (condição de existência). Substituindo na equação irracional, teremos:

$$2\sqrt{x^2-2x+9}-1=\frac{15}{\sqrt{x^2-2x+9}}\quad\Rightarrow\quad 2y-1=\frac{15}{y}\quad\Rightarrow\quad y(2y-1)=15$$

$$\Rightarrow\quad 2y^2-y=15\quad\Rightarrow\quad 2y^2-y-15=0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** dessa equação quadrática:

$$2y^2 - y - 15 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -15 \end{cases}$$, determinando-se o discriminante de Bhaskara: $\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-1)^2 - 4.(2).(-15) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1 + 120 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 121$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{121}}{2.2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1 \pm 11}{4} \begin{cases} y_1 = \dfrac{1+11}{4} = \dfrac{12}{4} = 3 \\ y_2 = \dfrac{1-11}{4} = -\dfrac{10}{4} = -\dfrac{5}{2} \ (y < 0 : \text{não convém}) \end{cases}$$

Para $y = 3$, teremos:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 9} = y \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 - 2x + 9} = 3$$

Elevando-se os ***dois membros*** ao ***quadrado***:

$$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{x^2 - 2x + 9}\right)^2 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 9 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 9 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \textbf{ou} \ x - 2 = 0, \text{ ou seja, } x = 2$$

Verificando a veracidade de cada raiz encontrada:

Para $x = 0$

$$2\sqrt{x^2 - 2x + 9} - 1 = \frac{15}{\sqrt{x^2 - 2x + 9}} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{0^2 - 2.0 + 9} - 1 = \frac{15}{\sqrt{0^2 - 2.0 + 9}}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{9} - 1 = \frac{15}{\sqrt{9}} \quad \Rightarrow \quad 2.3 - 1 = \frac{15}{3} \quad \Rightarrow \quad 5 = 5 \ \ (\textit{\textbf{identidade}})$$

Para $x = 2$

$$2\sqrt{x^2 - 2x + 9} - 1 = \frac{15}{\sqrt{x^2 - 2x + 9}} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2^2 - 2.2 + 9} - 1 = \frac{15}{\sqrt{2^2 - 2.2 + 9}}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{4 - 4 + 9} - 1 = \frac{15}{\sqrt{4 - 4 + 9}} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{9} - 1 = \frac{15}{\sqrt{9}} \quad \Rightarrow \quad 2.3 - 1 = \frac{15}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 5 = 5 \ \ (\textit{\textbf{identidade}})$$

Portanto, as duas soluções são válidas.

S = {0; 2}

15. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $3x^{\frac{2}{3}} + 2 = 5x^{\frac{1}{3}}$.

Transformando as potências fracionárias na forma de radicais, teremos:

$$3x^{\frac{2}{3}} + 2 = 5x^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad 3.\sqrt[3]{x^2} + 2 = 5.\sqrt[3]{x}$$

Observe que podemos reescrever o termo $\sqrt[3]{x^2}$ por $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$, logo, teremos:

$$\Rightarrow \quad 3.\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2 = 5.\sqrt[3]{x}$$

Denotando $\sqrt[3]{x}$ de *y*, tem-se:

$$\Rightarrow \quad 3.\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2 = 5.\sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad 3.(y)^2 + 2 = 5.y \quad \Rightarrow \quad 3y^2 - 5y + 2 = 0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** dessa equação quadrática:

$$3y^2 - 5y + 2 = 0 \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{cases}$$, determinando-se o discriminante de Bhaskara: $\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4.(3).(2) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 25 + 24 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5 \pm 1}{6} \begin{cases} y_1 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ y_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Portanto, teremos para os valores de "*x*":

Fazendo: $y = 1$

$$\sqrt[3]{x} = y \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 1^3 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Fazendo: $y = \frac{2}{3}$

$$\sqrt[3]{x} = y \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{27}$$

Tirando a prova real, teremos:

Para $x = 1$

$$3x^{\frac{2}{3}} + 2 = 5x^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad 3.(1)^{\frac{2}{3}} + 2 = 5.(1)^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad 3.1 + 2 = 5.1 \quad \Rightarrow \quad 3 + 2 = 5$$

$$\Rightarrow \quad 5 = 5 \ \textbf{\textit{(identidade)}}$$

Logo, "1" **é** ***solução*** dessa equação irracional.

Para $x = \frac{8}{27}$

$$3.x^{\frac{2}{3}} + 2 = 5x^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad 3.\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} + 2 = 5.\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad 3.\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{2}{3}} + 2 = 5.\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad 3.\left(\frac{2}{3}\right)^{3\times\frac{2}{3}} + 2 = 5.\left(\frac{2}{3}\right)^{3\times\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad 3.\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 = 5.\left(\frac{2}{3}\right)^1 \quad \Rightarrow \quad 3 \times \frac{4}{9} + 2 = 5 \times \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{3} \times \frac{4}{\cancel{9}_3} + 2 = 5 \times \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} + 2 = 5 \times \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{3} = \frac{10}{3} \quad (\textbf{\textit{identidade}})$$

Portanto, teremos como solução as raízes "1" e "$\frac{8}{27}$".

$$\mathbf{S = \left\{1;\ \frac{8}{27}\right\}}$$

16. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 6$.

Transformando os radicais na forma de potências fracionárias, teremos:

$$\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 6 \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{1}{2}} = 6 + x^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{1}{2}} = 6 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando a mudança de variáveis, ou seja, denotando $x^{\frac{1}{2}} = y$, teremos:

$$\Rightarrow \quad x^{\frac{1}{2}} = 6 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = 6 + (y)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = 6 + \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad y - 6 = \sqrt{y}$$

Elevando-se os ***dois membros*** ao ***quadrado***, teremos para o ***lado direito*** da igualdade a <u>eliminação</u> do ***radical de expoente 2*** e, para o ***lado esquerdo,*** o desenvolvimento do ***produto notável*** do ***quadrado da diferença de dois termos***:

$$\Rightarrow \quad y - 6 = \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(y-6)^2}_{\text{produto notável}} = \left(\sqrt{y}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2.6.y + 6^2 = y$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - 12y - y + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 13y + 36 = 0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** desta equação quadrática:

$y^2 - 13y + 36 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -13 \\ c = 36 \end{cases}$, determinando-se o discriminante de Bhaskara:

$\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-13)^2 - 4.(1).(36) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 169 + 144 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 25$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-(-13) \pm \sqrt{25}}{2.1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} y_1 = \dfrac{13+5}{2} = \dfrac{18}{2} = 9 \\ y_2 = \dfrac{13-5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Portanto, teremos para os valores de "*x*":

Fazendo: $y = 9$

$$x^{\frac{1}{2}} = 9 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 9 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = 9^2 \quad \Rightarrow \quad x = 81$$

Fazendo: $y = 4$

$$x^{\frac{1}{2}} = 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 4 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = 4^2 \quad \Rightarrow \quad x = 16$$

Tirando a prova real, teremos:

Para $x = 81$

$$\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{81} - \sqrt[4]{81} = 6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{9^2} - \sqrt[4]{3^4} = 6 \quad \Rightarrow \quad 9 - 3 = 6$$

$\Rightarrow \quad 6 = 6$ ***(identidade)***

Logo, "81" ***é solução*** dessa equação irracional.

Para $x = 16$

$$\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 6 \Rightarrow \sqrt{16} - \sqrt[4]{16} = 6 \Rightarrow \sqrt{4^2} - \sqrt[4]{2^4} = 6 \Rightarrow 4 - 2 = 6 \Rightarrow 2 \neq 6$$

Logo, "16" ***não é solução***, pois se trata de uma ***raiz estranha*** a essa equação irracional.

S = {81}

17. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $6+\sqrt{3x^2+1}=2x^2$.

$$6+\sqrt{3x^2+1}=2x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3x^2+1}=2x^2-6$$

Elevando-se os ***dois membros*** ao ***quadrado***, teremos para o ***lado esquerdo*** da igualdade a eliminação do ***radical de expoente 2*** e para o ***lado direito*** o desenvolvimento do ***produto notável*** do ***quadrado da diferença de dois termos***:

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3x^2+1}=2x^2-6 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{3x^2+1}\right)^2=\left(2x^2-6\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2+1=\left(2x^2\right)^2-2.\left(2x^2\right).6+6^2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2+1=4x^4-24x^2+36$$

$$\Rightarrow \quad -4x^4+3x^2+24x^2+1-36=0 \quad \Rightarrow \quad -4x^4+27x^2-35=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(-4x^4+27x^2-35=0\right)\times(-1) \quad \Rightarrow \quad 4x^4-27x^2+35=0$$

Por ser uma equação biquadrada, faremos uma mudança de variável denotando que: $x^2 = y$

$$\Rightarrow \quad 4x^4-27x^2+35=0 \quad \Rightarrow \quad 4\left(x^2\right)^2-27x^2+35=0 \quad \Rightarrow \quad 4y^2-27y+35=0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** desta equação quadrática:

$$4y^2-27y+35=0 \begin{cases} a=4 \\ b=-27 \\ c=35 \end{cases}$$, determinando-se o discriminante de Bhaskara:

$\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta=b^2-4.a.c \quad \Rightarrow \quad \Delta=(-27)^2-4.(4).(35) \quad \Rightarrow \quad \Delta=729+560 \quad \Rightarrow \quad \Delta=169$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-(-27)\pm\sqrt{169}}{2.4} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{27\pm13}{8} \begin{cases} y_1=\dfrac{27+13}{8}=\dfrac{40}{8}=5 \\ y_2=\dfrac{27-13}{8}=\dfrac{14}{8}=\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Portanto, teremos para os valores de "*x*":

Fazendo: $y = 5$

$$x^2=5 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{5}$$

Fazendo: $y = \dfrac{7}{4}$

$$x^2=\frac{7}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\frac{7}{4}} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Tirando a prova real, teremos:

Para $x = \sqrt{5}$

$$6+\sqrt{3x^2+1}=2x^2 \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{3\left(\sqrt{5}\right)^2+1}=2\left(\sqrt{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{3.5+1}=2.5$$

$$\Rightarrow \quad 6+\sqrt{16}=10 \quad \Rightarrow \quad 6+4=10 \quad \Rightarrow \quad 10=10 \ \ (\textbf{\textit{identidade}})$$

Logo, "$\sqrt{5}$" ***é solução*** dessa equação irracional.

Para $x = -\sqrt{5}$

$$6+\sqrt{3x^2+1}=2x^2 \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{3\left(-\sqrt{5}\right)^2+1}=2\left(-\sqrt{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{3.5+1}=2.5$$

$$\Rightarrow \quad 6+\sqrt{16}=10 \quad \Rightarrow \quad 6+4=10 \quad \Rightarrow \quad 10=10 \ \ (\textbf{\textit{identidade}})$$

Logo, "$-\sqrt{5}$" ***é solução*** dessa equação irracional.

Para $x = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$$6+\sqrt{3x^2+1}=2x^2 \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{3\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+1}=2\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{3.\frac{7}{4}+1}=\cancel{2}.\frac{7}{\cancel{4}}$$

$$\Rightarrow \quad 6+\sqrt{\frac{21}{4}+1}=\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{\frac{21+4}{4}}=\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 6+\frac{5}{2}=\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{12+5}{2}=\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{17}{2}\neq\frac{7}{2}$$

Logo, "$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$" ***não é solução***, pois se trata de uma ***raiz estranha*** a essa equação irracional.

Para $x = -\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$$6+\sqrt{3x^2+1}=2x^2 \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{3\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+1}=2\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{3.\frac{7}{4}+1}=\cancel{2}.\frac{7}{\cancel{4}}$$

$$\Rightarrow \quad 6+\sqrt{\frac{21}{4}+1}=\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{\frac{21+4}{4}}=\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad 6+\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 6+\frac{5}{2}=\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{12+5}{2}=\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{17}{2}\neq\frac{7}{2}$$

Logo, "$-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$" ***não é solução***, pois se trata de uma ***raiz estranha*** a essa equação irracional.

$$\mathbf{S} = \left\{-\sqrt{\mathbf{5}};\ \sqrt{\mathbf{5}}\right\}$$

18. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x}}=2$.

É aconselhável, inicialmente, ***racionalizar*** o membro esquerdo dessa igualdade, neste caso, devemos multiplicar tanto o denominador quanto o numerador pelo ***termo conjugado*** do denominador, ou seja, pela expressão: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}$.

Lembramos que racionalizar é o processo de transformar uma ***fração irracional*** em outra equivalente com denominador ***racional*** ou, de uma maneira mais simples, um método prático para eliminarmos o ***radical*** que se apresenta no denominador.

$$\frac{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}\right).\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}\right)}{\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x}\right).\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}\right)}=2$$

Podemos observar pela expressão anterior que se verificam ***dois produtos notáveis***, um no ***numerador*** e outro no ***denominador***. Para o ***numerador*** teremos o ***quadrado da soma de dois termos*** e para o ***denominador***, a ***diferença de dois quadrados***, então veja:

$$\frac{\overbrace{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}\right).\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}\right)}^{\text{quadrado da soma de dois termos}}}{\underbrace{\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x}\right).\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}\right)}_{\text{diferença de dois quadrados}}}=2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}\right)^2}{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{3x}\right)^2}=2$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2+2.\sqrt{3x+1}.\sqrt{3x}+\left(\sqrt{3x}\right)^2}{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{3x}\right)^2}=2 \Rightarrow \frac{3x+1+2.\sqrt{(3x+1)(3x)}+3x}{3x+1-3x}=2$$

$$\Rightarrow \frac{6x+1+2.\sqrt{(3x+1)(3x)}}{1}=2 \quad\Rightarrow\quad 2.\sqrt{(3x+1)(3x)}=2-1-6x$$

$$\Rightarrow \quad 2.\sqrt{(3x+1)(3x)}=1-6x$$

A elevarm*os os* **dois membros** *ao* **quadrado**, *eliminaremos o* **radical** *que se encontra no membro* **esquerdo** dessa igualdade e, no membro ***direito***, desenvolveremos o ***produto notável*** do ***quadrado da diferença entre dois termos***:

$$\Rightarrow \quad \left(2.\sqrt{(3x+1)(3x)}\right)^2=(1-6x)^2 \quad\Rightarrow\quad 4\left((3x+1)(3x)\right)=1^2-2.1.6x+(6x)^2$$

$$\Rightarrow \quad 4\left(9x^2+3x\right)=1-12x+36x^2 \quad\Rightarrow\quad 36x^2+12x=1-12x+36x^2$$

$$\Rightarrow \quad 12x+12x=1 \quad\Rightarrow\quad 24x=1 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{24}$$

Tirando a prova real, teremos:

$$\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x}}=2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{3.\left(\frac{1}{24}\right)+1}+\sqrt{3.\left(\frac{1}{24}\right)}}{\sqrt{3.\left(\frac{1}{24}\right)+1}-\sqrt{3.\left(\frac{1}{24}\right)}}=2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{\frac{1}{8}+1}+\sqrt{\frac{1}{8}}}{\sqrt{\frac{1}{8}+1}-\sqrt{\frac{1}{8}}}=2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{1+8}{8}}+\sqrt{\frac{1}{8}}}{\sqrt{\frac{1+8}{8}}-\sqrt{\frac{1}{8}}}=2 \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{9}{8}}+\sqrt{\frac{1}{8}}}{\sqrt{\frac{9}{8}}-\sqrt{\frac{1}{8}}}=2 \quad \Rightarrow \frac{3\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{1}{8}}}{3\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{1}{8}}}=2$$

$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{\frac{1}{8}}}{2\sqrt{\frac{1}{8}}}=2 \quad \Rightarrow \quad 2=2 \ \ (\textbf{\textit{identidade}})$$

Logo, "$\frac{1}{24}$" ***é solução*** desta equação irracional.

$$\mathbf{S}=\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}}\right\}$$

19. Determine o conjunto solução em R, da equação irracional $\sqrt{\frac{5x+2}{x-2}}+\sqrt{\frac{x-2}{5x+2}}=\frac{10}{3}$.

$$\sqrt{\frac{5x+2}{x-2}}+\sqrt{\frac{x-2}{5x+2}}=\frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{5x+2}}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5x+2}}=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(\sqrt{5x+2}\right).\left(\sqrt{5x+2}\right)+\left(\sqrt{x-2}\right).\left(\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}\right).\left(\sqrt{5x+2}\right)}=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(\sqrt{5x+2}\right)^2+\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{\sqrt{(x-2).(5x+2)}}=\frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{5x+2+x-2}{\sqrt{(x-2).(5x+2)}}=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6x}{\sqrt{(x-2).(5x+2)}}=\frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{\sqrt{(x-2).(5x+2)}}=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 5.\sqrt{(x-2).(5x+2)}=9x$$

Elevando-se os dois membros ao quadrado, teremos:

$$\Rightarrow \quad \left(5.\sqrt{(x-2).(5x+2)}\right)^2=(9x)^2 \quad \Rightarrow \quad 25.(x-2).(5x+2)=81x^2$$

$$\Rightarrow \quad (25x-50).(5x+2)=81x^2 \quad \Rightarrow \quad 125x^2+50x-250x-100=81x^2$$

$$\Rightarrow \quad 125x^2-81x^2+50x-250x-100=0 \quad \Rightarrow \quad 44x^2-200x-100=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(44x^2-200x-100=0\right)\div(4) \quad \Rightarrow \quad 11x^2-50x-25=0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** dessa equação quadrática:

$11x^2-50x-25=0\begin{cases}a=11\\ b=-50\\ c=-25\end{cases}$, determinando-se o discriminante de Bhaskara:

$\Delta = b^2-4.a.c.$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = (-50)^2 - 4.(11).(-25) \Rightarrow \Delta = 2500 + 1100 \Rightarrow \Delta = 3600$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow x = \frac{-(-50) \pm \sqrt{3600}}{2.11}$$

$$\Rightarrow x = \frac{50 \pm 60}{22} \begin{cases} x_1 = \dfrac{50+60}{22} = \dfrac{110}{22} = 5 \\ x_2 = \dfrac{50-60}{22} = -\dfrac{10}{22} = -\dfrac{5}{11} \end{cases}$$

Verificando a prova real:

Para $x = 5$

$$\sqrt{\frac{5x+2}{x-2}} + \sqrt{\frac{x-2}{5x+2}} = \frac{10}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{5.5+2}{5-2}} + \sqrt{\frac{5-2}{5.5+2}} = \frac{10}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{27}{3}} + \sqrt{\frac{3}{27}} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{10}{3} = \frac{10}{3} \quad \textbf{(\textit{identidade})}$$

Logo, "5" ***é solução*** dessa equação irracional.

Para $x = -\dfrac{5}{11}$

$$\sqrt{\frac{5x+2}{x-2}} + \sqrt{\frac{x-2}{5x+2}} = \frac{10}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{5.\left(-\frac{5}{11}\right)+2}{-\frac{5}{11}-2}} + \sqrt{\frac{-\frac{5}{11}-2}{5.\left(-\frac{5}{11}\right)+2}} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{-\frac{25}{11}+2}{-\frac{5}{11}-2}} + \sqrt{\frac{-\frac{5}{11}-2}{-\frac{25}{11}+2}} = \frac{10}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{\frac{-25+22}{11}}{\frac{-5-22}{11}}} + \sqrt{\frac{\frac{-5-22}{11}}{\frac{-25+22}{11}}} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{-\frac{3}{11}}{\frac{-27}{11}}} + \sqrt{\frac{\frac{-27}{11}}{-\frac{3}{11}}} = \frac{10}{3} \Rightarrow \sqrt{\left(-\frac{3}{11}\right).\left(-\frac{11}{27}\right)} + \sqrt{\left(-\frac{27}{11}\right).\left(-\frac{11}{3}\right)} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{9} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{1+9}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{10}{3} = \frac{10}{3} \quad \textbf{(\textit{identidade})}$$

Logo, "$-\dfrac{5}{11}$" ***é solução*** dessa equação irracional.

$$\mathbf{S = \left\{-\frac{5}{11}; 5\right\}}$$

20. Determine o conjunto solução em R da equação irracional $33 + \sqrt{5x^2 - 2x - 3} = 5x^2 - 2x$.

Vamos aplicar, nesse caso, uma mudança de variável, denotando que: $5x^2 - 2x = y$. Assim, teremos:

$$33+\sqrt{\underbrace{5x^2-2x}_{y}-3}=\underbrace{5x^2-2x}_{y} \quad\Rightarrow\quad 33+\sqrt{y-3}=y \quad\Rightarrow\quad \sqrt{y-3}=y-33$$

Ao elevar os ***dois membros*** ao ***quadrado***, verificaremos a eliminação do radical no membro (lado) ***esquerdo*** da igualdade e o desenvolvimento do ***produto notável*** (***quadrado da diferença de dois termos***), no membro (lado) ***direito*** dessa igualdade.

$$\Rightarrow\sqrt{y-3}=y-33\Rightarrow\left(\sqrt{y-3}\right)^2=\left(y-33\right)^2\Rightarrow y-3=y^2-2.y.33+33^3$$

$$\Rightarrow y-3=y^2-66y+1089\Rightarrow -y^2+66y+y-3-1089=0$$

$$\Rightarrow -y^2+67y-1092=0\Rightarrow\left(-y^2+67y-1092=0\right)\times\left(-1\right)\Rightarrow y^2-67y+1092=0$$

Utilizando-se da ***fórmula*** resolvente de ***Bhaskara***, determinaremos os possíveis valores de "*x*" que satisfazem essa equação do 2º grau ou, simplesmente, as ***raízes*** dessa equação quadrática:

$$y^2-67y+1092=0\begin{cases}a=1\\b=-67\\c=1092\end{cases}$$, determinando-se o discriminante de Bhaskara:

$\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta=b^2-4.a.c \quad\Rightarrow\quad \Delta=(-67)^2-4.(1).(1092) \quad\Rightarrow\quad \Delta=4489-4368 \quad\Rightarrow\quad \Delta=121$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}\Rightarrow y=\frac{-(-67)\pm\sqrt{121}}{2.1}\Rightarrow y=\frac{67\pm 11}{2}\begin{cases}y_1=\dfrac{67+11}{2}=\dfrac{78}{2}=39\\[2ex]y_2=\dfrac{67-11}{2}=\dfrac{56}{2}=28\end{cases}$$

Portanto, teremos para os valores de "*x*":

Fazendo: $y = 3$

$$5x^2-2x=y \quad\Rightarrow\quad 5x^2-2x=39 \quad\Rightarrow\quad 5x^2-2x-39=0$$

$$5x^2-2x-3=0\begin{cases}a=5\\b=-2\\c=-39\end{cases}$$, determinando-se o discriminante de Bhaskara:

$\Delta = b^2 - 4.a.c.$

$$\Delta=b^2-4.a.c \quad\Rightarrow\quad \Delta=(-2)^2-4.(5).(-39) \quad\Rightarrow\quad \Delta=4+780 \quad\Rightarrow\quad \Delta=784$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}\Rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{784}}{2.5}\Rightarrow x=\frac{2\pm 28}{10}\begin{cases}x_1=\dfrac{2+28}{10}=\dfrac{30}{10}=3\\[2ex]x_2=\dfrac{2-28}{10}=\dfrac{-26}{10}=\dfrac{-13}{5}\end{cases}$$

Fazendo: $y = 28$

$$5x^2-2x=y \quad\Rightarrow\quad 5x^2-2x=28 \quad\Rightarrow\quad 5x^2-2x-28=0$$

$$5x^2-2x-28=0\begin{cases}a=5\\b=-2\\c=-28\end{cases}$$, determinando-se o discriminante de Bhaskara: $\Delta = b^2$

$- 4.a.c.$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-2)^2 - 4.(5).(-28) \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4 + 560 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 564$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{564}}{2.5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{564}}{10} \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+\sqrt{564}}{10} \\ x_2 = \dfrac{2-\sqrt{564}}{10} \end{cases}$$

Faremos os devidos testes (prova real) apenas dos valores inteiros atribuídos a "*x*"

Para $x = 3$.

$$33 + \sqrt{5x^2 - 2x - 3} = 5x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad 33 + \sqrt{5.(3)^2 - 2.(3) - 3} = 5.(3)^2 - 2.(3)$$

$$\Rightarrow \quad 33 + \sqrt{5.9 - 6 - 3} = 5.9 - 6 \quad \Rightarrow \quad 33 + \sqrt{36} = 36 \quad \Rightarrow \quad 33 + 6 = 36$$

$\Rightarrow \quad 36 = 36$ ***(identidade)***

Logo, "3" ***é solução*** dessa equação irracional.

Para $x = \dfrac{-13}{5}$.

$$33 + \sqrt{5\left(\frac{-13}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{-13}{5}\right) - 3} = 5\left(\frac{-13}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{-13}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 33 + \sqrt{\frac{169}{5} + \frac{26}{5} - 3} = \frac{169}{5} + \frac{26}{5} \quad \Rightarrow \quad 33 + \sqrt{\frac{195}{5} - 3} = \frac{195}{5}$$

$$\Rightarrow \quad 33 + \sqrt{39 - 3} = 39 \quad \Rightarrow \quad 33 + \sqrt{36} = 39 \quad \Rightarrow \quad 33 + 6 = 39$$

$39 = 39$ **(*identidade*)**

Logo, "$\dfrac{-13}{5}$" ***é solução*** dessa equação irracional.

$$\mathbf{S = \left\{-\frac{13}{5};\ 3\right\}}$$

Capítulo 15

Equações Biquadradas

Denomina-se ***equação biquadrada*** a toda ***equação do 4º grau incompleta*** que tem somente as *potências pares* da incógnita, quando reduzida à forma normal, ou seja, dada por:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (1)$$

Para sua resolução, tem-se que toda ***equação biquadrada*** é sempre redutível a outra do 2º grau. Basta que se faça $x^2 = y$ e, consequentemente, $x^4 = y^2$ na relação (1) para obter-se:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad ay^2 + by + c = 0 \ (2)$$

A equação do 2º grau (2) denomina-se ***resolvente*** ou ***reduzida***. Resolvendo-a, teremos:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{(fórmula resolutiva de Bhaskara)}$$

Por outro lado, como havíamos inicialmente feito, "$x^2 = y$", então, podemos reescrever a relação anterior de Bhaskara, da seguinte forma:

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Extraindo-se a raiz quadrada de ambos os membros, teremos:

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Variando de todos os modos possíveis os ***duplos sinais***, obtêm-se **quatro** valores para "*x*" que definem as **quatro *raízes*** da ***equação biquadrada***:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_2 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

15.1. Discussão das raízes

Devemos observar que entre a ***equação resolvente*** e a ***biquadrada*** ocorrem as seguintes relações:

I) cada ***raiz positiva*** de ***resolvente*** corresponde a ***duas raízes simétricas*** para a ***biquadrada;***

II) de uma ***raiz negativa*** da ***resolvente*** não é possível calcular ***raízes reais*** para a ***biquadrada;***

III) os ***coeficientes*** "*a*", "*b*" e "*c*" da ***equação resolvente*** são os mesmos da ***biquadrada***.

$$\underbrace{x = \pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}}_{\text{equação resolvente}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{ax^4+bx^2+c=0}_{\text{equação biquadrada}}$$

Assim sendo, todas as hipóteses feitas sobre os ***coeficientes*** de uma recai nos ***coeficientes*** da outra. Portanto, como "*a*" é ***positivo*** (se não for, multiplica-se toda a equação por -1), podemos dividir esta discussão em **três *casos***, conforme seja ***positivo***, ***negativo*** ou ***nulo*** o valor do ***discriminante*** (Δ) da ***resolvente***.

1º caso: ***Discriminante positivo*** ($\Delta > 0$).

Quando $\Delta > 0$, a resolvente tem duas raízes reais, e as raízes da biquadrada dependerão do sinal do coeficiente "*c*", da seguinte forma:

- Para "$c < 0$" as ***duas raízes*** da resolvente terão ***sinais contrários***, uma ***raiz positiva*** e outra ***negativa***. Desta última, a ***negativa***, não se pode calcular ***nenhuma raiz real*** para a ***biquadrada,*** e da ***positiva*** corresponderão ***duas raízes reais*** e ***simétricas***.
- Para "$c > 0$" as ***duas raízes*** da ***resolvente*** terão ***sinais iguais***. Terão ***raízes positivas*** quando o valor do ***coeficiente*** "*b*" for ***negativo*** ($b < 0$) e, para o valor do coeficiente "*b*" ***positivo*** ($b > 0$), as duas ***raízes*** serão ***negativas***. No primeiro caso, a ***biquadrada*** admitirá ***duas raízes reais*** e ***simétricas*** e no segundo caso, ***não terão raízes reais***.

2º caso: ***Discriminante nulo*** ($\Delta = 0$).

Quando ($\Delta = 0$) a ***resolvente*** terá uma ***raiz dupla*** com ***sinal contrário*** ao do ***coeficiente*** "*b*". Para $b < 0$ a ***raiz*** é ***positiva*** e, para $b > 0$, a ***raiz*** é ***negativa***. No primeiro caso a ***biquadrada*** admitirá ***duas raízes reais*** e ***simétricas*** e, no segundo, ***não terá raiz real***.

3º caso: ***Discriminante negativo*** ($\Delta < 0$).

Neste caso, a ***resolvente não possuirá raízes reais***. Consequentemente, a ***biquadrada*** também ***não***.

Verifique a ***natureza*** das ***raízes*** das seguintes ***equações biquadradas***:

Exemplo (1):

$$36x^4 - 13x^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 36;\ b = -13 \ \text{ e } \ c = 1 \\ \Delta = (-13)^2 - 4.36.1 = 169 - 144 = 25 \end{cases}, \text{portanto: } \Delta > 0;\ b < 0 \text{ e } c < 0$$

Logo, a equação terá **quatro** ***raízes reais***, ***simétricas*** duas a duas.

Exemplo (2):

$$5x^4 + 7x^2 + 2 = 0 \begin{cases} a = 5;\ b = 7 \ \text{ e } \ c = 2 \\ \Delta = 7^2 - 4.5.2 = 49 - 40 = 9 \end{cases}, \text{ portanto: } \Delta > 0;\ b > 0 \text{ e } c > 0$$

Logo, a equação ***não admite raízes reais.***

Exemplo (3):

$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 9;\ b = -6 \ \text{ e } \ c = 1 \\ \Delta = (-6)^2 - 4.9.1 = 36 - 36 = 0 \end{cases}, \text{ portanto: } \Delta = 0;\ b < 0$$

Logo, a equação admite, apenas, **duas** ***raízes reais*** e ***simétricas.***

Exemplo (4):

$$4x^4 + 4x^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 4;\ b = 4 \ \text{ e } \ c = 1 \\ \Delta = 4^2 - 4.4.1 = 16 - 16 = 0 \end{cases}, \text{ portanto: } \Delta = 0;\ b > 0$$

Logo, a equação ***não admite raízes reais.***

Quadro resumo: Toda a discussão pode ser resumida no seguinte quadro:

$$\Delta > 0 \begin{cases} c > 0 & \begin{cases} b > 0: \text{nenhuma raiz real} \\ b < 0: \text{quatro raízes reais} \end{cases} \\ c < 0 & \{ \text{duas raízes reais} \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \begin{cases} b < 0 & \{ \text{duas raízes reais} \\ b > 0 & \{ \text{nenhuma raiz real} \end{cases}$$

$$\Delta < 0 \ \{ \ \text{nenhuma raiz real}$$

Exercícios resolvidos

1. Determine as raízes da equação biquadrada $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$, sendo *U = R*.

1º método de resolução: método da mudança de variável.

Resolução:

Inicialmente, consideraremos que: $x^2 = y$. Substituindo-se na equação biquadrada anterior, tem-se:

$$(x^2)^2 - 20x^2 + 64 = 0 \ \Rightarrow \ (y)^2 - 20y + 64 = 0 \ \Rightarrow \ y^2 - 20y + 64 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -20 \\ c = 64 \end{cases}$$

Utilizando-se a fórmula resolutiva de Bhaskara: $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow y=\frac{-(-20)\pm\sqrt{(-20)^2-4.1.64}}{2.1}\Rightarrow y=\frac{20\pm\sqrt{400-256}}{2}$$

$$y=\frac{20\pm\sqrt{144}}{2}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{20\pm 12}{2}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}y_1=\dfrac{20+12}{2}=\dfrac{32}{2}=16\\[2mm] y_2=\dfrac{20-12}{2}=\dfrac{8}{2}=4\end{cases}$$

Quando $y = 16$, teremos os seguintes valores para "x":

$x^2=y \quad\Rightarrow\quad x^2=16 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{16} \quad\Rightarrow\quad x=\pm 4$ ou $x_1 = -4$ e $x_2 = 4$.

Quando $y = 4$, teremos os seguintes valores para "x":

$x^2=y \quad\Rightarrow\quad x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{4} \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$ ou $x_3 = -2$ e $x_4 = 2$.

Assim, teremos para o ***conjunto solução*** ou ***conjunto verdade*** dessa ***equação biquadrada***, definida no conjunto dos ***números reais*** (***R***), a quadra ordenada dada por:

S = V = {–4; –2; 2; 4}

2º método de resolução: Fórmula Resolutiva

Resolução:

Dada a equação $y^2 - 20y + 64 = 0$ $\begin{cases}a=1\\ b=-20\\ c=64\end{cases}$

E utilizando-se a fórmula resolutiva $x=\pm\sqrt{\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$, teremos para os devidos valores de "x":

Para o valor de x_1, teremos:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\Rightarrow x_1=+\sqrt{\frac{-(-20)+\sqrt{(-20)^2-4.1.64}}{2.1}}$$

$$\Rightarrow\ x_1=+\sqrt{\frac{20+\sqrt{400-256}}{2}}\Rightarrow x_1=+\sqrt{\frac{20+\sqrt{144}}{2}}\Rightarrow x_1=+\sqrt{\frac{20+12}{2}}$$

$$\Rightarrow\ x_1=+\sqrt{\frac{32}{2}}\Rightarrow x_1=+\sqrt{16}\Rightarrow x_1=+4$$

Para o valor de x_2, teremos:

$$x_2=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\Rightarrow x_2=+\sqrt{\frac{-(-20)-\sqrt{(-20)^2-4.1.64}}{2.1}}$$

$$\Rightarrow\ x_2=+\sqrt{\frac{20-\sqrt{400-256}}{2}}\Rightarrow x_2=+\sqrt{\frac{20-\sqrt{144}}{2}}\Rightarrow x_2=+\sqrt{\frac{20-12}{2}}$$

$$\Rightarrow\ x_2=+\sqrt{\frac{8}{2}}\Rightarrow x_2=+\sqrt{4}\Rightarrow x_2=+2$$

Para o valor de x_3, teremos:

$$x_3 = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{-(-20)+\sqrt{(-20)^2-4.1.64}}{2.1}}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{20+\sqrt{400-256}}{2}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{20+\sqrt{144}}{2}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{20+12}{2}}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{32}{2}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{16} \Rightarrow x_3 = -4$$

Para o valor de x_4, teremos:

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{-(-20)-\sqrt{(-20)^2-4.1.64}}{2.1}}$$

$$\Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{20-\sqrt{400-256}}{2}} \Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{20-\sqrt{144}}{2}} \Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{20-12}{2}}$$

$$\Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{8}{2}} \Rightarrow x_4 = -\sqrt{4} \Rightarrow x_4 = -2$$

Como já mostrado anteriormente, o ***conjunto solução*** ou o ***conjunto verdade*** será representado por:

***S* = V = {–4; –2; 2; 4}**

2. Determine as *raízes reais* da equação biquadrada $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Resolução:

Tomando-se a equação do enunciado: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, tem-se que: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -13 \\ c = 36 \end{cases}$

E utilizando-se a fórmula resolutiva $x = \pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$, teremos para os devidos valores de "*x*":

Para o valor de x_1, teremos:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{-(-13)+\sqrt{(-13)^2-4.1.36}}{2.1}}$$

$$\Rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{13+\sqrt{169-144}}{2}} \Rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{13+\sqrt{25}}{2}} \Rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{13+5}{2}}$$

$$\Rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{18}{2}} \Rightarrow x_1 = +\sqrt{9} \Rightarrow x_1 = +3$$

Para o valor de x_2, teremos:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{-(-13)-\sqrt{(-13)^2-4.1.36}}{2.1}}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = +\sqrt{\frac{13-\sqrt{169-144}}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = +\sqrt{\frac{13-\sqrt{25}}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = +\sqrt{\frac{13-5}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = +\sqrt{\frac{8}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = +\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x_2 = +2$$

Para o valor de x_3, teremos:

$$x_3 = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\sqrt{\frac{-(-13)+\sqrt{(-13)^2-4.1.36}}{2.1}}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = -\sqrt{\frac{13+\sqrt{169-144}}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\sqrt{\frac{13+\sqrt{25}}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\sqrt{\frac{13+5}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = -\sqrt{\frac{18}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad x_3 = -3$$

Para o valor de x_4, teremos:

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad \Rightarrow \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-(-13)-\sqrt{(-13)^2-4.1.36}}{2.1}}$$

$$\Rightarrow \quad x_4 = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{169-144}}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_4 = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{25}}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_4 = -\sqrt{\frac{13-5}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x_4 = -\sqrt{\frac{8}{2}} \quad \Rightarrow \quad x_4 = -\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x_4 = -2$$

Como já mostrado anteriormente, o ***conjunto solução*** ou o ***conjunto verdade*** será representado por:

S **= V = {–3; –2; 2; 3}**

3. Determine as *raízes reais* da equação biquadrada $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$.

Resolução:

Inicialmente, consideraremos que: $x^2 = y$. Substituindo-se na equação biquadrada anterior, tem-se:

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y)^2 - 8y + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 8y + 7 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 7 \end{cases}$$

Utilizando-se a fórmula resolutiva de Bhaskara: $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2-4.1.7}}{2.1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2}$$

$$y=\frac{8\pm\sqrt{36}}{2} \Rightarrow y=\frac{8\pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1=\frac{8+6}{2}=\frac{14}{2}=7 \\ y_2=\frac{8-6}{2}=\frac{2}{2}=1 \end{cases}$$

Quando $y = 7$, teremos os seguintes valores para "x":

$x^2=y \Rightarrow x^2=7 \Rightarrow x=\pm\sqrt{7} \Rightarrow x=\pm\sqrt{7}$ ou $x_1=-\sqrt{7}$ e $x_2=\sqrt{7}$.

Quando $y = 1$, teremos os seguintes valores para "x":

$x^2=y \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1} \Rightarrow x=\pm 1$ ou $x_3 = -1$ e $x_4 = 1$.

Assim, teremos para o ***conjunto solução*** ou ***conjunto verdade*** dessa ***equação biquadrada***, definida no conjunto dos ***números reais*** (***R***), a quadra ordenada dada por:

S = V = {$-\sqrt{7}$; –1; 1; $\sqrt{7}$ }

4. Determine as *raízes reais* da equação biquadrada $x^4-\frac{x^2+1}{3}=\frac{x^2-5}{4}+\frac{4}{3}$.

Resolução:

Desenvolvendo a equação $x^4-\frac{x^2+1}{3}=\frac{x^2-5}{4}+\frac{4}{3}$, iniciaremos por determinar o ***mínimo múltiplo comum*** entre os valores de seus denominadores.

mmc(3 ; 4) = 12

Multiplicando-se cada termo da igualdade por 12, teremos:

$$\left(x^4-\frac{x^2+1}{3}=\frac{x^2-5}{4}+\frac{4}{3}\right)\times 12 \Rightarrow 12x^4-\frac{12(x^2+1)}{3}=\frac{12(x^2-5)}{4}+\frac{12.4}{3}$$

$$\Rightarrow 12x^4-4(x^2+1)=3(x^2-5)+4.4 \Rightarrow 12x^4-4x^2-4=3x^2-15+16$$

$$\Rightarrow 12x^4-4x^2-3x^2-4+15-16=0 \Rightarrow 12x^4-7x^2-5=0$$

Tomando-se a equação do enunciado: $12x^4-7x^2-5=0$, tem-se que: $\begin{cases} a=12 \\ b=-7 \\ c=-5 \end{cases}$

E, utilizando-se a fórmula resolutiva $x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$, teremos para os devidos valores de "x":

Para o valor de x_1:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow x_1=+\sqrt{\frac{-(-7)+\sqrt{(-7)^2-4.12.(-5)}}{2.12}}$$

$$\Rightarrow x_1=+\sqrt{\frac{7+\sqrt{49+240}}{24}} \Rightarrow x_1=+\sqrt{\frac{7+\sqrt{289}}{24}} \Rightarrow x_1=+\sqrt{\frac{7+17}{24}}$$

$$\Rightarrow x_1=+\sqrt{\frac{24}{24}} \Rightarrow x_1=+\sqrt{1} \Rightarrow x_1=+1$$

Para o valor de x_2:

$$x_2 = +\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow x_2 = +\sqrt{\frac{-(-7)-\sqrt{(-7)^2-4.12.(-5)}}{2.12}}$$

$$\Rightarrow x_2 = +\sqrt{\frac{7-\sqrt{49+240}}{24}} \Rightarrow x_2 = +\sqrt{\frac{7-\sqrt{289}}{24}} \Rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{7-17}{24}}$$

$$\Rightarrow x_1 = +\sqrt{\frac{-10}{24}} \Rightarrow \nexists \text{ x para o conjunto dos R}$$

Para o valor de x_3:

$$x_3 = -\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{-(-7)+\sqrt{(-7)^2-4.12.(-5)}}{2.12}}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{7+\sqrt{49+240}}{24}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{7+\sqrt{289}}{24}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{7+17}{24}}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{24}{24}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{1} \Rightarrow x_3 = -1$$

Para o valor de x_4:

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{-(-7)-\sqrt{(-7)^2-4.12.(-5)}}{2.12}}$$

$$\Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{49+240}}{24}} \Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{13-\sqrt{289}}{24}} \Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{13-17}{24}}$$

$$\Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{-4}{24}} \Rightarrow \nexists \text{ x para o conjunto dos R}$$

Como já mostrado anteriormente, o ***conjunto solução*** ou o ***conjunto verdade*** será representado por:

S **= V = {–1; 1}**

5. Determine as raízes da equação biquadrada $25x^4 + 10x^2 + 1 = 0$, sendo *U = R*.

Resolução:

Inicialmente, consideraremos que: $x^2 = y$. Substituindo-se na equação biquadrada anterior, tem-se:

$$25(x^2)^2 + 10x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 25(y)^2 + 10y + 1 = 0 \Rightarrow 25x^2 + 10x + 1 = 0 \begin{cases} a = 25 \\ b = 10 \\ c = 1 \end{cases}$$

Utilizando-se a fórmula resolutiva de Bhaskara: $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-(10) \pm \sqrt{(10)^2-4.25.1}}{2.25} \Rightarrow y = \frac{-10 \pm \sqrt{100-100}}{50}$$

$$y = \frac{-10 \pm 0}{50} \Rightarrow y = \frac{-10}{50} \Rightarrow y = -\frac{1}{5}$$

Fazendo $y = -5$, teremos os seguintes valores para "x"

$$x^2 = y \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-1}{5}} \Rightarrow \nexists\, x \text{ para o conjunto dos R}$$

$\boldsymbol{S} = \mathbf{V} = \varnothing$

6. Determine as raízes da equação biquadrada $2x^4 + 14x^2 + 20 = 0$, sendo $\boldsymbol{U = R}$.

Resolução:

Inicialmente, consideraremos que: $x^2 = y$. Substituindo-se na equação biquadrada anterior, tem-se:

$$2(x^2)^2 + 14x^2 + 20 = 0 \Rightarrow 2(y)^2 + 14y + 20 = 0 \Rightarrow 2y^2 + 14y + 20 = 0 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 14 \\ c = 20 \end{cases}$$

Utilizando-se a fórmula resolutiva de Bhaskara: $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b\ \ - 4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-(14) \pm \sqrt{(14)\ \ - 4.2.20}}{2.2} \Rightarrow y = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 160}}{4}$$

$$y = \frac{-14 \pm \sqrt{36}}{4} \Rightarrow y = \frac{-14 \pm 6}{4} \begin{cases} y_1 = \dfrac{-14 + 6}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2 \\ y_2 = \dfrac{-14 - 6}{4} = \dfrac{-20}{4} = -5 \end{cases}$$

Fazendo $y = -2$, teremos os seguintes valores para "x":

$$x^2 = y \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \Rightarrow \nexists\, x \text{ para o conjunto dos R}$$

Fazendo $y = -5$, teremos os seguintes valores para "x":

$$x^2 = y \Rightarrow x^2 = -5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-5} \Rightarrow \nexists\, x \text{ para o conjunto dos R}$$

$\boldsymbol{S} = \mathbf{V} = \varnothing$

7. Determine as raízes da equação biquadrada $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$, sendo $\boldsymbol{U = R}$.

Resolução:

Inicialmente, consideraremos que: $x^2 = y$. Substituindo-se na equação biquadrada anterior, tem-se:

$$(x^2)^2 - 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow (y)^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -8 \end{cases}$$

Utilizando-se a fórmula resolutiva de Bhaskara: $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-8)}}{2.1} \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2 \pm 6}{2} \begin{cases} y_1 = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ y_2 = \dfrac{2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Fazendo $y = 4$, teremos os seguintes valores para "x":

$$x^2 = y \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \text{ e } x_2 = -2$$

Fazendo $y = -2$, teremos os seguintes valores para "x":

$$x^2 = y \quad \Rightarrow \quad x^2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-2} \quad \Rightarrow \quad \nexists\, x \text{ para o conjunto dos R}$$

***S* = V = {–2; 2}**

8. Determine as raízes da equação biquadrada $3 - \frac{26}{x^2} - \frac{9}{x^4} = 0$, sendo *U = R*.

Resolução:

Inicialmente, desenvolveremos a equação biquadrada na forma $3 - \dfrac{26}{x^2} - \dfrac{9}{x^4} = 0$:

Multiplicando-se todos os termos da igualdade anterior por "x^4", teremos:

$$\left(3 - \frac{26}{x^2} - \frac{9}{x^4} = 0\right) \times x^4 \quad \Rightarrow \quad 3x^4 - \frac{26x^4}{x^2} - \frac{9x^4}{x^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^4 - 26x^2 - 9 = 0$$

A seguir, consideraremos que: $x^2 = y$. Substituindo-se na equação biquadrada anterior, tem-se:

$$3(x^2)^2 - 26x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(y)^2 - 26y - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y^2 - 26y - 9 = 0 \begin{cases} a = 3 \\ b = -26 \\ c = -9 \end{cases}$$

Utilizando-se a fórmula resolutiva de Bhaskara: $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4.3.(-9)}}{2.3} \Rightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{676 + 108}}{6}$$

$$y = \frac{26 \pm \sqrt{784}}{6} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{26 \pm 28}{6} \begin{cases} y_1 = \dfrac{26+28}{6} = \dfrac{54}{6} = 9 \\ y_2 = \dfrac{26-28}{6} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Fazendo $y = 9$, teremos os seguintes valores para "x":

$$x^2 = y \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -3$$

Fazendo $y = -\dfrac{1}{3}$, "x" tem os seguintes valores:

$$x^2 = y \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \nexists\, x \text{ para o conjunto dos R}$$

***S* = V = {–3; 3}**

9. Determine as raízes da equação biquadrada $1-\frac{26}{x^2}=-\frac{25}{x^4}$, sendo *U = R*.

Resolução:

Inicialmente, desenvolveremos a equação biquadrada na forma $1-\frac{26}{x^2}=-\frac{25}{x^4}$:

Multiplicando-se todos os termos da igualdade anterior por "x^4":

$$\left(1-\frac{26}{x^2}=-\frac{25}{x^4}\right)\times x^4 \quad\Rightarrow\quad x^4-\frac{26x^4}{x^2}=-\frac{25x^4}{x^4}=0 \quad\Rightarrow\quad x^4-26x^2+25=0$$

A seguir, consideraremos que: $x^2 = y$. Substituindo-se na equação biquadrada anterior, tem-se:

$$(x^2)^2-26x^2+25=0 \quad\Rightarrow\quad (y)^2-26y+25=0 \quad\Rightarrow\quad y^2-26y+25=0 \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-26 \\ c=25 \end{cases}$$

Utilizando-se a fórmula resolutiva de Bhaskara: $y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow y=\frac{-(-26)\pm\sqrt{(-26)^2-4.1.25}}{2.1} \Rightarrow y=\frac{26\pm\sqrt{676-100}}{2}$$

$$y=\frac{26\pm\sqrt{576}}{2} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{26\pm 24}{2} \quad \begin{cases} y_1=\frac{26+24}{2}=\frac{50}{2}=25 \\ y_2=\frac{26-24}{2}=\frac{2}{2}=1 \end{cases}$$

Fazendo $y = 25$, teremos os seguintes valores para "x":

$$x^2=y \quad\Rightarrow\quad x^2=25 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{25} \quad\Rightarrow\quad x=\pm 5 \quad\Rightarrow\quad x_1=5 \text{ e } x_2=-5$$

Fazendo $y = 1$, "x" tem os valores:

$$x^2=y \quad\Rightarrow\quad x^2=1 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1} \quad\Rightarrow\quad x=\pm 1 \quad\Rightarrow\quad x_1=1 \text{ e } x_2=-1$$

***S* = V = {–5; –1; 1; 5}**

10. Determine as raízes da equação biquadrada $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$, sendo *U = R*.

Resolução:

Inicialmente, consideraremos que: $x^2 = y$. Substituindo-se na equação biquadrada anterior, tem-se:

$$4(x^2)^2-37x^2+9=0 \quad\Rightarrow\quad 4(y)^2-37y+9=0 \quad\Rightarrow\quad 4y^2-37y+9=0 \quad \begin{cases} a=4 \\ b=-37 \\ c=9 \end{cases}$$

Utilizando-se a fórmula resolutiva de Bhaskara: $y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow y=\frac{-(-37)\pm\sqrt{(-37)^2-4.4.9}}{2.4} \Rightarrow y=\frac{37\pm\sqrt{1369-144}}{8}$$

$$y=\frac{37\pm\sqrt{1225}}{8} \Rightarrow y=\frac{37\pm 35}{8}\begin{cases} y_1=\dfrac{37+35}{8}=\dfrac{72}{8}=9 \\ y_2=\dfrac{37-35}{8}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Fazendo $y = 9$, "x" apresenta os seguintes valores:

$$x^2 = y \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9} \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -3$$

Fazendo $y = 1$, teremos os seguintes valores para "x":

$$x^2 = y \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2} \text{ e } x_2=-\frac{1}{2}$$

***S* = V = {–3; –1/2; 1/2; 3}**

Capítulo 16

Radicais Duplos

Este capítulo trata da transformação das expressões da forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$.

Lembramos, inicialmente, que as raízes da ***equação biquadrada*** obtêm-se por intermédio de relações da forma:

$$x = \pm\sqrt{A \pm \sqrt{B}} \text{ ....(1)}$$

Obs.: Se B ***não*** é um ***quadrado perfeito***, essa expressão constitui um ***radical duplo*** e pode, em certos casos, ser transformada numa ***soma*** ou ***diferença*** de dois ***radicais simples***, ou seja, da seguinte forma:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \text{ ....(2)}$$

Elevando-se os dois termos ao quadrado, teremos:

$$\underbrace{\left(\sqrt{A \pm \sqrt{B}}\right)^2}_{\substack{\text{eliminando-se} \\ \text{a } \textbf{\textit{raiz quadrada}}}} = \underbrace{\left(\sqrt{x} \pm \sqrt{y}\right)^2}_{\substack{\text{fazendo-se o} \\ \textbf{\textit{produto notável}}}} \Rightarrow A \pm \sqrt{B} = \left(\sqrt{x}\right)^2 \pm 2.\sqrt{x}.\sqrt{y} + \left(\sqrt{y}\right)^2$$

$$\Rightarrow A \pm \sqrt{B} = x \pm 2.\sqrt{xy} + y \Rightarrow A \pm \sqrt{B} = x + y \pm \sqrt{4xy} \text{ ....(3)}$$

Cada membro dessa última igualdade é formado por uma parte ***racional*** ("A" e "$x + y$") e por uma parte ***irracional*** ("$\sqrt{B}$" e "$\sqrt{4xy}$"). Para que se obtenha uma identidade, é necessário que:

$\begin{cases} x + y = A \\ \sqrt{B} = \sqrt{4xy} \end{cases}$, elevando-se os membros da segunda equação ao quadrado, teremos:

$$\begin{cases} x + y = A \\ B = 4xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = A \\ xy = \dfrac{B}{4} \end{cases} \text{ ....(4)}$$

Considerando que "$(x+y)$" e "$(x.y)$" representem, respectivamente, a ***soma*** **("S")** e o ***produto*** **("P")** das raízes de qualquer ***equação do 2º grau***, por exemplo, na variável **"*z*", onde** o coeficiente do ***termo quadrático*** igual a "**1**", do tipo:

1.$z^2 - \mathbf{S}z + \mathbf{P} = 0 \Rightarrow z^2 - \mathbf{S}z + \mathbf{P} = 0$, então, teremos que:

$$z^2 - \mathbf{S}z + \mathbf{P} = 0\text{..........(5)} \Rightarrow z^2 - (x + y)z + xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = A \\ xy = \dfrac{B}{4} \end{cases}$$

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0 \text{ ....(6)}$$

Resolvendo a equação quadrática anterior, pela ***fórmula resolutiva de Bhaskara***, encontraremos as seguintes ***raízes*** desta equação:

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1;\ b = -A;\ c = \frac{B}{4}$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-A)^2 - 4.(1).\left(\frac{B}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta = A^2 - B$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-(-A) \pm \sqrt{A^2 - B}}{2.1} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2} \text{ ....(7)}$$

Formando as possíveis raízes:

$$z_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \quad \text{e} \quad z_1 = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

Sendo $z_1 = x$ e $z_2 = y$

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \text{ ....(8) e } y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} \text{ ....(9)}$$

Se $A^2 - B$ é um ***quadrado perfeito*** (*condição necessária*) e, designando esse termo por C^2, teremos:

$$\sqrt{A^2 - B} = C^2 \text{ ....(10)}$$

Substituindo nas expressões anteriores (8) e (9), teremos:

$$x = \frac{A + C}{2} \text{ (11) e } y = \frac{A - C}{2} \text{ ....(12)}$$

Assim, substituindo os valores encontrados para "*x*" (11) e "*y*" (12), na expressão (2), teremos:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}} \text{ ....(13)} - \textit{expressão final}$$

Atenção: Se a expressão "$A^2 - B$" ***não*** for um ***quadrado perfeito*** essa transformação ***não*** será prática porque teríamos, nesse caso, substituído um ***radical duplo*** pela ***soma*** ou ***diferença*** de dois outros ***radicais*** também ***duplos***.

Exercícios resolvidos

1. Transformar numa *soma* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$.

Sendo: $A = 5$

$B = 24$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 5^2 - 24 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 25 - 24 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad C = 1$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{6}{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

2. **Transformar numa *soma* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{3+\sqrt{5}}$.**

Sendo: $A = 3$

$B = 5$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 3^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 9 - 5 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad C = 2$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+2}{2}} + \sqrt{\frac{3-2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

3. **Transformar numa *soma* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{7+\sqrt{13}}$.**

Sendo: $A = 7$

$B = 13$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 7^2 - 13 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 49 - 13 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{36} \quad \Rightarrow \quad C = 6$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{7+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7+6}{2}} + \sqrt{\frac{7-6}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

4. **Transformar numa *soma* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{8+\sqrt{28}}$.**

Sendo: $A = 8$

$B = 28$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 8^2 - 28 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 64 - 28 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{36} \quad \Rightarrow \quad C = 6$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{8+\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{8+6}{2}} + \sqrt{\frac{8-6}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{8+\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{14}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{8+\sqrt{28}} = \sqrt{7} + \sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{8+\sqrt{28}} = \sqrt{7} + 1$$

5. **Transformar numa *soma* de *radicais simples* o *radical duplo*** $\sqrt{9+\sqrt{17}}$ **.**

Sendo: $A = 9$

$B = 17$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 9^2 - 17 \Rightarrow C^2 = 81 - 17 \Rightarrow C^2 = 64 \Rightarrow C = \sqrt{64} \Rightarrow C = 8$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{9+\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{9+8}{2}} + \sqrt{\frac{9-8}{2}} \Rightarrow \sqrt{9+\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{17}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

6. **Transformar numa *soma* de *radicais simples* o *radical duplo*** $\sqrt{12+\sqrt{44}}$ **.**

Sendo: $A = 12$

$B = 44$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 12^2 - 44 \Rightarrow C^2 = 144 - 44 \Rightarrow C^2 = 100 \Rightarrow C = \sqrt{100} \Rightarrow C = 10$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{12+\sqrt{44}} = \sqrt{\frac{12+10}{2}} + \sqrt{\frac{12-10}{2}} \Rightarrow \sqrt{12+\sqrt{44}} = \sqrt{\frac{22}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{12+\sqrt{44}} = \sqrt{11} + \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{12+\sqrt{44}} = \sqrt{11} + 1$$

7. **Transformar numa *soma* de *radicais simples* o *radical duplo*** $\sqrt{8+\sqrt{60}}$ **.**

Sendo: $A = 8$

$B = 60$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 8^2 - 60 \Rightarrow C^2 = 64 - 60 \Rightarrow C^2 = 4 \Rightarrow C = \sqrt{4} \Rightarrow C = 2$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{8+\sqrt{60}} = \sqrt{\frac{8+2}{2}} + \sqrt{\frac{8-2}{2}} \Rightarrow \sqrt{8+\sqrt{60}} = \sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{6}{2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{8+\sqrt{60}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

8. **Transformar numa *soma* de *radicais simples* o *radical duplo*** $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ **.**

Sendo: $A = 5$

$B = 21$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 5^2 - 21 \Rightarrow C^2 = 25 - 21 \Rightarrow C^2 = 4 \Rightarrow C = \sqrt{4} \Rightarrow C = 2$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{5+2}{2}} + \sqrt{\frac{5-2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$$

9. Transformar numa *soma* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

Alterando o radical duplo dado: $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{6+\sqrt{2^2.5}} = \sqrt{6+\sqrt{4.5}} = \sqrt{6+\sqrt{20}}$

Sendo: $A = 6$

$B = 20$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 6^2 - 20 \Rightarrow C^2 = 36 - 20 \Rightarrow C^2 = 16 \Rightarrow C = \sqrt{16} \Rightarrow C = 4$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} + \sqrt{\frac{6-4}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + \sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1$$

10. Transformar numa *soma* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{7+\sqrt{24}}$.

Sendo: $A = 7$

$B = 24$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 7^2 - 24 \Rightarrow C^2 = 49 - 24 \Rightarrow C^2 = 25 \Rightarrow C = \sqrt{25} \Rightarrow C = 5$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{7+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7+5}{2}} + \sqrt{\frac{7-5}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{12}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{7+\sqrt{24}} = \sqrt{6} + \sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7+\sqrt{24}} = \sqrt{6} + 1$$

11. Transformar numa *diferença* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{7-\sqrt{40}}$.

Sendo: $A = 7$

$B = 40$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 7^2 - 40 \Rightarrow C^2 = 49 - 40 \Rightarrow C^2 = 9 \Rightarrow C = \sqrt{9} \Rightarrow C = 3$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{7-\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} - \sqrt{\frac{7-3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7-\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{10}{2}} - \sqrt{\frac{4}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{7-\sqrt{24}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

12. Transformar numa *diferença* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Alterando o radical duplo dado: $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{2^2.3}} = \sqrt{4-\sqrt{4.3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}}$

Sendo: A = 4

B = 12

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 4^2 - 12 \Rightarrow C^2 = 16 - 12 \Rightarrow C^2 = 4 \Rightarrow C = \sqrt{4} \Rightarrow C = 2$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}} \Rightarrow \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$$

13. Transformar numa *diferença* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{11-\sqrt{21}}$.

Sendo: A = 11

B = 21

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = (11)^2 - 21 \Rightarrow C^2 = 121 - 21 \Rightarrow C^2 = 100 \Rightarrow C = \sqrt{100} \Rightarrow C = 10$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{11-\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{11+10}{2}} - \sqrt{\frac{11-10}{2}} \Rightarrow \sqrt{11-\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{21}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

14. Transformar numa *diferença de radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{28-10\sqrt{3}}$.

Alterando o radical duplo dado:

$$\sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{28-\sqrt{10^2.3}} = \sqrt{4-\sqrt{100.3}} = \sqrt{28-\sqrt{300}}$$

Sendo: A = 28

B = 300

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = (28)^2 - 300 \Rightarrow C^2 = 784 - 300 \Rightarrow C^2 = 484 \Rightarrow C = \sqrt{484} \Rightarrow C = 22$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{28+22}{2}} - \sqrt{\frac{28-22}{2}} \Rightarrow \sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{50}{2}} - \sqrt{\frac{6}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{25} - \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{28-10\sqrt{3}} = 5 - \sqrt{3}$$

15. Transformar numa *diferença* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{15-4\sqrt{14}}$.

Alterando o radical duplo dado:

$$\sqrt{15-4\sqrt{14}} = \sqrt{15-\sqrt{4^2.14}} = \sqrt{15-\sqrt{16.14}} = \sqrt{15-\sqrt{224}}$$

Sendo: $A = 15$

$B = 224$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = (15)^2 - 224 \Rightarrow C^2 = 225 - 224 \Rightarrow C^2 = 1 \Rightarrow C = \sqrt{1} \Rightarrow C = 1$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{15-4\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{15+1}{2}} - \sqrt{\frac{15-1}{2}} \Rightarrow \sqrt{15-4\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{16}{2}} - \sqrt{\frac{14}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{15-4\sqrt{14}} = \sqrt{8} - \sqrt{7} \Rightarrow \sqrt{15-4\sqrt{14}} = \sqrt{8} - \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \sqrt{15-4\sqrt{14}} = \sqrt{2^3} - \sqrt{7} \Rightarrow \sqrt{15-4\sqrt{14}} = \sqrt{2^2.2} - \sqrt{7}$$

$$\sqrt{15-4\sqrt{14}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{7}$$

16. Transformar numa *diferença* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{6-\sqrt{11}}$.

Sendo: $A = 6$

$B = 11$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = 6^2 - 11 \Rightarrow C^2 = 36 - 11 \Rightarrow C^2 = 25 \Rightarrow C = \sqrt{25} \Rightarrow C = 5$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{6-\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{6+5}{2}} - \sqrt{\frac{6-5}{2}} \Rightarrow \sqrt{6-\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{11}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

17. Transformar numa *diferença* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{\frac{13}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3}}$.

Alterando o radical duplo dado:

$$\sqrt{\frac{13}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{13}{3} - \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2.3}} = \sqrt{\frac{13}{3} - \sqrt{\frac{16}{\cancel{9}}.\cancel{3}}} = \sqrt{\frac{13}{3} - \sqrt{\frac{16}{3}}}$$

Sendo: $A = \dfrac{13}{3}$

$B = \dfrac{16}{3}$

$C^2 = A^2 - B$

$$C^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} \Rightarrow C^2 = \frac{169}{9} - \frac{16}{3} \Rightarrow C^2 = \frac{169}{9} - \frac{16\times 3}{3\times 3} \Rightarrow C^2 = \frac{169}{9} - \frac{48}{9} \Rightarrow$$

$$C^2 = \frac{169-48}{9} \Rightarrow C^2 = \frac{121}{9} \Rightarrow C = \sqrt{\frac{121}{9}} \Rightarrow C = \frac{11}{3}$$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{\frac{13}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{\frac{13}{3}+\frac{11}{3}}{2}}-\sqrt{\frac{\frac{13}{3}-\frac{11}{3}}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{13}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{\frac{13+11}{3}}{2}}-\sqrt{\frac{\frac{13-11}{3}}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{13}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{\frac{24}{3}}{2}}-\sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{13}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{8}{2}}-\sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{13}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{13}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}}=2-\sqrt{\frac{1}{3}}$$

18. Transformar numa *diferença* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{14-\sqrt{75}}$.

Sendo: $A = 14$

$B = 75$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = (14)^2 - 75 \Rightarrow C^2 = 196 - 75 \Rightarrow C^2 = 121 \Rightarrow C = \sqrt{121} \Rightarrow C = 11$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{14-\sqrt{75}}=\sqrt{\frac{14+11}{2}}-\sqrt{\frac{14-11}{2}} \Rightarrow \sqrt{14-\sqrt{75}}=\sqrt{\frac{25}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

19. Transformar numa *diferença* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{17-\sqrt{93}}$.

Sendo: $A = 17$

$B = 93$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = (17)^2 - 93 \Rightarrow C^2 = 289 - 93 \Rightarrow C^2 = 196 \Rightarrow C = \sqrt{196} \Rightarrow C = 14$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{17-\sqrt{93}}=\sqrt{\frac{17+14}{2}}-\sqrt{\frac{17-14}{2}} \Rightarrow \sqrt{17-\sqrt{93}}=\sqrt{\frac{31}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

20. Transformar numa *diferença* de *radicais simples* o *radical duplo* $\sqrt{2a-\sqrt{4(a^2-b^2)}}$.

Sendo: $A = 2a$

$B = 4(a^2 - b^2)$

$C^2 = A^2 - B$

$C^2 = (2a)^2 - [4(a^2 - b^2)] \Rightarrow C^2 = 4a^2 - 4a^2 + 4b^2 \Rightarrow C^2 = 4b^2 \Rightarrow C = \sqrt{4b^2} \Rightarrow C = 2b$

Substituindo na relação de transformação, teremos: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$

$$\sqrt{2a-\sqrt{4(a^2-b^2)}}=\sqrt{\frac{2a+2b}{2}}-\sqrt{\frac{2a-2b}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a-\sqrt{4(a^2-b^2)}}=\sqrt{\frac{2(a+b)}{2}}-\sqrt{\frac{2(a-b)}{2}}$$

$$\sqrt{2a-\sqrt{4(a^2-b^2)}}=\sqrt{\frac{\cancel{2}(a+b)}{\cancel{2}}}-\sqrt{\frac{\cancel{2}(a-b)}{\cancel{2}}}\quad\Rightarrow$$

$$\sqrt{2a-\sqrt{4(a^2-b^2)}}=\sqrt{(a+b)}-\sqrt{(a-b)}$$

Capítulo 17

Razões e aplicações notáveis

A ***razão*** entre dois números é o ***quociente*** da ***divisão*** do ***primeiro*** pelo ***segundo***. Por exemplo, a razão entre 4 e 7 é $\frac{4}{7}$.

O ***primeiro termo*** de uma ***razão*** denomina-se ***antecedente***, e o ***segundo consequente***. Na ***razão*** de 4 para 7 ou $\frac{4}{7}$, o ***antecedente*** é **4** e o ***consequente, 5***.

Quando a ***razão*** é um ***número inteiro***, o ***consequente*** é a ***unidade***. Por exemplo, a ***razão*** 5 ou $\frac{5}{1}$, o ***antecedente*** é o **5** e o ***consequente*** é o **1** (a unidade).

Obs.: A ***razão*** de duas ***grandezas*** da ***mesma espécie*** é o ***quociente*** da divisão dos números que exprimem suas medidas, com a ***mesma unidade***.

Assim, para determinarmos a ***razão*** entre dois ***estados da mesma grandeza***, ou ainda, entre ***duas grandezas da mesma espécie***, é necessário medi-las com a ***mesma unidade***.

Por exemplo, a razão entre dois segmentos de 2 dm e 60 cm, respectivamente, será de:

Reduzindo as duas medidas a *centímetro*, obtemos a ***razão*:** $\frac{2\text{ dm}}{60\text{ cm}} = \frac{20\text{ cm}}{60\text{ cm}} = \frac{1}{3}$

Obs.: As razões gozam de todas as propriedades das frações, e a elas são aplicáveis todas as regras de cálculo com as frações, já conhecidas.

17.1. Razões notáveis:

17.1.1. Escalas

Escala é a representação de uma ***razão*** entre duas ***grandezas de medidas***, em que o ***antecedente*** representa a ***medida a ser utilizada*** (ou ***representada***) e o ***consequent***e, a ***medida real***. Geralmente utilizam-se na construção de mapas, plantas etc.

Na ***escala natural***, o desenho tem ***as mesmas dimensões do objeto real:*** 1 : 1 (1 para 1), ou seja, 1 cm normal do desenho é igual a 1 cm do objeto.

Na ***escala de redução***, a representação gráfica é ***menor*** que a ***dimensão do objeto:*** 1 : 2 (1 para 2, por exemplo), ou seja, 1 cm do desenho representa 2 cm do objeto.

Na ***escala de ampliação***, a representação gráfica é ***maior*** que a ***dimensão do objeto:*** 2 : 1 (2 para 1), ou seja, 2 cm do desenho equivale a 1 cm do objeto.

Podemos utilizar a seguinte relação matemática:

$$\boxed{E = \frac{T_{reduzido}}{T_{real}}}$$

onde: $T_{Reduzido}$: tamanho reduzido
E: escala utilizada
T_{Real}: tamanho real

Obs.: A medida real e a medida representada deverão ter a mesma unidade de medida (ambas em km, hm, dam, m, dm, cm, mm etc.)

Quando a escala está relacionada à área, devemos elevar ao quadrado a referida escala:

$$\boxed{E^2 = \frac{\text{Área}_{reduzida}}{\text{Área}_{real}}}$$

17.1.2. Densidade demográfica (ou populacional)

É dada pelo ***quociente*** da divisão entre a ***quantidade de habitantes*** de uma determinada região pela grandeza que exprime a ***área*** dessa região.

Podemos utilizar a seguinte relação matemática:

$$\boxed{d_0 = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{Área}}}$$

17.1.3. Velocidade

O conceito de velocidade está relacionado à razão entre a distância percorrida pelo tempo gasto para percorrê-la, ou seja:

$$\boxed{v = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}}}$$

As ***unidades físicas*** que representam a ***velocidade*** mais usuais são o ***quilômetro por hora*** (***km/h***) e o ***metro por segundo*** (***m/s***), e existe uma relação de conversão muito usual entre elas, a se ver:

$$\begin{tikzcd} \textit{quilômetros por hora (km/h)} \arrow[r, bend left, "\text{divide por 3,6}"] & \textit{metros por segundo (m/s)} \arrow[l, bend left, "\text{multiplica por 3,6}"] \end{tikzcd}$$

17.1.4. Vazão

É a ***razão*** entre a ***quantidade de líquido*** que ***escoa*** de uma torneira (ralo, escoadouro ou sifão etc) por unidade de tempo.

$$\boxed{V = \frac{\text{quantidade de líquido escoado}}{\text{tempo}}}$$

Obs.: Os problemas mais usuais de vazão que aparecem nos diversos certames são os que envolvem ***torneiras***. Aqui, avaliaremos ***quatro casos específicos***:

1º caso: problemas envolvendo ***duas torneiras***.

Exemplo:

Uma torneira enche um tanque, sozinha, em 30 minutos, outra torneira enche o mesmo tanque, também sozinha, em 15 minutos. Juntas, encherão esse tanque em:

Para determinarmos o tempo em que as duas encherão esse tanque, basta usar uma ***dica*** muito importante para esse tipo de problema, ou seja, dividir o ***produto dos tempos*** pela ***soma dos mesmos tempos***.

$$T_{\text{total}} = \frac{\text{produto dos tempos}}{\text{soma dos tempos}} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{total}} = \frac{30 \times 15}{30 + 15} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{total}} = \frac{450}{45}$$

$$\Rightarrow \quad T_{\text{total}} = 10 \text{ minutos}$$

2º caso: problemas envolvendo ***uma torneira*** e ***um ralo***.

Exemplo:

Uma torneira enche um tanque, sozinha, em 4 minutos, e um ralo esvazia por completo esse mesmo tanque em 6 minutos. Abertos, simultaneamente, a torneira e o ralo, então esse tanque estará cheio em:

Para esse caso, também utilizaremos uma dica muito importante, ou seja, agora, basta dividir o ***produto dos tempos*** pela ***diferença positiva dos mesmos tempos***.

$$T_{\text{total}} = \frac{\text{produto dos tempos}}{\text{diferença positiva dos tempos}} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{total}} = \frac{4 \times 6}{6 - 4} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{total}} = \frac{24}{2}$$

$$\Rightarrow \quad T_{\text{total}} = 12 \text{ minutos}$$

3º caso: problemas envolvendo ***várias torneiras*** e ***ralos***.

Exemplo:

Três torneiras enchem um tanque, individualmente, com os respectivos tempos de: 2 minutos, 3 minutos e 4 minutos, enquanto dois ralos, também individualmente, esvaziam esse mesmo tanque em 6 minutos e 12 minutos. Aberto todos os cinco elementos ao mesmo tempo, o tanque estará completamente cheio em:

Observe a seguinte estrutura para a resolução desse tipo de problema:

$$\frac{1}{T_{total}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

$$\text{onde } \begin{cases} T_1 = 2 \text{ minutos (tempo de enchimento da } 1^a \text{ torneira)} \\ T_2 = 3 \text{ minutos (tempo de enchimento da } 2^a \text{ torneira)} \\ T_3 = 4 \text{ minutos (tempo de enchimento da } 3^a \text{ torneira)} \\ R_1 = 6 \text{ minutos (tempo de escoamento do } 1^o \text{ ralo)} \\ R_2 = 12 \text{ minutos (tempo de escoamento do } 2^o \text{ ralo)} \end{cases}$$

Observações:

a) Todos os ***antecedentes*** (***numeradores***) deverão ser iguais a **1** (iguais à unidade), já que representam o ***tanque completamente preenchido***.

b) Todos os ***consequentes*** (***denominadores***) serão representados pelos respectivos ***tempos de escoamentos***, porém, para as ***vazões*** das ***torneiras***, os mesmos deverão ser ***positivos*** e, para ***vazões*** dos respectivos ***ralos***, ***negativos***.

Substituindo, teremos:

$$\frac{1}{T_{total}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \text{mmc}(2; 3; 4; 6; 12) = 12$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{T_{total}} = \frac{6+4+3-2-1}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_{total}} = \frac{10}{12} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{T_{total}}{1} = \frac{12}{10}}_{\text{invertendo as frações}}$$

$$\Rightarrow \quad T_{total} = 1{,}2 \text{ minutos}$$

4º caso: problemas envolvendo ***falsas torneiras***.

Exemplo 1:

Uma empilhadeira transporta certa quantidade de caixas em 3 horas, enquanto outra empilhadeira transporta a mesma quantidade de caixas em 6 horas, trabalhando juntas, carregariam essa certa quantidade de caixas em:

Fazendo uma analogia com os problemas que envolvem torneiras, consideraremos as duas empilhadeiras como se fossem duas torneiras e as caixas a serem carregadas como se fossem o tanque a ser preenchido.

Assim, para ***duas torneiras***, teremos:

$$T_{total} = \frac{\text{produto dos tempos}}{\text{soma dos tempos}} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = \frac{3 \times 6}{3+6} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = \frac{18}{9}$$

$$\Rightarrow \quad T_{total} = 2 \text{ horas}$$

Exemplo 2:

Dois funcionários de um supermercado, Pedro e Marcos, organizam uma prateleira, individualmente, em 20 minutos e 30 minutos. Daniel, um terceiro funcionário, retira todos os alimentos dessa prateleira em 60 minutos. Se os três funcionários trabalhassem juntos, o tempo necessário para que essa prateleira estivesse totalmente arrumada seria de:

Agora, devemos considerar Pedro e Marcos como se fossem duas torneiras, Daniel, como se fosse um ralo, e o preenchimento da prateleira como se fosse o preenchimento de um tanque. Assim, teremos:

$$\frac{1}{T_{total}}=\frac{1}{20}+\frac{1}{30}-\frac{1}{60} \Rightarrow \text{mmc}(20;30;60)=60 \Rightarrow \frac{1}{T_{total}}=\frac{3+2-1}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_{total}}=\frac{4}{60} \Rightarrow \underbrace{\frac{T_{total}}{1}=\frac{60}{4}}_{\text{invertendo as frações}} \Rightarrow T_{total}=15 \text{ minutos}$$

Exercícios resolvidos

1. (FEC) Qual o valor da razão entre o M.D.C. e o M.M.C. de 56 e 80?

a) 70^{-1}.
b) $\frac{3}{7}$.
c) $\frac{5}{7}$.
d) 35.
e) 2.

Resolução:

Uma forma simples e prática de determinarmos o MDC e o *mmc* entre dois números é por meio do método das divisões sucessivas, o qual veremos a seguir:

$$\begin{array}{rr|l}
56 & 80 & 2 \\
28 & 40 & 2 \\
14 & 20 & 2 \\
7 & 10 & 2 \\
7 & 5 & 5 \\
7 & 1 & 7 \\
\hline
1 & 1 & \underbrace{2\times 2\times 2}_{2^3=8}\times 2\times 5\times 7 = \boxed{560}
\end{array}$$

Produto de todos os fatores primos entre 56 e 80, ou seja, *mmc*(56; 80) = 560

Divisores comuns entre 56 e 80, ou seja, MDC(56; 80) = 8

Portanto, a razão entre o MDC e o *mmc* entre 56 e 80 será dada por:

$$\frac{\text{MDC}(56\ ;\ 80)}{mmc(56\ ;\ 80)}=\frac{8^{\div 8}}{560_{\div 8}}=\frac{1}{70}=70^{-1}$$

Gabarito: A

2. **(Vunesp) Em um mapa geográfico, uma distância real entre dois pontos igual a 10 km é representada por 0,5 cm. A escala desse mapa é:**
a) $1:2.10^6$.
b) $1:2.10^5$.
c) $1:2.10^4$.
d) $1:10^4$.
e) $1:10^3$.

Resolução:

Pelo enunciado do desenho, teremos:

$T_{Reduzido}$: 0,5 cm

T_{Real}: 10 km

Escala: E

Assim, a escala equivalente a esses valores será de:

$$E = \frac{T_{Reduzido}}{T_{Real}} \Rightarrow E = \frac{0,5\,cm}{10\ km} \Rightarrow E = \frac{5^{\div 5}\ mm}{10.000.000_{\div 5}\ mm}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2.000.000} \Rightarrow E = 1:2.000.000 \Rightarrow E = 1:2\times 10^6$$

Gabarito: A

3. **(Cesgranrio) Um arquiteto fez a planta de uma casa que será construída num terreno retangular, na escala 1:500. Na planta, a área da casa mede 80 cm². A área real da casa, em metros quadrados, é de:**
a) 400.
b) 2 000.
c) 4 000.
d) 20 000.
e) 40 000.

Resolução:

Pelo enunciado do desenho, teremos:

$Área_{Reduzida}$: 80 cm²

$Área_{Real}$: x

Escala: $(1 : 500)^2$

Assim, a escala equivalente a esses valores será de:

$$E^2 = \frac{Área_{Reduzida}}{Área_{Real}} \Rightarrow \left(\frac{1}{500}\right)^2 = \frac{80\,cm^2}{x} \Rightarrow \frac{1}{250.000} = \frac{80\,cm^2}{x}$$

$$\Rightarrow x = 80\times 250.000\ cm^2 \Rightarrow x = 20.000.000\ cm^2 \quad \text{ou} \quad x = 200.000\ dm^2$$

$$\text{ou} \quad x = 2.000\ m^2$$

Gabarito: B

4. **(FCC) Para o transporte de valores de certa empresa são usados dois veículos, A e B. Se a capacidade de A é de 2,4 toneladas e a de B é de 32 000 quilogramas, então a razão entre as capacidades de A e B, nessa ordem, equivale a:**
a) 0,0075 %.
b) 0,65 %.
c) 0,75 %.
d) 6,5 %.
e) 7,5 %.

Resolução:

De acordo com o enunciado "A" será o antecedente e "B" o consequente da referida razão. Portanto, podemos expressar essa razão, como sendo:

$$\frac{A}{B} = \frac{2,4\ t}{32.000\ kg}$$

Reduzindo as duas grandezas "A" e "B" para a mesma unidade de medida ou, simplesmente, transformando 32.000 kg em toneladas (bastando dividir por 1000), tem-se:

$$\frac{A}{B} = \frac{2,4\ t}{32.000\ kg} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{2,4\ t}{32\ t} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{2,4}{32} \times 100\%$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{240\%}{32} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{240\%^{\div 16}}{32_{\div 16}} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{15\%}{2} \Rightarrow \frac{A}{B} = 7,5\%$$

Gabarito: E

5. (FCC) A velocidade de 120 km/h equivale, aproximadamente, à velocidade de:

a) 33,33 m/s.
b) 35 m/s.
c) 42,5 m/s.
d) 54,44 m/s.
e) 60 m/s.

Velocidade é a ***razão*** entre a ***distância percorrida*** pelo ***tempo gasto em percorrê-la***. Suas unidades (em Física) mais comuns são: km/h, m/s, cm/s, entre outras.

Para uma velocidade de 120 km/h, teremos como equivalência em metros por segundo (m/s) a seguinte velocidade:

$$v = 120\ \frac{km}{h} \Rightarrow v = 120\ \frac{1.000\ m}{3.600\ s} \Rightarrow v = 120\ \frac{1,0\ m}{3,6\ s} \Rightarrow v = \frac{120}{3,6}\ \frac{m}{s}$$

$$v = 33,33\ m/s$$

Obs.: Em ***Física*** costuma-se utilizar a seguinte convenção → $km/h \underset{\times 3,6}{\overset{\div 3,6}{\rightleftarrows}} m/s$

Gabarito: A

6. (FCC) Para encher um tanque com água dispõe-se de duas torneiras, I e II. Considere que, abrindo-se apenas I, o tanque estaria cheio após 12 minutos, enquanto II, sozinha, levaria 15 minutos para enchê-lo. Assim sendo, se I e II fossem abertas simultaneamente, o tanque estaria cheio em:

a) 6 minutos e 10 segundos.
b) 6 minutos e 15 segundos.
c) 6 minutos e 25 segundos.
d) 6 minutos e 30 segundos.
e) 6 minutos e 40 segundos.

Resolução:

Para ***duas torneiras***, teremos:

$$T_{total} = \frac{\text{produto dos tempos}}{\text{soma dos tempos}} \Rightarrow T_{total} = \frac{T_1 \times T_2}{T_2 + T_2} \quad \begin{cases} T_1 = 12 \text{ minutos} \\ T_2 = 15 \text{ minutos} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_{total} = \frac{12 \times 15}{12 + 15} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = \frac{180^{\div 9}}{27_{\div 9}} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = \frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow \quad T_{total} = 6{,}666\text{... minutos}$$

$$T_{total} = 6 \text{ minutos} + 0{,}666\text{... minuto} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = 6 \text{ minutos} + \frac{6^{\div 3}}{9_{\div 3}} \text{ minuto}$$

$$T_{total} = 6 \text{ minutos } \frac{2}{3} \times 60 \text{ segundos} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = 6 \text{ minutos } 40 \text{ segundos}$$

Gabarito: E

7. (Cesgranrio) Um reservatório de água possui uma torneira capaz de enchê-lo em 4 horas; possui também um escoadouro capaz de esvaziá-lo totalmente em 6 horas. Estando o reservatório vazio e funcionando juntos a torneira e o escoadouro, em quanto tempo estará cheio?

a) 10 h.
b) 11 h.
c) 12 h.
d) 18 h.
e) 24 h.

Resolução:

Para ***uma torneira*** e ***um ralo***, teremos:

$$T_{total} = \frac{\text{produto dos tempos}}{\text{diferença positiva dos tempos}} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = \frac{T \times R}{R - T} \quad \begin{cases} T = 4 \text{ horas} \\ R = 6 \text{ horas} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_{total} = \frac{4 \times 6}{6 - 4} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = \frac{24}{2} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = 12 \text{ horas}$$

Gabarito: C

8. (Cesgranrio) Duas torneiras A e B enchem um tanque, separadamente, em 2h e 4h. Um ralo esvazia esse mesmo tanque em 3h. Abrindo-se as duas torneiras mais o ralo, simultaneamente, o tanque estará preenchido em, aproximadamente:

a) 1h 40 min.
b) 1h 50 min.
c) 2h 04 min.
d) 2h 24 min.
e) 2h 46 min.

Resolução:

Para ***duas torneiras*** e ***um ralo***, teremos:

$$\frac{1}{T_{total}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{1}{R} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} T_1 = 2 \text{ horas (tempo de enchimento da 1}^{\text{a}} \text{ torneira)} \\ T_2 = 4 \text{ horas (tempo de enchimento da 2}^{\text{a}} \text{ torneira)} \\ R = 3 \text{ horas (tempo de escoamento do ralo)} \end{cases}$$

$$\frac{1}{T_{total}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad mmc(2; 4; 3) = 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_{total}} = \frac{6 + 3 - 4}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_{total}} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{T_{total}}{1} = \frac{12}{5}}_{\substack{\text{invertendo} \\ \text{as frações}}} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = 2{,}4 \text{ horas} \quad \text{ou} \quad T_{total} = 2 \text{ horas} + 0{,}4 \text{ hora}$$

$$\Rightarrow \quad T_{total} = 2 \text{ horas} + 0,4 \times 60 \text{ segundos} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = 2 \text{ horas } 24 \text{ segundos}$$

Gabarito: D

9. (Consulplan) Para asfaltar uma rua de 250 metros, uma equipe A de trabalhadores gasta três dias. Outra equipe B gasta cinco dias para realizar o mesmo serviço. Quanto tempo essas duas equipes, trabalhando juntas, gastarão para realizar esse trabalho?

a) 1 dia e 14 horas.
b) 2 dias e 16 horas.
c) 1 dia e 21 horas.
d) 1 dia e 12 horas.
e) 1 dia e 22 horas.

Resolução:

Vamos considerar as ***duas equipes*** como se fossem ***duas torneiras***, portanto, teremos:

$$T_{total} = \frac{\text{produto dos tempos}}{\text{soma dos tempos}} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = \frac{T_1 \times T_2}{T_2 + T_2} \quad \begin{cases} T_1 = 3 \text{ dias} \\ T_2 = 5 \text{ dias} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_{total} = \frac{3 \times 5}{3 + 5} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = \frac{15}{8} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = 1,875 \text{ dias}$$

$$\Rightarrow \quad T_{total} = 1 \text{ dia } + 0,875 \text{ dia}$$

$$T_{total} = 1 \text{ dia } \ 0,875 \times 24 \text{ horas} \quad \Rightarrow \quad T_{total} = 1 \text{ dia } \ 21 \text{ horas}$$

Gabarito: C

10. (FEC) Segundo as instruções de um concentrado de fruta, para fazer refresco da fruta é necessário diluir uma parte do concentrado em seis partes de água. A razão entre a medida do concentrado e a medida do refresco corresponde a:

a) 1/6.
b) 1/7.
c) 6/7.
d) 5/6.
e) 5/7.

Resolução:

Sejam as partes: $\begin{cases} \text{concentrado : 1 parte} \\ \text{água : 6 partes} \\ \text{refresco : 7 partes (1 parte do concentrado + 6 partes de água)} \end{cases}$

A razão entre a medida do concentrado e a medida do refresco corresponde a: $\dfrac{\text{concentrado}}{\text{refresco}} = \dfrac{1}{7}$

Gabarito: B

11. (FCC) Certo dia, um Auxiliar Judiciário enviou fotocópias de um documento a oito Unidades do Tribunal Regional do Trabalho. Sabe-se que duas dessas Unidades, X e Y, receberam, cada uma, três fotocópias do documento, enquanto cada uma das demais Unidades recebeu quatro fotocópias a mais do que X. Dessa forma, a razão entre o total de fotocópias enviadas a X e Y e o total de fotocópias enviadas a todas as Unidades, nesta ordem, é:

a) $\frac{1}{8}$.
b) — .
c) $\frac{3}{8}$.
d) $\frac{1}{2}$.
e) $\frac{5}{8}$.

Resolução:

De acordo o texto do enunciado, temos as seguintes distribuições das fotocópias:

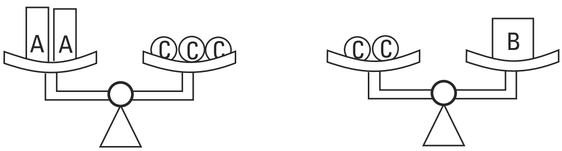
$$8 \text{ unidades do TRT} \begin{cases} X: 3 \text{ fotocópias} \\ Y: 3 \text{ fotocópias} \\ 6 \text{ demais}: 7 \text{ fotocópias para cada unidade (4 a mais que X)} \end{cases}$$

Dessa forma, a ***razão*** entre o ***total de fotocópias enviadas a* X *e* Y** e o ***total de fotocópias enviadas a todas as Unidades***, nesta ordem, é:

$$\frac{X+Y}{\text{todas as unidades}} = \frac{3+3}{3+3+42} = \frac{6^{\div 6}}{48_{\div 6}} = \frac{1}{8}$$

Gabarito: A

12. (Cesgranrio) Na figura a seguir, as duas balanças estão equilibradas.



A razão entre as massas das caixas identificadas pelas letras A e B, nessa ordem, é expressa pela fração:

a) 1/2.
b) 2/3.
c) 3/4.
d) 4/5.
e) 5/6.

Resolução:

Igualando-se os braços de cada balança encontraremos uma relação entre os pesos de A e B.

- **Para a 1ª balança:**

$$2A = 3C \Rightarrow C = \frac{2A}{3}$$

- **Para a 2ª balança:**

$$2C = B \Rightarrow C = \frac{B}{2}$$

Igualando-se os pesos de "C" das duas equações, teremos:

$$\frac{2A}{3} = \frac{B}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3B}{4}$$

Portanto, a razão entre as massas das caixas identificadas pelas letras A e B, nessa ordem, é expressa pela fração:

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{3B}{4}}{B} \Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{3\cancel{B}}{4}\times\frac{1}{\cancel{B}} \Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{3}{4}$$

Gabarito: C

13. (Cesgranrio) Se 2.400 candidatos participaram de um concurso que apresentou 120 vagas, então a razão entre o número de vagas e o número de candidatos foi de:

a) $\frac{1}{2}$.
b) $\frac{1}{20}$.
c) $\frac{1}{200}$.
d) $\frac{1}{240}$.
e) $\frac{1}{2000}$.

Resolução:

A razão entre o número de vagas e o número de candidatos foi de:

$$\frac{12\cancel{0}}{2.40\cancel{0}}=\frac{12}{240}=\frac{12^{\div 12}}{240_{\div 12}}=\frac{1}{20}$$

Gabarito: B

14. (Cetro) Setenta das 410 vacas de uma fazenda não foram vacinadas e, das vacinadas, 85 morreram. Para as vacas vacinadas, a razão entre o número de mortas e vivas é de:

a) 3/5.
b) 1/4.
c) 1/3.
d) 5/4.
e) 1/2.

Resolução:

Total de vacas vacinadas: 410 – 70 = 340.

Total de vacas vacinadas que **morreram**: 85 estão mortas.

Total de vacas vacinadas que **não morreram**: 340 – 85 = 255 estão vivas.

A razão entre o número de mortas e vivas é de: $\frac{85^{\div 85}}{255_{\div 85}}=\frac{1}{3}$

Gabarito: C

15. (Consulplan) Se uma construção tem 800 m² de área construída e 1000 m² de área livre, então a razão da área construída para a área livre é de:

a) 1/2.
b) 2/5.
c) 5/4.
d) 4/5.
e) 1/4.

Resolução:

Distribuição das áreas: $\begin{cases} 800\ m^2 \text{ de área construída} \\ 1.000\ m^2 \text{ de área livre} \end{cases}$

A razão da área construída para a área livre é de: $\dfrac{\text{área construída}}{\text{área livre}} = \dfrac{800}{1.000} = \dfrac{8^{\div 2}}{10_{\div 2}} = \dfrac{4}{5}$

Gabarito: D

16. (FCC) Para pagar uma despesa no valor de R$96,00, uma pessoa usou apenas notas de 2 reais e 5 reais, num total de 30 cédulas. A razão entre o número de notas de 2 reais e o de 5 reais, nessa ordem, é:

a) $\dfrac{2}{3}$.

b) $\dfrac{5}{6}$.

c) $\dfrac{3}{2}$.

d) $\dfrac{5}{3}$.

e) $\dfrac{7}{2}$.

Resolução:

Inicialmente, denotaremos por "x" e "y", respectivamente, as quantidades de cédulas de R$2,00 e R$5,00.

Se o total da dívida de R$96,00 foi paga unicamente com cédulas de R$2,00 e R$5,00, então teremos a seguinte equação:

$2x + 5y = 96$ ....(1)

Se foram utilizadas 30 cédulas, então teremos:

$x + y = 30$ .... (2)

Formando-se um sistema linear com as equações (1) e (2):

$$\begin{cases} 2x + 5y = 96 \text{ ....(1)} \\ x + y = 30 \text{ ....(2)} \end{cases}$$

Multiplicando-se por (–2) a equação (2):

$$\begin{cases} 2x + 5y = 96 \text{ ....(1)} \\ -2x - 2y = -60 \text{ ....(2)} \end{cases}$$

Somando-se as equações anteriores, teremos:

$$+\begin{cases} 2x + 5y = 96 \\ -2x - 2y = -60 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 3y = 36 \quad}$$

$$y = \frac{36}{3} \quad y = 12$$

Para o valor de "x", teremos:

$x + y = 30 \Rightarrow x + 12 = 30 \Rightarrow x = 30 - 12 \Rightarrow x = 18$

A razão entre o número de notas de 2 reais e o de 5 reais, nessa ordem, é:

$$\frac{x}{y} = \frac{18^{\div 6}}{12^{\div 6}} = \frac{3}{2}$$

Gabarito: C

17. (Cetro) A definição de densidade demográfica é dada pela razão entre o número de habitantes de uma região e a área dessa região. Pedro fez uma pesquisa, em sua cidade, para calcular qual seria a densidade demográfica da região onde mora. Ele conseguiu, junto à prefeitura, as seguintes informações: a área da cidade era de 2.651 km², e a quantidade de pessoas que residiam na localidade era de 151.107 habitantes. De posse dessas informações, ele concluiu que a densidade demográfica de sua cidade é de:

a) 57 habitantes/km².
b) 58 habitantes/km².
c) 59 habitantes/km².
d) 15 habitantes/km².
e) 155 habitantes/km².

Resolução:

Utilizando-se a relação matemática que define a densidade demográfica: $d_0 = \dfrac{\text{número de habitantes}}{\text{Área}}$, teremos:

$$d_0 = \frac{151.107}{2.651} \quad \Rightarrow \quad d_0 = 57 \text{ habitantes/km}^2$$

Gabarito: A

18. (Cesgranrio) Os índios Baniwa fazem parte do complexo cultural de 22 povos indígenas da Amazônia brasileira. Somam cerca de 12 mil pessoas, das quais 4 mil vivem no Brasil e o restante, na Colômbia e na Venezuela. A razão entre o número de índios Baniwa que vivem no Brasil e que vivem no exterior é:

a) $\frac{1}{2}$.
b) $\frac{1}{3}$.
c) $\frac{1}{4}$.
d) $\frac{2}{3}$.
e) $\frac{3}{4}$.

Resolução:

Das 12 mil pessoas indígenas: $\begin{cases} \text{4 mil vivem no Brasil} \\ \text{8 mil vivem na Colômbia e Venezuela} \end{cases}$

A razão entre o número de índios Baniwa que vivem no Brasil e que vivem no exterior é:

$$\frac{\text{vivem no Brasil}}{\text{vivem no exterior}} = \frac{4\text{ mil}}{8\text{ mil}} = \frac{4^{\div 4}}{8_{\div 4}} = \frac{1}{2}$$

Gabarito: A

19. (Cesgranrio) Luiz vai de bicicleta de casa até sua escola em 20 minutos, percorrendo ao todo 4 km. Se, pedalando no mesmo ritmo, ele leva 1h 10min para ir de sua casa até a casa de sua avó, a distância, em km, entre as duas casas é de:

a) 14.
b) 16.
c) 18.
d) 20.
e) 22.

Resolução:

Inicialmente, determinaremos a velocidade que Luiz leva para ir de sua casa até a sua escola:

$$v = \frac{d}{t} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{4^{\div 4}\ \text{km}}{20_{\div 4}\ \text{min}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{5}\ \text{km/min}$$

$$\Rightarrow \quad v = 0{,}2\ \text{km / min (ritmo de sua pedalada)}$$

Mantendo o mesmo ritmo (0,2 km/min), pedalando durante 1h 10 min (70 minutos) entre a sua casa e a casa de sua avó, qual a distância percorrida durante esse tempo?

$$v = \frac{d}{t} \quad \Rightarrow \quad 0{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = \frac{x}{70\ \text{min}} \quad \Rightarrow \quad x = 70\,\text{min} \times 0{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{min}}$$

$$\Rightarrow \quad x = 14\ \text{km}$$

Gabarito: A

20. (FCC) Se a razão entre dois números é $\frac{4}{5}$ e sua soma é igual a 27, o menor deles é:

a) primo.
b) divisível por 5.
c) múltiplo de 7.
d) divisível por 6.
e) múltiplo de 9.

Resolução:

Chamaremos de "*x*" e "*y*" os dois números.

Se, nessa ordem, a razão é de $\frac{4}{5}$, então teremos que:

$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$ ....(1) (observa-se que $y > x$)

Se a soma entre "*x*" e "*y*" é igual a 27, então teremos:

$x + y = 27$ ....(2)

Formando-se um sistema linear com as duas equações encontradas:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{5} \\ x + y = 27 \end{cases}$$

E isolando-se "*y*" na 2ª equação e substituindo seu resultado na 1ª equação, teremos:

$$y = 27 - x$$

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{27 - x} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad 5x = 4.(27 - x) \quad \Rightarrow \quad 5x = 108 - 4x$$

$$\Rightarrow \quad 5x + 4x = 108 \quad \Rightarrow \quad 9x = 108 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{108}{9} \quad \Rightarrow \quad x = 12$$

Gabarito: D

Capítulo 18
Proporção

Toda proporção pode ser classificada como sendo ***simples*** ou ***múltipla*** (***prolongada***).

18.1. Proporção simples

É a igualdade de duas ***razões equivalentes***.

Exemplo:

$\frac{3}{10} = \frac{18}{60}$, tal que: $\frac{3}{10} = 0{,}3$ e $\frac{18}{60} = 0{,}3$, o que demonstra que essas ***razões*** são ***equivalentes*** entre si.

Podemos observar que, para obtenção de uma ***razão equivalente*** a outra, multiplicamos tanto o numerador (***antecedente*** da ***razão*** ou **1º** ***termo*** da ***proporção***) quanto o denominador (***consequente*** da ***razão inicial***: $\frac{3}{10}$ ou **2º** ***termo*** da ***proporção***) pelo mesmo valor, no exemplo anterior foi pelo ***fator*** **6**, assim, temos:

$$\frac{3 \times 6}{10 \times 6} = \frac{18}{60} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{10} = \frac{18}{60}$$

Lê-se: 3 está para 10, assim como, 18 está para 60.

Obs. 1: Se multiplicássemos pelo ***fator***: $x = 15$, obteríamos uma nova ***razão equivalente*** à primeira $\frac{3}{10}$, que seria:

$\frac{3 \times 15}{10 \times 15} = \frac{45}{150} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{10} = \frac{45}{150}$, que são duas ***razões equivalentes*** também.

Obs. 2: Este ***fator*** "x" poderá ser qualquer número real diferente de zero, ou seja, $x \neq 0$, com $x \in R^*$.

Exemplos:

$$\frac{3 \times \pi}{10 \times \pi} = \frac{3\pi}{10\pi} \qquad \textbf{\textit{fator}} : x = \pi$$

$$\frac{3 \times \sqrt{5}}{10 \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} \qquad \textbf{\textit{fator}} : x = \sqrt{5}$$

$$\frac{3 \times \sqrt[4]{7}}{10 \times \sqrt[4]{7}} = \frac{3\sqrt[4]{7}}{10\sqrt[4]{7}} \qquad \textbf{\textit{fator}} : x = \sqrt[4]{7}$$

Obs. 3: Pelo visto anteriormente concluímos que:

$$\underbrace{\frac{3}{10}=\frac{18}{60}=\frac{45}{150}=\frac{3\pi}{10\pi}=\frac{3\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt[4]{7}}{10\sqrt[4]{7}}=\ldots}_{\text{proporção múltipla ou prolongada ou contínuada (composta)}}=0,3$$

Obs. 4: O valor obtido da divisão entre o ***antecedente*** e o seu respectivo ***consequente*** é denominada de ***constante*** ou ***coeficiente de proporcionalidade***, expresso, geralmente por "***k***", que nesse caso, vale: $k = 0,3$.

Obs. 5: Logo, podemos generalizar que quaisquer ***proporções simples*** ou ***compostas***, o resultado obtido pela divisão de suas sucessivas ***razões (frações)*** é sempre uma ***constante*** e denominado de ***coeficiente*** ou ***constante de proporcionalidade*** (k).

$$\underbrace{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{i}{j}=\ldots}_{\text{proporção composta}}=k$$

Obs. 6: Os quatro números que aparecem em uma proporção simples são denominados ***termos*** dessa proporção e seguem esta ***ordenação***:

$$\frac{1^{\circ}\text{ termo}}{2^{\circ}\text{ termo}}=\frac{3^{\circ}\text{ termo}}{4^{\circ}\text{ termo}}$$ ou: 1º *termo* : 2º *termo* :: 3º *termo* : 4º *termo*

Lê-se: o 1º *termo* ***está para*** o 2º *termo*, ***assim como***, o 3º *termo* ***está para*** o 4º *termo.*

18.2. Linguagem corrente

Podemos também escrever uma proporção da seguinte forma:

$\boxed{3 : 10 :: 18 : 60}$

neste caso, têm-se as seguintes denominações.

$$\overbrace{3:\underbrace{10::18}_{\text{meios}}:60}^{\text{extremos}} \Rightarrow \begin{cases}10\,;18: \text{ são } \textbf{\textit{denominados}} \text{ de } \textbf{\textit{meios}} \text{ da } \textbf{\textit{proporção simples}}.\\ 3\,;60: \text{são } \textbf{\textit{denominados}} \text{ de } \textbf{\textit{extremos}} \text{ da } \textbf{\textit{proporção simples}}.\end{cases}$$

Assim, podemos obter as seguintes designações:

$$\boxed{\frac{1^{\circ}\text{ termo}}{2^{\circ}\text{ termo}}=\frac{3^{\circ}\text{ termo}}{4^{\circ}\text{ termo}}} \text{ ou } \boxed{\frac{\text{extremo}}{\text{meio}}=\frac{\text{meio}}{\text{extremo}}} \text{ ou } \boxed{\frac{\text{antecedente}}{\text{consequente}}=\frac{\text{antecedente}}{\text{consequente}}}$$

Agora responda as seguintes perguntas:

– Qual é o meio antecedente?

Resposta: 3º termo.

– Qual é o extremo consequente?

Resposta: 4º termo.

– Qual é o meio consequente?

Resposta: 2º termo.

– Qual é o extremo antecedente?

Resposta: 1º termo.

Conclusão: Observamos que numa ***proporção simples*** são bem determinados os seus ***termos***, tanto na sua ***ordem***, quanto na sua ***nomenclatura***.

De um modo geral, representaremos os termos de uma ***proporção simples*** por letras:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

18.3. Propriedade fundamental das proporções

Definição: Em toda ***proporção simples***, o ***produto*** dos dois ***meios*** é sempre igual ao ***produto*** dos dois ***extremos***, e vice-versa.

Considerando, de modo geral, a proporção: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tem-se que:

$$\boxed{a \times d = b \times c}$$

O que prova a propriedade, então veja:

$$\frac{3}{10} = \frac{18}{60} \quad \Rightarrow \quad 3 \times 60 = 10 \times 18 \quad \Rightarrow \quad 180 = 180 \text{ (verdadeiro)}$$

18.4. Recíproca da propriedade fundamental

Quando o ***produto*** de dois números é igual ao ***produto*** de outros dois, os quatro números formam sempre uma ***proporção simples***, ou seja, podem ser escritos de ***forma proporcional***.

$$3 \times 60 = 10 \times 18$$

Dividindo-se os dois termos pelo produto dos dois maiores números, teremos:

$$\frac{3 \times 60}{18 \times 60} = \frac{10 \times 18}{18 \times 60}$$

Eliminando-se, em cada lado da igualdade os termos iguais, teremos:

$$\boxed{\frac{3}{18} = \frac{10}{60}}$$

Obs.: De acordo com a ***propriedade fundamental*** e sua ***recíproca***, para se verificar se quatro números formam ***proporção simples***, efetuamos o ***produto*** do ***maior*** pelo ***menor*** e verificamos se esse ***produto*** é igual ao dos outros dois. Assim, os quatro números 3; 10; 18 e 60 formam uma ***proporção simples*** por serem iguais os produtos “3 × 60” e “10 × 18”.

18.5. Aplicações práticas

1ª aplicação: transformações de uma ***proporção simples***.

Transformar uma ***proporção simples*** é mudar a ***posição*** de seus ***termos*** de modo que resulte, ainda, em outra ***proporção simples***. São três as ***transformações*** que podemos aplicar nela e denominam-se de: ***alternar***, ***inverter*** e ***transpor***.

Alternar: Consiste em ***trocar*** a ***posição*** dos ***meios*** ou dos ***extremos*** de uma ***proporção simples***.

Seja a seguinte ***proporção simples***: $\frac{3}{5}=\frac{18}{30}$ $\quad k=\frac{3}{5}=0{,}6$, ou: $k=\frac{18}{30}=0{,}6$

Alternando-se os dois meios, temos: $\frac{3}{18}=\frac{5}{30}$ $\quad k=\frac{3}{18}=0{,}1666...$, ou: $k=\frac{5}{30}=0{,}1666...$

Alternando-se os dois extremos, temos: $\frac{30}{5}=\frac{18}{3}$ $\quad k=\frac{30}{5}=6$, ou: $k=\frac{18}{3}=6$

Obs.: Ao ***trocar*** os ***meios*** ou os ***extremos*** de ***posição***, as igualdades obtidas resultam em uma nova ***proporção simples***, pois fica modificado o valor da ***constante*** ou ***coeficiente de proporcionalidade***, porém não deixando jamais de ser uma ***proporção simples***.

Inverter*:** Consiste em inverter as duas razões equivalentes simultaneamente, isto é, o que era ***antecedente passa a ser ***consequente,*** e o que era ***consequente*** se transforma em ***antecedente***.

Seja a seguinte ***proporção simples***: $\frac{3}{5}=\frac{18}{30}$

Podemos concluir que, depois de aplicada a ***inversão***, teremos: $\frac{5}{3}=\frac{30}{18}$

Obs. 1: Ao ***inverter*** as razões, verifica-se uma nova ***proporção simples***.

Obs. 2: Podemos provar a ***veracidade*** dessa ***transformação*** por meio da ***propriedade fundamental*** das ***proporções simples*** que foi preservada.

prova (1): $\frac{3}{5}=\frac{18}{30} \quad \Rightarrow \quad 3\times30=5\times18=90$

prova (2): $\frac{5}{3}=\frac{30}{18} \quad \Rightarrow \quad 5\times18=3\times30==90$

Transpor: Consiste em ***trocar*** a posição das duas ***razões equivalentes***, isto é, a **1ª *razão*** passa ocupar a posição da **2ª *razão*** e, esta, a **2ª *razão*** passa a vir para o lugar da **1ª *razão*** na ***proporção simples***.

Assim, desta ***proporção simples***: $\frac{3}{5}=\frac{18}{30}$

Teremos a seguinte ***transposição*** possível: $\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$

Obs.: Podemos provar a ***veracidade*** dessa ***transformação*** por meio da ***propriedade fundamental*** das ***proporções simples*** que foi preservada.

prova (1): $\frac{3}{5}=\frac{18}{30} \quad \Rightarrow \quad 3\times30=5\times18=90$

prova (2): $\frac{18}{30}=\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad 18\times5=30\times3==90$

De acordo com as ***transformações*** anteriores, podemos escrever uma ***proporção simples*** de ***oito maneiras distintas***:

Seja a seguinte ***proporção simples*** dada: $\frac{3}{8}=\frac{15}{40}$ (1ª forma)

Transpondo a ***proporção simples*** anterior: $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$ (2ª forma)

Alternado os ***meios*** da ***proporção simples*** dada: $\frac{3}{15}=\frac{8}{40}$ (3ª forma)

Transpondo a ***proporção simples*** anterior: $\frac{8}{40}=\frac{3}{15}$ (4ª forma)

Alternado-se os ***extremos*** da ***proporção simples*** dada: $\frac{40}{8}=\frac{15}{3}$ (5ª forma)

Transpondo a ***proporção simples*** anterior: $\frac{15}{3}=\frac{40}{8}$ (6ª forma)

Invertendo-se a ***proporção simples*** dada: $\frac{8}{3}=\frac{40}{15}$ (7ª forma)

Transpondo cada ***proporção simples*** anterior, teremos: $\frac{40}{15}=\frac{8}{3}$ (8ª forma)

2ª aplicação: cálculo de um ***termo qualquer*** de uma ***proporção simples***.

Existem **quatro** ***possibilidades distintas*** de uma ***proporção simples*** apresentar três termos conhecidos e o quarto sendo desconhecido.

$$\frac{x}{3}=\frac{65}{13} \quad ; \quad \frac{4}{x}=\frac{12}{9} \quad ; \quad \frac{2}{7}=\frac{x}{42} \quad ; \quad \frac{6}{5}=\frac{18}{x}$$

De um modo geral, utilizaremos o seguinte ***artifício***: isolar a variável **"*x*"** em um dos lados da igualdade. A seguir, fazer a ***multiplicação*** entre os valores que estão na ***diagonal oposta*** de **"*x*"** e dividir pelo ***valor oposto*** ao de **"*x*"**. Assim, teremos:

$$\frac{x}{3}=\frac{65}{13} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3\times 65}{13} \quad \Rightarrow \quad x=15$$
$$\frac{4}{x}=\frac{12}{9} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4\times 9}{12} \quad \Rightarrow \quad x=3$$
$$\frac{2}{7}=\frac{x}{42} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2\times 42}{7} \quad \Rightarrow \quad x=12$$
$$\frac{6}{5}=\frac{24}{x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5\times 24}{6} \quad \Rightarrow \quad x=20$$

Obs.: Neste artifício, o valor do termo ***oposto*** ao do **"*x*"** sempre ficará no ***denominador***.

18.6. Quarta proporcional

Chama-se ***quarta proporcional*** a três números dados, um ***quarto*** número, que forma com os mesmos uma ***proporção simples***.

Exemplo: Achar a *quarta proporcional* aos números 12, 18 e 42.

Representaremos por "*x*" o número procurado. Este problema admite três possíveis soluções, já que podemos escrever tal proporção de três formas distintas, a se ver:

$$\boxed{\frac{12}{18}=\frac{42}{x} \quad (1^a \text{ forma})}$$

Resolução:

$$\frac{12}{18}=\frac{42}{x} \Rightarrow 12x=18\times 42 \Rightarrow x=\frac{18^{\div 6}\times 42}{12^{\div 6}} \Rightarrow x=\frac{3\times 42^{\div 2}}{2^{\div 2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\times 21}{1} \Rightarrow \boxed{x=63}$$

$$\boxed{\frac{12}{18}=\frac{x}{42} \quad (2^a \text{ forma})}$$

Resolução:

$$\frac{12}{18}=\frac{x}{42} \Rightarrow 18x=12\times 42 \Rightarrow x=\frac{12^{\div 6}\times 42}{18^{\div 6}} \Rightarrow x=\frac{2\times 42^{\div 3}}{3^{\div 3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\times 14}{1} \Rightarrow \boxed{x=28}$$

$$\boxed{\frac{12}{x}=\frac{42}{18} \quad (3^a \text{ forma})}$$

Resolução:

$$\frac{12}{x}=\frac{42}{18} \Rightarrow 42x=12\times 18 \Rightarrow x=\frac{12^{\div 6}\times 18}{42^{\div 6}} \Rightarrow x=\frac{2\times 42^{\div 7}}{7^{\div 7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\times 6}{1} \Rightarrow \boxed{x=12}$$

Obs. 1: Só existem **três soluções**, porque, em cada solução, o produto de um dos números dados por "*x*" é igual ao produto dos outros dois.

Obs. 2: Considera-se, em geral, a ***solução obtida***, conservando na proporção a ordem dos ***números dados***, e considerando como incógnita o ***último termo***.

18.7. Proporção contínua

É toda proporção em que os meios ou os extremos são iguais.

$$\frac{4}{\mathbf{8}}=\frac{\mathbf{8}}{16} \Rightarrow \underbrace{8\times 8}_{64}=\underbrace{4\times 16}_{64}$$

$$\frac{\mathbf{6}}{4}=\frac{9}{\mathbf{6}} \Rightarrow \underbrace{4\times 9}_{36}=\underbrace{6\times 6}_{36}$$

Obs.: Na proporção contínua, o ***termo igual*** é denominado ***média proporcional*** ou ***geométrica***; e qualquer dos dois outros é denominada ***terceira*** proporcional. Assim, teremos:

$$\frac{4}{\mathbf{8}}=\frac{\mathbf{8}}{16} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{8}: \textbf{\textit{média proporcional}} \text{ ou } \textbf{\textit{geométrica}}. \\ \mathbf{4} \text{ é a } \textbf{\textit{terceira proporcional}} \text{ entre } \mathbf{8} \text{ e } \mathbf{16}. \\ \mathbf{16} \text{ é a } \textbf{\textit{terceira proporcional}} \text{ entre } \mathbf{8} \text{ e } \mathbf{4}. \end{cases}$$

18.8. Cálculo da média e da terceira proporcional

Dada a proporção contínua $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, aplicando a propriedade fundamental teremos:

$$b^2=a.c$$

Extraindo-se a raiz quadrada dos dois membros, obtemos:

$$b^2=a.c \quad \Rightarrow \quad \sqrt{b^2}=\sqrt{a.c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b=\sqrt{a.c}}$$

Conclui-se que: A ***média proporcional*** entre dois números é igual à ***raiz quadrada*** de seu ***produto***.

Exemplo: Achar a média proporcional entre 12 e 27.

Denotando por "*x*" a *média proporcional* procurada, temos:

$$x=\sqrt{12\times 27} \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{324} \quad \Rightarrow \quad x=18$$

18.9. Propriedades das proporções

1ª aplicação: Qualquer ***antecedente*** é igual ao ***produto*** do seu ***consequente*** por uma ***constante***. Tal constante é denominada de ***coeficiente*** ou ***constante de proporcionalidade*** (***k***).

Seja, de um modo geral, a seguinte proporção dada: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$

Neste caso, teremos: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \begin{cases} a=b.k \\ c=d.k \end{cases}$.

2ª aplicação: A ***soma*** ou a ***diferença*** dos ***antecedentes*** está para a dos ***consequentes*** assim como qualquer ***antecedente*** está para o seu respectivo ***consequente***.

$$\boxed{\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$$

Exemplo 1: Determine os valores de "*x*" e de "*y*" na proporção $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$, sabendo-se que $x+y=72$.

Pela proporção dada, fazemos:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{\overbrace{x+y}^{72}}{\underbrace{3+5}_{8}}=\frac{72}{8}=9 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3}=\frac{y}{5}=9$$

De acordo com a 1ª **aplicação**, teremos: $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=9 \Rightarrow \begin{cases} x=3\times 9=27 \\ y=5\times 9=45 \end{cases}$

Exemplo 2: Determine os valores de "*x*" e de "*y*" na proporção $\frac{x}{7}=\frac{y}{4}$, sabendo-se que $x-y=33$.

Pela proporção dada, fazemos:

$$\frac{x}{7}=\frac{y}{4}=\frac{\overbrace{x-y}^{33}}{\underbrace{7-4}_{3}}=\frac{33}{3}=11 \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{7}=\frac{y}{4}=11$$

De acordo com a **1ª aplicação**, teremos: $\frac{x}{7}=\frac{y}{4}=11 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=7\times 11=77 \\ y=4\times 11=44 \end{cases}$

18.10. Outras propriedades das proporções

Considere, inicialmente, a seguinte proporção:

$$\boxed{\frac{1^{\circ}\text{ termo}}{2^{\circ}\text{ termo}}=\frac{3^{\circ}\text{ termo}}{4^{\circ}\text{ termo}}}$$

ou também representada por:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$$

I) A ***soma*** ou ***diferença*** dos ***dois primeiros termos*** está para o ***primeiro*** assim como a ***soma*** ou ***diferença*** dos ***dois últimos*** está para o ***terceiro***:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$$

Prova real: $\frac{3}{5}=\frac{12}{20} \quad\Rightarrow\quad \frac{3+5}{3}=\frac{12+20}{12} \quad\Rightarrow\quad \frac{8}{3}=\frac{32}{12}$ ou $\underbrace{3\times 32}_{96}=\underbrace{8\times 12}_{96}$

II) A ***soma*** ou ***diferença*** dos ***dois primeiros*** termos está para o ***segundo*** assim como a ***soma*** ou ***diferença*** dos ***dois últimos*** está para o ***quarto***:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

Prova real: $\frac{3}{5}=\frac{12}{20} \quad\Rightarrow\quad \frac{3+5}{5}=\frac{12+20}{20} \quad\Rightarrow\quad \frac{8}{5}=\frac{32}{20}$ ou $\underbrace{5\times 32}_{160}=\underbrace{8\times 20}_{160}$

III) A ***soma*** dos ***dois primeiros termos*** está para a sua ***diferença*** assim como a ***soma*** dos ***dois últimos termos*** está para a sua ***diferença***:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

Prova real: $\frac{7}{4}=\frac{35}{20} \quad\Rightarrow\quad \frac{7+4}{7-4}=\frac{35+20}{35-20} \quad\Rightarrow\quad \frac{11}{3}=\frac{55}{15}$ ou $\underbrace{3\times 55}_{165}=\underbrace{11\times 55}_{165}$

18.11. Proporção prolongada (ou continuada)

É a sucessão de três ou mais razões iguais, como:

$$\frac{3}{5}=\frac{12}{20}=\frac{24}{40}=\ldots=0,6$$

18.12. Propriedade das proporções prolongadas

Numa ***proporção prolongada***, a ***soma*** dos ***antecedentes*** está para a ***soma*** dos ***consequentes*** assim como qualquer ***antecedente*** está para o seu respectivo ***consequente***.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots=k \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}\ldots=k$$

Exemplo: Resolva o seguinte sistema: $\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5}\\ 4x+2y+3z=87\end{cases}$.

Inicialmente, multiplicaremos os termos da 1ª razão por 4, os termos da 2ª razão por 2 e os termos da 3ª razão por 5, assim, teremos:

$$\frac{4\times x}{4\times 2}=\frac{2\times y}{2\times 3}=\frac{3\times z}{3\times 5} \quad\Rightarrow\quad \frac{4x}{8}=\frac{2y}{6}=\frac{3z}{15}$$

Aplicando a propriedade, teremos:

$$\frac{4x}{8}=\frac{2y}{6}=\frac{3z}{15}=\frac{\overbrace{4x+2y+3z}^{87}}{\underbrace{8+6+15}_{29}}=\frac{87}{29}=3$$

Determinando "*x*", "*y*" e "*z*".

$$\frac{4x}{8}=\frac{2y}{6}=\frac{3z}{15}=3\begin{cases}\dfrac{4x}{8}=3 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{3\times 8}{4} \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{24}{4} \quad\Rightarrow\quad x=6\\[2ex] \dfrac{2y}{6}=3 \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{3\times 6}{2} \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{18}{2} \quad\Rightarrow\quad y=9\\[2ex] \dfrac{3z}{15}=3 \quad\Rightarrow\quad z=\dfrac{3\times 15}{3} \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{45}{3} \quad\Rightarrow\quad z=15\end{cases}$$

Exercícios resolvidos

Para fins didáticos, utilizaremos apenas os métodos das ***propriedades das proporções***.

1. **(NCE) Em uma empresa, o atendimento ao público é feito por 45 funcionários que se revezam, mantendo a relação de três homens para duas mulheres. É correto afirmar que, nessa empresa, dão atendimento:**

a) 18 homens.
b) 16 mulheres.
c) 25 homens.
d) 18 mulheres.
e) 32 homens.

Resolução:

1º método:

Inicialmente, chamaremos de:

"*h*" a quantidade de homens nessa empresa.

"*m*" a quantidade de mulheres nessa empresa.

Se a relação é de três homens para duas mulheres, então, podemos montar a seguinte proporção:

$$\frac{h}{m} = \frac{3}{2}$$

Ou seja, a quantidade total de homens (*h*) está para a quantidade total de mulheres assim como 3 está para 2.

Sendo o *total de funcionários*, entre homens e mulheres, igual a 45 (h + m = 45), então, utilizando-se das ***propriedades das proporções***, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{h}{m} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{h+m}{m} = \frac{3+2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overbrace{h+m}^{45}}{m} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{45}{m} = \frac{5}{2}$$

$$5 \times m = 2 \times 45 \quad \Rightarrow \quad 5m = 90 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{90}{5} \quad \Rightarrow \quad m = 18 \text{ mulheres}$$

Então, a quantidade de homens dessa empresa é igual a:

$$h + m = 45 \quad \Rightarrow \quad h + 18 = 45 \quad \Rightarrow \quad h = 45 - 18 \quad \Rightarrow \quad h = 27 \textit{ homens}$$

Gabarito: D

2º método:

Seja a proporção dada: $\frac{h}{m} = \frac{3}{2}$ ou, ainda, $\frac{h}{3} = \frac{m}{2}$ e a equação $h + m = 45$.

Considerando que o valor da igualdade anterior seja igual a "*k*" – ***constante de proporcionalidade*** – teremos:

$$\frac{h}{3} = \frac{m}{2} = k \begin{cases} h = 3k \\ m = 2k \end{cases}$$

Substituindo na equação:

$$h + m = 45 \quad \Rightarrow \quad 3k + 2k = 45 \quad \Rightarrow \quad 5k = 45 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{45}{5} \quad \Rightarrow \quad k = 9$$

Para os valores de "*h*" e "*m*", temos:

$$\begin{cases} h = 3k \quad \Rightarrow \quad h = 3 \times 9 \quad \Rightarrow \quad h = 27 \textit{ homens} \\ m = 2k \quad \Rightarrow \quad m = 2 \times 9 \quad \Rightarrow \quad m = 18 \textit{ mulheres} \end{cases}$$

Gabarito: D

2. **(FGV) O comprimento de uma estrada está para o comprimento de outra como 3 para 5. Sabendo-se que a diferença entre eles é de 240 km, calcular os seus comprimentos.**
a) 600 km e 400 km.
b) 500 km e 320 km.
c) 400 km e 120 km.
d) 620 km e 360 km.
e) 600 km e 360 km.

Resolução:

1º método:

Inicialmente, chamaremos de:

"E_1" o comprimento da estrada 1.

"E_2" o comprimento da estrada 2.

Se o comprimento da estrada 1 (E_1) está para o comprimento estrada 2 (E_2) como 3 está para 5, então, em forma de proporção, teremos:

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{3}{5}$, como o denominador é maior que o numerador, então $E_2 > E_1$.

Sabendo-se que a *diferença entre os comprimentos dessas estradas é de 240 km*, ou seja $E_2 - E_1 = 240$, então, de acordo com as ***propriedades das proporções***, podemos montar uma nova proporção, tal que:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{\underbrace{E_2 - E_1}_{240}} = \frac{3}{5-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{240} = \frac{3}{2}$$

$$E_1 \times 2 = 3 \times 240 \quad \Rightarrow \quad 2E_1 = 720 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{720}{2} \quad \Rightarrow \quad E_1 = 360 \text{ km}$$

Assim, para o comprimento E_2:

$$E_2 - E_1 = 240 \quad \Rightarrow \quad E_2 - 360 = 240 \quad \Rightarrow \quad E_2 = 360 + 240 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad E_2 = 600 \text{ km}$$

Gabarito: E

2º método:

Seja a proporção dada: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{3}{5}$ ou, ainda, $\frac{E_1}{3} = \frac{E_2}{5}$ e a equação $E_2 - E_1 = 240$.

Considerando que o valor da igualdade anterior seja igual a "*k*" – ***constante de proporcionalidade*** – teremos:

$$\frac{E_1}{3} = \frac{E_2}{5} = k \begin{cases} E_1 = 3k \\ E_2 = 5k \end{cases}$$

Substituindo na equação:

$$E_2 - E_1 = 240 \quad \Rightarrow \quad 5k - 3k = 240 \quad \Rightarrow \quad 2k = 240 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{240}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad k = 120$$

Para os valores de "*h*" e "*m*", temos:

$$\begin{cases} E_1 = 3k \quad \Rightarrow \quad E_1 = 3 \times 120 \quad \Rightarrow \quad E_1 = 360 \text{ km} \\ E_2 = 3k \quad \Rightarrow \quad E_2 = 5 \times 120 \quad \Rightarrow \quad E_2 = 600 \text{ km} \end{cases}$$

Gabarito: E

3. (PUC) Para que se verifique a igualdade $\frac{9}{y} = \frac{x}{8} = \frac{5}{20}$, os valores de *x* e *y* devem ser, respectivamente:

a) 2 e 5.
b) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$.
c) 5 e 35.
d) 4 e 27.
e) 2 e 36.

Resolução:

Observe que, na proporção $\frac{9}{y} = \frac{x}{8} = \frac{5}{20}$, a constante de proporcionalidade (*k*) tem valor igual a $\frac{5}{20}$ ou, simplesmente, $\frac{1}{4}$. Assim, para os valores de "*x*" e "*y*", teremos:

$$\frac{9}{y} = \frac{x}{8} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{9}{y} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 1 \times y = 4 \times 9 \quad \Rightarrow \quad y = 36 \\ \frac{x}{8} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 4 \times x = 1 \times 8 \quad \Rightarrow \quad 4x = 8 \quad \Rightarrow \\ \qquad\quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \end{cases}$$

Gabarito: E

Obs.: a partir do próximo exercício aplicaremos, apenas, um dos métodos apresentados.

4. (FGV) A soma de dois números é 162. O maior está para 13 assim como o menor está para 5. Nessas condições, a diferença entre o número maior e o número menor é:

a) 72.
b) 45.
c) 62.
d) 82.
e) 52

Resolução:

Chamaremos, inicialmente, de: $\begin{cases} \text{"x" o maior dos números.} \\ \text{"y" o menor dos números.} \end{cases}$

Pelo enunciado do texto, temos que: "O maior está para 13 assim como o menor está para 5", ou seja:

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{5}$$

Sabendo-se que a soma dos dois números é 162, então, utilizando-se das propriedades das proporções, teremos:

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overbrace{x+y}^{162}}{13+5} = \frac{x}{13} = \frac{y}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{162^{\div 18}}{18_{\div 18}} = \frac{x}{13} = \frac{y}{5} \quad \Rightarrow \quad 9 = \frac{x}{13} = \frac{y}{5}$$

$$\begin{cases} 9 = \dfrac{x}{13} \quad \Rightarrow \quad x = 9 \times 13 \quad \Rightarrow \quad x = 117 \\ 9 = \dfrac{y}{5} \quad \Rightarrow \quad y = 9 \times 5 \quad \Rightarrow \quad x = 45 \end{cases}$$

Nessas condições, a diferença entre o número maior e o número menor é:

117 – 45 = 72

Gabarito: A

5. **(FCC) Ao fazer a manutenção dos 63 microcomputadores de certa empresa, um funcionário observou que a razão entre o número de aparelhos que necessitavam de reparos e o número dos que não apresentavam defeitos era, nessa ordem, $\frac{2}{7}$. Nessas condições, é verdade que o número de aparelhos com defeitos era:**

a) 3.
b) 7.
c) 14.
d) 17.
e) 21.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de:

"*x*" o número de aparelhos que necessitam de reparos (defeituosos).

"*y*" o número dos que não apresentam defeitos (em perfeita condição de uso).

Sendo a ***razão*** entre o número de aparelhos que necessitavam de reparos e o número dos que não apresentavam defeitos, nessa ordem, $\frac{2}{7}$, então, matematicamente, podemos montar a seguinte proporção:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{7}$$

Sabe-se que *o total de computadores* (os defeituosos e os em perfeita condição de uso) *é igual a* 63, ou seja, x + y = 63, assim, reescrevendo a ***proporçã***o, e, de acordo com suas ***propriedades***, teremos:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{7} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overbrace{x+y}^{63}}{y} = \frac{2+7}{7} \quad \Rightarrow \quad \frac{63}{y} = \frac{9}{7} \quad \Rightarrow \quad 9 \times y = 7 \times 63$$

$9y = 441 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{441}{9} \quad \Rightarrow \quad y = 49$ computadores em ***perfeita condição de uso***.

Para os ***defeituosos***, teremos:

$x + y = 63 \quad \Rightarrow \quad x + 49 = 63 \quad \Rightarrow \quad x = 63 - 49 \quad \Rightarrow \quad x = 14$ computadores defeituosos.

Gabarito: C

6. (FJP) A razão entre dois números é $\dfrac{3}{8}$. Se a soma do maior com o dobro do menor é 42, o maior deles é:

a) 9.
b) 15.
c) 24.
d) 30.
e) 45.

Resolução:

Seja "*x*" e "*y*" os números citados no enunciado da questão. A razão entre esses dois números é $\dfrac{3}{8}$, ou seja:

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{8}$, como o denominador (8) é maior que o numerador (3), então, pela igualdade, concluímos que y x.

"Se a soma do maior com o dobro do menor é 42." Matematicamente, teremos:

$y + 2x = 42$

De acordo com a proporção $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{8}$, se alterarmos um lado dessa ***proporção*** o outro deverá ser alterado da mesma forma. Observe:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\underbrace{y + 2x}_{\text{a soma do maior mais o dobro do menor}}} = \frac{3}{\underbrace{8 + 2\times 3}_{\text{a soma do maior mais o dobro do menor}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\underbrace{y + 2x}_{42}} = \frac{3}{\underbrace{8 + 2\times 3}_{14}}$$

$$\frac{x}{42} = \frac{3}{14} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\times 42}{14} \quad \Rightarrow \quad x = 3\times 3 \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

Portanto, o valor de "*y*" valerá:

$y + 2x = 42 \quad \Rightarrow \quad y = 42 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = 42 - 2\times 9 \quad \Rightarrow \quad y = 42 - 18$

$y = 24$

Gabarito: C

7. (FCC) Comparando-se os números de processos de dois lotes, verifica-se que um excede o outro em 12 unidades. Se a razão entre esses números é $\dfrac{29}{31}$, quantas unidades apresenta o lote que tem mais processos?

a) 174.
b) 182.
c) 184.
d) 186.
e) 192.

Resolução:

Sejam "*x*" e "*y*" os dois números de processos de dois lotes. Verifica-se que um excede o outro em 12 unidades, ou seja, sendo x > y, então:

$$x = y + 12 \quad \Rightarrow \quad x - y = 12$$

A razão entre esses números é $\frac{29}{31}$, assim, matematicamente, teremos:

$$\frac{y}{x} = \frac{29}{31}$$

Aplicando as ***propriedades das proporções***, podemos reescrever a proporção anterior de forma que apareça a subtração $x - y$, portanto, teremos:

$$\frac{y}{x} = \frac{29}{31} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\underbrace{x - y}_{12}} = \frac{29}{31 - 29} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{12} = \frac{29}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{29 \times 12}{2}$$

$$y = 29 \times 6 \quad \Rightarrow \quad y = 174$$

Para o valor de "*x*", teremos:

$$x = y + 12 \quad \Rightarrow \quad x = 174 + 12 \quad \Rightarrow \quad x = 186$$

Gabarito: D

8. (FCC) Dos funcionários de um Tribunal, sabe-se que o número de homens excede o número de mulheres em 30 unidades. Se a razão entre o número de mulheres e o de homens, nessa ordem, é $\frac{3}{5}$, o total de funcionários desse Tribunal é:

a) 45.
b) 75.
c) 120.
d) 135.
e) 160.

Resolução:

Primeiramente, definiremos como:

"*x*" o número de homens que trabalham no Tribunal.

"*y*" o número de mulheres que trabalham no Tribunal.

Sabe-se que o número de homens excede o número de mulheres em 30 unidades, ou seja:

$$x = y + 30 \text{ ou } x - y = 30$$

Se a razão entre o número de mulheres e o de homens, nessa ordem, é $\frac{3}{5}$, portanto, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{5}$$

Aplicando ***as propriedades das proporções***, podemos reescrever a proporção anterior de forma que apareça a subtração $x - y$, portanto, teremos:

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\underbrace{x - y}_{30}} = \frac{3}{5 - 3} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{30} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \times y = 3 \times 30$$

$$2y = 90 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{60}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 45 \text{ mulheres}$$

O número de homens ("*x*") será de:

$$x = y + 30 \quad \Rightarrow \quad x = 45 + 30 \quad \Rightarrow \quad x = 75 \textit{ homens}$$

Gabarito: B

9. (FCC) Uma empresa resolveu aumentar seu quadro de funcionários. Numa 1ª etapa contratou 20 mulheres, ficando o número de funcionários na razão de 4 homens para cada 3 mulheres. Numa 2ª etapa foram contratados 10 homens, ficando o número de funcionários na razão de 3 homens para cada 2 mulheres. Inicialmente, o total de funcionários dessa empresa era:

a) 90.
b) 120.
c) 150.
d) 180.
e) 200.

Resolução:

Inicialmente, a empresa possuía uma quantidade de "*h*" homens e "*m*" mulheres, antes da primeira contratação.

1ª etapa de contratação: contratou 20 mulheres, ficando o número de funcionários na razão de 4 homens para cada 3 mulheres, ou seja:

$$\frac{h}{\underbrace{m + 20}_{\text{contratação de 20 mulheres}}} = \frac{4}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

2ª etapa de contratação: contratou 10 homens, ficando o número de funcionários na razão de 3 homens para cada 2 mulheres, ou seja:

$$\frac{\overbrace{h + 10}^{\text{contratação de 10 homens}}}{m + 20} = \frac{3}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Isolando-se o termo "$m + 20$" nas (1) e (2), teremos:

$$\frac{h}{m + 20} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad 3 \times h = 4 \times (m + 20) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m + 20 = \frac{3h}{4}$$

$$\frac{h + 10}{m + 20} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \times (h + 10) = 3 \times (m + 20) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m + 20 = \frac{2(h + 10)}{3}$$

Igualando-se os resultados obtidos: $\frac{3h}{4} = \frac{2(h+10)}{3}$

$$\frac{3h}{4} = \frac{2(h+10)}{3} \quad \Rightarrow \quad 3.3h = 4.2(h+10) \quad \Rightarrow \quad 9h = 8(h+10) \quad \Rightarrow \quad 9h = 8h + 80$$

$9h - 8h = 80 \quad \Rightarrow \quad h = 80$ *homens*

Para o número de funcionários mulheres, teremos:

$$m + 20 = \frac{3h}{4} \quad \Rightarrow \quad m + 20 = \frac{3 \times 80}{4} \quad \Rightarrow \quad m + 20 = \frac{240}{4} \quad \Rightarrow \quad m + 20 = 60$$

$\Rightarrow \quad m = 60 - 20 \quad \Rightarrow \quad m = 40$ mulheres

O total de funcionários dessa empresa era: 80 + 40 = 120 funcionários

Gabarito: B

10. (FEC) Uma certa mistura contém álcool e gasolina na razão de 1 para 5, respectivamente. Quantos centímetros cúbicos de gasolina há em 162 litros dessa mistura?

a) 135.000.
b) 32.400.
c) 1.350.
d) 324.
e) 135.

Resolução:

As quantidades de álcool e de gasolina presentes na mistura serão representadas por "*A*" e "*G*". Assim, se a mistura possui 162 litros, então, a soma das quantidades de álcool e gasolina é igual a 162.

$$A + G = 162$$

Mas essa mistura contém álcool e gasolina na razão de 1 para 5, respectivamente, ou seja:

$$\frac{A}{G} = \frac{1}{5}$$

Aplicando as ***propriedades das proporções***, podemos reescrever a proporção anterior de forma que apareça a soma A + G, portanto, teremos:

$$\frac{A}{G} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overbrace{A + G}^{162}}{G} = \frac{1 + 5}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{162}{G} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad 6 \times G = 5 \times 162$$

$$G = \frac{5 \times 162}{6} \quad \Rightarrow \quad G = 5 \times 27 \quad \Rightarrow \quad G = 135 \text{ litros}$$

Lembrando que 1,0 litro equivale a 1,0 dm^3 ou 1.000 cm^3.

Então, 135 litros equivalerão a 135 × 1.000 = 135.000 cm^3.

Gabarito: A

11. (FCC) Num dado momento, no almoxarifado de certa empresa, havia dois tipos de impressos: *A* e *B*. Após a retirada de 80 unidades de *A*, observou-se que o número de impressos *B* estava para o de *A* na proporção de 9 para 5. Em seguida, foram retiradas 100 unidades de *B* e a proporção passou a ser de 7 de *B* para cada 5 de *A*. Inicialmente, o total de impressos dos dois tipos era:

a) 780.
b) 800.
c) 840.
d) 860.
e) 920.

Resolução:

As quantidades de impressos, inicialmente, no almoxarifado, eram de "A" e "B". Após a retirada de 80 unidades de A, observou-se que o número de impressos B estava para o de A na proporção de 9 para 5, ou seja:

$$\frac{B}{\underbrace{A-80}_{\text{após a retirada de 80 unidades de A}}}=\frac{9}{5}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Em seguida, foram retiradas 100 unidades de *B,* e a proporção passou a ser de 7 de *B* para cada 5 de *A*, assim, teremos:

$$\frac{\overbrace{B-100}^{\text{após a retirada de 100 unidades de B}}}{A-80}=\frac{7}{5}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

As proporções (1) e (2) podem gerar as seguintes equações:

$$\frac{B}{A-80}=\frac{9}{5} \quad\Rightarrow\quad 9\times(A-80)=5\times B \quad\Rightarrow\quad 9A-720=5B \quad\Rightarrow \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\Rightarrow\quad 9A-5B=720$$

e

$$\frac{B-100}{A-80}=\frac{7}{5} \quad\Rightarrow\quad 7\times(A-80)=5\times(B-100) \quad\Rightarrow\quad 7A-560=5B-500$$

$$7A-5B=560-500 \quad\Rightarrow\quad 7A-5B=60\ \ldots\ldots\ldots(4)$$

Formando um sistema linear entre as relações (3) e (4), teremos:

$$\begin{cases}9A-5B=720\ldots\ldots\ldots\ldots(3)\\7A-5B=60\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)\end{cases}$$

Multiplicando todos os membros da relação (4) por (–1) e somando-se membro a membro as relações, obteremos:

$$+\begin{cases}9A-5B=720\\-7A+5B=-60\end{cases}$$
$$\overline{9A-7A+5B-5B=720-60}$$

$$2A = 660 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{660}{2} \quad \Rightarrow \quad A = 330$$

Para o valor de "*B*":

$$7A - 5B = 60 \quad \Rightarrow \quad 7 \times 330 - 5B = 60 \quad \Rightarrow \quad 2.310 - 60 = 5B \quad \Rightarrow \quad 2.250 = 5B$$

$$B = \frac{2.250}{5} \quad \Rightarrow \quad B = 450$$

Logo, o total de impressos dos dois tipos era: $A + B = 330 + 450 = 780$ impressos.

Gabarito: A

12. (FCC) Dos funcionários de uma empresa sabe-se que o número de mulheres está para o de homens assim como 12 está para 13. Relativamente ao total de funcionários dessa empresa, é correto afirmar que o número de funcionários do sexo feminino corresponde a:

a) 40%.
b) 42%.
c) 45%.
d) 46%.
e) 48%.

Resolução:

A quantidade de mulheres e homens dessa empresa será representada por, respectivamente, "*m*" e "*h*", sendo que o número de mulheres está para o de homens assim como 12 está para 13. Assim, teremos:

$$\frac{m}{h} = \frac{12}{13}$$

O total de funcionários dessa empresa, ou seja, a soma das mulheres e dos homens representa 100% da mesma, portanto, podemos escrever:

$$m + h = 100\%$$

Aplicando as ***propriedades das proporções***, podemos reescrever a proporção anterior de forma que apareça a soma m + h. Assim, temos que:

$$\frac{m}{h} = \frac{12}{13} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{\underbrace{m + h}_{100\%}} = \frac{12}{12 + 13} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{100\%} = \frac{12}{25} \quad \Rightarrow \quad 25 \times m = 12 \times 100\%$$

$$25m = 1.200\% \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1.200\%}{25} \quad \Rightarrow \quad m = 48\% \text{ de mulheres}$$

Gabarito: E

13. (FCC) No almoxarifado de certa empresa há canetas e lápis, num total de 180 unidades. Se a razão entre o dobro do número de lápis e a terça parte do número de canetas é $\frac{18}{7}$, então a diferença positiva entre os números de canetas e lápis é:

a) 62.
b) 65.
c) 68.
d) 70.
e) 72.

Resolução:

Sendo "*C*" e "*L*" as quantidades de *caneta* e *lápis* no almoxarifado, e nesse almoxarifado há 180 unidades entre canetas e lápis, então, temos que:

$C + L = 180$

Se a razão entre o dobro do número de lápis e a terça parte do número de canetas é $\frac{18}{7}$, então, matematicamente, teremos:

$$\frac{\overbrace{2L}^{\text{dobro do nº de lápis}}}{\underbrace{\frac{C}{3}}_{\text{terça parte do nº de canetas}}} = \frac{18}{7} \text{ ou ainda:}$$

$$2L \times \frac{3}{C} = \frac{18}{7} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{6L}{C} = \frac{18}{7}\right) \div 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{C} = \frac{3}{7}$$

Aplicando as ***propriedades das proporções***, podemos reescrever a proporção anterior de forma que apareça a soma C + L. Assim:

$$\frac{L}{C} = \frac{3}{7} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overbrace{L + C}^{180}}{C} = \frac{3 + 7}{7} \quad \Rightarrow \quad \frac{180}{C} = \frac{10}{7} \quad \Rightarrow \quad 10 \times C = 7 \times 180$$

$$10C = 1.260 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1.260}{10} \quad \Rightarrow \quad C = 126 \text{ canetas}$$

A quantidade de lápis será dada por:

$C + L = 180 \quad \Rightarrow \quad 126 + L = 180 \quad \Rightarrow \quad L = 180 - 126 \quad \Rightarrow \quad L = 54$ lápis

Então, a diferença positiva entre os números de canetas e lápis será de:

$C - L = 126 - 54 = 72$

Gabarito: E

14. (FCC) Das pessoas atendidas em um ambulatório certo dia, sabe-se que 12 foram encaminhadas a um clínico geral e as demais para tratamento odontológico. Se a razão entre o número de pessoas encaminhadas ao clínico e o número restante, nessa ordem, é $\frac{3}{5}$, o total de pessoas atendidas foi:

a) 44.
b) 40.
c) 38.
d) 36.
e) 32.

Resolução:

Pelo enunciado, temos que:

12 pessoas foram encaminhadas a um clínico geral;

"*x*" pessoas (as demais) encaminhadas para o tratamento odontológico.

Se a razão entre o número de pessoas encaminhadas ao clínico e o número restantes, nessa ordem, é $\frac{3}{5}$, então podemos estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{5}$$

Pela proporção anterior, teremos para o valor de "*x*":

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad 3 \times x = 5 \times 12 \quad \Rightarrow \quad 3x = 60 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{60}{3} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad x = 20$ (as demais pessoas)

Portanto, o número total de pessoas atendidas será de:
$12 + 20 = 32$ pessoas
Gabarito: E

15. (FCC) Se a razão entre dois números é $\frac{4}{5}$ e sua soma é igual a 27, o menor deles é:

a) primo.
b) divisível por 5.
c) múltiplo de 7.
d) divisível por 6.
e) múltiplo de 9.

Resolução:

Sejam "*x*" e "*y*" os números referidos. Assim, a razão entre esses números é $\frac{4}{5}$ e a soma desses números ("*x*" e "*y*") igual a 27, então, tem-se que:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5} \quad e \quad x + y = 27$$

Aplicando as propriedades das proporções, podemos reescrever a proporção anterior de forma que apareça a soma C + L. Assim, temos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overbrace{x + y}^{27}}{y} = \frac{4+5}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{27}{y} = \frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad 9 \times y = 5 \times 27$$

$$9y = 135 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{135}{9} \quad \Rightarrow \quad y = 15$$

Para o valor de "*y*" teremos:
$x + y = 27 \quad \Rightarrow \quad x = 27 - 15 \quad \Rightarrow \quad x = 12$

Portanto, sendo "*x*" ($x = 12$) o menor dos valores, esse número é, dentre as alternativas, divisível por 6.

Gabarito: D

16. (FCC) Três substâncias *A*, *B* e *C* são utilizadas na composição de um determinado produto *D*. A fórmula de *D* exige a proporção de 11 g de *A* para 12 g de *B* e para 13 g de *C*. Quantos gramas da substância *C* entrarão na composição de 1.440 g do produto *D*?

a) 520.
b) 480.
c) 440.
d) 400.
e) 360.

1º método de resolução:

Uma forma de interpretar esse enunciado é da seguinte forma:

"A fórmula de *D* exige a proporção de 11 g de *A* para 12 g de *B* e para 13 g de *C*."

$\Downarrow$ ou

A fórmula de *D* exige uma proporção tal que a quantidade da substância *A* está para a substância B, assim como 11 está para 12, e a quantidade da substância B está para a substância C, assim como 12 está para 13.

Independente da formulação da proporção, matematicamente, será representada por:

$$\frac{A}{B} = \frac{11}{12} \text{..........(1)} \quad \text{e} \quad \frac{B}{C} = \frac{12}{13} \text{..........(2) ou ainda:}$$

$$B = \frac{12C}{13} \text{ substituindo em (1) } \frac{A}{\frac{12C}{13}} = \frac{11}{12} \quad \Rightarrow \quad A \times \frac{13}{12C} = \frac{11}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{C} = \frac{11}{13} \text{.......(3)}$$

Sendo a substância *D* formada pela composição de *A*, *B* e *C*, então teremos:

$D = A + B + C$

Mas para uma composição de 1.440g do produto D, então teremos:

$A + B + C = 1.440\text{g}$ ....(4)

Para determinarmos quantos gramas da substância *C* entrarão na composição de 1.440 g do produto *D*, devemos isolar os valores de "*B*" e "*A*", respectivamente, das relações (2) e (3) e substituir em (4), como se segue:

$$\frac{B}{C} = \frac{12}{13} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{12C}{13} \quad \text{e} \quad \frac{A}{C} = \frac{11}{13} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{11C}{13}$$

$$A + B + C = 1.440\text{g} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{11C}{13} + \frac{12C}{13} + C = 1.440\right) \times 13$$

$$11C + 12C + 13C = 18.720 \quad \Rightarrow \quad 36C = 18.720 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{18.720}{36}$$

$C = 520\,\text{g}$

Gabarito: A

2º método de resolução:

Outra forma de interpretar esse enunciado é da seguinte forma:

"A fórmula de *D* exige a proporção de 11 g de *A* para 12 g de *B* e para 13 g de *C*".

$\Downarrow$ ou

A fórmula de *D* exige uma proporção tal que: a quantidade da substância *A* está para 11, assim como a quantidade de *B* está para 12, e a quantidade de C está para 13.

$$\frac{A}{11} = \frac{B}{12} = \frac{C}{13}$$

Considerando que o valor da igualdade anterior seja igual a "*k*" – ***constante de proporcionalidade*** – teremos:

$$\frac{A}{11} = \frac{B}{12} = \frac{C}{13} = k \quad \begin{cases} A = 11k \\ B = 12k \\ C = 13k \end{cases}$$

Substituindo os valores anteriores na equação A + B + C = 1.440:

$$A + B + C = 1.440 \quad \Rightarrow \quad 11k + 12k + 13k = 1.440 \quad \Rightarrow \quad 36k = 1.440 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{1.440}{36} \quad \Rightarrow \quad k = 40$$

Determinando os valores de "*A*", "*B*" e "*C*":

$$\begin{cases} A = 11k \quad \Rightarrow \quad A = 11 \times 40 \quad \Rightarrow \quad A = 440g \\ B = 12k \quad \Rightarrow \quad B = 12 \times 40 \quad \Rightarrow \quad B = 480g \\ C = 13k \quad \Rightarrow \quad C = 13 \times 40 \quad \Rightarrow \quad C = 520g \end{cases}$$

Gabarito: A

17. (FCC) Em 700 ml de certa solução química que contém ácido e base na proporção de 9 para 5, respectivamente, a quantidade de ácido contida nessa solução é de:

a) 550 ml.
b) 450 ml.
c) 375 ml.
d) 250 ml.
e) 185 ml.

Resolução:

Observe que a solução química é formada por ácido, que representaremos por "*A*", e base, que representaremos por "*B*". Se a proporção é tal que as quantidades de ácido e base formam uma proporção de 9 para 5, então, teremos:

$$\frac{A}{B} = \frac{9}{5}$$

Sendo a solução química (ácido + base) igual a 700 ml, então:

$$A + B = 700 \text{ ml}$$

Para determinarmos a quantidade de ácido ("*A*"), aplicaremos uma das propriedades das proporções, na qual reescreveremos a proporção anterior de forma que apareça a soma A + B. Assim, temos que:

$$\frac{A}{B} = \frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{\underbrace{A + B}_{700}} = \frac{9}{9+5} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{700} = \frac{9}{14} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{9 \times 700}{14}$$

A = 450g

Gabarito: B

18. (FCC) Relativamente a duas seções de uma Unidade do Tribunal Regional do Trabalho, sabe-se que:

- **o número de funcionários de uma excede o da outra em 15 unidades;**
- **a razão entre os números de seus funcionários é igual a $\frac{7}{12}$.**

Nessas condições, o total de funcionários das duas seções é:

a) 65.
b) 63.
c) 59.
d) 57.
e) 49.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de:

"*x*" a quantidade de funcionários da 1ª seção do TRT.

"*y*" a quantidade de funcionários da 2ª seção do TRT. (sendo *y* > *x*)

Sabe-se que:

- o número de funcionários de uma excede o da outra em 15 unidades $\rightarrow$ y = x + 15 ou y – x = 15
- a razão entre os números de seus funcionários é igual $\frac{7}{12} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7}{12}$

Aplicando as propriedades das proporções, podemos reescrever a proporção anterior de forma que apareça a subtração y – x. Assim, temos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{7}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\underbrace{y - x}_{15}} = \frac{7}{12-7} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{15} = \frac{7}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7 \times 15}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 21$$

Para o valor de "*y*", teremos:

$$y = x + 15 \quad \Rightarrow \quad y = 21 + 15 \quad \Rightarrow \quad y = 36$$

Nessas condições, o total de funcionários das duas seções será de:

21 + 36 = 57 funcionários.

Gabarito: D

19. (FCC) Certo dia, em uma Unidade do Tribunal Regional Federal, um auxiliar judiciário observou que o número de pessoas atendidas no período da tarde excedera o das atendidas pela manhã em 30 unidades. Se a razão entre a quantidade de pessoas atendidas no período da manhã e a quantidade de pessoas atendida no período da tarde era $\frac{3}{5}$, então é correto afirmar que, nesse dia, foram atendidas:

a) 130 pessoas.
b) 48 pessoas pela manhã.
c) 78 pessoas à tarde.
d) 46 pessoas pela manhã.
e) 75 pessoas à tarde.

Resolução:

Inicialmente, chamaremos de:
"*T*" a quantidade de pessoas atendidas no período da tarde.
"*M*" a quantidade de pessoas atendidas pela manhã.

Pelo enunciado, sabe-se que: "...o número de pessoas atendidas no período da tarde excedera o das atendidas pela manhã em 30 unidades", ou seja:

$$T = M + 30 \text{ ....(1)}$$

E que a razão entre a quantidade de pessoas atendidas no período da manhã e a quantidade de pessoas atendida no período da tarde era $\frac{3}{5}$, então, teremos:

$$\frac{M}{T} = \frac{3}{5}$$

Substituindo o valor de "*T*" da relação (1), na proporção construída, teremos, para o valor d "*M*":

$$\frac{M}{M+30} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad 5 \times M = 3 \times (M + 30) \quad \Rightarrow \quad 5M = 3M + 90$$

$$5M - 3M = 90 \quad \Rightarrow \quad 2M = 90 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{90}{2} \quad \Rightarrow \quad M = 45 \text{ pessoas}$$

Para o valor de "*T*", temos que:

$$T = M + 30 \quad \Rightarrow \quad T = 45 + 30 \quad \Rightarrow \quad T = 75 \text{ pessoas}$$

Gabarito: E

20. (FEC) Um determinado elevador pode transportar no máximo 6 homens ou 9 mulheres, considerando um determinado peso médio para mulheres e um determinado peso médio para homens. Se nesse elevador já se encontram 4 homens, a quantidade máxima de mulheres que ainda podem entrar sem ultrapassar a capacidade máxima do elevador é de:

a) 12.
b) 6.
c) 3.
d) 2.
e) 5.

Resolução:

A razão de proporcionalidade entre a quantidade de homens e a quantidade de mulheres é de 6 para 9, ou seja:

$$\frac{homens}{mulheres} = \frac{6}{9}$$

Se no elevador já se encontram quatro homens, então, podemos determinar seu equivalente à quantidades de mulheres.

$$\frac{4}{m} = \frac{6}{9} \quad \Rightarrow \quad 6 \times m = 4 \times 9 \quad \Rightarrow \quad 6m = 36 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{36}{6} \quad \Rightarrow \quad m = 6 \text{ mulheres}$$

Ou seja, esses quatro homens equivalem a seis mulheres. Assim, como 9 é a quantidade máxima de mulheres nesse elevador, então podem entrar mais três mulheres.

$$\underbrace{4 \textit{ homens}}_{\substack{\text{o que equivale} \\ \text{a 6 mulheres}}} + 3 \text{ mulheres} = 9 \text{ mulheres}$$

Gabarito: C

Capítulo 19

Sucessões de números proporcionais – Grandezas proporcionais (diretas e/ou inversas)

19.1. Números proporcionais

Consideremos a seguinte proporção: $\frac{7}{21}=\frac{9}{27}=\frac{10}{30}=\frac{18}{54}$.

Escreveremos os ***numeradores*** em uma linha e, por baixo de cada numerador, o ***denominador*** correspondente.

7	9	10	18	(A)
21	27	30	54	(B)

Dizemos, nesse caso, que os números que figuram na linha de cima (A) são ***diretamente proporcionais*** aos números que figuram na linha de baixo (B).

Obs.: De um modo geral, dizemos que vários números são ***proporcionais*** a outros tantos números, quando é ***constante a razão*** de cada número da linha de cima para o número correspondente da linha de baixo.

Assim, os números "a_1", "b_1", "c_1" e "d_1" serão proporcionais aos números "a_2", "b_2", "c_2" e "d_2", se tivermos a seguinte relação entre os mesmos:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}=\ldots$$

Podemos reescrever essa relação de proporcionalidade apenas invertendo as razões anteriores:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}=\frac{d_2}{d_1}=\ldots$$

Assim, podemos afirmar que a sucessão dos números "a_1", "b_1", "c_1" e "d_1" são ***diretamente proporcionais*** aos números "a_2", "b_2", "c_2" e "d_2". Bem como a sucessão dos números "a_2", "b_2", "c_2" e "d_2" são ***diretamente proporcionais*** aos números "a_1", "b_1", "c_1" e "d_1".

19.2. Números inversamente proporcionais

Considere iguais os seguintes produtos: 9 × 4 = 12 × 3 = 2 × 18, cada um com dois fatores.

Escrevemos o ***primeiro fator*** de cada produto (9; 12 e 2) numa linha e, na linha de baixo, o ***inverso do segundo fator*** (4; 3 e 18), da seguinte forma:

$$9 \qquad 12 \qquad 2 \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{2}{18} \qquad \text{(B)}$$

Logo, podemos concluir que as duas relações a seguir são equivalentes:

$$\frac{9}{\frac{1}{4}} = \frac{12}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{18}} \Leftrightarrow 9 \times 4 = 12 \times 3 = 2 \times 18$$

Assim, podemos verificar que 9; 12 e 2 são ***proporcionais*** aos ***inversos*** de 4; 3 e 18. Diz-se que vários números são ***inversamente proporcionais*** a outros tantos quando são ***proporcionais aos inversos*** desses outros.

Em geral, os números "a_1", "b_1" e "c_1" são inversamente proporcionais aos números "a_2", "b_2" e "c_2", quando entre esses números verificamos a seguinte relação:

$$a_1 \times a_2 = b_1 \times b_2 = c_1 \times c_2 \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{b_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{c_1}{\frac{1}{c_1}}$$

19.3. Números diretamente e inversamente proporcionais

Considere a seguinte relação dada pelas seguintes igualdades: $\frac{3 \times 4}{36} = \frac{4 \times 5}{60} = \frac{5 \times 8}{120}$.

Se considerarmos o ***primeiro fator*** de cada produto (3, 4 e 5) em cada ***antecedente***, esses estão relacionados na ***razão direta*** dos seus respectivos ***consequentes*** (36; 60 e 120) e, ***ao mesmo tempo***, na ***razão inversa*** do ***segundo fator*** de cada *antecedente* (4; 5 e 8).

Lembramos que a expressão $\frac{3 \times 4}{36} = \frac{4 \times 5}{60} = \frac{5 \times 8}{120}$ também poderá ser escrita na forma:

$$\frac{\frac{3}{36}}{4} = \frac{\frac{4}{60}}{5} = \frac{\frac{5}{120}}{8} \quad \therefore \quad \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15}$$

19.4. Coeficiente ou constante de proporcionalidade (*k*)

É o ***resultado*** imediato da ***divisão*** entre as ***duas grandezas***, sejam elas ***diretas*** ou ***inversas***.

Exemplo 1:

Seja a seguinte proporção prolongada (igualdade entre várias razões), na razão direta: $\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}$

Fazendo a divisão de cada razão, obtemos os seguintes resultados:

$$\frac{4}{8}=0,5 \qquad \frac{5}{10}=0,5 \qquad \frac{6}{12}=0,5$$

Portanto, nesse caso, a constante de proporcionalidade será igual a: $k = 0,5$.

Exemplo 2:

Seja a seguinte proporção prolongada, na razão inversa: $\frac{5}{\frac{1}{12}}=\frac{4}{\frac{1}{15}}=\frac{3}{\frac{1}{20}}$

Fazendo a divisão de cada razão, obtemos os seguintes resultados:

$$\frac{5}{\frac{1}{12}}=5\times 12=60 \qquad \frac{4}{\frac{1}{15}}=4\times 15=60 \qquad \frac{3}{\frac{1}{20}}=3\times 20=60$$

Portanto, nesse caso, a constante de proporcionalidade será igual a: $k = 60$.

Exercícios resolvidos

1. **Dada a sucessão de números proporcionais:** $\begin{cases} b-8 \quad ; \quad a+5 \quad ; \quad 12 \\ 2 \quad ; \quad 6 \quad ; \quad 3 \end{cases}$

O valor de *a* – *b* será igual a:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Resolução:

Relacionando-se as grandezas de forma ***diretamente proporcional***, teremos: $\frac{b-8}{2}=\frac{a+5}{6}=\frac{12}{3}$

$$\frac{b-8}{2}=\frac{a+5}{6}=\frac{12}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{b-8}{2}=\frac{a+5}{6}=4 \begin{cases} \frac{b-8}{2}=4 \ \Rightarrow \ b-8=8 \ \Rightarrow \\ \frac{a+5}{6}=4 \ \Rightarrow \ a+5=24 \ \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ b=8+8 \ \Rightarrow \ b=16$$

$$\Rightarrow \ a=24-5 \ \Rightarrow \ a=19$$

Fazendo $a - b = 19 - 16 = 3$

Gabarito: C

2. Dada a sucessão de números inversamente proporcionais:

$$\begin{cases} \mathbf{3} \quad ; \quad \mathbf{4} \quad ; \quad \mathbf{12} \\ \\ \mathbf{1+a} \quad ; \quad \mathbf{6} \quad ; \quad \mathbf{9-b} \end{cases}$$

Nesse caso, tem-se que:

a) $a = b$.
b) $a + b = 1$.
c) $a - b = 1$.
d) $a = 2b$.
e) $b = 3a$.

Resolução:

Relacionando-se as grandezas de forma ***inversamente diretamente proporcional***:

$$\frac{3}{\frac{1}{1+a}} = \frac{4}{\frac{1}{6}} = \frac{12}{\frac{1}{9-b}}$$

$$\frac{3}{\frac{1}{1+a}} = \frac{4}{\frac{1}{6}} = \frac{12}{\frac{1}{9-b}} \Rightarrow 3 \times (1+a) = 4 \times 6 = 12 \times (9-b) \Rightarrow 3(1+a) = 24 = 12(9-b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(1+a) = 24 \Rightarrow 1+a = \dfrac{24}{3} \Rightarrow 1+a = 8 \Rightarrow a = 8-1 \Rightarrow a = 7 \\ \\ 12(9-b) = 24 \Rightarrow 9-b = \dfrac{24}{12} \Rightarrow 9-b = 2 \Rightarrow 9-2 = b \Rightarrow b = 7 \end{cases}$$

Portanto, tem-se que $a = b$.

Gabarito: A

3. Observe as três linhas da sucessão de números a seguir:

$$\begin{cases} \mathbf{2} \quad ; \quad \mathbf{5} \quad ; \quad \mathbf{9} \quad \mathbf{1^a\ linha} \\ \\ \mathbf{x+3} \quad ; \quad \mathbf{y-5} \quad ; \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{2^a\ linha} \\ \\ \mathbf{3} \quad ; \quad \mathbf{6} \quad ; \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3^a\ linha} \end{cases}$$

Sabendo-se que os elementos da 1ª linha são diretamente proporcionais aos elementos da 2ª linha e, simultaneamente, inversamente proporcionais aos elementos da 3ª linha, determine, nesse caso, o valor de y^x será igual:

a) 2.
b) 5.
c) 10.
d) $\frac{1}{5}$.
e) $\frac{1}{10}$.

Resolução:

De acordo com o enunciado, temos a seguinte relação de proporcionalidade: $\dfrac{1^a \text{ linha} \times 3^a \text{ linha}}{2^a \text{ linha}}$.

$$\frac{2\times 3}{x+3}=\frac{5\times 6}{y-5}=\frac{9\times 2}{6} \Rightarrow \frac{6}{x+3}=\frac{30}{y-5}=3 \begin{cases} \dfrac{6}{x+3}=3 \Rightarrow \dfrac{6}{3}=x+3 \Rightarrow \\ \dfrac{30}{y-5}=3 \Rightarrow \dfrac{30}{3}=y-5 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2=x+3 \Rightarrow x=-1$$

$$\Rightarrow 10=y+5 \Rightarrow y=5$$

Fazendo $y^x = 5^{-1} = \dfrac{1}{5^1} = \dfrac{1}{5}$.

Gabarito: D

4. **(FCC) Considere que a carência de um seguro-saúde é inversamente proporcional ao valor da franquia e diretamente proporcional à idade do segurado. Se o tempo de carência para um segurado de 20 anos com uma franquia de R$1.000,00 é dois meses, o tempo de carência para um segurado de 60 anos com uma franquia de R$1500,00 é, em meses, igual a:**

a) 4.
b) 4,5.
c) 5.
d) 5,5.
e) 6.

Resolução:

Partindo do exposto do enunciado, tem-se a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{\text{tempo de carência} \times \text{valor da franquia}}{\text{idade do segurado}}$$

Lê-se: "O tempo de carência de um seguro-saúde é inversamente proporcional ao valor da franquia e diretamente proporcional à idade do segurado."

Se o tempo de carência para um segurado de 20 anos com uma franquia de R$1.000,00 é dois meses, o tempo de carência para um segurado de 60 anos com uma franquia de R$1500,00 é, em meses, igual a:

$$\frac{2 \text{ meses} \times R\$\,1.000,00}{20 \text{ anos}} = \frac{t \times R\$\,1.500,00}{60 \text{ anos}} \Rightarrow \frac{2.000}{20} = \frac{1.500t}{60} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 \times 60 = 1.500t \Rightarrow$$

$$1.500t = 6.000 \Rightarrow t = \frac{6.000}{1.500} \Rightarrow t = 4 \text{ meses}$$

Gabarito: A

5. **(FCC) Uma gratificação deverá ser dividida entre dois funcionários de uma empresa, em partes que são, ao mesmo tempo, inversamente proporcionais às suas respectivas idades e diretamente proporcionais aos seus respectivos tempos de serviço na empresa. Sabe-se também que X, que tem 24 anos, trabalha há cinco anos na empresa, e Y, que tem 32 anos, trabalha há 12 anos. Se Y receber R$1 800,00, o valor da gratificação é:**

a) R$2.400,00.
b) R$2.550,00.
c) R$2.680,00.
d) R$2.700,00.
e) R$2.800,00.

Resolução:

Partindo do exposto do enunciado, tem-se a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{\text{valor da gratificação} \times \text{idade}}{\text{tempo de serviço}}$$

Lê-se: "Uma gratificação deverá ser dividida em partes que são, ao mesmo tempo, inversamente proporcionais às suas respectivas idades e diretamente proporcionais aos seus respectivos tempos de serviço de empresa."

Sabe-se também que X, que tem 24 anos, trabalha há cinco anos na empresa, e Y, que tem 32 anos, trabalha há 12 anos. Se Y receber R$1 800,00, o valor da gratificação é

$$\frac{X \times 24 \text{ anos}}{5 \text{ anos}} = \frac{R\$ 1.800,00 \times 32 \text{ anos}}{12 \text{ anos}} \quad \Rightarrow \quad \frac{24X}{5} = \frac{1.800 \times 32}{12} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{5 \times 1.800 \times 32}{12 \times 24} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{288.000}{288} \quad \Rightarrow \quad X = R\$ 1.000,00$$

Somando-se as quantias: X + Y = 1.000 + 1.800 = R$2.800,00

Gabarito: E

Capítulo 20

Divisão em partes proporcionais

20.1. Divisão em partes diretamente proporcionais

Dividir um número em partes proporcionais a outros termos é decompô-lo em parcelas proporcionais a esses termos.

Exemplo: Representando por A, B e C as parcelas de 180, proporcionais a 3, 4 e 11, teremos:

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{11}$$

Para determinarmos as parcelas A, B e C, é suficiente conhecer o fator ou coeficiente de proporcionalidade. Da proporção anterior, tem-se que:

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{11} = k \text{ , onde: } \begin{cases} A = 3k \\ B = 4k \\ C = 11k \end{cases}$$

Sabendo-se que A + B + C = 180, determinaremos o fator ou constante de proporcionalidade:

$$A + B + C = 180 \Rightarrow 3k + 4k + 11k = 180 \Rightarrow 18k = 180 \Rightarrow k = \frac{180}{18} \Rightarrow k = 10$$

Para os valores de A, B e C:

$$\begin{cases} A = 3k \Rightarrow A = 3 \times 10 \Rightarrow A = 30 \\ B = 4k \Rightarrow B = 4 \times 10 \Rightarrow B = 40 \\ C = 11k \Rightarrow C = 11 \times 10 \Rightarrow C = 110 \end{cases}$$

20.2. Divisão em partes inversamente proporcionais

Dividir um número em partes inversamente proporcionais a outros é o mesmo que dividi-lo em partes diretamente proporcionais aos inversos desses outros.

Exemplo: Dividir o número 341 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 5.

Sendo A, B e C as partes procuradas, as mesmas devem ser diretamente proporcionais a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$.

$$\frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{B}{\frac{1}{3}} = \frac{C}{\frac{1}{5}}$$

Dica: Multiplicaremos os ***consequentes*** por 30, que representa o *mmc* dos denominadores.

$$\frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{B}{\frac{1}{3}} = \frac{C}{\frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{A}{30\times\frac{1}{2}} = \frac{B}{30\times\frac{1}{3}} = \frac{C}{30\times\frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{A}{15} = \frac{B}{10} = \frac{C}{6}$$

Agora efetuaremos uma divisão em partes diretamente proporcionais aos termos 15, 10 e 6.

$$\frac{A}{15} = \frac{B}{10} = \frac{C}{6} = k \text{ , onde: } \begin{cases} A = 15k \\ B = 10k \\ C = 6k \end{cases}$$

Sabendo-se que A + B + C = 341, determinaremos o fator ou constante de proporcionalidade:

$$A + B + C = 341 \Rightarrow 15k + 10k + 6k = 341 \Rightarrow 31k = 341 \Rightarrow k = \frac{341}{31} \Rightarrow k = 11$$

Para os valores de A, B e C:

$$\begin{cases} A = 15k & \Rightarrow & A = 15\times 11 & \Rightarrow & A = 165 \\ B = 10k & \Rightarrow & B = 10\times 11 & \Rightarrow & B = 110 \\ C = 6k & \Rightarrow & C = 6\times 11 & \Rightarrow & C = 66 \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

1. **(PUC) Dois amigos jogaram R$360,00 na loteria esportiva, sendo que o primeiro entrou com R$140,00 e o segundo R$220,00. Ganharam um prêmio de R$162.000,00. Como deve ser rateado o prêmio?**
   a) R$63.000,00 e R$99.000,00.
   b) R$70.000,00 e R$92.000,00.
   c) R$62.000,00 e R$100.000,00.
   d) R$50.000,00 e R$112.000,00.
   e) R$54.000,00 e R$108.000,00.

Resolução:

Método resolutivo através das propriedades das proporções

Dois amigos apostaram quantias diferentes em um mesmo jogo da loteria esportiva, sendo que o primeiro entrou com R$140,00 e o segundo R$220,00. É evidente que a divisão do prêmio deverá ser *diretamente proporcional* às quantias aplicadas, ou seja, aquele que apostou a *maior* quantia (R$220,00) deverá receber a *maior* parcela do prêmio.

Sejam A e B (com B > A) as quantias recebidas como prêmio pelos amigos. Sendo o valor total recebido como premiação de R$162.000,00, então:

A + B = 162.000

Como as partes recebidas (A e B) são valores proporcionais às apostas (R$140,00 e R$220,00), então teremos a seguinte proporção:

$$\frac{A}{140} = \frac{B}{220}$$

Aplicando a propriedade das proporções, em que:

$$\frac{A}{140} = \frac{B}{220} = \frac{\overbrace{A + B}^{\text{soma dos antecedentes}}}{\underbrace{140 + 220}_{\text{soma dos consequentes}}} \Rightarrow \frac{A}{140} = \frac{B}{220} = \frac{\overbrace{A + B}^{162.000}}{360} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A}{140} = \frac{B}{220} = \frac{162.000}{360} \Rightarrow \frac{A}{140} = \frac{B}{220} = \underbrace{450}_{\text{constante de proporcionalidade}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{A}{140} = 450 \Rightarrow A = 140 \times 450 \Rightarrow A = R\$\ 63.000,00 \\ \dfrac{B}{220} = 450 \Rightarrow B = 220 \times 450 \Rightarrow B = R\$\ 99.000,00 \end{cases}$$

Gabarito: A

2. **(NCE) Antônio, Bernardo, Cláudio e Daniel elaboraram juntos uma prova de 40 questões, tendo recebido por ela um total de R$2.200,00. Os três primeiros fizeram o mesmo número de questões e Daniel fez o dobro do que fez cada um dos outros. Se o dinheiro deve ser repartido proporcionalmente ao trabalho de cada um, Daniel deverá receber uma quantia, em reais, igual a:**
   a) 800,00.
   b) 820,00.
   c) 850,00.
   d) 880,00.
   e) 890,00.

Resolução:

Método prático pela contagem

De acordo com o enunciado, Antônio, Bernardo, Cláudio elaboraram o mesmo número de questões, enquanto Daniel fez o dobro do que fez cada um dos outros. Portanto, ao dividir proporcionalmente a quantia de R$2.200,00, os três primeiros receberam o mesmo valor, porém, Daniel receberá o dobro da quantia dada aos três primeiros.

Sendo os valores distribuídos dados por:

Antônio: "x" reais

Bernardo: "x" reais

Cláudio: "x" reais

Daniel: "$2x$" reais

Assim, teremos:

$$x + x + x + 2x = 2.200 \Rightarrow 5x = 2.200 \Rightarrow x = \frac{2.200}{} \Rightarrow x = \$\ 440,00$$

Portanto, Daniel receberá:
Daniel: $2x = 2 \times$ R\$440,00 = R\$880,00
Gabarito: D

3. **(NCE) Três técnicos judiciários arquivaram um total de 382 processos, em quantidades inversamente proporcionais às suas respectivas idades: 28, 32 e 36 anos. Nessas condições, é correto afirmar que o número de processos arquivados pelo mais velho foi:**
a) 112.
b) 126.
c) 144.
d) 152.
e) 164.

Resolução:
Método resolutivo através das propriedades das proporções

Sejam A, B e C as quantidades de processos recebidos por cada um dos três técnicos judiciários do total de 382 processos a serem arquivados, ou seja, a soma das quantidades que cada um arquivou totaliza 382:

A + B + C = 382.................(1)

Tal divisão ocorreu em quantidades *inversamente proporcionais* às suas respectivas idades: 28, 32 e 36 anos, ou seja:

$$\frac{A}{\frac{1}{28}} = \frac{B}{\frac{1}{32}} = \frac{C}{\frac{1}{36}}$$

Aplicando as propriedades das proporções, teremos:

$$\frac{A}{\frac{1}{28}} = \frac{B}{\frac{1}{32}} = \frac{C}{\frac{1}{36}} \Rightarrow \frac{A}{\frac{1}{28}} = \frac{B}{\frac{1}{32}} = \frac{C}{\frac{1}{36}} = \frac{\overbrace{A + B + C}^{\text{Soma de todos os antecedentes}}}{\underbrace{\frac{1}{28} + \frac{1}{32} + \frac{1}{36}}_{\text{Soma de todos os consequentes}}}$$

$$\frac{A}{\frac{1}{28}} = \frac{B}{\frac{1}{32}} = \frac{C}{\frac{1}{36}} = \frac{382}{\frac{72 + 63 + 56}{2016}} \Rightarrow \frac{A}{\frac{1}{28}} = \frac{B}{\frac{1}{32}} = \frac{C}{\frac{1}{36}} = \frac{382}{\frac{191}{2016}}$$

$$\frac{A}{\frac{1}{28}} = \frac{B}{\frac{1}{32}} = \frac{C}{\frac{1}{36}} = 382 \times \frac{2016}{191} \Rightarrow \frac{A}{\frac{1}{28}} = \frac{B}{\frac{1}{32}} = \frac{C}{\frac{1}{36}} = \underbrace{4032}_{\substack{\text{constante de} \\ \text{proporcionalidade}}}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{28} \times 4032 \quad \Rightarrow \quad A = 144 \\ B = \frac{1}{32} \times 4032 \quad \Rightarrow \quad B = 126 \\ C = \frac{1}{36} \times 4032 \quad \Rightarrow \quad C = 112 \end{cases}$$

Portanto, o mais velho (o técnico que possui 36 anos de idade) arquivou 112 processos.

Gabarito: A

4. (NCE) Um número foi dividido em três partes, diretamente proporcionais aos números $\frac{2}{5}$, 4 e $\frac{16}{5}$. Se a menor das partes obtidas foi $\frac{8}{5}$, o referido número era:

a) 24,6.
b) 28,4.
c) 30,2.
d) 30,4.
e) 32,6.

Resolução:

Método resolutivo através das propriedades das proporções

Digamos que o número "*x*" foi dividido em três partes (A, B e C) diretamente proporcionais aos números: $\frac{2}{5}$, 4 e $\frac{16}{5}$.

Colocando esses valores em ordem crescente (do menor para o maior), teremos: $\frac{2}{5}$ (ou 0,4), $\frac{16}{5}$ (ou 3,2) e 4. Portanto, o menor dos valores corresponde à fração $\frac{2}{5}$.

Se a menor das partes obtidas foi $\frac{8}{5}$ (lembramos que a menor das partes deverá estar relacionada ao menor dos números $\left(\frac{2}{5}\right)$, já que a divisão foi diretamente proporcional), então a proporção será dada por:

$$\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{B}{4} = \frac{C}{\frac{16}{5}} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{B}{4} = \frac{C}{\frac{16}{5}} \quad \Rightarrow \quad 4 = \frac{B}{4} = \frac{C}{\frac{16}{5}}$$

$$\begin{cases} B = 4 \times 4 & \Rightarrow \quad B = 16 \\ C = 4 \times \frac{16}{5} & \Rightarrow \quad C = 12,8 \end{cases}$$

Portanto, o número referido "*x*" será dado pela soma das partes: A + B + C.

$$A + B + C = \frac{8}{5} + 16 + 12,8 = 1,6 + 16 + 12,8 = 30,4$$

Gabarito: D

5. (FGV) Três irmãos, Afonso, Antônio e Alfredo, têm respectivamente 11, 14 e 18 anos. Afonso, o mais novo, ganhou R$330,00 de presente e os outros ganharam quantias proporcionais às suas idades em relação ao primeiro. Então:

a) Alfredo ganhou R$120,00 a mais que Antônio.
b) Alfredo ganhou R$600,00.
c) Antônio ganhou R$440,00.
d) Alfredo ganhou R$90,00 a mais que Antônio.
e) Antônio e Afonso receberam a mesma quantia.

Resolução:

Método resolutivo através das propriedades das proporções

Certa quantia foi dividida entre os três irmãos: Afonso, Antônio e Alfredo, diretamente proporcional às suas idades 11, 14 e 18 anos. Chamando essas partes de A, B e C, tem-se a seguinte proporção formada:

$$\frac{A}{11}=\frac{B}{14}=\frac{C}{18}$$

Se o mais novo ganhou R\$330,00 (aquele que possui 11 anos), então, substituindo na proporção dada:

$$\frac{330}{11}=\frac{B}{14}=\frac{C}{18} \quad \Rightarrow \quad 30=\frac{B}{14}=\frac{C}{18} \quad \begin{cases} B=14\times 30 \quad \Rightarrow \quad B=420 \\ C=18\times 30 \quad \Rightarrow \quad B=540 \end{cases}$$

Nessas condições temos as seguintes distribuições:

Afonso = R\$330,00

Antônio = R\$420,00

Alfredo = R\$540,00

Podemos verificar que Alfredo (R\$540,00) ganhou R\$120,00 a mais que Antônio (R\$420,00).

Gabarito: A

6. **(FGV) A quantia de R\$133.900,00 foi dividida entre Marcelo e Carolina, na razão direta de suas idades. Se Marcelo tem 29 anos e Carolina tem 36 anos, a parte que coube a Carolina corresponde, em reais, a:**

a) 48.600,00.
b) 52.800,00.
c) 59.740,00.
d) 68.600,00.
e) 74.160,00.

Resolução:

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

Representando por A e B as parcelas de R\$132.000,00, proporcionais a 29 e a 36.

$$\frac{A}{29}=\frac{B}{36}$$

Para determinarmos as parcelas A e B, é suficiente conhecer o fator ou coeficiente de proporcionalidade. Da proporção anterior, tem-se que:

$$\frac{A}{29}=\frac{B}{36}=k \text{ , onde: } \begin{cases} A=29k \\ B=36k \end{cases}$$

Sabendo-se que A + B = 133.900, determinaremos o fator ou constante de proporcionalidade:

$$A+B=133.900 \quad \Rightarrow \quad 29k+36k=133.900 \quad \Rightarrow \quad 65k=133.900 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{133.900}{65}$$

$$\Rightarrow \quad k=2060$$

Para os valores de A, B e C:

$$\begin{cases} A=29k \quad \Rightarrow \quad A=29\times 2060 \quad \Rightarrow \quad A=R\$\,59.740,00 \\ B=36k \quad \Rightarrow \quad B=36\times 2060 \quad \Rightarrow \quad B=R\$\,74.160,00 \end{cases}$$

Gabarito: E

7. (FEC) Três funcionários, A, B e C, decidem dividir entre si a tarefa de conferir o preenchimento de 420 formulários. A divisão deverá ser feita na razão inversa de seus respectivos tempos de serviço no Tribunal. Se A, B e C trabalham no Tribunal há 3, 5 e 6 anos, respectivamente, o número de formulários que B deverá conferir é:

a) 100.
b) 120.
c) 200.
d) 240.
e) 250.

Resolução:

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

Sabemos que o total de 420 formulários deverá ser dividido entre os funcionários A, B e C, assim, inicialmente:

$$A + B + C = 420 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Ou seja, a soma da quantidade de formulários recebidos por cada funcionário deverá ser igual a 420.

Tempo de serviço de cada funcionário no Tribunal:

A: trabalha no Tribunal há três anos.

B: trabalha no Tribunal há cinco anos.

C: trabalha no Tribunal há seis anos.

"A divisão deverá ser feita na razão inversa de seus respectivos tempos de serviço no Tribunal." De acordo com o enunciado, as grandezas "formulários a receber" e "tempo de serviço" são inversamente proporcionais, ou seja, aquele que possuir *mais* tempo de serviço receberá *menos* formulários a conferir.

Portanto, teremos:

$$\frac{A}{\frac{1}{3}} = \frac{B}{\frac{1}{5}} = \frac{C}{\frac{1}{6}} = \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad 3A = 5B = 6C = \mathbf{k}$$

onde ***k*** é a constante de proporcionalidade. Igualando os termos a "***k***":

$$\text{Fazendo: } \begin{cases} 3A = k & \rightarrow \quad A = \dfrac{k}{3} \\ 5B = k & \rightarrow \quad B = \dfrac{k}{5} \\ 6C = k & \rightarrow \quad C = \dfrac{k}{6} \end{cases}$$

Substituindo cada valor encontrado de A, B e C, em função de ***k***, na relação (1), temos:

$$A + B + C = 420 \Rightarrow \frac{\mathbf{k}}{3} + \frac{\mathbf{k}}{5} + \frac{\mathbf{k}}{6} = 420 \quad \Rightarrow \quad \frac{10\mathbf{k} + 6\mathbf{k} + 5\mathbf{k}}{30} = \frac{30 \times 420}{30}$$

$$21k = 12.600 \ \Rightarrow \ k = \frac{12.600}{21} \ \Rightarrow k = 600 \text{ (constante de proporcionalidade).}$$

Assim, podemos determinar o número de formulários que o funcionário B deverá conferir:

$$B = \frac{\mathbf{k}}{5} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{600}{5} \quad \Rightarrow \quad B = 120 \text{ formulários}$$

Gabarito: B

8. (FCC) Repartiram R$300,00 de gratificações pelos empregados em partes inversamente proporcionais aos dias que faltaram ao trabalho. Quanto recebeu cada um, se faltaram ao trabalho dois, três e seis dias respectivamente?

a) 150, 100 e 50.
b) 75, 125 e 100.
c) 130, 70 e 100.
d) 150, 100 e 75.
e) 125, 100 e 25.

Resolução:

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

Sendo A, B e C as partes procuradas, as mesmas devem ser diretamente proporcionais a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$.

$$\frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{B}{\frac{1}{3}} = \frac{C}{\frac{1}{6}}$$

Multiplicaremos os ***consequentes*** por 6, que representa o *mmc* dos denominadores.

$$\frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{B}{\frac{1}{3}} = \frac{C}{\frac{1}{6}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{6 \times \frac{1}{2}} = \frac{B}{6 \times \frac{1}{3}} = \frac{C}{6 \times \frac{1}{6}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1}$$

Agora efetuaremos uma divisão em partes diretamente proporcionais aos termos 3, 2 e 1.

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1} = k \text{, onde: } \begin{cases} A = 3k \\ B = 2k \\ C = 1k \end{cases}$$

Sabendo-se que A + B + C = 300, determinaremos o fator ou constante de proporcionalidade:

$$A + B + C = 300 \quad \Rightarrow \quad 3k + 2k + k = 300 \quad \Rightarrow \quad 6k = 300 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{300}{6} \quad \Rightarrow \quad k = 50$$

Para os valores de A, B e C:

$$\begin{cases} A = 3k & \Rightarrow & A = 3 \times 50 & \Rightarrow & A = R\$\ 150{,}00 \\ B = 2k & \Rightarrow & B = 2 \times 50 & \Rightarrow & B = R\$\ 100{,}00 \\ C = 1k & \Rightarrow & C = 1 \times 50 & \Rightarrow & C = R\$\ 50{,}00 \end{cases}$$

Gabarito: A

9. (FCC) Dois funcionários receberam a incumbência de catalogar 153 documentos e os dividiram entre si, na razão inversa de suas respectivas idades: 32 e 40 anos. O número de documentos catalogados pelo mais jovem foi:

a) 87.
b) 85.
c) 70.
d) 68.
e) 65.

Resolução:

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

Sendo A e B as partes procuradas, as mesmas devem ser diretamente proporcionais a $\frac{1}{32}$ e $\frac{1}{40}$.

$$\frac{A}{\frac{1}{32}} = \frac{B}{\frac{1}{40}}$$

Simplificando os denominadores (32 e 40) dos consequentes por 8:

$$\frac{A}{\frac{1}{32^{\div 8}}} = \frac{B}{\frac{1}{40^{\div 8}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{\frac{1}{4}} = \frac{B}{\frac{1}{5}}$$

Multiplicaremos os ***consequentes***, restantes, por 20, que representa o *mmc* dos denominadores.

$$\frac{A}{\frac{1}{4}} = \frac{B}{\frac{1}{5}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{20 \times \frac{1}{4}} = \frac{B}{20 \times \frac{1}{5}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{5} = \frac{B}{4}$$

Agora, efetuaremos uma divisão em partes diretamente proporcionais aos termos 5 e 4.

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{4} = k \text{, onde: } \begin{cases} A = 5k \\ B = 4k \end{cases}$$

Sabendo-se que A + B = 153, determinaremos o fator ou constante de proporcionalidade:

$$A + B = 153 \quad \Rightarrow \quad 5k + 4k = 153 \quad \Rightarrow \quad 9k = 153 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{153}{9} \quad \Rightarrow \quad k = 17$$

Para os valores de A e B:

$$\begin{cases} A = 5k \quad \Rightarrow \quad A = 5 \times 17 \quad \Rightarrow \quad A = 85 \\ B = 4k \quad \Rightarrow \quad B = 4 \times 17 \quad \Rightarrow \quad B = 68 \end{cases}$$

O mais jovem, de 32 anos, catalogará 85 documentos.

Gabarito: B

10. (FCC) No quadro a seguir, têm-se as idades e os tempos de serviço de dois técnicos judiciários do Tribunal Regional Federal de certa circunscrição judiciária.

	Idade (em anos)	**Tempo de Serviço (em anos)**
João	36	8
Maria	30	12

Esses funcionários foram incumbidos de digitar as laudas de um processo. Dividiram o total de laudas entre si, na razão *direta* de suas idades e *inversa* de seus tempos de serviço no Tribunal. Se João digitou 54 laudas, o total de laudas do processo era:

a) 80.
b) 82.
c) 84.
d) 86.
e) 88.

Resolução:

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

Sendo "J" e "M" as partes procuradas, então "J" deverá ser diretamente proporcional a 36 e $\frac{1}{8}$; e "B" deverá ser diretamente proporcional a 30 e $\frac{1}{12}$.

$$\frac{J}{\frac{36}{8}} = \frac{M}{\frac{30}{12}}$$

Simplificando os denominadores (8 e 12) dos consequentes por 4:

$$\frac{J}{\frac{36}{8_{\div 4}}} = \frac{M}{\frac{30}{12_{\div 4}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{J}{\frac{36}{2}} = \frac{M}{\frac{30}{3}}$$

Efetuando-se as divisões dos ***consequentes***:

$$\frac{J}{18} = \frac{M}{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{J}{18_{\div 2}} = \frac{M}{10_{\div 2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{J}{9} = \frac{M}{5}$$

Agora, efetuaremos uma divisão em partes diretamente proporcionais aos termos 9 e 5.

$$\frac{J}{9} = \frac{M}{5}$$

Se "J", que é a parte que cabe a João, é igual a 54, então determinaremos o valor de "M" pela relação anterior:

$$\frac{J}{9} = \frac{M}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{54}{9} = \frac{M}{5} \quad \Rightarrow \quad 6 = \frac{M}{5} \quad \Rightarrow \quad M = 5 \times 6 \quad \Rightarrow \quad M = 30$$

O total de laudas era de: 54 +30 = 84

Gabarito: C

11. (Vunesp) Três amigos acertaram as seis dezenas da Mega Sena que estava acumulada em R\$27.000.000,00. Dividiram o prêmio em partes proporcionais às quantias apostadas por cada um, que foram de R\$2,00, R\$3,00 e R\$4,00. Em milhões de reais, quanto ganhou aquele que apostou R\$3,00?

a) 7.
b) 8.
c) 9.
d) 10.
e) 11.

Resolução:

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

Sendo "A", "B" e "C" as partes procuradas, então deverão ser diretamente proporcionais a 2, 3 e 4.

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{4}$$

Para determinarmos as parcelas A, B e C, é suficiente conhecer o fator ou coeficiente de proporcionalidade. Da proporção anterior, tem-se que:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{4} = k \text{ , onde: } \begin{cases} A = 2k \\ B = 3k \\ C = 4k \end{cases}$$

Sabendo-se que A + B + C = 27.000.000, determinaremos o fator ou constante de proporcionalidade:

$A + B + C = 27.000.000 \Rightarrow 2k + 3k + 4k = 27.000.000 \Rightarrow 9k = 27.000.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{27.000.000}{9} \Rightarrow k = 3.000.000$

Para os valores de A, B e C:

$$\begin{cases} A = 2k & \Rightarrow & A = 2\times 3.000.000 & \Rightarrow & A = R\$\ 6.000.000{,}00 \\ B = 3k & \Rightarrow & B = 3\times 3.000.000 & \Rightarrow & B = R\$\ 9.000.000{,}00 \\ C = 4k & \Rightarrow & C = 4\times 3.000.000 & \Rightarrow & C = R\$\ 12.000.000{,}00 \end{cases}$$

Aquele que apostou R$3,00 ganhou R$9.000.000,00

Gabarito: C

12. (NCE) Flora tem uma pequena loja de produtos naturais e duas funcionárias, Joana e Carolina. No mês de julho Flora decidiu dividir um bônus de R$160,00 entre as duas funcionárias, de forma que cada uma receberia um valor inversamente proporcional ao número de faltas naquele mês. Carolina faltou três vezes e Joana faltou duas. A quantia recebida por Joana, em reais, é igual a:

a) 55.
b) 64.
c) 80.
d) 96.
e) 108.

Resolução:

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

Sendo J e C as partes procuradas, as mesmas devem ser diretamente proporcionais a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

$$\frac{J}{\frac{1}{3}} = \frac{C}{\frac{1}{2}}$$

Multiplicaremos os ***consequentes*** por 6, que representa o *mmc* dos denominadores.

$$\frac{J}{\frac{1}{3}}=\frac{C}{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{J}{6\times\frac{1}{3}}=\frac{C}{6\times\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{J}{2}=\frac{C}{3}$$

Agora efetuaremos uma divisão em partes diretamente proporcionais aos termos 2 e 3.

$$\frac{J}{2}=\frac{C}{3}=k\text{, onde: }\begin{cases}J=2k\\C=3k\end{cases}$$

Sabendo-se que J + C = 160, determinaremos o fator ou constante de proporcionalidade:

$$J+C=160 \quad\Rightarrow\quad 2k+3k=160 \quad\Rightarrow\quad 5k=160 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{160}{5} \quad\Rightarrow\quad k=32$$

Para os valores de J e C, teremos:

$$\begin{cases}J=2k & \Rightarrow & J=2\times32 & \Rightarrow & J=64\\C=3k & \Rightarrow & C=3\times32 & \Rightarrow & C=96\end{cases}$$

Portanto, Joana recebeu: R$ 64,00.

Gabarito: B

13. (FCC) Dois funcionários de uma Repartição Pública foram incumbidos de arquivar 164 processos e dividiram esse total na razão *direta* de suas respectivas idades e *inversa* de seus respectivos tempos de serviço público. Se um deles tem 27 anos e 3 anos de tempo de serviço e o outro 42 anos e está há 9 anos no serviço público, então a diferença positiva entre os números de processos que cada um arquivou é:

a) 48.
b) 50.
c) 52.
d) 54.
e) 56.

Resolução:

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

Inicialmente, representaremos dados na forma de uma tabela:

funcionários	Idade, em anos	Tempo de serviço, em anos
1º funcionário	27	3
2º funcionário	42	9

Sendo "A" e "B" as partes procuradas, então a parte "A" deverá ser diretamente proporcional a 27 e $\frac{1}{3}$; e "B" deverá ser diretamente proporcional a 42 e $\frac{1}{9}$.

$$\frac{A}{\frac{27}{3}}=\frac{B}{\frac{42}{9}}$$

Simplificando as frações que representam os ***consequentes***:

$$\frac{A}{\dfrac{27^{\div 3}}{3_{\div 3}}} = \frac{B}{\dfrac{42^{\div 3}}{9_{\div 3}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{9} = \frac{B}{\dfrac{14}{3}}$$

Multiplicaremos os ***consequentes*** por 3, que representa o *mmc* dos denominadores.

$$\frac{A}{9} = \frac{B}{\dfrac{14}{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{3\times 9} = \frac{B}{\cancel{3}\times\dfrac{14}{\cancel{3}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{27} = \frac{B}{14}$$

Agora, efetuaremos uma divisão em partes diretamente proporcionais aos termos 27 e 14.

$$\frac{A}{27} = \frac{B}{14} = k \text{ , onde: } \begin{cases} A = 27k \\ B = 14k \end{cases}$$

Se a soma das partes é igual a 164, tem-se que:

$$A + B = 164 \quad \Rightarrow \quad 27k + 14k = 164 \quad \Rightarrow \quad 41k = 164 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{164}{41} \quad \Rightarrow \quad k = 4$$

As partes serão de:

$$\begin{cases} A = 27k \quad \Rightarrow \quad A = 27\times 4 \quad \Rightarrow \quad A = 108 \\ B = 14k \quad \Rightarrow \quad B = 14\times 4 \quad \Rightarrow \quad B = 56 \end{cases}$$

A diferença positiva dos valores: 108 – 56 = 52

Gabarito: C

14. (FCC) Certo mês, os números de horas extras cumpridas pelos funcionários A, B e C foram inversamente proporcionais aos seus respectivos tempos de serviço na empresa. Se A trabalha há oito meses, B há dois anos, C há três anos e, juntos, os três cumpriram um total de 56 horas extras, então o número de horas extras cumpridas por B foi:

a) 8.
b) 12.
c) 18.
d) 24.
e) 36.

Resolução:

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

Sendo A, B e C as partes procuradas, as mesmas devem ser diretamente proporcionais a $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{24}$ e $\frac{1}{36}$.

$$\frac{A}{\dfrac{1}{8}} = \frac{B}{\dfrac{1}{24}} = \frac{C}{\dfrac{1}{36}}$$

Obs.: Transformamos os tempos de serviço em meses.

Simplificando os denominadores (8, 24 e 36) dos consequentes por 4:

$$\frac{A}{\frac{1}{8_{\div 4}}}=\frac{B}{\frac{1}{24_{\div 4}}}=\frac{C}{\frac{1}{36_{\div 4}}}\quad\Rightarrow\quad\frac{A}{\frac{1}{2}}=\frac{B}{\frac{1}{6}}=\frac{C}{\frac{1}{9}}$$

Multiplicaremos os ***consequentes***, restantes, por 18, que representa o *mmc* dos denominadores.

$$\frac{A}{\frac{1}{2}}=\frac{B}{\frac{1}{6}}=\frac{C}{\frac{1}{9}}\quad\Rightarrow\quad\frac{A}{18\times\frac{1}{2}}=\frac{B}{18\times\frac{1}{6}}=\frac{C}{18\times\frac{1}{9}}\quad\Rightarrow\quad\frac{A}{9}=\frac{B}{3}=\frac{C}{2}$$

Agora, efetuaremos uma divisão em partes diretamente proporcionais aos termos 9, 3 e 2.

$$\frac{A}{9}=\frac{B}{3}=\frac{C}{2}=k\text{, onde: }\begin{cases}A=9k\\B=3k\\C=2k\end{cases}$$

Sabendo-se que A + B + C = 56, determinaremos o fator ou constante de proporcionalidade:

$$A+B+C=56\quad\Rightarrow\quad 9k+3k+2k=56\quad\Rightarrow\quad 14k=56\quad\Rightarrow\quad k=\frac{56}{14}\quad\Rightarrow\quad k=4$$

Para os valores de A, B e C:

$$\begin{cases}A=9k & \Rightarrow & A=9\times4 & \Rightarrow & A=36\\B=3k & \Rightarrow & B=3\times4 & \Rightarrow & B=12\\C=2k & \Rightarrow & C=2\times4 & \Rightarrow & C=8\end{cases}$$

Portanto, B cumpriu 12 horas extras.

Gabarito: B

15. (Cesgranrio) O chefe de uma seção de eletrodoméstico de uma loja decidiu dividir parte do lucro mensal em partes diretamente proporcionais às vendas referentes à última semana do mês de abril. Se Carlos vendeu nessa semana o equivalente a R$130.000,00 e Daniel, R$140.000,000, então, quanto recebeu Carlos, se o lucro a ser dividido foi de R$8.100,00?

a) R$3.900,00.
b) R$4.000,00.
b) R$4.200,00.
d) R$4.600,00.
e) R$4.800,00.

Resolução:

Representando por C e D as parcelas de R$8.100,00, proporcionais a 130.000 e 140.000:

$$\frac{C}{130.000}=\frac{D}{140.000}$$

Simplificando os consequentes dessa proporção, teremos:

$$\frac{C}{130.000}=\frac{D}{140.000} \quad\Rightarrow\quad \frac{C}{13}=\frac{D}{14}$$

Para determinarmos as parcelas C e D, é suficiente conhecer o fator ou coeficiente de proporcionalidade. Da proporção anterior, tem-se que:

$$\frac{C}{13}=\frac{D}{14}=k\text{, onde: }\begin{cases}C=13k\\D=14k\end{cases}$$

Sabendo-se que C + D = 8.100, determinaremos o fator ou constante de proporcionalidade:

$$C+D=8.100 \;\Rightarrow\; 13k+14k=8.100 \;\Rightarrow\; 27k=8.100 \;\Rightarrow\; k=\frac{8.100}{27} \;\Rightarrow\; k=300$$

Para os valores de C e D:

$$\begin{cases}C=13k & \Rightarrow & C=13\times 300 & \Rightarrow & C=R\$\ 3.900{,}00\\ D=14k & \Rightarrow & D=14\times 17 & \Rightarrow & D=R\$\ 4.200{,}00\end{cases}$$

Gabarito: A

16. (FCC) Curiosamente, dois técnicos bancários observaram que, durante o expediente de certo dia, os números de clientes que haviam atendido eram inversamente proporcionais às suas respectivas idades: 36 e 48 anos. Se um deles atendeu quatro clientes a mais que o outro, então o total de pessoas atendidas pelo mais velho foi:

a) 20.
b) 18.
c) 16.
d) 14.
e) 12.

Resolução:

Sendo A e B as partes procuradas, as mesmas devem ser diretamente proporcionais a $\frac{1}{36}$ e $\frac{1}{48}$.

$$\frac{A}{\frac{1}{36}}=\frac{B}{\frac{1}{48}}$$

Simplificando os denominadores dos respectivos consequentes por 12, teremos:

$$\frac{A}{\frac{1}{36_{\div 12}}}=\frac{B}{\frac{1}{48_{\div 12}}} \quad\Rightarrow\quad \frac{A}{\frac{1}{3}}=\frac{B}{\frac{1}{4}}$$

Multiplicaremos os ***consequentes*** por 12, que representa o *mmc* dos denominadores.

$$\frac{A}{\frac{1}{3}}=\frac{B}{\frac{1}{4}} \quad\Rightarrow\quad \frac{A}{12\times\frac{1}{3}}=\frac{B}{12\times\frac{1}{4}} \quad\Rightarrow\quad \frac{A}{4}=\frac{B}{3}$$

Se um deles atendeu quatro clientes a mais que o outro, então, teremos que:
A = B + 4

Substituindo a relação na proporção dada:

$$\frac{A}{4}=\frac{B}{3} \;\Rightarrow\; \frac{B+4}{4}=\frac{B}{3} \;\Rightarrow\; 4B=3(B+4) \;\Rightarrow\; 4B=3B+12 \;\Rightarrow\; 4B-3B=12$$

$\Rightarrow\;$ B = 12

Para o valor de "A", teremos:

A = B + 4 $\Rightarrow$ A = 12 + 4 $\Rightarrow$ A = 16

Gabarito: E

17. (FCC) Um pai decidiu dividir uma mesada de R$315,00 entre seus dois filhos, Anderson e Bruna. Foi decidido que a divisão seria inversamente proporcional às faltas de cada um na escola naquele mês. Se Anderson faltou três vezes e Bruna quatro vezes, quanto recebeu o filho que menos faltou?

a) R$135,00.
b) R$180,00.
c) R$185,00.
d) R$205,00.
e) R$215,00.

Resolução:

Sendo A e B as partes procuradas, as mesmas devem ser diretamente proporcionais a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

$$\frac{A}{\frac{1}{3}}=\frac{B}{\frac{1}{4}}$$

Multiplicaremos os ***consequentes*** por 12, que representa o *mmc* dos denominadores.

$$\frac{A}{\frac{1}{3}}=\frac{B}{\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; \frac{A}{12\times\frac{1}{3}}=\frac{B}{12\times\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; \frac{A}{4}=\frac{B}{3}$$

Agora efetuaremos uma divisão em partes diretamente proporcionais aos termos 4 e 3.

$$\frac{A}{4}=\frac{B}{3}=k\text{ , onde: }\begin{cases}A=4k\\B=3k\end{cases}$$

Sabendo-se que A + B = 315, determinaremos o fator ou constante de proporcionalidade:

$$A+B=315 \;\Rightarrow\; 4k+3k=315 \;\Rightarrow\; 7k=315 \;\Rightarrow\; k=\frac{315}{7} \;\Rightarrow\; k=45$$

Para os valores de A e B, teremos:

$$\begin{cases}A=4k & \Rightarrow & A=4\times45 & \Rightarrow & A=180\\B=3k & \Rightarrow & B=3\times45 & \Rightarrow & B=135\end{cases}$$

Como Anderson faltou menos, então ele recebeu: R$ 180,00.

Gabarito: B

18. (FCC) Duas bibliotecárias receberam 85 livros para catalogar. Dividiram o total entre si na razão direta de seus respectivos tempos de serviço na empresa e na razão inversa de suas respectivas idades. Se uma tem 24 anos e trabalha há seis anos na empresa, e a outra tem 36 anos e trabalha há oito, o número de livros que a mais jovem catalogou foi:

a) 35.
b) 40.
c) 45.
d) 48.
e) 50.

Resolução:

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

Inicialmente, representaremos dados na forma de uma tabela:

bibliotecárias	Tempo de serviço, em anos	Idade, em anos
1ª bibliotecária	6	24
2ª bibliotecária	8	36

Sendo "A" e "B" as partes procuradas, então a parte "A" deverá ser diretamente proporcional a 6 e $\frac{1}{24}$; e "B" deverá ser diretamente proporcional a 8 e $\frac{1}{36}$.

$$\frac{A}{\frac{6}{24}} = \frac{B}{\frac{8}{36}}$$

Simplificando as frações que representam os ***consequentes***:

$$\frac{A}{\frac{6^{\div 6}}{24_{\div 6}}} = \frac{B}{\frac{8^{\div 4}}{36_{\div 4}}} \Rightarrow \frac{A}{\frac{1}{4}} = \frac{B}{\frac{2}{9}}$$

Multiplicaremos os ***consequentes*** por 36, que representa o *mmc* dos denominadores.

$$\frac{A}{\frac{1}{4}} = \frac{B}{\frac{2}{9}} \Rightarrow \frac{A}{36 \times \frac{1}{4}} = \frac{B}{36 \times \frac{2}{9}} \Rightarrow \frac{A}{9} = \frac{B}{8}$$

Agora, efetuaremos uma divisão em partes diretamente proporcionais aos termos 9 e 8.

$$\frac{A}{9} = \frac{B}{8} = k \text{ , onde: } \begin{cases} A = 9k \\ B = 8k \end{cases}$$

Se a soma das partes é igual a 85, tem-se que:

$$A + B = 85 \Rightarrow 9k + 8k = 85 \Rightarrow 17k = 85 \Rightarrow k = \frac{85}{17} \Rightarrow k = 5$$

As partes serão de:

$$\begin{cases} A = 9k \Rightarrow A = 9 \times 5 \Rightarrow A = 45 \\ B = 8k \Rightarrow B = 8 \times 5 \Rightarrow B = 40 \end{cases}$$

Portanto, o mais jovem (36 anos) catalogou: 45 livros

Gabarito: C

19. (FCC) Certo mês, o dono de uma empresa concedeu a dois de seus funcionários uma gratificação no valor de R$500,00. Essa quantia foi dividida entre eles, em partes que eram diretamente proporcionais aos respectivos números de horas de plantões que cumpriram no mês e, ao mesmo tempo, inversamente proporcionais às suas respectivas idades. Se um dos funcionários tinha 36 anos e cumpriu 24 horas de plantões e, o outro, de 45 anos, cumpriu 18 horas, coube ao mais jovem receber:

a) R$302,50.
b) R$310,00.
c) R$312,50.
d) R$325,00.
e) R$342,50.

Resolução:

Inicialmente, representaremos dados na forma de uma tabela:

funcionários	Idade, em anos	plantões, em horas
1º funcionário	36	24
2º funcionário	45	18

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

Sendo "A" e "B" as partes procuradas, então a parte "A" deverá ser diretamente proporcional a 24 e $\frac{1}{36}$; e "B" deverá ser diretamente proporcional a 18 e $\frac{1}{45}$.

$$\frac{A}{\frac{24}{36}} = \frac{B}{\frac{18}{45}}$$

Simplificando as frações que representam os ***consequentes***:

$$\frac{A}{\frac{24^{\div 12}}{36_{\div 12}}} = \frac{B}{\frac{18^{\div 9}}{45_{\div 9}}} \Rightarrow \frac{A}{\frac{2}{3}} = \frac{B}{\frac{2}{5}}$$

Multiplicaremos os ***consequentes*** por 15, que representa o *mmc* dos denominadores.

$$\frac{A}{\frac{2}{3}} = \frac{B}{\frac{2}{5}} \Rightarrow \frac{A}{15\times\frac{2}{3}} = \frac{B}{15\times\frac{2}{5}} \Rightarrow \frac{A}{10} = \frac{B}{6} \Rightarrow \frac{A}{10^{\div 2}} = \frac{B}{6^{\div 2}} \Rightarrow \frac{A}{5} = \frac{B}{3}$$

Agora, efetuaremos uma divisão em partes diretamente proporcionais aos termos 5 e 3.

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{3} = k \text{ , onde: } \begin{cases} A = 5k \\ B = 3k \end{cases}$$

Se a soma das partes é igual a R$500,00, tem-se que:

$$A + B = 500 \Rightarrow 5k + 3k = 500 \Rightarrow 8k = 500 \Rightarrow k = \frac{500}{8} \Rightarrow k = 62{,}5$$

As partes serão de:

$$\begin{cases} A = 5k \Rightarrow A = 5\times 62{,}5 \Rightarrow A = R\$\,312{,}50 \\ B = 3k \Rightarrow B = 3\times 62{,}5 \Rightarrow B = R\$\,187{,}50 \end{cases}$$

Portanto, o mais jovem (36 anos) recebeu: R$312,50

Gabarito: C

20. (NCE) A produção de $5,4 \times 10^8$ toneladas de grãos, armazenados em um galpão de uma cooperativa de agricultores, provém de três fazendas, A, B e C, situadas na redondeza. A produção de cada fazenda foi proporcional às respectivas áreas plantadas, de $3x10^3$ ha, 4×10^3 ha e 5×10^3 ha. A produção de grãos, em toneladas, da fazenda com maior produção foi de:

a) 22,5 milhões.
b) 13,5 milhões.
c) 157,5 milhões.
d) 195 milhões.
e) 225 milhões.

Resolução:

Método resolutivo pela constante de proporcionalidade "*k*"

A produção em toneladas de grãos das três fazendas A, B e C somam $5,4 \times 10^8$ toneladas de grãos, ou seja:

$A + B + C = 5,4 \times 10^8$ toneladas de grãos...........(1)

A produção de cada fazenda foi proporcional às respectivas áreas plantadas, de $3x10^3$ 3ha, $4x10^3$ ha e $5x10^3$ ha, então temos que:

$$\frac{A}{3\times10^3}=\frac{B}{4\times10^3}=\frac{C}{5\times10^3}=k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 3\times10^3 k \\ B = 4\times10^3 k \\ C = 5\times10^3 k \end{cases}$$

Substituindo os valores encontrados na relação (1), temos:

$3 \times 10^3\boldsymbol{k} + 4 \times 10^3\boldsymbol{k} + 5 \times 10^3\boldsymbol{k} = 5,4 \times 10^8$

$$12x10^3\boldsymbol{k} = 5,4 \times 10^8 \Rightarrow k = \frac{5,4\times10^8}{12\times10^3}$$

$$k = \frac{5,4\times10^8}{1,2\times10^4} \quad \Rightarrow \quad k = 4,5\times10^{8-4} \quad \Rightarrow \quad k = 4,5\times10^4$$

Para determinarmos as produções das fazendas A, B e C, substituímos o valor de *k* encontrado na proporção:

$$\begin{cases} A = 3\times10^3 k & \Rightarrow & A = 3\times10^3\times4,5\times10^4 & \Rightarrow & A = 13,5\times10^7 \\ B = 4\times10^3 k & \Rightarrow & B = 4\times10^3\times4,5\times10^4 & \Rightarrow & B = 18\times10^7 \\ C = 5\times10^3 k & \Rightarrow & C = 5\times10^3\times4,5\times10^4 & \Rightarrow & C = 22,5\times10^7 \end{cases}$$

Portanto, a maior produção foi feita pela fazenda A, com $22,5 \times 10^7$ milhões de grãos, ou ainda:

$22,5 \times 10^7$ milhões $= 225 \times 10^6$ milhões

Gabarito: E

Capítulo 21

Regra de sociedade

A Regra de Sociedade tem por finalidade a distribuição ***proporcional*** entre vários sócios, dos ***lucros*** ou ***prejuízos*** da associação. É uma aplicação da ***divisão em partes diretamente proporcionais***.

A Regra de sociedade pode ser ***simples*** ou ***composta***.

21.1. Regra de sociedade simples

Quando os ***capitais investidos*** são ***diferentes,*** e os ***tempos de associação*** são ***iguais***, os ***lucros*** ou ***prejuízos*** serão ***proporcionais aos capitais investidos***.

21.1.1. Aplicação prática

João, Ricardo e Cláudio formaram uma empresa. Cada sócio, inicialmente, investiu uma quantia equivalente a:

- João investiu: R$2.000,00;
- Ricardo investiu: R$3.000,00;
- Cláudio investiu: R$5.000,00.

Após um determinado período a empresa gerou um lucro líquido de R$120.000,00, o qual deverá ser repartido entre os sócios de acordo com o valor de investimento de cada um.

Vejamos o que seria mais justo nessa sociedade – todos receberem a mesma quantia? Ou aquele que investiu a maior quantia deverá receber a maior parcela?

Sendo os investimentos distintos, a forma mais justa é *dividir proporcionalmente* ao valor investido por cada um, ou seja, promover uma divisão diretamente proporcional aos valores de formação dessa sociedade.

Se João investiu R$2.000,00, a quantia a receber deverá ser diretamente proporcional a R$2.000,00, do mesmo modo, se Ricardo investiu R$3.000,00 sua parte no lucro deverá ser diretamente proporcional ao seu investimento e de maneira análoga, o mesmo acontecerá ao terceiro sócio, Cláudio.

sócio	valor investido	valor do lucro recebido
João	R$2.000,00	x reais
Ricardo	R$3.000,00	y reais
Cláudio	R$5.000,00	z reais

De acordo com esse raciocínio, então observamos que, se a ***divisão é diretamente proporcional,*** o *maior* investimento resultará na *maior* parcela do lucro recebido, assim, teremos:

$z > y > x$

Lembramos que a soma das três parcelas resultará no lucro líquido: $x + y + z =$ R$120.000,00.

Para determinarmos os valores x, y e z, aplicaremos a proporção direta, entre o valor a ser recebido e o valor investido.

$$\underbrace{\frac{x}{R\$\ 2.000,00} = \frac{y}{R\$\ 3.000,00} = \frac{z}{R\$\ 5.000,00}}_{\text{proporção na razão direta entre o parcela do lucro a ser recebido e o valor de investimento.}} = k$$

onde "k" é chamado de constante de proporcionalidade ou coeficiente de proporcionalidade.

Por essa proporção, temos que:

$\begin{cases} x = 2.000k \\ y = 3.000k \\ z = 5.000k \end{cases}$, substituindo esses valores na equação $x + y + z =$ R$120.000,00, teremos:

$$2.000k + 3.000k + 5.000k = 120.000 \Rightarrow 10.000k = 120.000 \Rightarrow k = \frac{120.000}{10.000}$$

$k = 12$. Substituindo o valor da constante de proporcionalidade nas equações que definem a parcela de cada lucro.

$$\begin{cases} x = 2.000k & \Rightarrow & x = 2.000 \times 12 & \Rightarrow & x = R\$\ 24.000,00. \\ y = 3.000k & \Rightarrow & y = 3.000 \times 12 & \Rightarrow & y = R\$\ 36.000,00. \\ z = 5.000k & \Rightarrow & z = 5.000 \times 12 & \Rightarrow & z = R\$\ 60.000,00. \end{cases}$$

Portanto, teremos:

sócio	valor investido	valor do lucro recebido
João	R$2.000,00	R$24.000,00
Ricardo	R$3.000,00	R$36.000,00
Cláudio	R$5.000,00	R$60.000,00

21.2. Regra de sociedade composta

Quando os ***capitais investidos*** e os ***tempos de associação*** forem ***distintos***, os ***lucros*** e os ***prejuízos*** serão proporcionais aos capitais multiplicados pelos respectivos tempos de associação.

21.2.1. Aplicação prática

Três sócios, Mauro, César e Nunes, lucram juntamente R$21.500,00. O primeiro sócio, Mauro, entrou com R$7.000,00 na sociedade, durante um ano. O segundo sócio, César, entrou nessa sociedade com R$8.500,00, durante oito meses, e o terceiro sócio, Nunes, investiu R$9.000,00, durante sete meses. Nesse caso, qual foi o lucro de cada um?

Observe os dados distribuídos na tabela a seguir:

sócio	valor investido	tempo na associação	valor do lucro recebido
Mauro	R$7.000,00	12 meses	*x* reais
César	R$8.500,00	8 meses	*y* reais
Nunes	R$9.000,00	7 meses	*z* reais

Agora, devemos dividir R$21.500,00 em partes diretamente proporcionais aos produtos dos capitais pelos respectivos tempos de associação:

$$\underbrace{\frac{x}{R\$\,7.000{,}00\times 12}=\frac{y}{R\$\,8.500{,}00\times 8}=\frac{z}{R\$\,9.000{,}00\times 7}}_{\substack{\text{proporção na razão direta entre a parcela do lucro a ser recebido}\\ \text{pelo produto entre valor de investimento e o tempo de associação}}}=k$$

$$\underbrace{\frac{x}{84.000}=\frac{y}{68.000}=\frac{z}{63.000}}_{\substack{\text{simplificando todos os}\\ \textit{denominadores}\text{ por }1.000}}=k \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{84}=\frac{y}{68}=\frac{z}{63}=k$$

onde "*k*" é chamado de constante de proporcionalidade ou coeficiente de proporcionalidade.

Por essa proporção, temos que:

$$\begin{cases} x = 84k \\ y = 68k \\ z = 63k \end{cases}$$, substituindo esses valores na equação $x + y + z = R\$21.500{,}00$, teremos:

$$84k + 68k + 63k = 21.500 \quad\Rightarrow\quad 215k = 21.500 \quad\Rightarrow\quad k = \frac{21.500}{215} \quad\Rightarrow\quad k = 100$$

Substituindo o valor da constante de proporcionalidade nas equações que definem a parcela de cada lucro.

$$\begin{cases} x = 84k \quad\Rightarrow\quad x = 84\times 100 \quad\Rightarrow\quad x = R\$8.400{,}00. \\ y = 68k \quad\Rightarrow\quad y = 68\times 100 \quad\Rightarrow\quad y = R\$6.800{,}00. \\ z = 63k \quad\Rightarrow\quad z = 63\times 100 \quad\Rightarrow\quad z = R\$6.300{,}00. \end{cases}$$

Portanto, teremos:

sócio	valor investido	tempo na associação	valor do lucro recebido
Mauro	R$7.000,00	12 meses	R$8.400,00
César	R$8.500,00	8 meses	R$6.800,00
Nunes	R$9.000,00	7 meses	R$6.300,00

Exercícios resolvidos

1. (FCC) Três pessoas formaram, na data de hoje, uma sociedade com a soma dos capitais investidos igual a R$100 000,00. Após um ano, o lucro auferido de R$7 500,00 é dividido entre os sócios em partes diretamente proporcionais aos capitais iniciais investidos. Sabendo-se que o valor da parte do lucro que coube ao sócio que recebeu o menor valor é igual ao módulo da diferença entre os valores que receberam os outros dois, tem-se que o valor do capital inicial do sócio que entrou com maior valor é:

a) R$75 000,00.
b) R$60 000,00.
c) R$50 000,00.
d) R$40 000,00.
e) R$37 500,00.

Resolução:

Organizando os dados na tabela a seguir:

sócio	valor investido	valor do lucro recebido
1ª pessoa	"A" reais	*x* reais
2ª pessoa	"B" reais	*y* reais
3ª pessoa	"C" reais	*z* reais

A soma dos lucros de cada pessoa dessa sociedade foi de R$7.500,00, ou seja:

$x + y + z = \text{R\$}7.500{,}00$

Supondo que, A < B < C, então:

$A = C - B$

onde: $A + B + C = \text{R\$}100.000{,}00$

Sabendo-se que as partes recebidas (x, y e z) são diretamente proporcionais aos capitais investidos (A, B e C), então, tem-se que:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = k$$

onde "*k*" é chamado de constante de proporcionalidade ou coeficiente de proporcionalidade.

Por essa proporção, temos que: $\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \frac{x+y+z}{A+B+C} = k$

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \frac{\overbrace{x+y+z}^{\text{R\$ }7.500{,}00}}{\underbrace{A+B+C}_{\text{R\$ }100.000{,}00}} \Rightarrow \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \frac{7.5\cancel{00}}{100.0\cancel{00}} \Rightarrow \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \frac{75^{\div 25}}{1000_{\div 25}} = \frac{3}{40}$$

Sabendo-se que: $\begin{cases} A + B + C = R\$\,100.000,00 \\ A = C - B \end{cases}$, então, teremos:

$$A + B + C = 100.000 \Rightarrow \underbrace{C - B}_{A} + B + C = 100.000 \Rightarrow 2C = 100.000 \Rightarrow C = \frac{100.000}{2}$$

C = 50.000
Gabarito: C

2. (Cespe/UnB) Três amigos decidiram construir uma empresa, em sociedade, para a prestação de serviços técnicos nas áreas de contabilidade, informática e telefonia. O contador contribuiu com R\$2.000,00, o técnico em informática, com R\$3.000,00, e o técnico em telefonia, com R\$4.000,00. Ao final de um ano de serviços, a empresa obteve um lucro de R\$5.400,00 para ser dividido em partes proporcionais aos valores empenhados por cada sócio. Com base nessas informações, o técnico em informática deve receber uma quantia:

a) inferior a R\$1.850,00.
b) superior a R\$1.850 e inferior a R\$1.860,00.
c) superior a R\$1.860 e inferior a R\$1.870,00.
d) superior a R\$1.870 e inferior a R\$1.880,00.
e) superior a R\$1.880.

Resolução:

Organizando os dados em uma tabela:

amigos	valor investido	valor do lucro recebido
contador	R\$2.000,00	*x* reais
técnico de informática	R\$3.000,00	*y* reais
técnico em telefonia	R\$4.000,00	*z* reais

De acordo com os dados apresentados, o terceiro amigo receberá a **MAIOR** parte do lucro.

Lembramos que a soma das três parcelas do lucro resultará no lucro líquido: $x + y + z =$ R\$5.400,00.

Para determinarmos os valores x, y e z, aplicaremos a proporção direta entre o valor a ser recebido e o valor investido.

$$\underbrace{\frac{x}{R\$\ 2.000,00} = \frac{y}{R\$\ 3.000,00} = \frac{z}{R\$\ 4.000,00}}_{\text{proporção na razão direta entre a parcela do lucro a ser recebido e o valor de investimento.}} = k$$

onde "*k*" é chamado de constante de proporcionalidade ou coeficiente de proporcionalidade.

Simplificando todos os denominadores da proporção anterior por 1.000, tem-se:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$$

Por essa proporção, temos que:

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 3k \\ z = 4k \end{cases}$$, substituindo esses valores na equação $x + y + z =$ R\$5.400,00, teremos:

$$2k + 3k + 4k = 5.400 \quad \Rightarrow \quad 9k = 5.400 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{5.400}{9} \quad \Rightarrow \quad k = 600$$

Substituindo o valor da constante de proporcionalidade nas equações que definem a parcela de cada lucro.

$$\begin{cases} x = 2k & \Rightarrow & x = 2\times600 & \Rightarrow & x = R\$1.200{,}00. \\ y = 3k & \Rightarrow & y = 3\times600 & \Rightarrow & y = R\$1.800{,}00. \\ z = 4k & \Rightarrow & z = 4\times600 & \Rightarrow & z = R\$2.400{,}00. \end{cases}$$

Portanto, o técnico de informática recebeu: R\$1.800,00.

Gabarito: A

3. (Cetro) Quatro analistas de informática resolveram abrir uma empresa e investiram os seguintes capitais: R\$12.000,00; R\$13.000.00; R\$15.000,00 e R\$20.000,00. Após um ano de sociedade decidiram repartir um fundo de ações no valor de R\$270.000,00. Aquele que investiu R\$15.00,00 nessa sociedade recebeu desse fundo de ações uma parcela de:

a) R\$54.000,00.
b) R\$58.500,00.
c) R\$62.500,00.
d) R\$67.500,00.
e) R\$90.000,00.

Resolução:

Organizando os dados em uma tabela:

amigos	valor investido	valor do lucro recebido
1º analista	R\$12.000,00	*x* reais
2º analista	R\$13.000,00	*y* reais
3º analista	R\$15.000,00	*z* reais
4º analista	R\$20.000,00	*w* reais

A soma das quatro parcelas do fundo de ações resultará no lucro líquido: $x + y + z + w =$ R\$270.000,00.

Para determinarmos os valores *x*, *y*, *z* e *w*, aplicaremos a proporção direta, entre o valor a ser recebido e o valor investido.

$$\underbrace{\frac{x}{R\$\,12.000{,}00} = \frac{y}{R\$\,13.000{,}00} = \frac{z}{R\$\,15.000{,}00} = \frac{w}{R\$\,20.000{,}00}}_{\text{proporção na razão direta entre a parcela do fundo de ações a ser recebido e o valor de investimento.}} = k$$

onde "*k*" é chamado de constante de proporcionalidade ou coeficiente de proporcionalidade.

Simplificando todos os denominadores da proporção anterior por 1.000, tem-se:

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{13}=\frac{z}{15}=\frac{w}{20}=k$$

Por essa proporção, temos que:

$\begin{cases} x = 12k \\ y = 13k \\ z = 15k \\ w = 20k \end{cases}$, substituindo esses valores na equação $x + y + z + w =$ R\$270.000,00,

teremos:

$$12k + 13k + 15k + 20k = 270 \Rightarrow 60k = 270$$

$$\Rightarrow \quad k=\frac{270.000}{60} \quad \Rightarrow k = 4500$$

Substituindo o valor da constante de proporcionalidade nas equações que definem a parcela de cada lucro.

$$\begin{cases} x = 12k & \Rightarrow & x = 12\times4500 & \Rightarrow & x = R\$54.000{,}00. \\ y = 13k & \Rightarrow & y = 13\times4500 & \Rightarrow & y = R\$58.500{,}00. \\ z = 15k & \Rightarrow & z = 15\times4500 & \Rightarrow & z = R\$67.500{,}00. \\ w = 20k & \Rightarrow & w = 20\times4500 & \Rightarrow & w = R\$90.000{,}00. \end{cases}$$

Portanto, aquele que investiu R\$15.000,00 recebeu: R\$67.500,00.

Gabarito: E

4. (Consulplan) Três sócios sofreram uma perda total de R\$180.000,00. Os três entraram para a sociedade com o mesmo capital, ficando o primeiro durante 11 meses, o segundo, 12 meses, e o terceiro, 13 meses, qual o prejuízo que coube ao mais antigo dessa sociedade?

a) R\$55.000,00.
b) R\$60.000,00.
c) R\$65.000,00.
d) R\$65.500,00.
e) R\$70.000,00.

Resolução:

Observe os dados do enunciado, distribuídos na tabela a seguir:

sócio	valor investido	tempo na associação	valor do prejuízo a ser pago
1º sócio	"C" reais	11 meses	x reais
2º sócio	"C" reais	12 meses	y reais
3º sócio	"C" reais	13 meses	z reais

Dividiremos o prejuízo de R\$180.000,00 em partes diretamente proporcionais aos produtos dos capitais pelos respectivos tempos de associação:

$$\frac{x}{C\times11}=\frac{y}{C\times12}=\frac{z}{C\times13}=k$$

Simplificando todos os denominadores dessa proporção por "C", teremos:

$$\frac{x}{\cancel{C}\times 11}=\frac{y}{\cancel{C}\times 12}=\frac{z}{\cancel{C}\times 13}=k \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{11}=\frac{y}{12}=\frac{z}{13}=k$$

onde "*k*" é chamado de constante de proporcionalidade ou coeficiente de proporcionalidade.

Por essa proporção, temos que:

$$\begin{cases} x = 11k \\ y = 12k \\ z = 13k \end{cases}$$, substituindo esses valores na equação $x + y + z =$ R$180.000,00, teremos:

$$11k + 12k + 13k = 180.000 \quad\Rightarrow\quad 36k = 180.000 \quad\Rightarrow\quad k = \frac{180.000}{36} \quad\Rightarrow\quad k = 5.000$$

Substituindo o valor da constante de proporcionalidade nas equações que definem a parcela de cada prejuízo.

$$\begin{cases} x = 11k \quad\Rightarrow\quad x = 11\times 5.000 \quad\Rightarrow\quad x = R\$\,55.0400,00. \\ y = 12k \quad\Rightarrow\quad y = 12\times 5.000 \quad\Rightarrow\quad y = R\$\,60.000,00. \\ z = 13k \quad\Rightarrow\quad z = 13\times 5.000 \quad\Rightarrow\quad z = R\$\,65.000,00. \end{cases}$$

O mais antigo estava na empresa há 13 meses e sua parcela a pagar será de R$65.000,00

Gabarito: C

5. (FCC) Uma empresa teve um lucro de R$441.600,00. O primeiro sócio empregou R$100.000,00 durante um ano e seis meses; o segundo R$120.000,00 por um ano e quatro meses; e o terceiro R$150.000,00, durante um ano. Qual o lucro do sócio com maior parcela nessa sociedade?

a) R$175.800,00.
b) R$172.000,00.
c) R$160.200,00.
d) R$153.600,00.
e) R$144.000,00.

Resolução:

Observe os dados do enunciado, distribuídos nesta tabela:

sócio	valor investido	tempo na associação	valor do lucro recebido
1º sócio	R$100.000,00	18 meses	*x* reais
2º sócio	R$120.000,00	16 meses	*y* reais
3º sócio	R$150.000,00	12 meses	*z* reais

Dividiremos o lucro de R$441.600,00 em partes diretamente proporcionais aos produtos dos capitais pelos respectivos tempos de associação:

$$\frac{x}{100.000\times 18}=\frac{y}{120.000\times 16}=\frac{z}{150.000\times 12}=k$$

Ou ainda:

$$\frac{x}{1.800.000}=\frac{y}{1.920.000}=\frac{z}{1.800.000}=k$$

Simplificando todos os denominadores dessa proporção por "20.000", teremos:

$$\frac{x}{90} = \frac{y}{96} = \frac{z}{90} = k$$

onde "*k*" é chamado de constante de proporcionalidade ou coeficiente de proporcionalidade.

Por essa proporção, temos que:

$\begin{cases} x = 90k \\ y = 96k \\ z = 90k \end{cases}$, substituindo esses valores na equação $x + y + z =$ R\$441.600,00, teremos:

$$90k + 96k + 90k = 441.600 \quad \Rightarrow \quad 276k = 441.600 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{441.600}{276} \quad \Rightarrow \quad k = 1.600$$

Substituindo o valor da constante de proporcionalidade nas equações que definem a parcela de cada prejuízo.

$$\begin{cases} x = 90k & \Rightarrow & x = 90 \times 1.600 & \Rightarrow & x = \text{R\$}144.000{,}00. \\ y = 96k & \Rightarrow & y = 96 \times 1.600 & \Rightarrow & y = \text{R\$}153.600{,}00. \\ z = 90k & \Rightarrow & z = 90 \times 1.600 & \Rightarrow & z = \text{R\$}144.000{,}00. \end{cases}$$

O mais antigo estava na empresa há 13 meses e sua parcela a pagar será de R$65.000,00

Gabarito: D

Capítulo 22

Regra de três simples e composta

22.1. Regra de três simples

Constituem ***regra de três simples*** os problemas que envolvem ***pares*** de ***grandezas diretamente*** (***regra de três direta***) ou ***grandezas inversamente*** (***regra de três inversa***) ***proporcionais***.

Obs.: É dita **regra de três simples** quando envolve somente dois pares de ***grandezas direta*** ou ***inversamente proporcionais***.

Destacaremos algumas ***relações diretas*** ou ***inversas*** entre ***algumas grandezas***, para melhor visualização do exercício. Observe o quadro:

GRANDEZAS	RELAÇÃO	DESCRIÇÃO
nº de funcionário × serviço	***direta***	**MAIS** funcionários contratados demanda **MAIS** serviço produzido
nº de funcionário × tempo	***inversa***	**MAIS** funcionários contratados exigem **MENOS** tempo de trabalho
nº de funcionário × eficiência	***inversa***	**MAIS** eficiência (dos funcionários) exige **MENOS** funcionários contratados
nº de funcionário × grau de dificuldade	***direta***	Quanto **MAIOR** o grau de dificuldade de um serviço, **MAIS** funcionários deverão ser contratados
serviço × tempo	***direta***	**MAIS** serviço a ser produzido exige **MAIS** tempo para realizá-lo
serviço × eficiência	***direta***	Quanto **MAIOR** for a eficiência dos funcionários, **MAIS** serviço será produzido
serviço × grau de dificuldade	***inversa***	Quanto **MAIOR** for o grau de dificuldade de um serviço, **MENOS** serviços serão produzidos
tempo × eficiência	***inversa***	Quanto **MAIOR** for a eficiência dos funcionários, **MENOS** tempo será necessário para realizar um determinado serviço
tempo × grau de dificuldade	***direta***	Quanto **MAIOR** for o grau de dificuldade de um serviço, **MAIS** tempo será necessário para realizar um determinado serviço

Obs.: Nessa tabela, considere que a grandeza ***eficiência*** esteja associada aos ***trabalhadores***, bem como o ***grau de dificuldade***, ao ***serviço produzido***. Nesse caso, por exemplo, tem-se que: "Quem são eficientes são os funcionários e o que se torna difícil é o serviço a ser realizado."

Exemplo de uma regra de três direta:

Em uma grande obra, 15 operários conseguem cavar um poço artesiano para sustentar as necessidades dessa obra. Nesse caso, quantos operários serão necessários para cavar outro poço, cujo grau de dificuldade é igual a 60% do primeiro?

As ***grandezas*** envolvidas nessa ***regra de três simples*** são "***número de operários***" e "***grau de dificuldade de um serviço***". Nesse caso, a relação entre essas grandezas, como visto na tabela anterior, é ***diretamente proporcional,*** já que, quanto **MENOS** difícil for o serviço, **MENOS** funcionários serão necessários para concluir a tarefa. Assim, teremos:

$$\text{Se} \qquad 15 \text{ operários} \xrightarrow{\text{cavam com}} 100\% \text{ de grau de dificuldade}$$

$$\text{Então} \qquad x \xrightarrow{\text{cavarão com}} 60\% \text{ de grau de dificuldade}$$

Sendo a relação ***direta*** entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma cruzada***" os valores das respectivas grandezas.

$$100\% \times x = 60\% \times 15 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{60\cancel{\%} \times 15}{100\cancel{\%}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{90}{10} \quad \Rightarrow \quad x = 9 \text{ operários}$$

Exemplo de uma regra de três inversa:

Em uma repartição pública cinco funcionários conseguem arquivar um lote de processos em 12 dias. Se contratasse mais um funcionário esse mesmo lote seria arquivado em quantos dias?

As ***grandezas*** envolvidas nessa ***regra de três simples*** são "***número de funcionários***" e "***tempo de serviço***". Aqui, a relação entre essas grandezas, como visto na tabela anterior, é ***inversamente proporcional,*** já que, quanto **MAIS** funcionários ajudarem no serviço, **MENOS** tempo será necessário para concluir a tarefa. Assim, teremos:

$$\text{Se} \qquad 5 \text{ funcionários} \xrightarrow{\text{arquivam em}} 12 \text{ dias}$$

$$\text{Então} \qquad 6 \text{ funcionários} \xrightarrow{\text{arquivarão em}} x$$

Sendo a relação ***inversa*** entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma direta***" os valores das respectivas grandezas.

$$6 \times x = 5 \times 12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{60}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 10 \text{ dias}$$

Exercícios resolvidos

1. **(NCE) Para arrumar 120 salas, duas pessoas gastam cinco dias. Se precisamos que as salas sejam arrumadas em um único dia, será necessário contratar mais *n* pessoas que trabalhem no mesmo ritmo das duas iniciais. O valor de n é:**

a) 6.
b) 8.
c) 11.
d) 13.
e) 14.

Resolução:

$$\text{Se} \qquad 2 \text{ pessoas} \xrightarrow{\text{arrumam em}} 5\,\text{dias}$$

$$\text{Então} \qquad x \xrightarrow{\text{arrumarão em}} 1\,\text{dia}$$

Podemos observar que a relação entre as grandezas ***"número de pessoas"*** e ***"dias"*** é ***inversamente proporcional*** já que, quanto **MAIS** pessoas estiverem trabalhando, **MENOS** dias serão necessários para concluir a tarefa. Sendo ***grandezas inversamente proporcionais***, multiplicaremos "de forma direta" aos valores correspondentes.

$x \times 1 = 2 \times 5 \quad \Rightarrow \quad x = 10$ pessoas

Como já havia duas pessoas trabalhando e foram necessárias 10 pessoas para completar a tarefa, então, o número de pessoas contratadas foi igual a:

10 – 2 = 8 pessoas

Gabarito: B

2. (NCE) Quatro funcionários de uma empresa são capazes de atender, em média, 52 pessoas por hora. Diante disso, espera-se que seis funcionários, com a mesma capacidade operacional dos primeiros, sejam capazes de atender por hora uma média de:

a) 72 pessoas.
b) 75 pessoas.
c) 78 pessoas.
d) 82 pessoas.
e) 85 pessoas.

Resolução:

As ***grandezas*** envolvidas nessa ***regra de três simples*** são "***número de funcionários***" e "***serviço produzido***". A relação entre essas grandezas, como visto na tabela anterior, é ***diretamente proporcional***, já que, quanto **MAIS** funcionários trabalharem, **MAIS** serviços serão produzidos. Assim, teremos:

$$\text{Se} \qquad 4 \text{ funcionários} \xrightarrow{\text{atendem}} 52\,\text{pessoas por hora}$$

$$\text{Então} \qquad 6\,\text{funcionários} \xrightarrow{\text{atenderão}} \qquad x$$

Sendo a relação ***direta***, entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma cruzada***" os valores das respectivas grandezas.

$$4 \times x = 6 \times 52 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \times 52}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 6 \times 13 \quad \Rightarrow \quad x = 78 \text{ pessoas por hora}$$

Gabarito: C

3. (UFBA) Um carro consumiu 50 litros de álcool para percorrer 600 km. Supondo condições equivalentes, esse mesmo carro, para percorrer 840 km, consumirá:

a) 68 litros.
b) 75 litros.
c) 70 litros.
d) 80 litros.
e) 85 litros.

Resolução:

As ***grandezas*** envolvidas nessa ***regra de três simples*** são "***quantidade de litros gastos***" e "***distância percorrida***". A relação entre essas grandezas é ***diretamente proporcional,*** já que, quanto **MAIOR** for a distância percorrida, **MAIS** litros de álcool serão gastos. Assim, teremos:

$$\text{Se} \qquad 50 \text{ litros} \xrightarrow{\text{percorrem}} 600 \text{ km}$$

$$\text{Então} \qquad x \xrightarrow{\text{percorrerão}} 840 \text{ km}$$

Sendo a relação ***direta*** entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma cruzada***" os valores das respectivas grandezas.

$$600 \times x = 50 \times 840 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5\cancel{0} \times 84\cancel{0}}{6\cancel{0}\cancel{0}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5 \times 84}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 5 \times 14 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = 70 \text{ litros}$$

Gabarito: C

4. (Vunesp) Uma pessoa digitou um trabalho em sete dias, trabalhando oito horas por dia. Para realizar o mesmo trabalho, nas mesmas condições, só que trabalhando apenas quatro horas por dia, ela demoraria:

a) 8 dias.
b) 9 dias.
c) 10 dias.
d) 11 dias.
e) 14 dias.

Resolução:

As ***grandezas*** envolvidas nessa ***regra de três simples*** são "***tempo de trabalho***" e "***produtividade***". Aqui, a relação entre essas grandezas será ***inversamente proporcional,*** já que, **MENOS** horas trabalhadas por dia necessitarão de **MAIS** dias de trabalho. Assim, teremos:

$$\text{Se} \qquad 7 \text{ dias trabalhados} \xrightarrow{\text{utilizam}} 8 \text{ horas por dia de trabalho}$$

$$\text{Então} \qquad x \xrightarrow{\text{necessitarão de}} 4 \text{ horas por dia trabalhadas}$$

Sendo a relação ***inversa*** entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma direta***" os valores das respectivas grandezas.

$$4 \times x = 7 \times 8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{56}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 14 \text{ dias trabalhados}$$

Gabarito: E

5. (IBGE) Andando com velocidade de 4 km/h, Pedro vai do trabalho a casa em 12 minutos. Se aumentasse em 50% sua velocidade, em quantos minutos Pedro faria esse mesmo percurso?

a) 6 min.
b) 7 min.
c) 8 min.
d) 9 min.
e) 10 min.

Resolução:

As ***grandezas*** envolvidas nessa ***regra de três simples*** são "***velocidade***" e "***tempo***". A relação entre essas grandezas é ***inversamente proporcional,*** já que, quanto **MAIOR** a velocidade de um móvel, **MENOR** será o tempo do percurso. Assim, teremos:

Se $\quad 4 \text{ km/h} \xrightarrow{\text{percorrem em}} 12 \text{ minutos}$

Então $\quad 6 \text{ km/h} \xrightarrow{\text{percorrerão em}} x$

Obs.: A velocidade de 4 km/h foi aumentada em 50% (2 km/h) e passou a valer 6 km/h.

Sendo a relação ***inversa*** entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma direta***" os valores das respectivas grandezas.

$$6 \times x = 4 \times 12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{48}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 8 \text{ minutos}$$

Gabarito: C

6. **(PRF) Para chegar ao trabalho, José gasta 2h 30min dirigindo à velocidade média de 75 km/h. Se aumentar a velocidade para 90 km/h, o tempo gasto, em minutos, para José fazer o mesmo percurso será:**
   a) 50.
   b) 75.
   c) 90.
   d) 125.
   e) 180.

Resolução:

As ***grandezas*** envolvidas nessa ***regra de três simples*** são "***velocidade***" e "***tempo***". A relação entre essas grandezas é ***inversamente proporcional,*** já que, quanto **MAIOR** a velocidade de um móvel, **MENOR** será o tempo do percurso. Assim, teremos:

Se $\quad 75 \text{ km/h} \xrightarrow{\text{percorrem em}} 150 \text{ minutos}$

Então $\quad 90 \text{ km/h} \xrightarrow{\text{percorrerão em}} x$

Obs.: O tempo de 2 h e 30 min equivale a 150 minutos.

Sendo a relação ***inversa*** entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma direta***" os valores das respectivas grandezas.

$$90 \times x = 75 \times 150 \Rightarrow x = \frac{75 \times 15\cancel{0}}{9\cancel{0}} \Rightarrow x = \frac{75 \times 15}{9} \Rightarrow x = \frac{1.125}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 125 \text{ minutos}$$

Gabarito: D

7. **(NCE) A cada 1200m rodados em viagem, o automóvel de Pascoal gasta 0,09 litro de combustível. Numa viagem, Pascoal gastou 54,9 litros de combustível. O percurso teve então a seguinte quantidade de quilômetros:**
   a) 776.
   b) 732.
   c) 688.
   d) 654.
   e) 586.

Resolução:

Transformando, inicialmente 1200m em quilômetros, temos:
Se 1.000m equivale a 1km, então 1200m equivalerá a 1,2 km.

$$\text{Se} \qquad 1,2\,\text{km} \xrightarrow{\text{consome}} 0,09\,\text{litro}$$

$$\text{Então} \qquad x \xrightarrow{\text{consumirá}} 54,9\ \text{litros}$$

Podemos observar que a relação entre as grandezas ***"quilômetros percorridos"*** e ***"litros consumidos"*** é ***diretamente proporcional***, já que, quanto **MAIS** o carro "rodar" pela estrada **MAIS** combustível ele irá consumir.

Sendo a relação ***direta*** entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma cruzada***" os valores das respectivas grandezas.

$$0,09 \times x = 1,2 \times 54,9 \quad \Rightarrow \quad 0,09x = 65,88 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{65,88}{0,09} \quad \Rightarrow \quad x = 732\ \text{km}$$

Gabarito: C

8. (FCC) Ao catalogar os tipos de produtos agrícolas existentes em estoque, um auxiliar de serviços de campo observou que gastava, em média, 25 minutos para catalogar 15 tipos. Nessas condições, se trabalhar ininterruptamente por 1 hora e 20 minutos, espera-se que o número de produtos que ele consiga catalogar seja:

a) 36.
b) 38.
c) 42.
d) 45.
e) 48.

Resolução:

As ***grandezas*** envolvidas nessa ***regra de três simples*** são "***tempo para executar um serviço***" e "***serviço produzido***". A relação entre essas grandezas é ***diretamente proporcional***, já que, quanto **MAIS** tempo, **MAIS** serviços serão produzidos. Assim, teremos:

$$\text{Se} \qquad 25\ \text{minutos} \xrightarrow{\text{catalogam}} 15\ \text{tipos de produtos agrícolas}$$

$$\text{Então} \qquad 80\ \text{minutos} \xrightarrow{\text{catalogarão}} x$$

Sendo a relação ***direta*** entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma cruzada***" os valores das respectivas grandezas.

$$25 \times x = 80 \times 15 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{80 \times 15^{\div 5}}{25_{\div 5}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{80^{\div 5} \times 3}{5_{\div 5}} \quad \Rightarrow \quad x = 16 \times 3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = 48\ \text{tipos}$$

Gabarito: E

9. (PUC) Um pastor possui 16 ovelhas e ração suficiente para alimentá-las durante 19 dias. Após quatro dias, um bando de lobos matou seis ovelhas, e após três dias desse evento o pastor adquiriu algumas ovelhas, constatando-se que a ração restante daria para alimentar o novo rebanho por mais 15 dias. Quantas ovelhas foram adquiridas pelo pastor?

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 6.

Resolução:

Inicialmente, tem-se que "um pastor possui 16 ovelhas e ração suficiente para alimentá-las durante 19 dias".

$$16 \text{ ovelhas} \xrightarrow{\text{se alimentam por}} 15 \text{ dias de ração}$$

"Após quatro dias, um bando de lobos matou seis ovelhas." Com isso, **MENOS** ovelhas (10 unidades), terão **MAIS** dias para serem alimentadas. Essa nova quantidade de dias poderá ser determinada pela seguinte ***regra de três simples e inversa***:

$$\text{Se} \qquad 16 \text{ ovelhas} \xrightarrow{\text{se alimentam por}} 15 \text{ dias}$$

$$\text{Então} \qquad 10 \text{ ovelhas} \xrightarrow{\text{se alimentarão por}} x$$

Sendo a relação ***inversa*** entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma direta***" os valores das respectivas grandezas.

$$10 \times x = 16 \times 15 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{24\cancel{0}}{1\cancel{0}} \quad \Rightarrow \quad x = 24 \text{ dias}$$

"...e após três dias desse evento o pastor adquiriu algumas ovelhas, constatando-se que a ração restante daria para alimentar o novo rebanho por mais 15 dias".

$$\text{Se} \qquad 10 \text{ ovelhas} \xrightarrow{\text{se alimentarão por}} 21 \text{ dias}$$

$$\text{Então} \qquad (10+n) \text{ ovelhas} \xrightarrow{\text{se alimentarão por}} 15 \text{ dias}$$

Como visto anteriormente, sendo a relação ***inversa*** entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma direta***" os valores das respectivas grandezas.

$$(10+n) \times 15 = 10 \times 21 \quad \Rightarrow \quad 10 + n = \frac{210}{15} \quad \Rightarrow \quad n = 14 - 10 \quad \Rightarrow \quad n = 4 \text{ ovelhas}$$

Gabarito: D

10. (Cesgranrio) Para estocar 250 toneladas de soja no armazém do porto de Porto Velho, durante 15 dias, a Empresa A pagou R$335,00. A Empresa B estocou no mesmo armazém, durante o mesmo período, 70 toneladas a mais de soja. Ao todo, quanto a Empresa B pagou pela estocagem, em reais?

a) 93,80.
b) 241,20.
c) 428,80.
d) 568,00.
e) 938,00.

Resolução:

As ***grandezas*** envolvidas nessa ***regra de três simples*** são "***quantidade de toneladas de soja***" e "***valor, em reais, a ser cobrado***". A relação entre essas grandezas é ***diretamente proporcional*** já que, quanto **MENOS** toneladas armazenadas, **MENOS** valor será cobrado pelo aluguel de estocagem. Assim, teremos:

$$\text{Se} \qquad 250 \text{ toneladas} \xrightarrow{\text{custam}} \text{R\$ } 335{,}00$$

$$\text{Então} \qquad 70 \text{ toneladas} \xrightarrow{\text{custarão}} x$$

Sendo a relação ***direta*** entre as grandezas, multiplicaremos "***de forma cruzada***" os valores das respectivas grandezas.

$$250 \times x = 335 \times 70 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{335 \times 7\cancel{0}}{25\cancel{0}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{335 \times 7}{25} \quad \Rightarrow \quad x = 13{,}4 \times 7 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \text{R\$ } 93{,}80$$

Gabarito: A

22.2. Regra de três composta

Quando existem mais de dois pares de grandezas direta ou inversamente proporcionais:

Para resolução de uma ***regra de três composta*** utilizaremos **quatro** ***passos de resolução primordiais***:

1º passo: organizar as grandezas semelhantes em colunas, denotando o significado de cada uma delas.

2º passo: verificar se as demais grandezas, em relação à grandeza em que se encontra a variável "*x*", são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** às mesmas.

3º passo: simplificar, se possível, os valores das grandezas que se encontram em uma mesma coluna, ambos por um mesmo valor.

4º passo: utilizar qualquer método resolutivo.

Exemplo:

Em uma obra, 20 operários, em 10 dias de 8 horas, pavimentam 16.000 metros de estradas. Quantos dias de 10 horas seriam necessários para 16 operários, cuja eficiência é o dobro da dos primeiros, pavimentarem 32.000 metros de estradas, cujo grau de dificuldade de trabalho equivale aos 4/5 da primeira?

1º passo: organizar as grandezas semelhantes em colunas, denotando o significado de cada uma delas.

operários	***tempo (dias)***	***produtividade (h/d)***	***serviço***	***eficiência***	***dificuldade***
20	10	8	16.000	1	1
16	*x*	10	32.000	2	4/5

2º passo: verificar se as demais grandezas, em relação à grandeza em que se encontra a variável "*x*", são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** às mesmas.

Inicialmente, devemos observar que a grandeza em que se encontra a variável "*x*" é o tempo.

- ***operários*** × ***tempo***: grandezas ***inversamente proporcionais*** já que, ***diminuindo-se*** o número operários, ***aumenta-se*** o tempo de serviço.

- ***produtividade*** × ***tempo***: grandezas ***inversamente proporcionais*** já que, ***aumentando-se*** a produtividade diária, ***diminui-se*** o tempo de serviço.
- ***serviço*** × ***tempo***: grandezas ***diretamente proporcionais*** já que, ***aumentando-se*** a quantidade de serviço, ***aumenta*** o tempo de trabalho.
- ***eficiência*** × ***tempo***: grandezas ***inversamente proporcionais*** já que, ***aumentando-se*** a eficiência dos operários, ***diminui-se*** o tempo de serviço.
- ***dificuldade*** × ***tempo***: grandezas ***diretamente proporcionais*** já que, ***aumentando-se*** o grau de dificuldade de um serviço, ***aumenta-se*** também o tempo de trabalho.

3º passo: simplificar, se possível, os valores das grandezas que se encontram em uma mesma coluna, ambos por um mesmo valor.

operários	***tempo (dias)***	***produtividade (h/d)***	***serviço***	***eficiência***	***dificuldade***
20	10	8	16.000	1	100%
16	x	10	32.000	2	80%
(÷4)		(÷2)	(÷16.000)		(÷20%)

Após as devidas simplificações...

operários	***tempo (dias)***	***produtividade (h/d)***	***serviço***	***eficiência***	***dificuldade***
5	10	4	1	1	5
4	x	5	2	2	4

4º passo: utilizar qualquer método resolutivo.

O método a ser utilizado é conhecido como o ***produto das pontas***. Esse método consiste da seguinte resolução:

a) Coloca-se, inicialmente, uma seta direcionada à variável "x".

operários	***tempo (dias)***	***produtividade (h/d)***	***serviço***	***eficiência***	***dificuldade***
5	10	4	1	1	5
	↓				
4	x	5	2	2	4

b) De acordo com o **2º passo**, colocaremos setas no ***mesmo sentido*** da ***seta da variável "x"*** se as ***grandezas*** forem ***diretamente proporcionais*** a esta; caso sejam ***inversamente proporcionais***, as setas terão ***sentidos opostos***. Ou seja, ***grandezas diretamente proporcionais, setas no mesmo sentido***; ***grandezas inversamente proporcionais, setas no sentido inverso ao da variável "x"***.

operários	***tempo (dias)***	***produtividade (h/d)***	***serviço***	***eficiência***	***dificuldade***
5	10	4	1	1	5
↑	↓	↑	↓	↑	↓
4	x	5	2	2	4
(***inversa***)		(***inversa***)	(***direta***)	(***inversa***)	(***direta***)

c) Aplicando-se a ***fórmula*** que define **o valor de "*x*"** pelo ***produto das pontas***:

$$\boxed{x = \textbf{valor} \text{ da coluna da variável "x"} \times \frac{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores das } \textbf{\textit{pontas das setas}}}{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores } \textbf{\textit{opostos às pontas das setas}}}}$$

$$x = 10 \times \frac{5 \times 4 \times 2 \times 1 \times 4}{4 \times 5 \times 1 \times 2 \times 5} \Rightarrow x = 10 \times \frac{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times 4}{\cancel{4} \times \cancel{5} \times \cancel{1} \times \cancel{2} \times 5} \Rightarrow x = \frac{10 \times 4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{40}{5} \Rightarrow x = 8 \text{ dias}$$

Exercícios resolvidos

1. (IFRJ) Uma gráfica tem capacidade operacional para imprimir 12.500 livros de 120 páginas cada em 15 dias, utilizando quatro máquinas impressoras iguais e trabalhando 8 horas diárias. Tendo recebido uma encomenda de 18.000 livros de 150 páginas cada, que deverão ser entregues em 24 dias, o proprietário resolveu comprar mais máquinas impressoras iguais às já existentes na gráfica. Trabalhando 6 horas diárias para o cumprimento da encomenda, o número de máquinas impressoras que o proprietário deverá comprar é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 6.

Resolução:

1º passo: organizar as grandezas semelhantes em colunas, denotando o significado de cada uma delas.

nº de livros	***páginas***	***dias***	***máquinas***	***produtividade (h/d)***
12.500	120	15	4	8
18.000	150	24	x	6

2º passo: verificar se as demais grandezas, em relação à grandeza em que se encontra a variável "*x*", são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** às mesmas.

Inicialmente, devemos observar que a grandeza em que se encontra a variável "*x*" é o número de máquinas.

- ***nº de livros* × *máquinas***: grandezas ***diretamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** o número de livros, ***aumenta-se*** a quantidade de máquinas para produzi-los.
- ***páginas* × *máquinas***: grandezas ***diretamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** o número de páginas, ***aumenta-se*** a quantidade de máquinas para produzi-las.
- ***dias* × *máquinas***: grandezas ***inversamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** o número de dias trabalhados, ***diminui-se*** a quantidade de máquinas para realizar esse trabalho.
- ***produtividade (h/d)* × *máquinas***: grandezas ***inversamente proporcionais,*** já que, ***diminuindo-se*** a produtividade das máquinas, deve-se ***aumentar*** a quantidade de máquina para realizar esse trabalho.

3º passo: simplificar, se possível, os valores das grandezas que se encontram em uma mesma coluna, ambos por um mesmo valor.

nº de livros	*páginas*	*dias*	*máquinas*	*produtividade (h/d)*
12.500	120	15	4	8
18.000	150	24	x	6
(÷500)	(÷30)	(÷3)		(÷2)

nº de livros	*páginas*	*dias*	*máquinas*	*produtividade (h/d)*
25	4	5	4	4
36	5	8	x	3

4º passo: utilizar qualquer método resolutivo.

O método a ser utilizado é conhecido como o ***produto das pontas***. Esse método consiste da seguinte resolução:

a) Coloca-se, inicialmente, uma seta direcionada à variável "*x*".

nº de livros	*páginas*	*dias*	*máquinas*	*produtividade (h/d)*
25	4	5	4	4
			↓	
36	5	8	x	3

b) De acordo com o **2º passo**, colocaremos setas no ***mesmo sentido*** da ***seta da variável "x"*** se as ***grandezas*** forem ***diretamente proporcionais*** a esta; caso sejam ***inversamente proporcionais***, as setas terão ***sentidos opostos***. Ou seja, ***grandezas diretamente proporcionais***, ***setas no mesmo sentido***; ***grandezas inversamente proporcionais***, ***setas no sentido inverso ao da variável "x"***.

nº de livros	*páginas*	*dias*	*máquinas*	*produtividade (h/d)*
25	4	5	4	4
↓	↓	↑	↓	↑
36	5	8	x	3
(***direta***)	(***direta***)	(***inversa***)		(***inversa***)

c) Aplicando-se a ***fórmula*** que define **o valor de "*x*"** pelo ***produto das pontas***:

$$\boxed{x = \textbf{valor} \text{ da coluna da variável } "x" \times \frac{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores das } \textbf{\textit{pontas das setas}}}{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores } \textbf{\textit{opostos às pontas das setas}}}}$$

$$x = 4 \times \frac{36 \times 5 \times 5 \times 4}{25 \times 4 \times 8 \times 3} \Rightarrow x = \cancel{4}^1 \times \frac{36 \times \cancel{5}^1 \times \cancel{5}^1 \times \cancel{4}^1}{\cancel{25}_1 \times \cancel{4}_1 \times \cancel{8}_2 \times 3} \Rightarrow x = \frac{36}{6} \Rightarrow x = 6 \text{ máquinas}$$

Portanto, se o serviço foi realizado com seis máquinas, então foram adquiridas duas máquinas, já que, no início do serviço já existiam quatro delas.

Gabarito: B

2. (Vunesp) Quatro cães consomem semanalmente 60 kg de ração. Assim, ao aumentarmos o número de cães em 75%, o consumo mensal, em kg, considerando o mês de 30 dias, será de:

a) 350.
b) 400.
c) 450.
d) 500.
e) 550.

Resolução:

1º passo: organizar as grandezas semelhantes em colunas, denotando o significado de cada uma delas.

Lembrando que o número de cães foi aumentado em 75%, ou seja:

$$4 + 75\% \text{ de } 4 = 4 + \frac{3}{4} \times 4 = 4 + 3 = 7 \text{ cães.}$$

nº de cães	***dias***	***ração***
4	7	60
7	30	x

2º passo: verificar se as demais grandezas, em relação à grandeza em que se encontra a variável "x", são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** às mesmas.

Inicialmente, devemos observar que a grandeza em que se encontra a variável "x" é o número de ração.

- ***nº de cães* × *ração***: grandezas ***diretamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** o número de cães, ***aumenta-se*** a quantidade de ração para alimentá-los.
- ***dias* × *ração***: grandezas ***diretamente proporcionais*** já que, ***aumentando-se*** o número de dias, ***aumenta-se*** também a quantidade de ração para alimentar os cães.

3º passo: simplificar, se possível, os valores das grandezas que se encontram em uma mesma coluna, ambos por um mesmo valor.

nº de cães	***dias***	***ração***
4	7	60
7	30	x

Obs.: Não há o que simplificar.

4º passo: utilizar qualquer método resolutivo.

O método a ser utilizado é conhecido como o ***produto das pontas***. Esse método consiste da seguinte resolução:

a) Coloca-se, inicialmente, uma seta direcionada à variável "x".

nº de cães	***dias***	***ração***
4	7	60
		↓
7	30	x

b) De acordo com o **2º passo**, colocaremos setas no ***mesmo sentido*** da ***seta da variável "x"*** se as ***grandezas*** forem ***diretamente proporcionais*** a esta; caso sejam ***inversamente proporcionais***, as setas terão ***sentidos opostos***. Ou seja, ***grandezas diretamente proporcionais, setas no mesmo sentido***; ***grandezas inversamente proporcionais, setas no sentido inverso ao da variável "x"***.

nº de cães	***dias***	***ração***
4	7	60
↓	↓	↓
7	30	x
(***direta***)	(***direta***)	

c) Aplicando-se a ***fórmula*** que define **o valor de "x"** pelo ***produto das pontas***:

$$\boxed{x = \textbf{valor} \text{ da coluna da variável "}x\text{"} \times \frac{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores das } \textbf{\textit{pontas das setas}}}{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores } \textbf{\textit{opostos às pontas das setas}}}}$$

$$x = 60 \times \frac{7 \times 30}{4 \times 7} \Rightarrow x = \cancel{60}^{15} \times \frac{\cancel{7} \times 30}{\cancel{4}_1 \times \cancel{7}} \Rightarrow x = 15 \times 30 \Rightarrow x = 450 \text{ kg de ração}$$

Gabarito: C

3. (Vunesp) Numa grande obra de aterramento, no dia de ontem, foram gastas 8 horas para descarregar 160 m³ de terra de 20 caminhões. Hoje, ainda restam 125 m³ de terra para serem descarregados no local. Considerando que o trabalho deverá ser feito em apenas 5 horas, e mantida a mesma produtividade de ontem, hoje será necessário um número de caminhões igual a:

a) 25.
b) 23.
c) 20.
d) 18.
e) 15.

Resolução:

1º passo: organizar as grandezas semelhantes em colunas, denotando o significado de cada uma delas.

tempo (h)	***serviço***	***nº de caminhões***
8	160 m^3	20
5	125 m^3	x

2º passo: verificar se as demais grandezas, em relação à grandeza em que se encontra a variável "*x*", são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** às mesmas.

Inicialmente, devemos observar que a grandeza em que se encontra a variável "*x*" é o número de caminhões.

- ***tempo × nº de caminhões***: grandezas ***inversamente proporcionais***, já que, ***diminuindo-se*** o tempo de serviço, ***aumenta-se*** a quantidade de caminhões para realizar esse mesmo serviço.

- ***serviço*** × ***nº de caminhões***: grandezas ***diretamente proporcionais,*** já que, ***diminuindo-se*** o serviço, ***diminui-se*** também a quantidade de caminhões para realizar o mesmo serviço.

3º passo: simplificar, se possível, os valores das grandezas que se encontram em uma mesma coluna, ambos por um mesmo valor.

tempo (h)	***serviço***	***nº de caminhões***
8	160 m^3	20
5	125 m^3	x
	(÷5)	

tempo (h)	***serviço***	***nº de caminhões***
8	32	20
5	25	x

4º passo: utilizar qualquer método resolutivo.

O método a ser utilizado é conhecido como o ***produto das pontas***. Esse método consiste na seguinte resolução:

a) Coloca-se, inicialmente, uma seta direcionada à variável "*x*".

tempo (h)	***serviço***	***nº de caminhões***
8	32	20
		↓
5	25	x

b) De acordo com o **2º passo**, colocaremos setas no ***mesmo sentido*** da ***seta da variável "x"*** se as ***grandezas*** forem ***diretamente proporcionais*** a esta; caso sejam ***inversamente proporcionais***, as setas terão ***sentidos opostos.*** Ou seja, ***grandezas diretamente proporcionais***, ***setas no mesmo sentido***; ***grandezas inversamente proporcionais***, ***setas no sentido inverso ao da variável "x"***.

tempo (h)	***serviço***	***nº de caminhões***
8	32	20
↑	↓	↓
5	25	x
(***inversa***)	(***direta***)	

c) Aplicando-se a ***fórmula*** que define **o valor de "*x*"** pelo ***produto das pontas***:

$$\boxed{x = \textbf{valor} \text{ da coluna da variável "x"} \times \frac{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores das } \textbf{\textit{pontas das setas}}}{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores } \textbf{\textit{opostos às pontas das setas}}}}$$

$$x = 20 \times \frac{8 \times 25}{5 \times 32} \Rightarrow x = 20 \times \frac{\cancel{8} \times \cancel{25}^{5}}{\cancel{5}_{1} \times \cancel{32}_{4}} \Rightarrow x = \frac{\cancel{20}^{5} \times 5}{\cancel{4}_{1}} \Rightarrow x = 25 \text{ caminhões}$$

Gabarito: A

4. (FCC) Com 1.260 kg de matéria-prima uma fábrica pode produzir 1.200 unidades diárias de certo artigo durante sete dias. Nessas condições, com 3.780 kg de matéria-prima, por quantos dias será possível sustentar uma produção de 1.800 unidades diárias desse artigo?

a) 14.
b) 12.
c) 10.
d) 9.
e) 7.

Resolução:

1º passo: organizar as grandezas semelhantes em colunas, denotando o significado de cada uma delas.

matéria-prima (kg)	***produtividade (u/d)***	***tempo (d)***
1.260	1.200	7
3.780	1.800	x

2º passo: verificar se as demais grandezas, em relação à grandeza em que se encontra a variável "x", são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** às mesmas.

Inicialmente, devemos observar que a grandeza em que se encontra a variável "x" é o tempo.

- ***matéria-prima*** × ***tempo***: grandezas ***diretamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** a quantidade de matéria-prima, ***aumenta-se*** o tempo de serviço.
- ***produtividade*** × ***tempo***: grandezas ***inversamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** a produtividade diária, ***diminuem-se*** os dias necessários para terminar a tarefa.

3º passo: simplificar, se possível, os valores das grandezas que se encontram em uma mesma coluna, ambos por um mesmo valor.

matéria-prima (kg)	***produtividade (u/d)***	***tempo (d)***
1.260	1.200	7
3.780	1.800	x
(÷1.260)	(÷600)	

matéria-prima (kg)	***produtividade (u/d)***	***tempo (d)***
1	2	7
3	3	x

4º passo: utilizar qualquer método resolutivo.

O método a ser utilizado é conhecido como o ***produto das pontas***. Esse método consiste na seguinte resolução:

a) Coloca-se, inicialmente, uma seta direcionada à variável "x".

matéria-prima (kg)	***produtividade (u/d)***	***tempo (d)***
1	2	7
		↓
3	3	x

b) De acordo com o **2º passo**, colocaremos setas no ***mesmo sentido*** da ***seta da variável "x"*** se as ***grandezas*** forem ***diretamente proporcionais*** a esta; caso sejam ***inversamente proporcionais***, as setas terão ***sentidos opostos***. Ou seja, ***grandezas diretamente proporcionais, setas no mesmo sentido***; ***grandezas inversamente proporcionais, setas no sentido inverso ao da variável "x"***.

matéria-prima (kg)	***produtividade (u/d)***	***tempo (d)***
1	2	7
↓	↑	↓
3	3	x

c) Aplicando-se a ***fórmula*** que define **o valor de "*x*"** pelo ***produto das pontas***:

$$\boxed{x = \textbf{valor da coluna da variável "x"} \times \frac{\textit{produto} \text{ dos valores das } \textit{pontas das setas}}{\textit{produto} \text{ dos valores } \textit{opostos às pontas das setas}}}$$

$$x = 7 \times \frac{3 \times 2}{1 \times 3} \quad \Rightarrow \quad x = 7 \times \frac{\cancel{3} \times 2}{1 \times \cancel{3}} \quad \Rightarrow \quad x = 7 \times 2 \quad \Rightarrow \quad x = 14 \text{ dias}$$

Gabarito: A

5. (FCC) Em um escritório de advocacia, oito advogados analisavam 24 ações em 15 dias. Alguns advogados foram aprovados em um concurso público e deixaram esse escritório, que passou a dispor de apenas três advogados. Se nenhum outro advogado for admitido e os que restaram mantiverem o mesmo ritmo de trabalho, a quantidade de dias que eles necessitarão para analisar 27 ações será de:

a) 30.
b) 35.
c) 40.
d) 45.
e) 50.

Resolução:

1º passo: organizar as grandezas semelhantes em colunas, denotando o significado de cada uma delas.

advogados	***nº de ações***	***tempo (d)***
8	24	15
3	27	x

2º passo: verificar se as demais grandezas, em relação à grandeza em que se encontra a variável "*x*", são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** às mesmas.

Inicialmente, devemos observar que a grandeza em que se encontra a variável "*x*" é o tempo.

- ***advogados* × *tempo***: grandezas ***inversamente proporcionais***, já que, ***diminuindo-se*** a quantidade de advogados, ***aumenta-se*** o tempo de serviço.
- ***nº de ações* × *tempo***: grandezas ***diretamente proporcionais***, já que, ***aumentando-se*** a quantidade de ações a serem analisadas, deve-se ***aumentar*** o tempo de serviço.

3º passo: simplificar, se possível, os valores das grandezas que se encontram em uma mesma coluna, ambos por um mesmo valor.

advogados	*nº de ações*	*tempo (d)*
8	24	15
3	27	x
	(÷3)	

advogados	*nº de ações*	*tempo (d)*
8	8	15
3	9	x

4º passo: utilizar qualquer método resolutivo.

O método a ser utilizado é conhecido como o ***produto das pontas***. Esse método consiste na seguinte resolução:

a) Coloca-se, inicialmente, uma seta direcionada à variável "*x*".

advogados	*nº de ações*	*tempo (d)*
8	8	15
		↓
3	9	x

b) De acordo com o **2º passo**, colocaremos setas no ***mesmo sentido*** da ***seta da variável "x"*** se as ***grandezas*** forem ***diretamente proporcionais*** a esta; caso sejam ***inversamente proporcionais***, as setas terão ***sentidos opostos***. Ou seja, ***grandezas diretamente proporcionais, setas no mesmo sentido***; ***grandezas inversamente proporcionais, setas no sentido inverso ao da variável "x"***.

advogados	*nº de ações*	*tempo (d)*
8	8	15
↑	↓	↓
3	9	x

c) Aplicando-se a ***fórmula*** que define **o valor de "*x*"** pelo ***produto das pontas***:

$$\boxed{x = \textbf{valor} \text{ da coluna da variável "x"} \times \frac{\textit{\textbf{produto}} \text{ dos valores das } \textit{\textbf{pontas das setas}}}{\textit{\textbf{produto}} \text{ dos valores } \textit{\textbf{opostos às pontas das setas}}}}$$

$$x = 15 \times \frac{8 \times 9}{3 \times 8} \quad \Rightarrow \quad x = 15 \times \frac{\cancel{8}^1 \times \cancel{9}^3}{\cancel{3} \times \cancel{8}_1} \quad \Rightarrow \quad x = 15 \times 3 \quad \Rightarrow \quad x = 45 \text{ dias}$$

Gabarito: D

6. (FUNIVERSA) Para o registro de um caso, o agente auxiliar é incumbido do preenchimento de um formulário. Verificou-se que um auxiliar gastou quatro horas para preencher 20 desses formulários. Nessas condições, é correto concluir que dois

outros auxiliares que têm o dobro da eficiência do primeiro preencherão 50 desses formulários em:

a) 2 horas e 30 minutos.
b) 5 horas.
c) 10 horas.
d) 20 horas.
e) 40 horas.

Resolução:

1º passo: organizar as grandezas semelhantes em colunas, denotando o significado de cada uma delas.

auxiliares	*tempo (h)*	*formulários*	*eficiência*
1	4	20	100%
2	x	50	200%

2º passo: verificar se as demais grandezas, em relação à grandeza em que se encontra a variável "*x*", são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** às mesmas.

Inicialmente, devemos observar que a grandeza que se encontra a variável "*x*" é o tempo.

- ***auxiliares*** × ***tempo***: grandezas ***inversamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** a quantidade de auxiliares, ***diminui-se*** a quantidade de tempo de serviço.
- ***formulários*** × ***tempo***: grandezas ***diretamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** a quantidade de formulários, deve-se ***aumentar*** o tempo de serviço.
- ***eficiência*** × ***tempo***: grandezas ***inversamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** a eficiência dos auxiliares, deve-se ***diminuir*** o tempo de serviço.

3º passo: simplificar, se possível, os valores das grandezas que se encontram em uma mesma coluna, ambos por um mesmo valor.

auxiliares	*tempo (h)*	*formulários*	*eficiência*
1	4	20	100%
2	x	50	200%
		(÷10)	(÷100)

auxiliares	*tempo (h)*	*formulários*	*eficiência*
1	4	2	1
2	x	5	2

4º passo: utilizar qualquer método resolutivo.

O método a ser utilizado é conhecido como o ***produto das pontas***. Esse método consiste na seguinte resolução:

a) Coloca-se, inicialmente, uma seta direcionada à variável "*x*".

auxiliares	*tempo (h)*	*formulários*	*eficiência*
1	4	2	1
	↓		
2	x	5	2

b) De acordo com o **2º passo**, colocaremos setas no ***mesmo sentido*** da ***seta da variável*** **"*x*"** se as ***grandezas*** forem ***diretamente proporcionais*** a esta; caso sejam ***inversamente proporcionais***, as setas terão ***sentidos opostos***. Ou seja, ***grandezas diretamente proporcionais***, ***setas no mesmo sentido***; ***grandezas inversamente proporcionais***, ***setas no sentido inverso ao da variável*** **"*x*"**.

auxiliares	***tempo (h)***	***formulários***	***eficiência***
1	4	2	1
↑	↓	↓	↑
2	x	5	2

c) Aplicando-se a ***fórmula*** que define **o valor de "*x*"** pelo ***produto das pontas***:

$$\boxed{x = \textbf{valor} \text{ da coluna da variável "x"} \times \frac{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores das } \textbf{\textit{pontas das setas}}}{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores } \textbf{\textit{opostos às pontas das setas}}}}$$

$$x = 4 \times \frac{1 \times 5 \times 1}{2 \times 2 \times 2} \Rightarrow x = \cancel{4} \times \frac{1 \times 5 \times 1}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 2{,}5 \text{ horas}$$

Gabarito: A

7. (Consulplan) Para escrever 200 páginas de um livro, trabalhando quatro horas por dia, um escritor gasta oito dias. Se trabalhar seis horas por dia, quantos dias levará para escrever 450 páginas?

a) 10 dias.
b) 14 dias.
c) 12 dias.
d) 15 dias.
e) 9 dias.

Resolução:

1º passo: organizar as grandezas semelhantes em colunas, denotando o significado de cada uma delas.

nº de páginas	***produtividade (h/d)***	***tempo (d)***
200	4	8
450	6	x

2º passo: verificar se as demais grandezas, em relação à grandeza em que se encontra a variável "*x*", são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** às mesmas.

Inicialmente, devemos observar que a grandeza que se encontra a variável "*x*" é o tempo.

- ***nº de páginas × tempo***: grandezas ***diretamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** o número de páginas, ***aumenta-se*** também a quantidade de tempo de serviço.
- ***produtividade × tempo***: grandezas ***inversamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** a produtividade diária, deve-se ***diminuir*** o tempo de serviço.

3º passo: simplificar, se possível, os valores das grandezas que se encontram em uma mesma coluna, ambos por um mesmo valor.

nº de páginas	***produtividade (h/d)***	***tempo (d)***
200	4	8
450	6	x
(÷50)	(÷2)	

nº de páginas	***produtividade (h/d)***	***tempo (d)***
4	2	8
9	3	x

4º passo: utilizar qualquer método resolutivo.

O método a ser utilizado é conhecido como o ***produto das pontas***. Esse método consiste na seguinte resolução:

a) Coloca-se, inicialmente, uma seta direcionada à variável "*x*".

nº de páginas	***produtividade (h/d)***	***tempo (d)***
4	2	8
		↓
9	3	x

b) De acordo com o **2º passo**, colocaremos setas no ***mesmo sentido*** da ***seta da variável* "*x*"** se as ***grandezas*** forem ***diretamente proporcionais*** a esta; caso sejam ***inversamente proporcionais***, as setas terão ***sentidos opostos***. Ou seja, ***grandezas diretamente proporcionais***, ***setas no mesmo sentido***; ***grandezas inversamente proporcionais***, ***setas no sentido inverso ao da variável* "*x*"**.

nº de páginas	***produtividade (h/d)***	***tempo (d)***
4	2	8
↓	↑	↓
9	3	x
(***direta***)	(***inversa***)	

c) Aplicando-se a ***fórmula*** que define **o valor de "*x*"** pelo ***produto das pontas***:

$$\boxed{x = \textbf{valor} \text{ da coluna da variável "x"} \times \frac{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores das } \textbf{\textit{pontas das setas}}}{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores } \textbf{\textit{opostos às pontas das setas}}}}$$

$$x = 8 \times \frac{9 \times 2}{4 \times 3} \Rightarrow x = \cancel{8}^{2} \times \frac{\cancel{9}^{3} \times 2}{\cancel{4}_{1} \times \cancel{3}_{1}} \Rightarrow x = 2 \times 3 \times 2 \Rightarrow x = 12 \text{ dias}$$

Gabarito: C

8. (Consulplan) Se 12 máquinas funcionando 9 horas por dia produzem 360 peças, quantas peças poderão ser produzidas por 18 máquinas funcionando 12 horas por dia?

a) 640.
b) 760.
c) 520.
d) 720.
e) 810.

Resolução:

1º passo: organizar as grandezas semelhantes em colunas, denotando o significado de cada uma delas.

máquinas	*produtividade (h/d)*	*nº peças*
12	9	360
18	12	x

2º passo: verificar se as demais grandezas, em relação à grandeza em que se encontra a variável "x", são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** às mesmas.

Inicialmente, devemos observar que a grandeza que se encontra a variável "x" é o número de peças.

- ***máquinas*** × ***nº peças***: grandezas ***diretamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** o número de máquinas, ***aumenta-se*** também a produção do serviço.
- ***produtividade*** × ***nº peças***: grandezas ***diretamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** a produtividade diária, ***aumenta-se*** também a produção tempo de serviço.

3º passo: simplificar, se possível, os valores das grandezas que se encontram em uma mesma coluna, ambos por um mesmo valor.

máquinas	*produtividade (h/d)*	*nº peças*
12	9	360
18	12	x
(÷6)	(÷3)	

máquinas	*produtividade (h/d)*	*nº peças*
2	3	360
3	4	x

4º passo: utilizar qualquer método resolutivo.

O método a ser utilizado é conhecido como o ***produto das pontas***. Esse método consiste na seguinte resolução:

a) Coloca-se, inicialmente, uma seta direcionada à variável "x".

máquinas	*produtividade (h/d)*	*nº peças*
2	3	360
		↓
3	4	x

b) De acordo com o **2º passo**, colocaremos setas no ***mesmo sentido*** da ***seta da variável "x"*** se as ***grandezas*** forem ***diretamente proporcionais*** a esta; caso sejam ***inversamente proporcionais***, as setas terão ***sentidos opostos***. Ou seja, ***grandezas diretamente proporcionais, setas no mesmo sentido; grandezas inversamente proporcionais, setas no sentido inverso ao da variável "x"***.

máquinas	*produtividade (h/d)*	*nº peças*
2	3	360
↓	↓	↓
3	4	x
(*direta*)	(*direta*)	

c) Aplicando-se a ***fórmula*** que define **o valor de "*x*"** pelo ***produto das pontas***:

$$\boxed{x = \textbf{valor} \text{ da coluna da variável "x"} \times \frac{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores das } \textbf{\textit{pontas das setas}}}{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores } \textbf{\textit{opostos às pontas das setas}}}}$$

$$x = 360 \times \frac{3 \times 4}{2 \times 3} \quad \Rightarrow \quad x = 360 \times \frac{\cancel{3}^1 \times \cancel{4}^2}{\cancel{2}_1 \times \cancel{3}_1} \quad \Rightarrow \quad x = 360 \times 2 \quad \Rightarrow \quad x = 720 \text{ peças}$$

Gabarito: D

9. (Cesgranrio) Se 27 operários, trabalhando seis horas por dia, levaram 40 dias para construir um parque de formato retangular medindo 450 metros de comprimento por 200 metros de largura, quantos operários serão necessários para construir um outro parque, também retangular, medindo 200 metros de comprimento por 300 metros de largura em 18 dias e trabalhando 8 horas por dia?

a) 30.
b) 31.
c) 32.
d) 33.
e) 34.

Resolução:

1º passo: organizar as grandezas semelhantes em colunas, denotando o significado de cada uma delas.

nº de operários	*produtividade (h/d)*	*tempo (d)*	*dimensões do muro*
27	6	40	450m × 200m
x	8	18	200m × 300m

2º passo: verificar se as demais grandezas, em relação à grandeza em que se encontra a variável "*x*", são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** às mesmas.

Inicialmente, devemos observar que a grandeza que se encontra a variável "*x*" é o número de operários.

- ***produtividade × nº de operários***: grandezas ***inversamente proporcionais,*** já que, ***aumentando-se*** a produtividade, ***diminui-se*** a quantidade de operários.
- ***tempo × nº de operários***: grandezas ***inversamente proporcionais,*** já que, ***diminuindo-se*** o tempo de serviço, necessita-se ***aumentar*** o número de operários.
- ***dimensões do muro × nº de operários***: grandezas ***diretamente proporcionais,*** já que, ***diminuindo-se*** as dimensões do muro, ***diminui-se*** também a quantidade operários.

3º passo: simplificar, se possível, os valores das grandezas que se encontram em uma mesma coluna, ambos por um mesmo valor.

nº de operários	***produtividade (h/d)***	***tempo (d)***	***dimensões do muro***
27	6	40	90.000 m²
x	8	18	60.000 m²
	(÷2)	(÷2)	(÷30.000)

nº de operários	***produtividade (h/d)***	***tempo (d)***	***dimensões do muro***
27	3	20	3
x	4	9	2

4º passo: utilizar qualquer método resolutivo.

O método a ser utilizado é conhecido como o ***produto das pontas***. Esse método consiste na seguinte resolução:

a) Coloca-se, inicialmente, uma seta direcionada à variável "*x*".

nº de operários	***produtividade (h/d)***	***tempo (d)***	***dimensões do muro***
27	3	20	3
↓			
x	4	9	2

b) De acordo com o **2º passo**, colocaremos setas no ***mesmo sentido*** da ***seta da variável "x"*** se as ***grandezas*** forem ***diretamente proporcionais*** a esta; caso sejam ***inversamente proporcionais***, as setas terão ***sentidos opostos***. Ou seja, ***grandezas diretamente proporcionais, setas no mesmo sentido***; ***grandezas inversamente proporcionais, setas no sentido inverso ao da variável "x"***.

nº de operários	***produtividade (h/d)***	***tempo (d)***	***dimensões do muro***
27	3	20	3
↓	↑	↑	↓
x	4	9	2

c) Aplicando-se a ***fórmula*** que define **o valor de "*x*"** pelo ***produto das pontas***:

$$\boxed{x = \textbf{valor} \text{ da coluna da variável "x"} \times \frac{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores das } \textbf{\textit{pontas das setas}}}{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores } \textbf{\textit{opostos às pontas das setas}}}}$$

$$x = 27 \times \frac{3 \times 20 \times 2}{4 \times 9 \times 3} \Rightarrow x = \cancel{27}^{1} \times \frac{3 \times \cancel{20}^{5} \times 2}{\cancel{4}_{1} \times \cancel{9}_{1} \times \cancel{3}_{1}} \Rightarrow x = 3 \times 5 \times 2 \Rightarrow x = 30 \text{ operários}$$

Gabarito: A

10. (IADES) Um grupo de oito fiscais foi escalado para fazer visitas em 15 empresas. Para tanto, eles trabalham seis horas por dia. Caso o número de fiscais fosse diminuído em 25% e o número de empresas a serem visitadas aumentado em 20%, quantas horas de trabalho por dia seriam necessárias para a realização da mesma tarefa?

a) 8 horas e 24 minutos.
b) 8 horas e 36 minutos.
c) 9 horas e 10 minutos.
d) 9 horas e 36 minutos.
e) 10 horas e 30 minutos.

Resolução:

Inicialmente, diminuiremos o número de funcionários em 25% e aumentaremos em 20% o número de empresas:

$$8 - (25\% \text{ de } 8) = 8 - \frac{1}{4}\times 8 = 8 - 2 = 6 \text{ funcionários.}$$

$$15 + (20\% \text{ de } 15) = 15 + \frac{1}{5}\times 15 = 15 + 3 = 18 \text{ empresas.}$$

Assim, montaremos a seguinte ***regra de três composta***.

nº de fiscais	***qtd. de empresas***	***tempo***
8 fiscais	15 empresas	6 horas
6 fiscais	18 empresas	*x*

Analisaremos, inicialmente, se as grandezas ***número de fiscais*** e ***quantidade de empresas*** são ***diretamente*** ou ***inversamente proporcionais*** em relação à grandeza ***tempo***.

1ª análise: Se **oito fiscais** trabalham em **seis horas**, então **MENOS** fiscais terão de trabalhar durante **MAIS** tempo para cumprir uma determinada tarefa. Portanto, as grandezas ***número de fiscais*** e ***tempo*** são grandezas ***inversamente proporcionais***.

2ª análise: Se **15 empresas** são visitadas em **seis horas**, então **MAIS** empresas levarão **MAIS** tempo para serem visitadas. Portanto, as grandezas ***quantidade de empresas*** e ***tempo*** são grandezas ***diretamente proporcionais***.

nº de fiscais	***qtd. de empresas***	***tempo***
8 fiscais	15 empresas	**6 horas**
↑	↓	↓
6 fiscais	18 empresas	*x*

$$\boxed{x = \textbf{valor} \text{ da coluna da variável “x”} \times \frac{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores das } \textbf{\textit{pontas das setas}}}{\textbf{\textit{produto}} \text{ dos valores } \textbf{\textit{opostos às pontas das setas}}}}$$

$$x = 6\times\frac{8\times 18}{6\times 15} \Rightarrow x = \cancel{6}\times\frac{8\times 18^{\div 3}}{\cancel{6}\times 15_{\div 3}} \Rightarrow x = \frac{8\times 6}{5} \Rightarrow x = \frac{48}{5} \Rightarrow x = 9{,}6 \text{ horas}$$

Ou, ainda: 9,6 horas = 9 horas + 0,6 hora = 9 horas 0,6 × 60 minutos = 9 horas e 36 minutos.

Gabarito: D

Capítulo 23

Porcentagens

É toda razão cujo ***consequente*** (***denominador***) é igual a 100. Por exemplo, dada a razão $\frac{15}{100}$ podemos representá-la na forma percentual por 15%.

Seguem outras representações:

$$\frac{0{,}17}{100} = 0{,}17\%$$

$$\frac{118}{100} = 118\%$$

$$\frac{0{,}006}{100} = 0{,}006\%$$

$$\frac{1324}{100} = 1324\%$$

23.1. Cálculos percentuais

Apresentaremos alguns métodos práticos de resolução de alguns cálculos percentuais.

I) Calcular 30% de R$240,00

1ª forma: por ***regra de três simples:***

$$\text{R\$ } 240{,}00 \xrightarrow{\text{está para}} 100\%$$

$$x \xrightarrow{\text{está para}} 30\%$$

$$100x = 30 \times 240 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\cancel{0} \times 24\cancel{0}}{1\cancel{00}} \quad \Rightarrow \quad x = 3 \times 24 \quad \Rightarrow \quad x = 72$$

2ª forma: cálculo da ***parte pelo todo:***

$$\boxed{\frac{\text{parte}}{\text{todo}} \times \text{valor principal}} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\cancel{0}}{1\cancel{00}} \times 24\cancel{0} = 3 \times 24 = 72$$

II) Calcular 28% de R\$136,00

1ª forma: por ***regra de três simples:***

$$\begin{array}{ccc} R\$\,136{,}00 & \xrightarrow{\text{está para}} & 100\% \\ x & \xrightarrow{\text{está para}} & 28\% \end{array}$$

$$100x = 28 \times 136 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{28 \times 136}{100} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3808}{100} \quad \Rightarrow \quad x = 38{,}08$$

2ª forma: cálculo da ***parte pelo todo:***

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}} \times \text{valor} \quad \Rightarrow \quad \frac{28}{100} \times 136 = \frac{28 \times 136}{100} = \frac{3808}{100} = 38{,}08$$

23.2. Aumentos percentuais

I) Calcular um aumento de 20% sobre R\$320,00

$$(100\% + 20\%) \text{ de R\$320,00} = 120\% \text{ de R\$320,00} = \frac{12\cancel{0}}{10\cancel{0}} \times 32\cancel{0} = 12 \times 32 = R\$\,384{,}00$$

II) Calcular um aumento de 35% sobre R\$436,00

$$(100\% + 35\%) \text{ de R\$436,00} = 135\% \text{ de R\$436,00} = \frac{135}{100} \times 436 = \frac{135 \times 436}{100} =$$

$$= \frac{58.860}{100} = R\$\,588{,}60$$

23.3. Descontos percentuais

I) Calcular um desconto de 40% sobre R\$430,00

$$(100\% - 40\%) \text{ de R\$430,00} = 60\% \text{ de R\$430,00} = \frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}} \times 43\cancel{0} = 6 \times 43 = R\$\,258{,}00$$

II) Calcular um desconto de 15% sobre R\$360,00

$$(100\% - 15\%) \text{ de R\$360,00} = 85\% \text{ de R\$360,00} = \frac{85}{10\cancel{0}} \times 36\cancel{0} = \frac{85 \times 36}{10} = \frac{306\cancel{0}}{1\cancel{0}} =$$

$$= R\$\,306{,}00$$

23.4. Aumentos percentuais e sucessivos

I) Calcular dois aumentos sucessivos de 10% e 20% sobre R\$720,00

Inicialmente, determinaremos um aumento único e equivalente aos dois aumentos:

$(100\% + 10\%).(100\% + 20\%) = (110\%).(120\%) = (1,1).(1,2) = 1,32 \text{ x } 100\% = 132\%$

Logo, o aumento único será de: 132% – 100% = 32%.

Portanto, os dois aumentos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um único aumento de 32%. Calculando, então, um aumento de 32% sobre R$720,00, obteremos:

$$\frac{132}{100} \times 720 = \frac{132 \times 72}{10} = \frac{9.504}{10} = \text{R\$ } 950,40$$

II) Calcular três aumentos sucessivos de 10%, 15% e 20% sobre R$580,00

Inicialmente, determinaremos um aumento único e equivalente aos dois aumentos:

(100% + 10%).(100% + 15%).(100% + 20%) = (110%).(115%).(120%) = (1,1).(1,15).(1,2) =

=1,518 x 100% = 151,8%

Logo, o aumento único será de: 151,8% – 100% = 51,8%.

Portanto, os três aumentos sucessivos de 10%, 15% e 20% equivalem a um único aumento de 51,8%. Calculando, então, um aumento de 51,8% sobre R$720,00, obteremos:

$$\frac{151,8}{100} \times 720 = \frac{132 \times 72}{10} = \frac{9.504}{10} = \text{R\$ } 950,40$$

23.5. Descontos percentuais e sucessivos

I) Calcular dois descontos sucessivos de 10% e 20% sobre R$180,00

Inicialmente, determinaremos um desconto único e equivalente aos dois descontos mencionados:

(100% – 10%).(100% – 20%) = (90%).(80%) = (0,9).(0,8) = 0,72 x 100% = 72%

Logo, o desconto único será de: 100% – 72% = 28%.

Portanto, os dois descontos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um único desconto de 28%. Calculando, então, um desconto de 28% sobre R$180,00, obteremos:

$$\frac{(100-28)}{100} \times 180 = \frac{72 \times 18}{10} = \frac{1.296}{10} = \text{R\$ } 129,60$$

II) Calcular três descontos sucessivos de 5%, 10% e 20% sobre R$880,00

Inicialmente, determinaremos um desconto único e equivalente aos três descontos do enunciado:

(100% – 5%).(100% – 10%).(100% – 20%) = (95%).(90%).(80%) = (0,95).(0,9).(0,8) = 0,684 x 100% = 68,4%

Logo, o desconto único será de: 100% – 68,4% = 31,6%.

Portanto, os três descontos sucessivos de 5%, 10% e 20% equivalem a um único desconto de 31,6%. Calculando, então, um desconto de 31,6% sobre R$880,00, obteremos:

$$\frac{(100-31,6)}{100} \times 880 = \frac{68,4 \times 88}{10} = \frac{6019,2}{10} = \text{R\$ } 601,92$$

23.6. Aumentos e descontos percentuais e sucessivos

I) Uma mercadoria que custa R$640,00 sofreu quatro reajustes mensais e sucessivos, da seguinte forma:

1º mês: um aumento de 20%
2º mês: um desconto de 10%
3º mês: um aumento de 25%
4º mês: um desconto de 30%

Após o término do 4º mês, essa mercadoria encontra-se com aumento ou com desconto?

Inicialmente, determinaremos a situação comercial dessa mercadoria:

$$\underbrace{(100\%+20\%)}_{\text{aumento de }20\%}\ .\ \underbrace{(100\%-10\%)}_{\text{desconto de }10\%}\ .\ \underbrace{(100\%+25\%)}_{\text{aumento de }25\%}\ .\ \underbrace{(100\%-70\%)}_{\text{desconto de }30\%}$$

$$=(120\%).(90\%).(125\%).(70\%)=(1,2).(0,9).(1,25).(0,7)=0,945=0,945\times100\%=94,5\%$$

Portanto, a mercadoria se encontra com ***desconto*** de: 100% – 94,5% = 5,5%

Obs.: Se o valor final encontrado for ***inferior*** a 100%, então a mercadoria se encontra com ***desconto***, caso seja ***maior***, então a mercadoria se encontra com ***aumento***.

Valor da mercadoria com desconto:

$$\frac{(100-5,5)}{10\cancel{0}}\times64\cancel{0}=\frac{94,5\times64}{10}=\frac{6048}{10}=\text{R\$ }604,80$$

Exercícios resolvidos

1. (Consulplan) Dos 500 alunos de uma escola, 32% gostam de estudar matemática e 28% gostam de português. O número de alunos que gostam de outras matérias é:

a) 160.
b) 140.
c) 200.
d) 260.
e) 300.

Resolução:

Distribuindo as quantidades percentuais: $$\begin{array}{r} +\begin{cases}32\%-\text{matemática}\\28\%-\text{português}\end{cases}\\ \hline 60\%\text{ gostam de mat. ou port.}\end{array}$$

Logo, 100% – 60% = 40% gostam das demais disciplinas.

Portanto, 40% de 500 equivale a:

$$\frac{40}{10\cancel{0}}\times5\cancel{00}=40\times5=200\text{ gostam de outras disciplinas.}$$

Gabarito: C

2. (Consulplan) Felipe foi ao cinema e chegou 30 minutos após o início do filme. Se o filme teve 2,5 horas de duração, pode-se afirmar que Felipe deixou de assistir:

a) 28% do filme.
b) 25% do filme.
c) 20% do filme.
d) 24% do filme.
e) 30% do filme.

Resolução:
tempo de atraso: 30 minutos
duração do filme: 2,5 horas = 2 horas 30 minutos = 120 minutos + 30 minutos = 150 minutos.

Agora, devemos determinar qual a porcentagem que 30 minutos representa de 150 minutos.

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}}\times 100\% \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{15\cancel{0}}\times 10\cancel{0}\% = \frac{300\%}{15} = 20\%$$

Gabarito: C

3. (FCC) Em 2004, a floresta amazônica teve, de seus 4 milhões de quilômetros quadrados de área total, 24 mil quilômetros quadrados desmatados. Isso significa dizer que a porcentagem da área da floresta que sofreu tal desmatamento equivale a:

a) 12%.
b) 6%.
c) 1,2%.
d) 0,6%.
e) 0,12%.

Resolução:

Fazendo a parte pelo todo, teremos:

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}}\times 100\% \quad \Rightarrow \quad \frac{24\text{ mil}}{4\text{ milhões}}\times 100\% \quad \Rightarrow \quad \frac{24.\cancel{000}}{4.0\cancel{00.000}}\times 1\cancel{00}\% = \frac{24\%}{40} = 0{,}6\%$$

Gabarito: D

4. (FCC) O número de funcionários de uma agência bancária passou de 80 para 120. Em relação ao número inicial, o aumento no número de funcionários foi de:

a) 50%.
b) 55%.
c) 60%.
d) 65%.
e) 70%.

Resolução:

O referido aumento foi de 120 – 80 = 40 funcionários.

Esse valor (40), em relação à quantidade inicial de funcionários (80), representa a metade, ou seja, 50%. Então veja:

$$\frac{\text{parte}}{\text{todo}}\times 100\% \quad \Rightarrow \quad \frac{40}{8\cancel{0}}\times 10\cancel{0}\% = \frac{400\%}{8} = 50\%$$

Gabarito: A

5. (FCC) Do total de documentos de um lote, sabe-se que 5% devem ser encaminhados ao setor de recursos humanos, 35% ao setor de recursos financeiros e os 168 restantes ao setor de materiais. O total de documentos desse lote é:

a) 240.
b) 250.
c) 280.
d) 320.
e) 350.

Resolução:

Vamos observar a distribuição feita de lote de documentos:

$$\begin{cases} 5\%: \text{setor de recursos humanos} \\ 35\%: \text{setor de recursos financeiros} \\ 168: \text{setor de materiais} \end{cases}$$

Se foram distribuídos 5% + 35% = 40% aos setores de recursos humanos e financeiros, então os 168 restantes equivalem a 60% do total de documentos desse lote (o restante), que foram encaminhados ao setor de materiais. Se considerarmos o total de documentos desse lote igual "*x*", então teremos que:

$$60\%x = 168 \quad \Rightarrow \quad \frac{6\cancel{0}}{10\cancel{0}}x = 168 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1.680}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 280$$

Gabarito: C

6. (Esaf) O preço de um objeto foi aumentado em 20% de seu valor. Como as vendas diminuíram, o novo preço foi reduzido em 10% de seu valor. Em relação ao preço inicial, o preço final apresenta:

a) uma diminuição de 10%.
b) uma diminuição de 2%.
c) um aumento de 2%.
d) um aumento de 8%.
e) um aumento de 10%.

Resolução:

I) Vamos considerar que o preço inicial de uma mercadoria valha, inicialmente, 100% e sofreu dois reajustes consecutivos, da seguinte forma:

1º reajuste: um aumento de 20%
2º reajuste: um decréscimo de 10%

Avaliando a situação comercial dessa mercadoria:

$$\underbrace{(100\% + 20\%)}_{\text{aumento de } 20\%} \;.\; \underbrace{(100\% - 10\%)}_{\text{desconto de } 10\%} = (120\%).(90\%) = (1,2).(0,9) = 1,08 =$$

$$= 1,08 \times 100\% = 108\%$$

Portanto, a mercadoria se encontra com um ***aumento*** de: 108% – 100% = 8%

Gabarito: D

7. (FCC) Uma pesquisa revelou que, nos anos de 2006, 2007 e 2008, os totais de processos que deram entrada em uma Unidade do TRT aumentaram, respectivamente, 10%, 5% e 10%, cada qual em relação ao ano anterior. Isso equivale dizer que, nessa Unidade, o aumento cumulativo das quantidades de processos nos três anos foi de:

a) 25%.
b) 25,25%.
c) 26,15%.
d) 26,45%.
e) 27,05%.

Resolução:

Observe a tabela a seguir que relaciona os aumentos percentuais em cada ano, em destaque:

ano	aumento	fator multiplicativo
2006	10%	110% = 1,1
2007	5%	105% = 1,05
2008	10%	110% = 1,1

Avaliando a situação percentual do aumento:

$$\underbrace{(100\%+10\%)}_{\text{aumento de }10\%}\;.\;\underbrace{(100\%+5\%)}_{\text{desconto de }5\%}\;.\;\underbrace{(100\%+10\%)}_{\text{aumento de }10\%} = (110\%).(105\%).(110\%) =$$

$$= (1{,}1).(1{,}05).(1{,}1) = 1{,}2705 = 1{,}2705 \times 100\% = 127{,}05\%$$

Isso equivale dizer que, nessa Unidade, o aumento cumulativo das quantidades de processos nos três anos foi de: 127,05% – 100% = 27,05%.

Gabarito: E

8. (FCC) Em 02/01/2009, a fiscalização em certa reserva florestal acusou que o número de espécies nativas havia diminuído de 60%, em relação a 02/01/2008. Para que, em 02/01/2010, o número de espécies nativas volte a ser o mesmo observado em 02/01/2008, então, relativamente a 02/01/2009, será necessário um aumento de:

a) 60%.
b) 80%.
c) 150%.
d) 160%.
e) 180%.

Resolução:

Se em 2009 o número de espécies nativas diminui 60% em relação a 2008, então, em 2009 teremos, apenas, 40% desse quantitativo. Para que, em 2010, o número de espécies nativas volte a ser de 100%, então, o quantitativo atual (40%) deverá aumentar quantos por cento até atingir os 100%? Basta realizar a seguinte regra de três simples:

$$\text{Se} \quad 40\%\,(\text{hoje}) \xrightarrow{\text{corresponde a}} 100\%\ (\text{do quantitativo atual})$$

$$\text{Então}\ \ 60\%\,(\text{o que precisa aumentar}) \xrightarrow{\text{corresponderá a}} x\ (\text{percentual real de aumento})$$

$$4\cancel{0\%}x = 6\cancel{0\%} \times 100\% \quad \Rightarrow \quad 4x = 600\% \quad \Rightarrow \quad x = \frac{600\%}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 150\%$$

Portanto, o valor atual (de 40%) deverá aumentar em 150% do seu valor para que atinja, novamente, os 100% iniciais de 2008.

Podemos também pensar da seguinte forma:

2008	**2009**	**2010**
100 coelhos	40 coelhos	100 coelhos

$$\text{100 coelhos} \xrightarrow{\textit{perda}\text{ de }60\%} \text{40 coelhos} \xrightarrow{\textit{ganho}\text{ de }150\%} \text{100 coelhos}$$

Ou seja, $100 = \underbrace{40}_{2009} + \underbrace{40}_{\uparrow 100\%} + \underbrace{20}_{\uparrow 50\%}$.

Os 40 coelhos deverão aumentar em 100% do seu valor, passando para 80 coelhos e, a seguir, aumentar o seu valor em mais 50%, atingindo, assim, os 100 coelhos desejados.

Gabarito: C

9. (FEI) O custo de produção de uma peça é composta por: 30% para mão de obra, 50% para matéria-prima e 20% para energia elétrica. Admitindo que haja um reajuste de 20% no preço de mão de obra, 35% no preço de matéria-prima e 5% no preço da energia elétrica, o custo de produção sofrerá um reajuste de:

a) 60 %.
b) 160 %.
c) 24,5 %.
d) 35 %.
e) 4,5 %.

Resolução:

$$\text{Composição do custo de produção: } \begin{cases} \text{mão de obra}: 30\% \\ \text{matéria-prima}: 50\% \\ \text{energia elétrica}: 20\% \end{cases}$$

A seguir, aplicaremos os reajustes (aumentos, nesse caso) em cada custo dessa produção:

$$\begin{cases} \text{aumento de } 20\% \text{ na mão de obra}: 120\% \text{ de } 30\% = 1{,}2 \times 30\% = 36\% \\ \text{aumento de } 35\% \text{ da matéria-prima}: 135\% \text{ de } 50\% = 1{,}35 \times 50\% = 67{,}5\% \\ \text{aumento de } 5\% \text{ da energia elétrica}: 105\% \text{ de } 20\% = 1{,}05 \times 20\% = 21\% \end{cases}$$

Total do custo após os reajustes: 36% + 67,5% + 21% = 124,5%

Logo, o produto final sofreu um reajuste total de: 124,5% – 100% = 24,5%

Gabarito: C

10. (FCC) Do total de funcionários de certa empresa, sabe-se que:

- **60% são do sexo masculino e que, destes, 30% usam óculos;**
- **das mulheres, 20% usam óculos;**
- **os que não usam óculos totalizam 333 unidades.**

Nessas condições, o total de pessoas que trabalham nessa empresa é:

a) 320.
b) 350.
c) 400.
d) 420.
e) 450.

Resolução:

Utilizaremos o ***diagrama de árvore*** para distribuir os valores mencionados:

$$\underbrace{(\text{x funcionários})}_{100\% \text{ dos funcionários}} \begin{cases} \text{homens}: 60\%x\,;\ \textit{destes} \begin{cases} 30\% \times 60\%\text{x}: \text{usam óculos} \\ 70\% \times 60\%\text{x}: \text{não usam óculos} \end{cases} \\ \\ \text{mulheres}: 40\%x\,;\ \textit{destes} \begin{cases} 20\% \times 40\%\text{x}: \text{usam óculos} \\ 80\% \times 40\%\text{x}: \text{não usam óculos} \end{cases} \end{cases}$$

"...os que não usam óculos totalizam 333 unidades."

Logo, teremos que:

$$70\% \times 60\%x + 80\% \times 40\%x = 333 \Rightarrow \frac{70}{100} \times 60\%x + \frac{80}{100} \times 40\%x = 333 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 42\%x + 32\%x = 333 \Rightarrow 74\%x = 333 \Rightarrow \frac{74}{100}x = 333 \Rightarrow x = \frac{33.300}{74} \Rightarrow$$

$x = 450$ funcionários

Gabarito: E

11. (Fuvest) Numa certa população 18% das pessoas são gordas, 30% dos homens são gordos e 10% das mulheres são gordas. Qual a porcentagem de homens na população?

a) 30 %.
b) 35 %.
c) 40 %.
d) 45 %.
e) 50 %.

Resolução:

Total de pessoas nessa população: H + M = 100%

Total de pessoas gordas nessa população: 30%H + 10%M ou 18% (H + M)

Pela relação anterior, tem-se que: $30\%H + 10\%M = 18\%(H + M)$, desenvolvendo-se essa relação, teremos:

$$30\%H + 10\%M = 18\%(H + M) \quad \Rightarrow \quad [30\%H + 10\%M = 18\%(H + M)] \div 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 15\%H + 105\%M = 9\%(H + M) \quad \Rightarrow \quad 15\%H + 5\%M = 9\%H + 9\%M \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 15\%H - 9\%H = 9\%M - 5\%M \quad \Rightarrow \quad (6\%H = 4\%M) \div 2\% \quad \Rightarrow \quad 3H = 2M$$

Multiplicando-se por 2 a relação H + M = 100%

$$2 \times (H + M = 100\%) \quad \Rightarrow \quad 2H + 2M = 200\%$$

Sabendo-se que 2M = 3H, então substituindo-se na relação anterior, tem-se que:

$$2H + 2M = 200\% \quad \Rightarrow \quad 2H + 3H = 200\% \quad \Rightarrow \quad 5H = 200\% \quad \Rightarrow \quad H = \frac{200\%}{5}$$

$$H = 40\%$$

Gabarito: C

12. (Fuvest) O preço de certa mercadoria sofre anualmente um acréscimo de 100%. Supondo que o preço atual seja R$100,00, daqui a três anos o preço será:

a) R$300,00.
b) R$400,00.
c) R$600,00.
d) R$800,00.
e) R$1000,00.

Resolução:

Lembramos que, se uma mercadoria sofre um aumento em 100% do seu valor, então, seu valor dobrará.

1º ano: R\$100,00 + R\$100,00 = R\$200,00 .... (aumento de 100% sobre R\$100,00)
2º ano: R\$200,00 + R\$200,00 = R\$400,00 .... (aumento de 100% sobre R\$200,00)
3º ano: R\$400,00 + R\$400,00 = R\$800,00 .... (aumento de 100% sobre R\$400,00)

Daqui a três anos o preço será R\$800,00

Gabarito: D

13. (FGV) Se uma mercadoria sofre dois descontos sucessivos de 15% e depois um acréscimo de 8%, seu preço final, em relação ao preço inicial:

a) aumentou de 22 %.
b) decresceu de 21,97 %.
c) aumentou de 21,97 %.
d) decresceu de 23 %.
e) decresceu de 24 %.

Resolução:

Uma mercadoria sofre dois descontos sucessivos de 15% e depois um acréscimo de 8%, da seguinte forma:

1º reajuste: um desconto de 15%
2º reajuste: um desconto de 15%
3º reajuste: um aumento de 8%

Após os três reajustes, seu preço final, em relação ao preço inicial, encontra-se com:

$$\underbrace{(100\% - 15\%)}_{\text{desconto de } 15\%} \;.\; \underbrace{(100\% - 15\%)}_{\text{desconto de } 15\%} \;.\; \underbrace{(100\% + 8\%)}_{\text{aumento de } 8\%} = (85\%).(85\%).(108\%) =$$

$$= (0,85).(0,85).(1,08) = 0,7803 = 0,7803 \times 100\% = 78,03\%$$

Logo, a mercadoria, se encontra com um desconto de: 100% – 78,03% = 21,97%.

Gabarito: B

14. (Cesgranrio) Um comerciante aumentou em 20% o preço de suas mercadorias. Com isso, as vendas diminuíram, e ele resolveu oferecer aos clientes um desconto de 30% sobre o preço com aumento. Desse modo, qual é, em reais, o preço com desconto de uma mercadoria que inicialmente custava R\$200,00?

a) 144,00.
b) 168,00.
c) 180,00.
d) 188,00.
e) 196,00.

Resolução:

Se o preço inicial era de R\$200,00, com um aumento de 20%, seu preço passará a ser igual a:

$$120\% \text{ de R\$ } 200,00 = 1,2 \times 200 = \text{R\$ } 240,00$$

Dando um desconto de 30% sobre o preço com aumento, teremos:

$$70\% \text{ de R\$ } 240,00 = 0,7 \times 240 = \text{R\$ } 168,00$$

Gabarito: B

15. (FGV) Uma fábrica de sapatos produz certo tipo de sapatos por R$18,00 o par, vendendo por R$25,00 o par. Com esse preço, tem havido uma demanda de 2000 pares mensais. O fabricante pensa em elevar o preço em R$2,10. Com isso as vendas sofrerão uma queda de 200 pares. Com esse aumento no preço de venda seu lucro mensal:

a) cairá em 10%.
b) aumentará em 20%.
c) aumentará em 17%.
d) cairá em 20%.
e) cairá em 17%.

Resolução:

Preço de custo de um par de sapatos: R$18,00

Preço de venda de um par de sapatos: R$25,00

Lucro obtido com a venda de um par de sapatos: R$25,00 – R$18,00 = R$7,00

Lucro obtido com a venda de 2.000 pares de sapatos: 2.000 × R$7,00 = R$14.000,00

Mantido o ***preço de custo*** fixo e elevando-se o ***preço de venda*** em R$2,10, teremos a seguinte relação financeira do preço de venda e lucro:

Preço de custo de um par de sapatos: R$18,00 (valor fixo)

Novo preço de venda de um par de sapatos: R$25,00 + R$2,10 = R$27,10

Novo lucro obtido com a venda de um par de sapatos: R$27,10 – R$18,00 = R$9,10

Após esses reajustes verificou-se que as vendas diminuíram em 200 pares, portanto, obteremos o seguinte lucro:

Quantidade de pares de sapatos vendidos: 1.800

Lucro obtido com a venda de 1.800 pares de sapatos: 1.800 × R$9,10 = R$16.380,00

Mesmo com a diminuição na venda de 200 pares de sapatos, verifica-se um aumento no lucro com a venda desses de:

R$16.380,00 – R$14.000,00 = R$2.380,00

Essa diferença (R$2.380,00) corresponde a um aumento percentual, em relação ao primeiro lucro obtido, de:

$$\frac{\text{R\$ } 2.380,00}{\text{R\$ } 14.000,00} \times 100\% = \frac{238.\cancel{000}\%}{14.\cancel{000}} = \frac{238\%}{14} = 17\%$$

Gabarito: C

16. (FGV) Num colégio com 1000 alunos, 65% dos quais são do sexo masculino, todos os estudantes foram convidados a opinar sobre o novo plano econômico do governo. Apurados os resultados, verificou-se que 40% dos homens e 50% das mulheres manifestaram-se favoravelmente ao plano. A porcentagem de estudantes favoráveis ao plano vale:

a) 43,5 %.
b) 45 %.
c) 90 %.
d) 17,5 %.
e) 26 %.

Resolução:

Distribuição dos alunos pelo sexo:

$$\text{toral}: 1000 \text{ alunos} \begin{cases} \text{Masculinos}: 65\% \text{ de } 1.000 = \dfrac{65}{100} \times 1000 = 650 \\ \text{Femininos}: 35\% \text{ de } 1.000 = \dfrac{35}{100} \times 1000 = 350 \end{cases}$$

Quantidade de alunos que se manifestaram favoravelmente ao plano:

$$\begin{cases} \text{Masculinos}: 650 \text{ alunos} \begin{cases} \text{a favor}: 40\% \text{ de } 650 = \dfrac{40}{100} \times 650 = 260 \text{ alunos} \\ \text{contra}: 60\% \text{ de } 650 = \dfrac{60}{100} \times 650 = 390 \text{ alunos} \end{cases} \\ \text{Femininos}: 350 \text{ alunos} \begin{cases} \text{a favor}: 50\% \text{ de } 350 = \dfrac{50}{100} \times 350 = 175 \text{ alunos} \\ \text{contra}: 50\% \text{ de } 350 = \dfrac{50}{100} \times 350 = 175 \text{ alunos} \end{cases} \end{cases}$$

Total de alunos que se **manifestaram favoravelmente ao plano:**

260 + 175 = 435 alunos entre homens e mulheres.

Percentual de alunos que se manifestaram favoravelmente ao plano, em relação ao total de alunos:

$$\frac{435}{1.000} \times 100\% = \frac{43500\%}{1.000} = \frac{435\%}{10} = 43{,}5\%$$

Gabarito: A

17. (FCC/TRF1ª) Em agosto de 2006, Josué gastava 20% de seu salário no pagamento do aluguel de sua casa. A partir de setembro de 2006, ele teve um aumento de 8% em seu salário e o aluguel de sua casa foi reajustado em 35%. Nessas condições, para o pagamento do aluguel após os reajustes, a porcentagem do salário que Josué deverá desembolsar mensalmente é:

a) 22,5%.
b) 25%.
c) 27,5%.
d) 30%.
e) 32,5%.

Resolução:

Para melhor visualização matemática da questão, consideraremos o valor do salário inicial de Josué igual a R$100,00.

Valor do salário de Josué: R$100,00.

Valor do aluguel de Josué: R$20,00 (20% de R$100,00)

Valor do novo salário de Josué após aumento de 8%: R$108,00

Valor do novo aluguel de Josué após aumento de 35%: 135% de R$20,00 = 1,35 × 20 = R$27,00

Relação percentual entre o novo aluguel e o novo salário de Josué:

$$\frac{\text{R\$ }27{,}00}{\text{R\$ }108{,}00}\times 100\% = \frac{2.700\%}{108} = 25\%$$

Gabarito: B

18. (Cesgranrio) Em 2006, foram embarcadas, no porto de Porto Velho, cerca de 19.760 toneladas de madeira a mais do que em 2005, totalizando 46.110 toneladas. Assim, em relação a 2005, o embarque de madeira aumentou aproximadamente *x* %. Pode-se concluir que *x* é igual a:

a) 45.
b) 58.
c) 65.
d) 75.
e) 80.

Resolução:

Em 2005: "y" toneladas de madeira

Em 2006: $(y + 19.760)$ toneladas de madeira

Total de embarques em 2006: 46.110 toneladas de madeira

Assim, tem-se que: $y + 19.760 = 46.110$

$y + 19.760 = 46.110 \quad \Rightarrow \quad y + 19.760 = 46.110 - 19.760 \quad \Rightarrow \quad y = 26.350$

Assim, em relação a 2005, o embarque de madeira aumentou aproximadamente x %. Pode-se concluir que x é igual a:

$$\frac{19.76\cancel{0}}{26.35\cancel{0}}\times 100\% = \frac{197.600\%}{2.635} = 74{,}99\% \approx 75\%$$

Gabarito: D

19. (FGV) Duas irmãs, Ana e Lúcia, têm uma conta de poupança conjunta. Do total do saldo, Ana tem 70% e Lúcia 30%. Tendo recebido um dinheiro extra, o pai das meninas resolveu fazer um depósito exatamente igual ao saldo na caderneta. Por uma questão de justiça, no entanto, ele disse às meninas que o depósito deveria ser dividido igualmente entre as duas. Nessas condições, a participação de Ana no novo saldo:

a) diminui para 60%.
b) diminui para 65%.
c) permaneceu em 70%.
d) aumentou para 80%.
e) aumentou para 85%.

Resolução:

Saldo inicial na conta: "x" reais

Participação inicial de cada irmã: $\begin{cases} \text{Ana}: 70\% \text{x} \\ \text{Lúcia}: 30\% \text{x} \end{cases}$

"Tendo recebido um dinheiro extra, o pai das meninas resolveu fazer um depósito exatamente igual ao saldo na caderneta".

Novo saldo na conta: "x" reais + "x" reais = "$2x$" reais

"Por uma questão de justiça, no entanto, ele disse às meninas que o depósito deveria ser dividido igualmente entre as duas..."

Participação de cada irmã, após o depósito de "*x*" reais: $\begin{cases} \text{Ana}: 70\% \text{x} + 50\% \text{x} = 120\% \text{x} \\ \text{Lúcia}: 30\% \text{x} + 50\% \text{x} = 80\% \text{x} \end{cases}$

Nessas condições, a participação de Ana no **novo saldo**, será de:

$$\left\{ \text{Ana}: \frac{120\%x}{2x} = \frac{1,2x}{2x} = 0,6 = 0,6 \times 100\% = 60\% \right.$$

Logo, diminui para 60%.

Gabarito: A

20. (FEC) O preço de um aparelho eletrodoméstico é P reais. Como eu só possuo X reais, que correspondem a 70% de P, mesmo que me fosse concedido um abatimento de 12% no preço, ainda faltariam R$54,00 para que eu pudesse comprar esse aparelho. Nessas condições, a quantia que possuo é:

a) R$254,00.
b) R$242,00.
c) R$237,00.
d) R$220,00.
e) R$210,00.

Resolução:

Preço do aparelho: P reais

O que possuo: X reais (X = 70%P)

Abatimento concedido: 12% sobre P

Valor do aparelho com abatimento: 88%P

O valor da quantia que falta, mesmo com abatimento: R$54,00

Assim, podemos concluir que: 88%P – 70%P = R$54,00

$$88\%P - 70\%P = 54 \quad \Rightarrow \quad 18\%P = 54 \quad \Rightarrow \quad \frac{18}{100}P = 54 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{54 \times 100}{18} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P = R\$\ 300,00$$

Nessas condições, a quantia que possuo é:

$$70\%P = \frac{70}{100} \times 300 = R\$\ 210,00$$

Gabarito: E

21. (Iades) O estacionamento de um shopping center cobra R$4,50 pela permanência de até duas horas e R$1,20 para cada hora ou fração de hora excedente. Para premiar os clientes que consomem, é dado um desconto referente a 1,3% do valor total de gastos realizados no *shopping center*. Um cliente que permaneceu no shopping center durante três horas e 28 minutos e apresentou as notas fiscais, totalizando um gasto de R$428,00 naquele dia, irá pagar quanto de estacionamento?

a) Abaixo de R$0,50.
b) Entre R$1,20 e R$1,50.
c) Entre R$2,30 e R$2,45.
d) Exatamente R$2,54.
e) Acima de R$2,70.

Resolução:

Inicialmente, determinaremos o ***total cobrado*** pelo estacionamento:

Do total de três horas e 28 minutos serão cobrados R$4,50 pelas duas primeiras horas, mais R$1,20 pela hora subsequente e, mais R$1,20 pela fração de hora correspondente aos 28 minutos restantes, totalizando:

R$4,50 + R$1,20 + R$1,20 = R$6,90

O **desconto** recebido corresponderá a 1,3% do total gasto em compras nesse shopping center que, nesse caso, será de:

$$1{,}3\% \text{ de R\$ } 428{,}00 = \frac{1{,}3}{100} \times 428 = \text{R\$ } 5{,}564$$

Valor cobrado com desconto: R$6,90 – R$5,564 = R$1,336

Gabarito: B

22. (Iades) Em uma pesquisa sobre preços de certo *notebook*, verificou-se que, na loja A, o valor era de R$1.299,00. Na loja B, o preço era 1,5% mais caro em relação à loja A. Na loja C, o preço era 5% mais caro em relação à loja B. Na loja D o preço era 7% mais barato em relação à loja C. Fazendo a comparação entre os preços verificados na loja A e na loja D, verifica-se que o preço na loja D é:

a) 1% mais caro.
b) 0,3% mais barato.
c) entre R$15,00 e R$25,00 mais caro.
d) entre R$10,00 e R$14,00 mais barato.
e) 0,5% mais caro.

Resolução:

Relacionando-se os preços, partindo do valor fornecido pela loja A (A = R$1.299,00), teremos:

$$B = 1{,}5\% \text{ mais caro que A} \Rightarrow B = 101{,}5\% \text{ de A} \Rightarrow B = \frac{101{,}5}{100} \times 1.299 = \text{R\$}1.318{,}49$$

$$C = 5\% \text{ mais caro que B} \Rightarrow C = 105\% \text{ de B} \Rightarrow C = \frac{105}{100} \times 1.318{,}485 = \text{R\$}1.384{,}41$$

$$D = 7\% \text{ mais barato que C} \Rightarrow D = 93\% \text{ de C} \Rightarrow D = \frac{93}{100} \times 1.384{,}41 = \text{R\$}1.287{,}50$$

Relação entre os preços de A e D: A = R$1.299,00 e D = R$1.287,50

$A - D = \text{R\$}1.299{,}00 - \text{R\$}1.287{,}50 = \boxed{\text{R\$}11{,}50}$

Ou seja, o preço em na loja D é R$11,50 mais barato do que em relação à loja A.

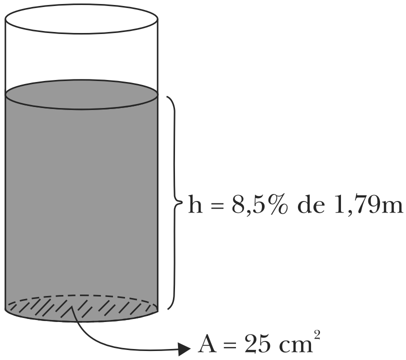
Gabarito: D

23. (Iades) Certa pizzaria faz uma promoção de vendas. O cliente, no dia do seu aniversário, pode comer quatro pedaços de qualquer sabor de pizza e beber o volume correspondente a um copo cilíndrico de área da base igual a 25 cm² e altura correspondente a 8,5% da altura do aniversariante. Um aniversariante que tem altura igual a 1,79 metros poderá beber qual volume de refrigerante?

a) Abaixo de 200 milímetros.
b) Entre 250 e 400 milímetros.
c) Entre 1 e 1,5 litros.
d) Entre 1,6 e 1,8 litros.
e) Acima de 2 litros.

Resolução:

A relação do volume consumido é representada pelo esquema a seguir:



Se o volume de um corpo cilíndrico é dado por: V = área da base × altura.

$V = 25\ cm^2 \times 8{,}5\% \times 179\ cm$

$\Rightarrow \quad V = 25 \times \dfrac{8{,}5}{100} \times 179\ cm^3 \quad \Rightarrow \quad V = 380{,}375\ cm^3$, ou $\Rightarrow \quad V = 0{,}380\ dm^3$, ou, ainda

$\Rightarrow \quad V = 0{,}380$ litros = 380 mililitros.

Gabarito: B

24. (Iades) Uma empresa de alimentos resolve mudar a embalagem de um dos produtos líquidos. Inicialmente o produto era embalado em uma caixa de papelão, do tipo Tetra Pak, com 15 cm de altura, 6 cm de largura e 4 cm de comprimento. A nova embalagem é uma lata cilíndrica com 3 cm de raio da base. Qual será a altura da nova embalagem de forma que o novo volume seja 20% menor que o anterior? Considere π = 3,1.

a) Abaixo de 7 cm.
b) Entre 7,3 cm e 9 cm.
c) Entre 9,5 cm e 11 cm.
d) Acima de 12 cm.
e) Acima de 15 cm.

Resolução:

A embalagem inicial dessa empresa era do tipo "*Tetra Pak*", ou seja, um ***paralelepípedo retângulo*** possuindo as seguintes dimensões: 15 cm de altura, 6 cm de largura e 4 cm de comprimento. A nova embalagem passou a ser de forma ***cilíndrica***, cujo raio da base mede 3 cm. Se a nova embalagem possui um volume 20% inferior à original, então tem-se a seguinte relação entre seus volumes:

$$\boxed{V_C = 80\% \times V_P \begin{cases} V_P = \text{volume da caixa Tetra Pak} \\ V_C = \text{volume da caixa cilíndrica} \end{cases}}$$

$$\begin{cases} V_P = a.b.c \\ V_C = \pi.R^2.h \end{cases} \qquad \boxed{V_C = 80\% \times V_P}$$

$\Rightarrow \quad \pi \times R^2 \times h = 80\% \times (abc)$

$\Rightarrow \quad (3{,}1 \times 3^2 \times h) = \dfrac{80}{100} \times (15 \times 6 \times 4)$

$\Rightarrow \quad 360 = \dfrac{6}{5} \times (3{,}1 \times 9 \times h)$

$\Rightarrow \quad (3{,}1 \times 3^2 \times h) = \dfrac{8\cancel{0}}{10\cancel{0}} \times 36\cancel{0}$

$\Rightarrow \quad 3{,}1 \times 9^{\div 9} \times h = 8 \times 36^{\div 9}$

$\Rightarrow \quad 3{,}1 \times h = 8 \times 4$

$\Rightarrow \quad h = \dfrac{32}{3{,}1}$

$\Rightarrow \quad h \approx 10{,}3225 \text{ cm}$

Gabarito: C

25. (Iades) Um carro tem o consumo de 15 km por litro usando gasolina e 12 km por litro usando álcool. Do total de combustível abastecido durante o mês, 40% da quantidade foi álcool e o restante de gasolina. Sabendo que o preço do álcool é de R\$2,07 é da gasolina R\$2,89 e que a pessoa gastou um total de R\$179,34, quantos quilômetros foram rodados durante esse mês considerando que todo o combustível foi consumido?

a) 756 km.
b) 866 km.
c) 966 km.
d) 1.030 km.
e) 1.200 km.

Resolução:

Análise do consumo:

- 12 km por litro, com álcool.
- 15 km por litro, com gasolina.

Combustível abastecido durante o mês:

- 40% álcool,
- 60% gasolina.

Preço dos combustíveis por litro:

- preço do álcool é de R\$2,07 por litro.
- preço da gasolina R\$2,89 por litro.

Total gasto com o abastecimento: R\$179,34

$A \times 2{,}07 + G \times 2{,}89 = 179{,}34$.......... (1)

Sendo "A" e "G", respectivamente, as quantidades de álcool e gasolina dentro do tanque.

A quantidade de combustível de cada tipo é *diretamente proporcional ao seu percentual* dentro do tanque:

$$\frac{A}{40\%} = \frac{G}{60\%} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{0{,}4} = \frac{G}{0{,}6} = k \quad \begin{cases} A = 0{,}4k \\ G = 0{,}6k \end{cases}$$

Substituindo os valores de "A" e "G" encontrados em (1):

$0{,}4k \times 2{,}07 + 0{,}6k \times 2{,}89 = 179{,}34$

$0{,}828k + 1{,}734k = 179{,}34$

$2{,}562k = 179{,}34 \Rightarrow \text{k} = \dfrac{179{,}34}{2{,}562}$

$k = 70$ (*constante de proporcionalidade*)

Obs.: A *constante de proporcionalidade* "*k*" representa, nesse caso, a capacidade volumétrica do tanque, ou seja, o tanque possui **70 litros**.

Quantidade de **álcool** abastecido (em litros):

A = 0,4 × 70 = 28 litros

Quantidade de **gasolina** abastecida (em litros):

G = 0,6 × 70 = 42 litros

Total de "*km*" rodados:

com álcool: 12 km/litro × 28 litros = 336 km

com gasolina: 15 km/litro × 42 litros = 630 km

336 km + 630 km = 966 km

Gabarito: C

Capítulo 24

Operações sobre mercadorias

Operações sobre mercadorias são situações (problemas) que devemos utilizar conceitos relacionados a *percentagens*, muito frequentes na vida *comercial*, que estão relacionados com *operações de compra e venda*, em que as *percentagens* de *lucros* ou *prejuízos* são calculadas *sobre o preço de custo* ou *sobre o preço de venda*.

Para melhor coordenação de raciocínio, distinguiremos dois casos:

a) venda com lucro;
b) venda com prejuízo.

24.1. Venda com lucro

Denotaremos por: $\begin{cases} \text{PC : preço de compra (ou custo)} \\ \text{PV : preço de venda} \\ \text{L : lucro} \end{cases}$

Para facilidade de notação acrescentaremos apenas as letras "PC" ou "PV" à taxa de *percentagem* para indicar que esta se refere ao *preço de compra* ou ao de *venda*. Assim:

30%PC significará 30% ***sem*** o *preço de compra*

25%PV significará 25% ***sem*** o *preço de venda* etc.

Utilizaremos, evidentemente, as seguintes relações financeiras: $\begin{cases} PC = PV - L \\ PV = PC + L \\ L = PV - PC \end{cases}$.

Isto é, o *preço de compra* é igual ao *preço de venda* menos o *lucro*; ou o *preço de venda* é igual ao *preço de compra* mais o *lucro*, ou, ainda, o *lucro* é dado pela diferença entre o *preço de venda* e o *preço de compra*.

Admitiremos duas hipóteses:

– O *lucro* está referido ao *preço de compra* (*lucro* sobre a *compra*):

Seja, então, o *lucro* "L" uma certa *porcentagem* de *i*% do *preço de compra*, isto é, de acordo com a notação adotada, teremos:

$$L = i\% \text{ de PC}$$

Como, evidentemente, PC = 100% do PC, vem, em virtude dessa relação,

$$PV = PC + L \quad \Rightarrow \quad PV = 100\%PC + i\%PC \quad \Rightarrow \quad PV = (100 + i)\%PC$$

– **O *lucro* está referido ao *preço de venda* (*lucro* sobre a *venda*):**

Nesse caso, o *lucro* é uma *percentagem i%* do *preço de venda.*

$L = i\%$ de PV

E, como

$PV = 100\%$ de PV

Vem, em virtude da relação $PC = PV - L$, a seguinte dedução:

$PC = PV - L \quad \Rightarrow \quad PC = 100\%PV - i\%PV \quad \Rightarrow \quad PC = (100 - i)\%PV$

Conclusões:

- Quando o *lucro* é uma *porcentagem i%* do *preço de compra*, o *preço de venda* representa $(100 + i)\%$ do *preço de compra.*
- Quando o *lucro* é uma *porcentagem i%* do *preço de venda*, o *preço de compra* representa $(100 - i)\%$ do *preço de venda.*

24.2. Venda com Prejuízo

Denotaremos por: $\begin{cases} PC: \text{preço de compra (ou custo)} \\ PV: \text{preço de venda} \\ P: \text{prejuízo} \end{cases}$

Para essas representações, teremos as seguintes relações: $\begin{cases} PC = PV + P \\ PV = PC - P \\ P = PC - PV \end{cases}$

Isto é:

O *preço de compra* é igual ao *preço de venda* mais o *prejuízo* ou o *preço de venda* é igual ao *preço de compra* menos o *prejuízo.*

Admitiremos, nesses casos, duas hipóteses:

– **O *prejuízo* está referido ao *preço de compra* (*prejuízo* sobre a *compra*):**

Sendo o prejuízo uma percentagem *i%* do preço de compra:

$P = i\%PC$

E este,

$PC = 100\%PC$

O preço de venda será, em virtude das relações anteriores:

$PV = PC - P \quad \Rightarrow \quad PV = 100\%PC - i\%PC \quad \Rightarrow \quad PV = (100 - i)\%PC$

– **O *prejuízo* está referido ao *preço de venda* (*prejuízo* sobre a *venda*):**

Sendo o prejuízo uma porcentagem *i%* do preço de venda

$P = i\%PV$

E, este:

$PV = 100\%PV$

Teremos, em virtude da relação:

$PC = PV + P \quad \Rightarrow \quad PC = 100\%PV + i\%PV \quad \Rightarrow \quad PC = (100 + i)\%PV$

Conclusões:

- Quando o *prejuízo* é uma *porcentagem i%* do *preço de compra*, o *preço de venda* corresponde a (100 – *i*)% do *preço de compra*.
- Quando o *prejuízo* é uma *porcentagem i%* do *preço de venda*, o *preço de compra* representa (100 + *i*)% do *preço de venda*.

24.3. Quadro sinótico

Os resultados anteriores podem ser resumidos no seguinte quadro:

VENDA			
COM LUCRO		**COM PREJUÍZO**	
sobre a compra	**sobre a venda**	**sobre a compra**	**sobre a venda**
PC = 100%PC	PC = (100 – i)%PV	PC = 100%PC	PC = (100 + i)%PV
L = *i*%PC	L = *i*%PV	P = *i*%PC	P = *i*%PV
PV = (100 + *i*)%PC	PV = 100%PV	PV = (100 – *i*)%PC	PV = 100%PV

Onde: PC = preço de compra
PV = preço de venda
L = lucro
P = prejuízo

Exercícios resolvidos

1. Um caminhão foi vendido por R$176.000,00 provocando um lucro de 10% sobre o preço de compra. Qual foi o preço de compra?

a) R$5.000,00.
b) R$5.500,00.
c) R$6.000,00.
d) R$6.100,00.
e) R$6.200,00.

Resolução:

Sendo o *lucro* igual a 10% do *preço de compra*, o *preço de venda* será, de acordo com o quadro sinótico anterior, igual a (100 + 10)% ou 110% do *preço de compra*. Portanto, R$176.000,00 correspondem a 110% do *preço de compra*. Logo, resolvendo uma regra de três direta, tem-se que:

$$\text{Se} \qquad 110\% \longrightarrow R\$176.000,00$$

$$\text{Então} \qquad 100\% \longrightarrow x$$

$$110 \times x = 176.000 \times 100 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{176.000 \times 10\cancel{0}}{11\cancel{0}} \quad \Rightarrow \quad x = R\$160.000,00$$

Gabarito: C

2. Um comerciante vendeu um lote de certa mercadoria que lhe havia custado R$46.000,00, obtendo um prejuízo igual a 15% sobre o preço de venda. De quanto foi esse prejuízo?

a) R$158.000,00.
b) R$160.000,00.
c) R$165.000,00.
d) R$170.000,00.
e) R$172.000,00.

Resolução:

Se o *prejuízo* é igual a 15% sobre o *preço de venda*, então, de acordo com o quadro sinótico, o mesmo mostra que o preço de compra, isto é, R$46.000,00 corresponde a (100 + 15)% ou 115% do *preço de venda*. Logo, resolvendo uma regra de três direta, tem-se que:

$$\text{Se} \qquad 115\% \longrightarrow \text{R\$ } 46.000{,}00$$

$$\text{Então} \qquad 15\% \longrightarrow x$$

$$115 \times x = 46.000 \times 15 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{46.000 \times 15}{115} \quad \Rightarrow \quad x = \text{R\$ } 6.000{,}00$$

Gabarito: B

3. Um carro que havia custado R$18.000,00 foi revendido com um lucro de 25% sobre o preço de venda. Qual foi o preço de venda?

a) R$20.000,00.
b) R$21.000,00.
c) R$22.000,00.
d) R$23.000,00.
e) R$24.000,00.

Resolução:

De acordo com o enunciado, o *lucro* equivale a 25% do *preço de venda*; o quadro sinótico mostra que o *preço de compra* é igual a (100 – 25)% ou 75% do *preço de venda*. Para tanto, resta-nos resolver a seguinte regra de três simples e direta:

$$\text{Se} \qquad 75\% \longrightarrow \text{R\$ } 18.000{,}00$$

$$\text{Então} \qquad 100\% \longrightarrow x$$

$$75 \times x = 18.000 \times 100 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{18.000 \times 1500}{75} \quad \Rightarrow \quad x = \text{R\$ } 24.000{,}00$$

Gabarito: E

4. Vendeu-se uma TV por R$1.400,00 acarretando um prejuízo de 30% sobre o preço de compra. O prejuízo e o preço de compra foram, respectivamente, iguais a:

a) R$400,00 e R$2.000,00.
b) R$500,00 e R$1.800,00.
c) R$600,00 e R$2.000,00.
d) R$550,00 e R$1.600,00.
e) R$700,00 e R$1.800,00.

Resolução:

Sendo o prejuízo de 30% sobre o preço de compra, o preço de venda será, de acordo como quadro sinótico, igual a (100 – 30)% ou 70% do preço de compra. A determinação de prejuízo recai, então, na resolução da seguinte regra de três simples, direta:

$$\text{Se} \qquad 70\% \longrightarrow \text{R\$ } 1.400{,}00$$

$$\text{Então} \qquad 30\% \longrightarrow x$$

$$70 \times x = 1.400 \times 30 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1.400 \times 30}{70} \quad \Rightarrow \quad x = R\$\,600,00$$

Logo, o preço de compra foi de:

PC = PV + P $\Rightarrow$ PC = R\$1.400,00 + R\$600,00 $\Rightarrow$ PC = R\$2.000,00

Gabarito: E

5. Um comerciante vendeu uma mercadoria por R\$312,00, obtendo um lucro de 30% sobre o preço de compra, logo, podemos afirmar que o preço de compra foi de:

a) R\$210,00.
b) R\$220,00.
c) R\$230,00.
d) R\$240,00.
e) R\$250,00.

Resolução:

Assim, sendo o *lucro* igual a 30% do *preço de compra*, o *preço de venda* será, de acordo com o quadro sinótico anterior, igual a (100 + 30)% ou 130% do *preço de compra*. Portanto, R\$312,00 correspondem a 130% do *preço de compra*. Logo, resolvendo uma regra de três direta, tem-se que:

Se 130% $\longrightarrow$ R\$ 312,00

Então 100% $\longrightarrow$ x

$$130 \times x = 312 \times 100 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{31.20\cancel{0}}{13\cancel{0}} \quad \Rightarrow \quad x = R\$\,240,00$$

Gabarito: D

6. Uma moto foi vendida por R\$11.100,00 dando um prejuízo de 40% sobre o preço de compra. Nessa situação, qual foi o preço de compra?

a) R\$17.100,00.
b) R\$17.600,00.
c) R\$18.000,00.
d) R\$18.100,00.
e) R\$18.500,00.

Resolução:

Sendo o prejuízo de 40% sobre o preço de compra, o preço de venda será, de acordo como quadro sinótico, igual a (100 – 40)% ou 60% do preço de compra. A determinação de prejuízo recai, então, na resolução da seguinte regra de três simples, direta:

Se 60% $\longrightarrow$ R\$ 11.100,00

Então 40% $\longrightarrow$ x

$$60 \times x = 11.100 \times 40 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{11.100 \times 4\cancel{0}}{6\cancel{0}} \quad \Rightarrow \quad x = R\$\,7.400,00$$

Logo, o preço de compra foi de:

PC = PV + P $\Rightarrow$ PC = R\$11.100,00 + R\$7.400,00 $\Rightarrow$ PC = R\$18.500,00

Gabarito: E

7. Um barco que custara R$24.800,00 foi vendido com um prejuízo de 25% sobre o preço de compra. Neste caso, qual foi o preço de venda?

a) R$18.600,00.
b) R$18.900,00.
c) R$19.000,00.
d) R$19.250,00.
e) R$20.100,00.

Resolução:

Sendo o prejuízo de 25% sobre o preço de compra, o preço de venda será, de acordo como quadro sinótico, igual a (100 – 25)% ou 75% do preço de compra. A determinação de prejuízo recai, então, na resolução da seguinte regra de três simples, direta:

$$\text{Se} \qquad 100\% \longrightarrow \text{R\$}\,24.800,00$$

$$\text{Então} \qquad 75\% \longrightarrow x$$

$$100 \times x = 24.800 \times 75 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{24.800 \times 75}{100} \quad \Rightarrow \quad x = \text{R\$}\,18.600,00$$

Gabarito: A

8. Vendi um anel de ouro por R$6.420,00, lucrando 7% sobre o preço de custo. Nesse caso, quanto me custou esse anel?

a) R$5.980,00.
b) R$6.000,00.
c) R$6.050,00.
d) R$6.100,00.
e) R$6.120,00.

Resolução:

Assim, sendo o *lucro* igual a 10% do *preço de compra* (*custo*), o *preço de venda* será, de acordo com o quadro sinótico anterior, igual a (100 + 7)% ou 107% do *preço de compra*. Portanto, R$6.420,00 correspondem a 107% do *preço de compra*. Logo, resolvendo uma regra de três direta, tem-se que:

$$\text{Se} \qquad 107\% \longrightarrow \text{R\$}\,6.420,00$$

$$\text{Então} \qquad 100\% \longrightarrow x$$

$$107 \times x = 6.420 \times 100 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6.420 \times 100}{107} \quad \Rightarrow \quad x = \text{R\$}\,6.000,00$$

Gabarito: B

9. Um comerciante comprou alguns metros de tecidos por R$9.100,00 e vendeu com um lucro de 35% sobre o preço de venda. Por quanto vendeu esses tecidos?

a) R$12.080,00.
b) R$13.200,00.
c) R$14.000,00.
d) R$14.800,00.
e) R$15.120,00.

Resolução:

De acordo com o enunciado, o *lucro* equivale a 35% do *preço de venda*; o quadro sinótico mostra que o *preço de compra* é igual a (100 – 35)% ou 65% do *preço de venda*. Para tanto, resta-nos resolver a seguinte regra de três simples e direta:

$$\begin{array}{lll} \text{Se} & 65\% \longrightarrow & \text{R\$ } 9.100{,}00 \\ \text{Então} & 100\% \longrightarrow & x \end{array}$$

Gabarito: C

10. Uma concessionária comprou um automóvel e, ao vendê-lo, por R$56.000,00 obteve um prejuízo de 20% sobre o preço de custo. Por quanto essa concessionária pagou pelo automóvel.

a) R$58.000,00.
b) R$60.200,00.
c) R$65.000,00.
d) R$68.800,00.
e) R$70.000,00.

Resolução:

Sendo o prejuízo de 20% sobre o preço de compra, o preço de venda será, de acordo como quadro sinótico, igual a (100 – 20)% ou 80% do preço de compra. A determinação de prejuízo recai, então, na resolução da seguinte regra de três simples, direta:

$$\begin{array}{lll} \text{Se} & 80\% \longrightarrow & \text{R\$ } 56.000{,}00 \\ \text{Então} & 20\% \longrightarrow & x \end{array}$$

$$80 \times x = 56.000 \times 20 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{56.000 \times 2\cancel{0}}{8\cancel{0}} \quad \Rightarrow \quad x = \text{R\$ } 14.000{,}00$$

Logo, o preço de compra foi de:

PC = PV + P ⇒ PC = R$56.000,00 + R$14.000,00 ⇒ PC = R$70.000,00

Gabarito: E

Capítulo 25

Juros simples

Ao emprestarmos certa ***quantia*** a outra pessoa, é justo recebermos com a quantia emprestada mais ***outra quantia*** que representa o "***aluguel***" pago pelo empréstimo.

Então, uma pessoa possuidora de certa quantia, cedendo-a em benefício de outra, por empréstimo, ou depositando-a num banco, recebe, pela aplicação de seu dinheiro, uma remuneração denominada ***juros***.

Nessas transações há quatro quantidades a considerar:
capital: a quantia aplicada ou emprestada;
juros: a remuneração recebida pelo capital;
tempo: prazo de duração da transação;
taxa: traduz as condições de transação.

A ***taxa*** estabelece os ***juros*** de uma ***quantia*** determinada, num ***tempo*** também determinado, e é, em geral, dada sob a forma de ***porcentagem***.

Para o cálculo dos ***juros simples***, por convenção, os juros são *diretamente proporcionais* ao ***capital*** (***c***), ao ***tempo*** (***t***) e à ***taxa*** (***i***) de transação, que pode ser representada pela fórmula:

$$\boxed{J = \frac{C.i.t}{100}}$$

Obs.: Na aplicação da fórmula, a taxa e o prazo de aplicação devem ser referidos à mesma unidade de tempo. Assim:

- a taxa sendo ao ano, o tempo deve ser reduzido à unidade ano;
- a taxa sendo ao mês, o tempo deve ser reduzido a mês;
- a taxa sendo ao dia, o tempo deve ser reduzido a dia.

25.1. Montante ou resgate da aplicação

Um ***capital*** ao ficar aplicado durante certo ***tempo*** sob certas condições de transação (***taxa*** percentual de transação) é ***resgatado*** juntamente com o valor do ***aluguel*** auferido pelo mesmo período ou ***prazo*** da transação. Para esse ***valor total resgatado***, chamamos de ***montante,*** que se refere ao ***capital*** aplicado ***somado*** aos ***juros*** auferidos. Logo:

$$\boxed{M = C + J}$$

Observe que, sendo J = C.*i*.*t*, tem-se que:

$$M = C + J \quad \Rightarrow \quad M = C + C.i.t \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = C.(1 + i.t)}$$

Exercícios resolvidos

1. **(FEC) Um jovem que trabalha com artes gráficas decidiu comprar um computador, para que pudesse desenvolver melhor suas atividades. Ao decidir pela configuração que precisava, constatou que seriam necessários R$2.490,00 para adquirir o seu computador à vista. Como isso estava totalmente fora do seu orçamento, resolveu negociar a compra do equipamento a prazo, o que só foi possível mediante acréscimo de juros simples de 30% ao ano, aplicado ao valor à vista por oito meses. O pagamento foi feito em oito prestações mensais iguais, cada uma no valor de:**

a) R$373,50.
b) R$498,00.
c) R$2.988,00.
d) R$1.992,00.
e) R$348,60.

Resolução:

Calculando o valor do acréscimo (*Juros Simples*):

$$J = \frac{C.i.t}{100}, \text{ onde:}$$

J: o valor dos juros a ser determinado
C: R$2.490,00 (valor do capital aplicado)
i: 30% a.a. (taxa percentual anual)
t: 8 meses (período de aplicação)

Obs.: Nas fórmulas de matemática financeira, tanto o prazo da operação (*t*) como a taxa de juros (*i*) devem necessariamente estar expressos na mesma unidade de tempo.

Transformando a ***taxa percentual anual*** em ***taxa percentual mensal***, temos:

(30% a.a.)÷12 = 2,5% a.m.

Assim, temos que:

$$J = C.i.t \quad \Rightarrow \quad J = 2.490 \times 2{,}5\% \times 8 \quad \Rightarrow \quad J = 2.490 \times \frac{2{,}5}{100} \times 8 \quad \Rightarrow \quad J = R\$498{,}00$$

O valor total a ser pago será dado pelo ***Montante*** adquirido no final do período de aplicação, ou seja, o ***capital*** empregado mais os ***juros*** adquiridos será de:

$$M = C + J \quad \Rightarrow \quad M = 2.490 + 498 \quad \Rightarrow \quad M = R\$2.988{,}00$$

De acordo com o enunciado, o pagamento foi feito em **oito** ***prestações mensais iguais***, então, cada prestação terá um valor de:

$$\frac{R\$\ 2.988{,}00}{8} = R\$\ 373{,}50 \text{ por prestação.}$$

Gabarito: A

2. (FCC) Um capital de R$750,00 esteve aplicado a juros simples, produzindo, ao fim de um trimestre, o montante de R$851,25. A taxa anual de juros dessa aplicação foi, aproximadamente, de:

a) 48%.
b) 50%.
c) 54%.
d) 56%.
e) 63%.

Resolução:

Calculando o valor da *taxa* pela relação do montante obtido:

M = $C \times (1 + i.t)$, onde:

C: R$750,00 (valor do capital aplicado)
i : taxa unitária (ou taxa percentual)
t : 1 trimestre = 3 meses (período em que foi aplicado o capital)
M: R$851,50 (montante acumulado ou resgatado)

Obs.: Não se esqueça de que a unidade de tempo da taxa *"i"* deverá ser igual à unidade de tempo do tempo ***"t"***, portanto, transformaremos três meses em uma fração correspondente a unidades anuais.

Se 1 ano corresponde a 12 meses, logo, três meses corresponderão a $\frac{1}{4}$ de ano.

Aplicando a relação do Montante, temos:

$$851{,}50 = 750\left(1 + i \times \frac{1}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad 851{,}50 = 750\left(1 + \frac{i}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{851{,}50}{750} = 1 + \frac{i}{4} \quad \Rightarrow \quad 1{,}135333... - 1 = \frac{i}{4}$$

$$\Rightarrow \quad i = 0{,}135333... \times 4 \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}541332$$

$$\Rightarrow \quad i \cong 0{,}54 \quad \text{ou} \quad i \cong 54\% \text{ a.a}$$

Gabarito: C

3. (FCC) Uma pessoa tem R$20.000,00 para aplicar a juros simples. Aplica-se R$5.000,00 à taxa mensal de 2,5% e R$7.000,00 à taxa mensal de 1,8%, então, para obter um juro anual de R$4.932,00, deve aplicar o restante à taxa mensal de:

a) 2%.
b) 2,1%.
c) 2,4%.
d) 2,5%.
e) 2,8%.

Resolução:

A soma das três aplicações a *juros simples*, aplicada em um período de um ano (12 meses) deve totalizar um valor de R$4.932,00 ou seja:

1ª aplicação: Um capital de R$5.000,00 à taxa mensal de 2,5%, aplicado durante 12 meses, rende juros de:

$$J = \frac{C.i.t}{100} \quad \Rightarrow \quad J = 5.000.\frac{2{,}5}{100}.12 \quad \Rightarrow \quad J = 50.2{,}5.12 \quad \Rightarrow \quad J = R\$1.500{,}00$$

2ª aplicação: Um capital de R$7.000,00 à taxa mensal de 1,8%, aplicado durante 12 meses, rende juros de:

$$J = \frac{C.i.t}{100} \quad \Rightarrow \quad J = 7.000.\frac{1{,}8}{100}.12 \quad \Rightarrow \quad J = 70.1{,}8.12 \quad \Rightarrow \quad J = R\$1.512{,}00$$

O restante do capital a ser aplicado equivale a:

R$20.000 – (R$5.000,00 + R$7.000,00)

R$20.000 – R$12.000,00 = R$8.000,00

De acordo com o enunciado, a soma das três aplicações deve render juros total de R$4.932,00, portanto, fazendo:

R$4.932,00 = R$1.500,00 + R$1.512,00 + J3ª

R$4.932,00 = R$3.012,00 + J3ª

J3ª = R$4.932,00 – R$3.012,00

J3ª = R$1.920,00

Dessa forma, um capital de R$8.000,00, durante 12 meses, rendeu juros simples de R$1.920,00 com uma taxa mensal (i) de:

$$J = \frac{C.i.t}{100} \quad \Rightarrow \quad 1.920 = 8.000.\ i.12 \quad \Rightarrow \quad 1.920 = 96.000.i \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1.920}{96.000}$$

$$\Rightarrow \quad i = 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}02 \times 100\% \quad \Rightarrow \quad i = 2\% \text{ a.m}$$

Gabarito: A

4. (Vunesp) Um homem deixou 75% de sua herança à esposa e o restante ao filho. A esposa aplicou a sua herança a 25% ao ano e, depois de um ano, retirou todo o dinheiro, num montante de R$750.000,00. O filho aplicou a sua parte a 24% ao ano e, depois desse prazo, também retirou todo o dinheiro. Qual foi o montante que o filho retirou?

a) R$600.000,00.
b) R$480.000,00.
c) R$248.000,00.
d) R$150.000,00.
e) R$200.000,00.

Resolução:

Separaremos, inicialmente, os dados em duas operações financeiras (capitalizações simples):

Chamaremos de "x" reais a quantia deixada pelo homem; e que, desses "x" reais, 75% ficou para esposa e, portanto, 25% ficou para o filho.

esposa	filho
C = 75% de R$$x$	C = 25% de R$$x$
t = 1 ano	t = 1 ano
i = 25% a.a.	i = 25% a.a.
M = R$750.000,00	M = ?

Do cálculo do montante obtido pela capitalização obtida pela esposa, determinaremos o valor de "x" reais deixado como herança pelo homem:

$M = C \times (1 + i.t)$, onde:

C: valor do capital aplicado (75% de "x" reais ou $\frac{75}{100}$x ou $\frac{3}{4}$x)

i : 25% a.a. (ou taxa percentual anual)

t : 1 ano (período de aplicação)

M: R$750.000,00 (Montante acumulado $C + J$)

$$M = C\times(1 + i.t) \Rightarrow 750.000 = \frac{3}{4}x\,.(1 + \frac{25}{100}.1) \Rightarrow 750.000 = \frac{3}{4}x\,.(1 + 0{,}25)$$

$$\Rightarrow 750.000 = \frac{3}{4}x\,.1{,}25 \Rightarrow \frac{4}{3}.750.000 = 1{,}25.x \Rightarrow 1.000.000 = 1{,}25.x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1.000.000}{1{,}25} \Rightarrow x = R\$800.000{,}00$$

Sabendo-se que $x = 800.000$, determinaremos o montante obtido pela aplicação financeira obtida pelo filho:

M = $C\times(1 + i.t)$, onde:

C: valor do capital aplicado (25% de R$800.000,00 ou $\frac{25}{100}\times R\$\,800.000{,}00 =$ R$200.000,00)

i : 24% a.a. (ou taxa percentual anual)

t : 1 ano (período de aplicação)

M: ? (Montante acumulado $C + J$)

$$M = C\times(1 + i.t) \Rightarrow M = 200.000.(1 + \frac{24}{100}.1) \Rightarrow M = 200.000.(1 + 0{,}24)$$

$$\Rightarrow M = 200.000 \times 1{,}24 \Rightarrow M = R\$248.000{,}00$$

Gabarito: C

5. (FCC) Um capital de R$15.000,00, à taxa mensal de 1,8%, renderá R$4 320,00 de juros simples, se ficar aplicado por um período de:

a) 1 ano e 2 meses.
b) 1 ano e 4 meses.
c) 1 ano e 6 meses.
d) 2 anos e 2 meses.
e) 2 anos e 4 meses.

Resolução:

Sejam os seguintes valores:

C: R$15.000,00 (valor do capital aplicado)

i : 1,8 % a.m. (taxa percentual mensal)

t : a se determinar.

J: R$4.320,00 (juros auferidos nesse período)

$$J = \frac{C.i.t}{100} \Rightarrow 4.320 = 15.000.\frac{1{,}8}{100}.t \Rightarrow 4.320 = 150.1{,}8.t \Rightarrow t = \frac{4.320}{270}$$

$$\Rightarrow t = 16 \text{ meses} \Rightarrow t = 12 \text{ meses} + 4 \text{ meses} \Rightarrow t = 1 \text{ ano e } 4 \text{ meses}$$

Gabarito: B

6. (FCC) Em um regime de capitalização simples, um capital de R$12.800,00 foi aplicado à taxa anual de 15%. Para se obter o montante de R$14.400,00, esse capital deve ficar aplicado por um período de:

a) 8 meses.
b) 10 meses.
c) 1 ano e 2 meses.
d) 1 ano e 5 meses.
e) 1 ano e 8 meses.

Resolução:

Para esse regime de capitalização simples, temos os seguintes valores:

C: R\$12.800,00 (valor do capital aplicado)

i: 15 % a.a. (taxa percentual anual) ou $15 \div 12 = 1{,}25$ % a.m. (taxa percentual mensal)

t : a se determinar.

M: R\$14.400,00 (montante obtido nesse período)

$$\text{M} = C \times (1 + i.t) \Rightarrow 14.4000 = 12.800\left(1+\frac{1{,}25}{100}.\text{t}\right) \Rightarrow \frac{14.400}{12.800} = 1 + 0{,}0125.t$$

$$\Rightarrow 1{,}125 - 1 = 0{,}0125.t \Rightarrow 0{,}125 = 0{,}0125.t \Rightarrow \text{t} = \frac{0{,}125}{0{,}0125} \Rightarrow t = 10 \text{ meses}$$

Gabarito: B

7. **(FCC) A que taxa anual de juros simples deve-se aplicar um capital para que, ao final de 20 meses, o seu valor seja triplicado?**
   a) 10%.
   b) 60%.
   c) 100%.
   d) 120%.
   e) 150%.

Resolução:

De acordo com o texto, temos os seguintes valores;

C: C (valor do capital aplicado)

i : valor a se determinar

t : 20 meses.

M: $3C$ (montante obtido após 20 meses)

$$\text{M} = C \times (1 + i.t) \Rightarrow 3C = C\,(1+\text{i}.20) \Rightarrow \frac{3\text{C}}{\text{C}} = 1 + i.20 \Rightarrow 3 = 1 + i.20$$

$$\Rightarrow 3 - 1 = 20.i \Rightarrow 2 = 20.i \Rightarrow \text{i} = \frac{2}{20} \Rightarrow i = 0{,}1 \text{ ou } i = 0{,}1 \times 100\% = 10\% \text{ a.m.}$$

Transformando a taxa mensal em anual, teremos:

$i = 10\% \times 12 = 120\%$ a.a.

Gabarito: D

8. **(FEC) O banco "X" emprestou R\$10.120,00 por um período de 15 meses. No final desse prazo, o devedor pagou juros no valor total de R\$4.554,00. Então, a taxa anual de juros simples utilizada nesta operação foi de:**
   a) 30%.
   b) 36%.
   c) 45%.
   d) 60%.
   e) 75%.

Resolução:

Sejam os seguintes valores:

C: R\$10.120,00 (valor do capital pego emprestado)

i : valor a se determinar (taxa anual a se determinar)

t : 15 meses

J: R\$4.554,00 (juros cobrados nesse período)

$$J = \frac{C.i.t}{100} \Rightarrow 4.554 = 10.120.i.15 \Rightarrow 4.554 = 151.800.i \Rightarrow i = \frac{4.554}{151.800}$$

$\Rightarrow \quad i = 0{,}03$ ou $i = 0{,}03 \times 100\% = 3\%$ a.m.

Transformando a taxa mensal em anual, teremos:

$i = 3\% \times 12 = 36\%$ a.a.

Gabarito: B

9. (Vunesp) Uma quantia de R$8.000,00, aplicada durante um ano e meio, a uma taxa de juros simples de 2,5% ao mês renderá, de juros, um total de:

a) R$3.800,00.
b) R$3.600,00.
c) R$2.880,00.
d) R$2.400,00.
e) R$1.920,00.

Resolução:

Para esse regime de capitalização simples, temos os seguintes valores:

C: R$8.800,00 (valor do capital aplicado)

i: 2,5 % a.m. (taxa percentual mensal) ou $2{,}5\% \times 12 = 30\%$ a.a. (taxa percentual anual)

t: 1,5 ano

J: valor a se determinar

$$J = \frac{C.i.t}{100} \Rightarrow J = 8.000.\frac{30}{100}.1{,}5 \Rightarrow J = 80.30.1{,}5 \Rightarrow J = R\$3.600{,}00$$

Gabarito: B

10. (Vunesp) Uma pessoa fez um empréstimo de R$12.500,00, e vai pagá-lo em oito meses, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. O montante (capital + juros) que vai ser pago pelos oito meses de empréstimos é de:

a) R$12.875,00.
b) R$13.940,00.
c) R$14.750,00.
d) R$15.500,00.
e) R$15.875,00.

Resolução:

De acordo com o texto, temos os seguintes valores;

C: R$12.500,00 (valor do empréstimo)

i: 3% a.m. (taxa percentual mensal)

t: 8 meses (período de finalização do empréstimo)

M: valor a se determinar

$$M = C \times (1 + i.t) \Rightarrow M = 12.500.\left(1 + \frac{3}{100}.8\right) \Rightarrow M = 12.500.\left(1 + \frac{24}{100}\right)$$

$$\Rightarrow M = 12.500.\ (1 + 0{,}24) \Rightarrow M = 12.500 \Rightarrow 1{,}24 \Rightarrow M = R\$15.500{,}00$$

Gabarito: D

11. (FGV) Uma aplicação de R$40.000,00 rendeu, em três meses, a quantia de R$4.800,00 de juros simples. A taxa de juros simples mensal foi de:

a) 2%.
b) 3%.
c) 4%.
d) 5%.
e) 6%.

Resolução:

Para esse regime de capitalização simples, temos os seguintes valores:

C: R\$40.000,00 (valor do capital aplicado)

i : valor a se determinar (taxa percentual mensal)

t : 3 meses (período de aplicação)

J: R\$4.800,00 (valor dos juros simples)

$$\text{J} = C.i.t \quad \Rightarrow \quad 4.800 = 40.000.\ i.3 \quad \Rightarrow \quad 4.800 = 120.000i \quad \Rightarrow \quad i = \frac{4.800}{120.000}$$

$i = 0{,}04$ ou $i = 0{,}04 \times 100\% = 4\%$ a.m.

Gabarito: C

12. (FCC) Para que ao final de 25 meses da aplicação um capital produza juros simples iguais a $\frac{4}{5}$ de seu valor, ele deve ser investido à taxa mensal de:

a) 2,6%.
b) 2,8%.
c) 3,2%.
d) 3,6%.
e) 3,8%.

Resolução:

De acordo com o texto, temos os seguintes valores:

C: C (valor do capital aplicado)

i : valor a se determinar (taxa percentual mensal)

t : 25 meses (período de aplicação a *juros simples*)

J: $\frac{4C}{5}$ (valor dos *juros simples* auferidos)

$$\text{J} = C.i.t \quad \Rightarrow \quad \frac{4C}{5} = C.\ i.25 \quad \Rightarrow \quad \frac{4\cancel{C}}{5} = \cancel{C}.\ i.25 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5} = i.25 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{4}{5 \times 25}$$

$$i = \frac{4}{125} \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}032 \text{ ou } i = 0{,}032 \times 100\% = 3{,}2\% \text{ a.m.}$$

Gabarito: C

13. (FCC) Aplicando-se a juros simples os $\frac{2}{3}$ de um capital C à taxa de 15% ao ano e o restante à taxa de 18% ao ano, obtém-se, em um ano e quatro meses, juro total de R\$512,00. O capital C é:

a) R\$2.400,00.
b) R\$2.600,00.
c) R\$3.200,00.
d) R\$3.600,00.
e) R\$4.000,00.

Resolução:

Este problema envolve duas capitalizações simples e distintas, e a partir de um capital de "*x*" reais, dividiremos seus dados da seguinte forma:

1ª capitalização	2ª capitalização
$C = \frac{2}{3}$ de x ou $\frac{2x}{3}$	$C = \frac{1}{3}$ de x ou $\frac{x}{3}$
t = 1 ano e 4 meses	t = 1 ano e 4 meses
i_1 = 15% a.a.	i_2 = 18% a.a.
J_1 = juros obtidos da 1ª capitalização	J_2 = juros obtidos da 2ª capitalização
$J_T = J_1 + J_2$ (*juros totais* obtidos) $\Rightarrow$ J_T = R\$512,00	

Inicialmente, transformaremos todo o período de aplicação de um ano e quatro meses, em "*meses*": um ano é igual a 12 meses e, somado aos quatro meses restantes, resulta em 16 meses.

Os períodos das taxas percentuais deverão estar coerentes com o tempo de aplicação, logo, de maneira proporcional, transformaremos as taxas anuais em taxas mensais:

$i_1 = 15\%$ a.a. $\Rightarrow$ $i_1 = 15\% \div 12 = 1{,}25\%$ a.m.

$i_2 = 18\%$ a.a. $\Rightarrow$ $i_2 = 18\% \div 12 = 1{,}5\%$ a.m.

Partindo da relação dos *juros totais* obtidos, teremos:

$$J_T = J_1 + J_2 \Rightarrow J_T = C_1 \times i_1 \times t + C_2 \times i_2 \times t \Rightarrow 512 = \frac{2x}{3} \times \frac{1{,}25}{100} \times 16 + \frac{x}{3} \times \frac{1{,}5}{100} \times 16$$

$$\Rightarrow 512 = \frac{40x}{300} + \frac{24x}{300} \Rightarrow 512 = \frac{64x}{300} \Rightarrow \frac{300 \times 512}{64} = x \Rightarrow x = 300 \times 8$$

$$\Rightarrow x = \text{R\$}2.400{,}00$$

Gabarito: A

14. (FCC) Um capital de R\$2.500,00 foi aplicado a juros simples e, ao final de um ano e três meses, o montante produzido era R\$3 400,00. A taxa mensal dessa aplicação foi de:

a) 2,5%.
b) 2,4%.
c) 2,2%.
d) 1,8%.
e) 1,5%.

Resolução:

De acordo com o texto, temos os seguintes valores:

C: R\$2.500,00 (valor do capital aplicado)

i : valor a se determinar (taxa percentual mensal)

t : 1 ano e 3 meses ou 15 meses (período de aplicação a juros simples)

M: R\$3.400,00 (montante ou valor de resgate após o período de aplicação)

$$M = C \times (1 + i.t) \Rightarrow 3.400 = 2.500.(1 + i.15) \Rightarrow \frac{3.400}{2.500} = 1 + i.15$$

$$\Rightarrow 1{,}36 = 1 + i.15 \Rightarrow 1{,}36 - 1 = i.15 \Rightarrow 0{,}36 = i.15 \Rightarrow i = \frac{0{,}36}{15}$$

$i = 0{,}024$ ou $i = 0{,}024 \times 100\% = 2{,}4\%$ a.m.

Gabarito: B

15. (FCC) Um capital de R$3.200,00 foi aplicado a juros simples da seguinte forma:

- $\frac{1}{4}$ do total à taxa de 2% ao mês por três meses e meio;
- $\frac{3}{5}$ do total à taxa de 3% ao mês por dois meses;
- o restante à taxa de 3,5% ao mês.

Se o montante dessa aplicação foi R$3.413,20, então o prazo de aplicação da última parcela foi de:

a) 2 meses.
b) 2 meses e 10 dias.
c) 2 meses e meio.
d) 2 meses e 20 dias.
e) 3 meses.

Resolução:

Este problema envolve três *capitalizações simples* e *distintas*, e a partir de um *capital* de R$3.200,00, dividiremos seus dados da seguinte forma:

1ª capitalização
$C_1 = \frac{1}{4}$ de R$3.200,00 $= \frac{\text{R\$ } 3.200,00}{4} = \text{R\$ } 800,00$
$t = 3,5$ meses
$i_1 = 2,0\%$ a.m.
M_1 = montante resgatado da 1ª capitalização

2ª capitalização
$C_2 = \frac{3}{5}$ de R$3.200,00 $= \frac{3 \times \text{R\$ } 3.200,00}{5} = \text{R\$ } 1.920,00$
$t_2 = 2$ meses
$i_2 = 3,0\%$ a.m.
M_2 = montante resgatado da 2ª capitalização

3ª capitalização
$C_3 = 3.200 - (800 + 1920) = \text{R\$}480,00$
$t_3 = ?$ (valor a determinar)
$i_3 = 3,5\%$ a.m.
M_3 = montante resgatado da 3ª capitalização

$M_T = M_1 + M_2 + M_3 = \text{R\$}3.413,20$ (*montante total* resgatado)

Partindo da relação do *Montante total resgatado*, sendo que: $M = C \times (1 + i.t)$ teremos:

$$M_T = M_1 + M_2 + M_3 \quad \Rightarrow \quad M_T = C_1 \times (1 + i_1.t_1) + C_2 \times (1 + i_2.t_2) + C_3 \times (1 + i_3.t_3)$$

$$\Rightarrow \quad 3.413,20 = 800 \times (1 + \frac{2}{100}.3,5) + 1.920 \times (1 + \frac{3}{100}.2) + 480 \times (1 + \frac{3,5}{100}.t_3)$$

$$\Rightarrow \quad 3.413{,}20 = 800 \times (1 + \frac{7}{100}) + 1.920 \times (1 + \frac{6}{100}) + 480 \times (1 + \frac{3{,}5}{100}.t_3)$$

$$\Rightarrow \quad 3.413{,}20 = 800 \times (1 + 0{,}07) + 1.920 \times (1 + 0{,}06) + 480 \times (1 + \frac{3{,}5}{100}.t_3)$$

$$\Rightarrow \quad 3.413{,}20 = 800 \times 1{,}07 + 1.920 \times 1{,}06 + 480 + \frac{1.680}{100}.t_3$$

$$\Rightarrow \quad 3.413{,}20 = 856 + 2.035{,}20 + 480 + 16{,}8.t_3$$

$$\Rightarrow \quad 3.413{,}20 = 3.371{,}20 + 16{,}8.t_3$$

$$\Rightarrow \quad 3.413{,}20 - 3.371{,}20 = 16{,}8.t_3$$

$$\Rightarrow \quad 16{,}8.t_3 = 42 \Rightarrow t_3 = \frac{42}{16{,}8} \Rightarrow t_3 = 2{,}5 \text{ meses ou } t_3 = 2 \text{ meses e 15 dias.}$$

Gabarito: C

16. (FCC) Um capital foi aplicado a juros simples da seguinte maneira: metade à taxa de 1% ao mês por um bimestre, $\frac{1}{5}$ à taxa de 2% ao mês por um trimestre e o restante à taxa de 3% ao mês durante um quadrimestre. O juro total arrecadado foi de R$580,00. O capital inicial era:

a) R$5.800,00.
b) R$8.300,00.
c) R$10.000,00.
d) R$10.200,00.
e) R$10.800,00.

Resolução:

Este problema envolve três *capitalizações simples* e *distintas*, e a partir de um *capital* de "*x*" reais, dividiremos seus dados da seguinte forma:

1ª capitalização
$C_1 = \frac{1}{2}$ de "*x*" reais ou $\frac{x}{2}$
t = 1 bimestre = 2 meses
i_1 = 1,0% a.m.
J_1 = juros obtidos da 1ª capitalização

2ª capitalização
$C_2 = \frac{1}{5}$ de "*x*" reais ou $\frac{x}{5}$
t_2 = 1 trimestre = 3 meses
i_2 = 2,0% a.m.
J_2 = juros obtidos da 2ª capitalização

3ª capitalização
$C_3 = x - \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{5}\right) = x - \dfrac{7x}{10} = \dfrac{3x}{10}$
t_3 = 1 quadrimestre = 4 meses
i_3 = 3,0% a.m.
J_3 = juros obtidos da 3ª capitalização

$J_T = J_1 + J_2 + J_3$ = R\$580,00 (*juros totais* obtidos)

$$J_T = J_1 + J_2 + J_3 \quad \Rightarrow \quad J_T = C_1 \times i_1 \times t_1 + C_2 \times i_2 \times t_2 + C_3 \times i_3 \times t_3$$

$$\Rightarrow \quad 580 = \frac{x}{2} \times \frac{1}{100} \times 2 + \frac{x}{5} \times \frac{2}{100} \times 3 + \frac{3x}{10} \times \frac{3}{100} \times 4$$

$$\Rightarrow \; 580 = \frac{2x}{200} + \frac{6x}{500} + \frac{36x}{1.000} \; \Rightarrow 580 = \frac{x}{100} + \frac{3x}{250} + \frac{9x}{250} \; \Rightarrow \left(580 = \frac{x}{100} + \frac{12x}{250}\right) \times 500$$

$$\Rightarrow \quad 290.000 = 5x + 24x \quad \Rightarrow \quad 290.000 = 29x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{290.000}{29}$$

$$\Rightarrow \quad x = \text{R\$}10.000{,}00$$

Gabarito: C

17. **(FCC) Um capital produzirá juros simples correspondentes a $\frac{3}{16}$ de seu valor se for aplicado, durante nove meses, à taxa anual de:**

a) 25%.
b) 20%.
c) 15%.
d) 10%.
e) 5%.

Resolução:

De acordo com o texto, temos os seguintes valores:

C: C (valor do capital aplicado)

i : valor a se determinar (taxa percentual mensal)

t : 9 meses (período de aplicação a *juros simples*)

J: $\dfrac{3C}{16}$ (valor dos *juros simples* auferidos)

$$J = C.i.t \quad \Rightarrow \quad \frac{3C}{16} = C.\ i.9 \quad \Rightarrow \quad \frac{3\cancel{C}}{16} = \cancel{C}.\ i.9 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{16} = i.9 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{3}{16 \times 9}$$

$$i = \frac{\cancel{3}}{16 \times \cancel{9}} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1}{16 \times 3} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1}{48} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1}{48} \times 100\% \quad \Rightarrow \quad i = \frac{100\%^{\div 4}}{48_{\div 4}}$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{25\%}{12} \text{ a.m.}$$

Transformando a taxa mensal em anual, teremos:

$$i = i = \frac{25\%}{12} \times 12 = 25\% \text{ a.a.}$$

Gabarito: A

18. (FCC) Um capital de R$1.500,00, aplicado à taxa de 8% ao trimestre, produzirá juros simples no valor de R$1.200,00 se a aplicação for feita por um período de:

a) 2 anos.
b) 2 anos e 3 meses.
c) 2 anos e 6 meses.
d) 2 anos e 8 meses.
e) 3 anos.

Resolução:

Para este regime de capitalização simples, temos os seguintes valores:

C: R$1.500,00 (valor do capital aplicado)

i : 8% a.t. ou $\frac{8\%}{3}$ a.m. (taxa percentual mensal)

t : ? (período de aplicação)

J: R$1.200,00 (valor dos juros simples obtido nesse período de aplicação)

$$J = \frac{C.i.t}{100} \quad \Rightarrow \quad 1.200 = 1.500.\frac{8}{300}.t \quad \Rightarrow \quad 1.200 = 5.8.t \quad \Rightarrow \quad 40t = 1.200$$

$$t = \frac{1.200}{40} \quad \Rightarrow \quad t = 30 \text{ meses ou 2 anos e 6 meses}$$

Gabarito: C

19. (FCC) Qual é o capital que, aplicado à taxa mensal de 2,5%, rende R$3 240,00 de juros simples ao final de um período de três anos?

a) R$3.600,00.
b) R$3.980,00.
c) R$4.320,00.
d) R$4.800,00.
e) R$4.860,00.

Resolução:

Para este regime de capitalização simples, temos os seguintes valores:

C: x (valor do capital aplicado)

i : 2,5% a.m. ou (taxa percentual mensal)

t : 3 anos ou 36 meses (período de aplicação)

J: R$3.240,00 (valor dos juros simples obtido nesse período de aplicação)

$$J = \frac{C.i.t}{100} \quad \Rightarrow \quad 3.240 = x.\frac{2,5}{100}.36 \quad \Rightarrow \quad 3.240 = \frac{90x}{100} \quad \Rightarrow \quad 3.240 = \frac{9x}{10}$$

$$x = \frac{3.240 \times 10}{9} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{32.400}{9} \quad \Rightarrow \quad x = \text{R\$}3.600,00$$

Gabarito: A

20. (Cesgranrio) Se aplicar $\frac{3}{4}$ de uma quantia (R$3.600,00) a juro simples, à taxa mensal de 5%, então, para obter um rendimento mensal de R$162,00, deverá investir o restante à taxa mensal de:

a) 1%.
b) 2%.
c) 3%.
d) 4%.
e) 5%.

Resolução:

1ª capitalização
$C_1 = \dfrac{3}{4}$ de R\$3.600,00 ou R\$2.700,00
t_1 = 1 mês (para um rendimento mensal)
i_1 = 5,0% a.m.
J_1 = juros obtidos da 1ª capitalização

2ª capitalização
$C_2 = \dfrac{1}{4}$ de R\$3.600,00 ou R\$900,00
t_2 = 1 mês (para um rendimento mensal)
i_2 = ?
J_2 = juros obtidos da 2ª capitalização

$J_T = J_1 + J_2$ (R\$162,00)

Partindo da relação dos *juros totais* obtidos, teremos:

$$J_T = J_1 + J_2 \Rightarrow J_T = C_1 \times i_1 \times t + C_2 \times i_2 \times t \Rightarrow 162 = 2.700 \times \frac{5}{100} \times 1 + 900 \times \frac{i}{100} \times 1$$

$$\Rightarrow 162 = 27 \times 5 + 9i \Rightarrow 162 = 135 + 9i \Rightarrow 162 - 135 = 9i \Rightarrow 9i = 27$$

$$\Rightarrow i = \frac{27}{9} \Rightarrow i = 3\%$$

Gabarito: C

Capítulo 26

Descontos simples

Denominamos de ***descontos*** as *quantias* (ou as importâncias) que deverão ser *abatidas* (ou *subtraídas*) de uma dívida no futuro quando ela é *resgatada* (ou negociada) antes da *data* (ou do *prazo*) do seu vencimento. Essa dívida geralmente é *documentada* ou *expressada* pelos seguintes nomes: *notas promissórias, duplicatas, títulos de créditos, letras de câmbio, cheques pré-datados, faturas* etc.

O *valor* que consta *impresso* e bem caracterizado nesses documentos é chamado de: ***valor nominal*** da nota promissória (**N**) ou ***valor do título*** ou ***valor de face*** ou ***valor futuro do título***, ou seja, é aquele ***valor*** que está *timbrado* no documento e que será *pago* ou resgatado na data do *vencimento* do título.

Os ***descontos simples*** podem ser efetuados de duas formas diferentes, a saber:

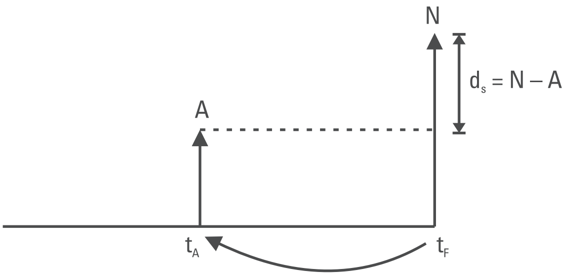
$\mathbf{d_f}$: ***descontos por fora*** ou ***descontos comerciais*** ou ***descontos bancários***;

$\mathbf{d_d}$: ***descontos por dentro*** ou ***descontos racionais***.

Ao *descontarmos*, então, um *título* antes da sua *data do seu vencimento* deveremos deduzir do seu ***valor nominal*** um desses dois tipos de descontos, que serão mencionados pelos enunciados das questões, obtendo-se, assim, um ***valor líquido*** para esse título (ou nota promissória, duplicata etc.), que também poderá ser chamado de ***valor atual*** (**A**), ***valor presente, valor pago, valor recebido*** ou ***valor descontado***.

Conclui-se, então, que, evidente, o ***valor líquido*** a ser obtido após ter sido efetuada uma operação de ***desconto*** (***por fora*** ou ***por dentro***) é sempre ***menor*** que o ***valor nominal*** presente nesse mesmo título, pois o ***abatimento*** sobre ele já foi efetuado.

Logo, tem-se que:

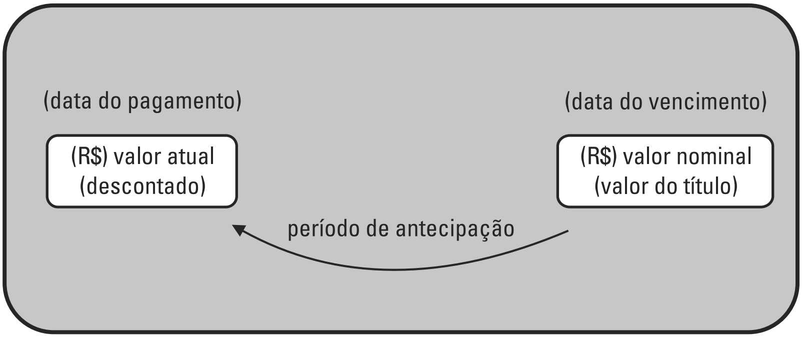


t: prazo de antecipação do título

onde: A = valor atual
N = valor nominal
d_s = desconto simples ("por fora" ou "por dentro")
t_A = data de antecipação do título
t_F = data do vencimento do título
t = tempo ou prazo de antecipação do pagamento do título
Observe que: **A < N**

E, ainda, pelo exposto, temos que: $\begin{cases} A = N - d_F \\ \text{ou:} \\ A = N - d_D \end{cases}$

Prazo de antecipação ou ***tempo de resgate do título*** (**t**): consiste na diferença entre a data de *vencimento do título* e a data em que o título foi *negociado* ou *resgatado* (*intervalo* de tempo).



26.1. Desconto "por fora" ou comercial ou bancário

É todo ***desconto*** em que a **taxa** incide sobre o ***valor nominal***, ou seja, ***equivale*** aos ***juros simples do valor nominal.***

As fórmulas de ***desconto comercial*** são, pois, análogas às de juros simples (vide capítulo anterior).

	tempo expresso em:		
	anos	**meses**	**dias**
Cálculo do ***desconto***	$d = \frac{Nit}{100}$	$d = \frac{Nit}{1.200}$	$d = \frac{Nit}{36.000}$
Cálculo do ***valor nominal***	$N = \frac{100d}{it}$	$N = \frac{1.200d}{it}$	$N = \frac{36.000d}{it}$
Cálculo da ***taxa***	$i = \frac{100d}{Nt}$	$i = \frac{1.200d}{Nt}$	$i = \frac{36.000d}{Nt}$

Cálculo do ***tempo***	$t = \dfrac{100d}{Ni}$	$t = \dfrac{1.200d}{Ni}$	$t = \dfrac{36.000d}{Ni}$

Onde: *N* = *valor nominal*
d = *desconto*
i = *taxa*
t = *tempo* ou *prazo de antecipação*

Para o cálculo do ***valor atual***, teremos, de forma direta:

$$A = \frac{N.(100 - it)}{100} \quad \text{ou} \quad A = \frac{d_s.(100 - it)}{it}$$

As fórmulas anteriores partem do princípio de que ***qualquer desconto simples*** (d_s) é dado pela ***diferença*** entre o ***valor nominal*** (N) e o ***valor atual*** (A), deduzidas das relações:

$$\boxed{d_s = N - A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = N - d_s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = A + d_s}$$

26.2. Desconto "por dentro" ou racional

É todo ***desconto*** em que a **taxa** incide sobre o ***valor atual***, ou seja, ***equivale*** aos ***juros simples do valor atual.***

As fórmulas de ***desconto racional*** serão:

	tempo expresso em:		
	anos	**meses**	**dias**
Cálculo do ***desconto***	$d = \dfrac{Ait}{100}$	$d = \dfrac{Ait}{1.200}$	$d = \dfrac{Ait}{36.000}$
Cálculo do ***valor nominal***	$A = \dfrac{100d}{it}$	$A = \dfrac{1.200d}{it}$	$A = \dfrac{36.000d}{it}$
Cálculo da ***taxa***	$i = \dfrac{100d}{At}$	$i = \dfrac{1.200d}{At}$	$i = \dfrac{36.000d}{At}$
Cálculo do ***tempo***	$t = \dfrac{100d}{Ai}$	$t = \dfrac{1.200d}{Ai}$	$t = \dfrac{36.000d}{Ai}$

Onde: A = *valor atual*
d = *desconto*
i = *taxa*
t = *tempo* ou *prazo de antecipação*

Ou, em função do ***valor nominal,*** o ***desconto por dentro*** será dado por:

tempo expresso em:		
anos	**meses**	**dias**
$d = \dfrac{Nit}{100 + it}$	$d = \dfrac{Nit}{1.200 + it}$	$d = \dfrac{Nit}{36.000 + it}$

Observações finais:

- Na Matemática Financeira, por convenção, quando em um problema ***não for citado*** (***for omitido***) qual o tipo de desconto a ser aplicado, ou seja, quando não for dito se o ***desconto simples é bancário*** (***comercial*** ou ***por fora***) ou ***racional*** (***por dentro***) devemos, então, adotar para a sua resolução o ***desconto simples bancário*** (***comercial*** ou ***por fora***).
- Sempre, em qualquer tipo de operação envolvendo descontos simples, devemos ter: ***desconto por fora maior*** que o ***desconto por dentro***.
  $d_F > d_D$ (lê-se: desconto por fora maior que o desconto por dentro)
- Em toda operação envolvendo desconto, teremos
  $d_F = d_D.(1 + i.t)$ ou $d_C = d_R.(1 + i.t)$
- Quando forem dados em uma questão, os valores que envolvam os dois tipos de descontos, isto é, ***por fora*** (***comercial*** ou ***bancário***) e ***por dentro*** (***racional***) no enunciado, podemos, com o auxílio da fórmula a seguir, calcular imediatamente o valor nominal de um título (valor bruto) por meio da seguinte relação:

$$N = \frac{d_F \times d_D}{d_F - d_D} \quad \text{ou} \quad N = \frac{d_C \times d_R}{d_C - d_R}$$

Onde: $d_F = d_C$ (desconto ***por fora*** ou ***comercial***) e $d_D = d_R$ (desconto ***por dentro*** ou ***racional***)

Exercícios resolvidos

1. (FCC) Um título de valor nominal R$500,00 foi descontado dois meses antes do vencimento, sendo de R$450,00 o valor líquido recebido. Se o desconto utilizado foi o comercial simples (desconto simples por fora), a taxa de desconto utilizada foi de:

a) 4%.
b) 4,5%.
c) 4,8%.
d) 5%.
e) 5,2%.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\ 500,00 \\ t = 2 \text{ meses} \\ A = R\$\ 450,00 \\ i = ? \end{cases}$$

Seja qualquer ***desconto simples*** dado por:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad d_s = 500 - 450 \quad \Rightarrow \quad d_s = R\$50,00$

Para o ***desconto simples*** "***por fora***", teremos:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad 50 = \frac{\cancel{500}.i.2}{\cancel{100}} \quad \Rightarrow \quad 50 = 10i \quad \Rightarrow \quad i = \frac{50}{10} \quad \Rightarrow \quad i = 5\%\ \text{a.m.}$$

Gabarito: D

2. (FCC) Um título de determinado valor nominal é descontado em um banco três meses antes de seu vencimento a uma taxa de juros simples de 4% a.m. Foi utilizada uma operação de desconto comercial simples, e o valor do desconto foi igual a R$1.560,00. O valor nominal do título é de:

a) R$13.500,00.
b) R$13.000,00.
c) R$12.500,00.
d) R$11.500,00.
e) R$11.000,00.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = ? \\ t = 3 \text{ meses} \\ i = 4\% \text{ a.m.} \\ d_S = R\$\,1.560,00 \end{cases}$$

Aplicando a fórmula:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad 1.560 = \frac{N.4.3}{100} \quad \Rightarrow \quad 156.000 = 12N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{156.000}{12} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N = R\$\,13.000,00$$

Gabarito: B

3. (FCC) Uma duplicata de $6.900,00 foi resgatada antes de seu vencimento por $6.072,00. O tempo de antecipação, sabendo que a taxa de desconto comercial foi de 4% ao mês, foi de:

a) 1 mês.
b) 2 meses.
c) 3 meses.
d) 4 meses.
e) 5 meses.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\,6.900,00 \\ A = R\$\,6.072,00 \\ i = 4\% \text{ a.m.} \\ t = ? \end{cases}$$

Determinando o valor do ***desconto simples*** nessa operação:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad d_s = 6.900 - 6.072 \quad \Rightarrow \quad d_s = R\$828,00$

Calculando o ***prazo de antecipação***, pela fórmula de ***desconto por fora***:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad 828 = \frac{6.9\cancel{00}.4.t}{1\cancel{00}} \quad \Rightarrow \quad 828 = 276.t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{828}{276} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = 3 \text{ meses}$$

Gabarito: C

4. **(Cesgranrio) Uma cooperativa de agricultores pegou um empréstimo bancário e deverá pagar R$15.000,00 em dezembro. Entretanto, se o pagamento for efetuado até 30 dias antes do prazo, o banco dará 10% de desconto sobre esse valor. Qual será, em reais, o valor pago pela cooperativa caso o empréstimo seja pago 30 dias antes do prazo?**
a) 13.500,00.
b) 13.850,00.
c) 14.000,00.
d) 14.500,00.
e) 14.850,00.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\,15.000,00 \\ t = 30 \text{ dias} = 1 \text{ mês} \\ i = 10\% \text{ a.m.} \\ A = ? \end{cases}$$

Determinando o ***desconto simples por fora*** dado:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{15.000.10.1}{100} \quad \Rightarrow \quad d = R\$\,1.500,00$$

Para o valor atual (valor pago com desconto), teremos:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad 1.500 = 15.000 - A \quad \Rightarrow \quad A = 15.000 - 1.500 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad A = R\$13.500,00$

Gabarito: A

5. **(FCC) Um título, no valor nominal de R$24.000,00, foi resgatado antes do seu vencimento por R$22 380,00. Sabendo que a taxa de desconto comercial simples era de 32,4% ao ano, o tempo de antecipação do resgate foi de:**
a) 3 meses e 20 dias.
b) 3 meses e 15 dias.
c) 3 meses.
d) 2 meses e 20 dias.
e) 2 meses e 15 dias.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\,24.000,00 \\ A = R\$\,22.380,00 \\ i = 32,4\% \text{ a.a. ou } (32,4 \div 12) = 2,7\% \text{ a.m.} \\ t = ? \end{cases}$$

Pela fórmula do ***desconto simples***:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad d_s = 24.000 - 22.380 \quad \Rightarrow \quad d_s = R\$1.620,00$

Determinando o ***prazo de antecipação*** pela fórmula do ***desconto simples por fora***:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad 1.620 = \frac{24.000.2,7.t}{100} \quad \Rightarrow \quad 1.620 = 648.t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1.620}{648}$$

$$t = 2,5 \text{ meses ou } 2 \text{ meses e } 15 \text{ dias}$$

Gabarito: E

6. (FCC) Uma duplicata, no valor nominal de R$1.800,00, foi resgatada antes do vencimento por R$1.170,00. Se a taxa de desconto comercial simples era de 2,5% ao mês, o tempo de antecipação foi de:

a) 2 anos e 3 meses.
b) 2 anos e 4 meses.
c) 2 anos e 1 meses.
d) 1 ano e 6 meses.
e) 1 ano e 2 meses.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\,1.800,00 \\ A = R\$\,1.170,00 \\ i = 2,5\% \text{ a.m.} \\ t = ? \end{cases}$$

Pela fórmula do ***desconto simples***:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad d_s = 1.800 - 1.170 \quad \Rightarrow \quad d_s = R\$630,00$

Determinando o ***prazo de antecipação*** pela fórmula do ***desconto simples por fora***:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad 630 = \frac{1.8\cancel{0}\cancel{0}.2,5.t}{1\cancel{0}\cancel{0}} \quad \Rightarrow \quad 630 = 45.t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{630}{45}$$

$$t = 14 \text{ meses} \quad ou \quad 1 \text{ ano e } 2 \text{ meses}$$

Gabarito: E

7. (FCC) Um título foi descontado em R$252,00, por ter sido pago com 180 dias de antecipação. Se a taxa mensal do desconto comercial simples foi de 3,5%, o valor nominal do título era:

a) R$1.100,00.
b) R$1.150,00.
c) R$1.200,00.
d) R$1.250,00.
e) R$1.300,00.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} d_s = R\$\,252,00 \\ t = 180 \text{ dias ou } 6 \text{ meses} \\ i = 3,5\% \text{ a.m.} \\ N = ? \end{cases}$$

Determinando o ***desconto simples por fora*** dado:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad 252 = \frac{N.3,5.6}{100} \quad \Rightarrow \quad 25.200 = 21.N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{25.200}{21} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N = R\$\,1.200,00$$

Gabarito: C

8. (FCC) Uma pessoa descontou um título, de valor nominal R$1.650,00, 20 meses antes de seu vencimento e recebeu a quantia de R$1 386,00. Se foi utilizado o desconto simples comercial (desconto simples por fora), a taxa mensal de desconto foi de:

a) 0,8%.
b) 1,0%.
c) 1,2%.
d) 1,4%.
e) 1,5%.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\,1.650,00 \\ t = 20 \text{ meses} \\ A = R\$\,1.386,00 \\ i = ? \end{cases}$$

Pela fórmula do ***desconto simples***:

$$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad d_s = 1.650 - 1.386 \quad \Rightarrow \quad d_s = R\$264,00$$

Determinando a ***taxa*** pela fórmula do ***desconto simples por fora***:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad 264 = \frac{1.65\cancel{0}.i.2\cancel{0}}{1\cancel{00}} \quad \Rightarrow \quad 264 = 330.i \quad \Rightarrow \quad i = \frac{264}{330} \quad \Rightarrow \quad i = 0,8\%\text{ a.m.}$$

Gabarito: A

9. (Cesgranrio) Um título com valor de face de R$1.000,00, faltando três meses para seu vencimento, é descontado em um banco que utiliza taxa de desconto bancário, ou seja, taxa de desconto simples "por fora", de 5% ao mês. O valor presente do título, em reais, é:

a) 820,00.
b) 830,00.
c) 840,00.
d) 850,00.
e) 860,00.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\,1.000,00 \\ t = 3 \text{ meses} \\ i = 5\%\text{ a.m.} \\ A = ? \end{cases}$$

Determinando o ***desconto simples por fora***:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1.0\cancel{00} \times 5 \times 3}{1\cancel{00}} \quad \Rightarrow \quad d = R\$\,150,00$$

Pela fórmula do ***desconto simples***:

$$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad 150 = 1.000 - A \quad \Rightarrow \quad A = 1.000 - 150 \quad \Rightarrow \quad A = R\$850,00$$

Gabarito: D

10. (FCC) Uma duplicata foi descontada em R$700,00, pelos 120 dias de antecipação. Se foi usada uma operação de desconto comercial simples, com a utilização de uma taxa anual de desconto de 20%, o valor atual do título era de:

a) R$7.600,00.
b) R$8.200,00.
c) R$9.800,00.
d) R$10.200,00.
e) R$10.500,00.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} d = R\$\ 700{,}00 \\ t = 120 \text{ dias ou 4 meses} \\ i = 20\% \text{ a.a.} \\ A = ? \end{cases}$$

Determinando o ***valor nominal*** dessa duplicata pela fórmula do ***desconto simples por fora***:

$$d = \frac{Nit}{1.200} \Rightarrow 700 = \frac{N \times 2\cancel{0} \times 4}{1.20\cancel{0}} \Rightarrow 700 = \frac{8^{\div 8} N}{120_{\div 8}} \Rightarrow 700 = \frac{N}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 700 \times 15 \Rightarrow N = R\$\, 10.500{,}00$$

Para o valor do ***atual***, teremos:

$d_s = N - A \Rightarrow 700 = 10.500 - A \Rightarrow A = 10.500 - 700 \Rightarrow A = R\$9.800{,}00$

Gabarito: C

11. (FCC) Uma duplicata no valor de R$6.900,00 foi resgatada três meses antes de seu vencimento. Considerando que a taxa anual de desconto comercial simples foi de 48%, então, se o valor atual dessa duplicata era X reais, é correto afirmar que:

a) $X \leq 5\,700$.
b) $5\,700 < X \leq 5\,800$.
c) $5\,800 < X \leq 5\,900$.
d) $5\,900 < X \leq 6\,000$.
e) $X > 6\,000$.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\ 6.900{,}00 \\ t = 3 \text{ meses} \\ i = 48\% \text{ a.a. ou } (48 \div 12) = 4 \text{ a.m.} \\ A = X \end{cases}$$

Determinando o ***desconto simples por fora***:

$$d = \frac{Nit}{100} \Rightarrow d = \frac{6.9\cancel{00} \times 4 \times 3}{1\cancel{00}} \Rightarrow d = 69 \times 12 \Rightarrow d = R\$\, 828{,}00$$

Para o valor do ***atual***, teremos:

$d_s = N - A \Rightarrow 828 = 6.900 - X \Rightarrow X = 6.900 - 828 \Rightarrow X = R\$6.072{,}00$

Gabarito: E

12. (FCC) Um título descontado dois meses antes de seu vencimento, segundo uma operação de desconto racional simples e com a utilização de uma taxa de desconto de 18% ao ano, apresenta um valor atual igual a R$21.000,00. Um outro título de valor nominal igual ao dobro do valor nominal do primeiro título é descontado cinco meses antes de seu vencimento, segundo uma operação de desconto comercial simples e com a utilização de uma taxa de desconto de 2% ao mês. O valor atual deste segundo título é de:

a) R$42.160,80.
b) R$41.529,60.
c) R$40.664,40.
d) R$39.799,20.
e) R$38.934,00.

Resolução:

Dados do enunciado:

$$1^{\underline{o}}\text{ título: }\begin{cases} N_1 = N \\ t = 2 \text{ meses} \\ i = 18\% \text{ a.a. ou } (18 \div 12) = 1{,}5 \text{ a.m.} \\ A = R\$\, 21.000{,}00 \end{cases} \qquad 2^{\underline{o}}\text{ título: }\begin{cases} N_1 = 2N \\ t = 5 \text{ meses} \\ i = 2 \text{ a.m.} \\ A = ? \end{cases}$$

Sabendo-se que o primeiro título foi descontado segundo uma operação de ***desconto racional simples***, então, a taxa incidirá sobre o valor atual, assim, teremos:

$$d = \frac{Ait}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{21.000 \times 1{,}5 \times 2}{100} \quad \Rightarrow \quad d = R\$\, 630{,}00$$

Para o ***valor nominal*** do primeiro título, teremos:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad 630 = N - 21.000 \quad \Rightarrow \quad N = 21.000 + 630 \quad \Rightarrow \quad N = R\$21.630{,}00$

Se o valor nominal do segundo título é o dobro do primeiro título, então teremos que:

$N_2 = 2 \times\ R\$21.630{,}00 \ \times\ N_2 = R\$43.260{,}00$

Sabendo-se que o segundo título foi descontado segundo uma operação de ***desconto comercial simples***, então, a taxa incidirá sobre o valor nominal, assim, teremos:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{43.260 \times 2 \times 5}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{4.326 \times 10}{10} \quad \Rightarrow \quad d = R\$\, 4.326{,}00$$

Para o ***valor atual*** do segundo título, teremos:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad 4.326 = 43.260 - A \quad \Rightarrow \quad A = 43.260 - 4.326 \quad \Rightarrow \quad A = R\$38.934{,}00$

Gabarito: E

13. (FCC) Uma duplicata, de valor nominal R$16.500,00, será descontada 50 dias antes do vencimento, à taxa de 0,02% ao dia. Se for utilizado o desconto simples bancário, o valor de resgate será:

a) R$14.850,00.
b) R$16.119,29.
c) R$16.335,00.
d) R$16.665,32.
e) R$18.233,50.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: }\begin{cases} N = R\$\, 16.500{,}00 \\ t = 50 \text{ dias} \\ i = 0{,}02\% \text{ a.d.} \\ A = ? \end{cases}$$

Determinando o ***desconto simples por fora*** (***bancário***):

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{16.500 \times 0{,}02 \times 50}{100} \quad \Rightarrow \quad d = R\$\, 165{,}00$$

Para o ***valor de resgate*** (***valor atual***), teremos:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad 165 = 16.5000 - A \quad \Rightarrow \quad A = 16.500 - 165 \quad \Rightarrow \quad A = R\$16.335{,}00$

Gabarito: C

14. (Esaf) O desconto simples racional de um título descontado à taxa de 24% ao ano, três meses antes de seu vencimento, é de R\$720,00. Calcular o valor do desconto correspondente caso fosse um desconto simples comercial.

a) R\$43,20.
b) R\$676,80.
c) R\$720,00.
d) R\$763,20.
e) R\$12.000,00.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} i = 24\% \text{ a.a. ou } (24\% \div 12) = 2\% \text{ a.m.} \\ t = 3 \text{ meses} \\ d = \text{R\$ } 720{,}00 \text{ (desconto racional ou por dentro)} \end{cases}$$

De acordo com a relação que define o ***desconto racional***, determinaremos o ***valor atual*** de resgate desse título.

$$d = \frac{Ait}{100} \Rightarrow 720 = \frac{A \times 2 \times 3}{100} \Rightarrow 720 \times 100 = 6A \Rightarrow A = \frac{72.000}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \text{R\$ } 12.000{,}00$$

Para o valor nominal, teremos:

$d_s = N - A \Rightarrow 720 = N - 12.000 \Rightarrow N = 12.000 + 720 \Rightarrow N = \text{R\$}12.720{,}00$

Considerando agora o ***desconto*** como sendo ***simples*** e ***comercial*** e:

$$\begin{cases} N = \text{R\$ } 12.720{,}00 \\ i = 2\% \text{ a.m.} \\ t = 3 \text{ meses} \end{cases} \text{, teremos:}$$

$$d = \frac{Nit}{100} \Rightarrow d = \frac{12.720 \times 2 \times 3}{100} \Rightarrow d = \text{R\$ } 763{,}20$$

Gabarito: D

15. (FCC) Um título de valor nominal igual a R\$25.000,00 foi descontado por uma empresa 40 dias antes de seu vencimento, segundo a operação de desconto comercial simples, à taxa de desconto de 3% ao mês. Considerando a convenção do ano comercial, a empresa recebeu, no ato da operação:

a) R\$24.000,00.
b) R\$23.850,00.
c) R\$23.750,00.
d) R\$23.500,00.
e) R\$22.500,00.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = \text{R\$ } 25.000{,}00 \\ t = 40 \text{ dias} \\ i = 3\% \text{ a.m. ou } (3\% \div 30) = 0{,}1\% \text{ a.d.} \\ A = ? \end{cases}$$

Determinando o ***desconto simples por fora***:

$$d = \frac{Nit}{100} \Rightarrow d = \frac{25.000 \times 0{,}1 \times 40}{100} \Rightarrow d = \text{R\$ } 1.000{,}00$$

Para o valor do ***atual***, teremos:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad 1.000 = 25.000 - A \quad \Rightarrow \quad A = 25.000 - 1.000 \quad \Rightarrow \quad A = R\$24.000,00$

Gabarito: A

16. (FCC) A Empresa GiroLento S.A. descontou, na modalidade de desconto simples, uma duplicata de R$5.000,00 com vencimento em 15 dias, na sua emissão, a uma taxa de 3% a.m. O valor líquido recebido pela empresa, considerando que a empresa de *factoring* não cobrou mais nenhuma despesa, foi (em reais):

a) 4.925,00.
b) 4.850,00.
c) 3.750,00.
d) 3.150,00.
e) 3.075,00.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\ 5.000,00 \\ t = 15 \text{ dias} \\ i = 3\% \text{ a.m. ou } (3\% \div 30) = 0,1\% \text{ a.d.} \\ A = ? \end{cases}$$

Determinando o ***desconto simples por fora***:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{5.000 \times 0,1 \times 15}{100} \quad \Rightarrow \quad d = R\$\ 75,00$$

Para o valor do ***atual***, teremos:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad 75 = 5.000 - A \quad \Rightarrow \quad A = 5.000 - 75 \quad \Rightarrow \quad A = R\$4.925,00$

Gabarito: A

17. (Cesgranrio) Um título de R$4.600,00 sofrerá desconto comercial simples seis meses antes do seu vencimento. Se a taxa de desconto utilizada for de 1,5% ao mês, o valor a ser recebido por esse título, após o desconto, será, em reais, de:

a) 4.140,00.
b) 4.186,00.
c) 4.324,00.
d) 4.462,00.
e) 4.531,00.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\ 4.600,00 \\ t = 6 \text{ meses} \\ i = 1,5\% \text{ a.m.} \\ A = ? \end{cases}$$

Determinando o ***desconto simples por fora***:

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{4.600 \times 1,5 \times 6}{100} \quad \Rightarrow \quad d = R\$\ 414,00$$

Para o valor do ***atual***, teremos:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad 414 = 4.600 - A \quad \Rightarrow \quad A = 4.600 - 414 \quad \Rightarrow \quad A = R\$4.186,00$

Gabarito: B

18. (Cespe/UnB) Considere que uma pessoa deseje saldar um título de R$12.000,00 quatro meses antes do seu vencimento. Se, nessa situação hipotética, incide a taxa mensal de desconto racional simples de 5%, então o valor que essa pessoa deverá pagar para saldar a dívida é:

a) inferior a R$9.000,00.
b) superior ou igual a R$9.000,00 e inferior a R$9.600,00.
c) superior ou igual a R$9.600,00 e inferior a R$10.200,00.
d) superior ou igual a R$10.200,00 e inferior a R$10.800,00.
e) superior ou igual a R$10.800,00.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\,12.000,00 \\ t = 4 \text{ meses} \\ i = 5\% \text{ a.m.} \\ A = ? \end{cases}$$

Determinando o ***desconto simples por dentro*** (***racional***):

$$d = \frac{Ait}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{A \times 5 \times 4}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{20A}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{20^{\div 5} A}{100_{\div 5}} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{A}{5}$$

Para o valor do ***atual***, teremos:

$$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{5} = 12.000 - A \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{5} + A = 12.000 \quad \Rightarrow \quad \frac{6A}{5} = 12.000$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{5 \times 12.000}{6} \quad \Rightarrow A = R\$10.000,00$$

Gabarito: C

19. (Cesgranrio) Seja um título com valor nominal de R$4.800,00, vencível em dois meses, que está sendo liquidado agora. Sendo de 10% a.m. a taxa de desconto simples adotada, é correto afirmar que o desconto:

a) comercial ou "por fora" é de R$960,00.
b) comercial ou "por fora" é de R$480,00.
c) comercial ou "por fora" é de R$200,00.
d) racional ou "por dentro" é de R$1.008,00.
e) racional ou "por dentro" é de R$480,00.

Resolução:

$$\text{Dados do enunciado: } \begin{cases} N = R\$\,4.800,00 \\ t = 2 \text{ meses} \\ i = 10\% \text{ a.m.} \end{cases}$$

Determinando os dois descontos simples: ***por fora*** (***comercial ou bancário***) e ***por dentro*** (***racional***)

1º) ***desconto por fora*** (***comercial***)

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{4.800 \times 10 \times 2}{100} \quad \Rightarrow \quad d = R\$\,960,00$$

Gabarito: A

Apenas para confirmação, determinaremos, a seguir, o desconto por dentro (racional) que incide no valor atual desse título:

Determinando, inicialmente, o valor atual, teremos:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad 960 = 4.800 - A \quad \Rightarrow \quad A = 4.800 - 960 \quad \Rightarrow \quad A = R\$3.840{,}00$

Para o desconto racional, teremos:

$$d = \frac{Ait}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3.840 \times 10 \times 2}{100} \quad \Rightarrow \quad d = R\$\,768{,}00$$

20. (Cesgranrio) A Empresa Genetical Center apresentou para desconto no Banco Atlântico S/A uma duplicata no valor de R$12.000,00, com vencimento para 25 dias. Sabendo-se que o banco cobra uma taxa de desconto simples de 3% ao mês, o valor líquido liberado pelo banco, em reais, foi:

a) 10.999,37.
b) 11.333,33.
c) 11.366,66.
d) 11.666,33.
e) 11.700,00.

Resolução:

Dados do enunciado: $\begin{cases} N = R\$\,12.000{,}00 \\ t = 25 \text{ dias} \\ i = 3\% \text{ a.m. ou } (3\% \div 30) = 0{,}1\% \text{ a.d} \\ A = ? \end{cases}$

Determinando os dois descontos simples: ***por fora*** (***comercial ou bancário***)

$$d = \frac{Nit}{100} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{12.0\cancel{00} \times 0{,}1 \times 25}{1\cancel{00}} \quad \Rightarrow \quad d = R\$\,300{,}00$$

Determinando, inicialmente, o valor atual, teremos:

$d_s = N - A \quad \Rightarrow \quad 300 = 12.0000 - A \quad \Rightarrow \quad A = 12.000 - 300 \quad \Rightarrow \quad A = R\$11.700{,}00$

Gabarito: E

ELSEVIER

LUIZ CLÁUDIO CABRAL
MAURO CÉSAR NUNES

Material Complementar

500
exercícios propostos

CAMPUS
CONCURSOS

página deixada intencionalmente em branco

Capítulo 1

Problemas envolvendo números inteiros e fracionários

Exercícios propostos

1. Efetuando $2{,}5 + \dfrac{0{,}08484...}{0{,}4242...}$, obtemos:

a) 4,7
b) 4,5
c) 2,7
e) 2,9
d) 2,07

2. Seja $\dfrac{p}{q}$ a forma irredutível do resultado da expressão $\dfrac{2\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}}{4\frac{1}{4}-1\frac{1}{2}}+1{,}2363636...$. O valor de p – q é:

a) 78
b) 98
c) 324
d) 524
e) 1

3. (Cesgranrio) Considere as seguintes afirmativas:
I. o inverso do número racional 0,5 é 2;
II. o produto de quatro números negativos é positivo;
III. se y – (–60) = –12, então y = 72;
IV. dividir um número diferente de zero por 0,25 equivale a multiplicá-lo por 4.
Atribuindo V às afirmações verdadeiras e F às falsas, tem-se a seguinte sequência:

a) V – V – F – V
b) V – F – V – V
c) V – F – F – V
d) F – V – V – F
e) F – V – F – F

4. (Cesgranrio) Um rolo com 19 metros de arame foi cortado em quatro pedaços de mesmo tamanho. A medida de cada pedaço, em metros, é:

a) 4,10
b) 4,20
c) 4,35
d) 4,60
e) 4,75

5. (Funiversa) Funcionários da empresa de energia elétrica receberam um cabo para distribuição em baixa tensão com 2.304 metros de comprimento. Foi pedido que eles construíssem uma rede elétrica com quatro cabos, três fases e um neutro, utilizando 16 postes, de modo que não falte nem sobre cabo. A distância exata, em metros, entre os postes deve ser de:

a) 34,5
b) 36
c) 38
d) 38,4
e) 42

6. **(Funiversa) A companhia responsável pelo fornecimento de energia elétrica de uma cidade dispõe de 48 funcionários de plantão para atender aos chamados de emergência. Os funcionários são divididos em equipes sempre do mesmo tamanho, nunca com menos de três funcionários por equipe. Por motivo de segurança, não se pode ter menos de quatro equipes.**
Segundo essas condições, de quantas maneiras diferentes podem ser formadas as equipes?

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

7. **(Cesgranrio) Ao receber seu décimo terceiro salário, Sérgio gastou 1/3 do valor recebido comprando presentes de Natal. Da quantia que sobrou, ele utilizou 1/5 para pagar uma dívida, e ainda sobraram R$1.920,00. O décimo terceiro salário de Sérgio, em reais, foi**

a) 2.400,00
b) 3.225,00
c) 3.600,00
d) 3.850,00
e) 4.115,00

8. **(Cesgranrio) Uma refinaria tinha, em 2004, capacidade para processar 224 mil barris de petróleo por dia. Com a ampliação das instalações, essa capacidade aumentou em $\frac{3}{8}$ no ano seguinte. Assim, pode-se concluir que, em 2005, a capacidade de processamento dessa refinaria, em milhares de barris diários, passou a ser de:**

a) 252
b) 308
c) 318
e) 368
d) 352

9. **(Cesgranrio) Dona Augusta precisava de 850 g de farinha de trigo para fazer um pão e, em casa, só tinha 500 g de farinha de trigo. Teve de comprar um pacote de 1 kg e dele retirar a parte que faltava. Quantos gramas de farinha de trigo sobraram no pacote que Dona Augusta comprou?**

a) 250
b) 350
c) 450
d) 550
e) 650

10. **(FCC) Uma pessoa, ao efetuar a multiplicação de 2.493 por um certo número inteiro, encontrou o produto 668.124. Só então notou que, ao copiar os números para efetuar a operação, ela trocou, por engano, o algarismo das dezenas do multiplicador, escrevendo 6 em vez de 3. Assim, o verdadeiro produto seria:**

a) 643 194
b) 618 264
c) 598 274
d) 593 334
e) 568 404

11. **(FCC) Certa semana, uma equipe foi incumbida de fazer determinada tarefa. Na segunda-feira, foi executada a terça parte da tarefa e, a cada dia subsequente, a metade da realizada no dia anterior. Nessas condições, é correto afirmar que, ao final da sexta-feira:**

a) foi concluída a tarefa.
b) $\frac{17}{48}$ da tarefa havia deixado de ser executada.
c) $\frac{19}{48}$ da tarefa havia deixado de ser executada.
d) $\frac{2}{3}$ da tarefa havia sido executada.
e) $\frac{37}{48}$ da tarefa havia sido executada.

12. (FCC) A soma de três números naturais é 13.455. O maior deles é 7.946. A diferença entre os outros dois é 2.125. O triplo do menor deles é:
a) 1 692
b) 3 384
c) 3 817
d) 4 749
e) 5 076

13. (FCC) Um trabalhador gasta $\frac{1}{3}$ de seu salário com aluguel de casa e $\frac{1}{5}$ com transporte. Quanto resta para outras despesas, se seu salário é de R$780,00?
a) R$343,00
b) R$364,00
c) R$416,00
d) R$468,00
e) R$585,00

14. (FCC) Num prédio de apartamentos de 15 andares, cada andar possui dois apartamentos e em cada um moram quatro pessoas. Sabendo-se que, diariamente, cada pessoa utiliza 100 l de água e que, além do volume total gasto pelas pessoas, se dispõe de uma reserva correspondente a $\frac{1}{5}$ desse total, a capacidade mínima do reservatório de água desse prédio, em litros, é:
a) 1.200
b) 2.400
c) 9.600
d) 10.000
e) 14.400

15. (FEC) Para terminar a leitura de um livro, André ainda precisa ler 121 páginas. Se André já leu 379 páginas desse livro, o livro tem um total de:
a) 257 páginas
b) 258 páginas
c) 499 páginas
d) 500 páginas
e) 450 páginas

16. (FEC) Um agricultor colheu 2544 laranjas e guardou-as em sacos com 24 laranjas cada. O agricultor guardou as laranjas em:
a) 106 sacos
b) 16 sacos
c) 86 sacos
d) 126 sacos
e) 46 sacos

17. (Cesgranrio) Sabendo-se que A = $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$ e B = $2\frac{1}{5}-1\frac{3}{10}$, então o quociente de A por B é igual a

a) $\frac{9}{16}$

b) $\frac{25}{12}$

c) $\frac{25}{36}$

d) $\frac{37}{72}$

e) $-\frac{25}{44}$

18. (FCC) Se *x* e *y* são números inteiros tais que *x* é par e *y* é ímpar considere as seguintes afirmações:

I. $x + y$ é ímpar.

II. $x - 2y$ é ímpar.

III. $(3x) . (5y)$ é impar.

É correto afirmar que

a) I, II e III são verdadeiras

b) I, II e III são falsas

c) apenas I é verdadeira

d) apenas I e II são verdadeiras

e) apenas II e III são verdadeiras

19. (Cesgranrio) Certa quantia em reais foi dividida entre três irmãos. Um deles ficou com $\frac{1}{4}$ da quantia, outro ficou com $\frac{3}{5}$ e o terceiro, com o restante. Então, o terceiro ficou com uma fração da quantia igual a:

a) $\frac{7}{10}$

b) $\frac{5}{20}$

c) $\frac{3}{20}$

d) $\frac{1}{20}$

e) $\frac{7}{20}$

20. (FCC) Certo artigo é vendido em uma loja ao preço de N reais a unidade. Ao conferir o total a ser pago pela compra de 14 unidades desse artigo, Orozimbo logo percebeu que o vendedor cometera um engano: ao efetuar a multiplicação de 14 por N, ele inverteu as posições do algarismo das unidades com o das dezenas de N e, com isso, obteve 2.142 reais. Nessas condições, de quantos reais a quantia certa a ser paga diferia da errada?

a) 212

b) 224

c) 252

d) 266

e) 284

Gabaritos:

1. E	6. B	11. B	16. A
2. B	7. C	12. D	17. B
3. A	8. C	13. B	18. C
4. E	9. E	14. E	19. C
5. D	10. D	15. D	20. C

Capítulo 2

Divisores de um número natural: D(*n*)

Exercícios propostos

1. **(EsSA) O número 3528 é divisível por 4, pois:**
   a) é um número par;
   b) tem quatro algarismos;
   c) seu último algarismo é múltiplo de 4;
   d) seus dois últimos algarismos formam 28;
   e) A soma de seus algarismo é um número múltiplo de 4.

2. **(CFC) O número, cuja forma fatorada é $3^3 . 5^4 . 11^2$, é divisível por:**
   a) 6.
   b) 15.
   c) 30.
   d) 40.
   e) 42.

3. **(EsSA) Se *n* é um número natural divisível por 4 e por 9, é errado afirmar que *n* é divisível por:**
   a) 36.
   b) 72.
   c) 144.
   d) 186.
   e) 216.

4. **(NCE) Um número de três algarismos é divisível por 2, 3 e 5 e a soma dos três algarismos que compõem esse número é 15. Se somarmos apenas os dois algarismos de maior valor absoluto desse número, obteremos como resultado:**
   a) 11.
   b) 12.
   c) 13.
   d) 14.
   e) 15.

5. **(CFC) A soma dos divisores ímpares do número 150 é:**
   a) 82.
   b) 95.
   c) 103.
   d) 124.
   e) 142.

6. **(CFC) Seja "12XY" um número de quatro algarismos distintos, onde X e Y são, respectivamente, os algarismos das dezenas e das unidades. Se Y < 5 e "12XY" é múltiplo de 6, então a quantidade de valores que "12XY" pode assumir é:**
   a) 4.
   b) 5.
   c) 6.
   d) 7.
   e) 8.

7. **(CN) Para que o número 2A08 seja divisível por 44, então o valor de A deverá ser igual a:**
   a) 2.
   b) 3.
   c) 4.
   d) 5.
   e) 6.

8. (EsSA) O número 196X é divisível por 6, o número 32Y7 é divisível por 9 e o número 54Z6 é divisível por 12, então, o menor valor de X + Y + Z vale:

a) 11.
b) 13.
c) 15.
d) 17.
e) 19.

9. (CESd) O número de divisores de 112 é:

a) 8.
b) 10.
c) 12.
d) 14.
e) 16.

10. (CFC) Dentre os divisores de 198, o maior número que é divisível por 16, é:

a) 32.
b) 48.
c) 64.
d) 96.
e) nenhum.

11. (CFC) Se o número $N = 2^x.3^2$ tem 6 divisores, o valor de N é:

a) 18.
b) 16.
c) 12.
d) 9.
e) 6.

12. (CN) A soma dos inversos dos divisores ímpares do número 56 é:

a) 8.
b) 7.
c) $\frac{1}{7}$.
d) $\frac{8}{7}$.
e) $\frac{11}{7}$.

13. (CN) Calcule a menor soma possível de $x + y$, com $x \neq y$, de modo que o número 3*x*45*y*8 seja divisível por 11.

a) 8.
b) 7.
c) 6.
d) 5.
e) 4.

14. (CFC) Assinale a sentença FALSA.

a) 770 é divisível por 7.
b) 13 é divisor de 260.
c) O maior múltiplo inteiro de 9, menor que 100, é 99.
d) 204 é divisível por 24.
e) 455 é múltiplo de 5 e 7, simultaneamente.

15. (CESd) O número 503.072 é divisível por:

a) 13.
b) 11.
c) 9.
d) 6.
e) 4.

Gabaritos:

1. D	5. D	9. B	13. D
2. B	6. B	10. E	14. D
3. A	7. D	11. A	15. E
4. E	8. A	12. D	

Capítulo 3
Máximo Divisor Comum (MDC)

Exercícios propostos

1. **(Consulplan) O MDC(70, 210, 280) é um número múltiplo de:**
   a) 12.
   b) 14.
   c) 16.
   d) 18.
   e) 21.

2. **(Cespe/UnB) Em uma farmácia existem 90 frascos do remédio A e 198 do remédio B, que devem ser guardados em caixas. Cada caixa deve conter remédio de um só tipo e todas elas, o mesmo número de frascos. As caixas devem conter o maior número possível de frascos. Com base nessas informações, julgue o item a seguir.**
   a) 15.
   b) 16.
   c) 18.
   d) 20.
   e) 24.

3. **Três rolos de fio medem, respectivamente, 24 m, 84 m, 90 m. Eles foram cortados em pedaços iguais e do maior tamanho possível. Então, o comprimento de cada pedaço é:**
   a) 8 m.
   b) 3 m.
   c) 6 m.
   d) 2 m.
   e) 4 m.

4. **(Cespe/UnB) Cada aluno de uma escola recebeu um kit contendo um lápis, uma borracha, um apontador e uma caneta. Para que cada aluno recebesse um kit completo, a escola comprou os lápis em caixas de 50 unidades; as canetas, em caixas de 30 unidades; os apontadores, em caixas contendo 25 unidades e as borrachas, em caixas de 15 unidades. Se todos os objetos comprados foram utilizados para a montagem dos kits, é correto afirmar que a quantidade mínima de alunos dessa escola é igual a:**
   a) 120
   b) 150
   c) 240
   d) 300
   e) 320

5. **(PMB) Em uma excursão, viajaram três ônibus com 48, 36 e 42 passageiros. Para o passeio programado, os grupos formados por essas pessoas deveriam ter o mesmo número de pessoas e o maior número delas. Então, o número de grupos formados foi:**
   a) 18.
   b) 20.
   c) 21.
   d) 23.
   e) 25.

6. **(FCC) Todos os funcionários de um Tribunal devem assistir a uma palestra sobre "Qualidade de vida no trabalho", que será apresentada várias vezes, cada vez para um grupo distinto. Um técnico foi incumbido de formar os grupos, obedecendo aos seguintes critérios:**

– todos os grupos devem ter igual número de funcionários;
– em cada grupo, as pessoas devem ser do mesmo sexo;
– o total de grupos deve ser o menor possível.

Se o total de funcionários é composto de 225 homens e 125 mulheres, o número de palestras que deve ser programado é:

a) 10.
b) 12.
c) 14.
d) 18.
e) 25.

7. (FCC) Dispõe-se de dois lotes de boletins informativos distintos: um com 336 unidades, e outro com 432 unidades. Um técnico judiciário foi incumbido de empacotar todos os boletins dos lotes, obedecendo as seguintes instruções:
– todos os pacotes devem conter a mesma quantidade de boletins;
– cada pacote deve ter um único tipo de boletim.

Nessas condições, o menor número de pacotes que ele poderá obter é:

a) 12.
b) 16.
c) 18.
d) 24.
e) 32.

8. (NCE) Numa escola, há 240 alunos no período diurno e 144 no período noturno, com os alunos dessa escola de tal forma que cada grupo tenha o mesmo número de alunos para ambos os períodos. E, além disso, queremos que o número de alunos, por grupo, seja o maior possível. Qual o número total de grupos?

a) 5.
b) 8.
c) 10.
d) 12.
e) 14.

9. (CESGRANRIO) Um antiquário adquiriu 112 tinteiros, 48 espátulas e 80 canivetes. Deseja arrumá-los em mostruários de modo a conter o mesmo e o maior número possível de objetos no total e em natureza. O total de objetos em cada mostruário será de:

a) 13.
b) 14.
c) 15.
d) 16.
e) 18.

10. (FGV) Uma abelha-rainha dividiu as abelhas de sua colmeia nos seguintes grupos para exploração ambiental: um composto de 288 batedoras e outro de 360 engenheiras. Sendo você a abelha rainha e sabendo que cada grupo deve ser dividido em equipes constituídas de um mesmo e maior número de abelhas possível, então você redistribuirá suas abelhas em:

a) 8 grupos de 81 abelhas.
b) 9 grupos de 72 abelhas.
c) 24 grupos de 27 abelhas.
d) 2 grupos de 324 abelhas.
e) 6 grupos de 128 abelhas.

11. (Vunesp) A cobertura de um piso retangular de 12×18 metros será feita com placas quadradas de lado igual a L metros. Se L é um número natural, para que haja uma cobertura perfeita do piso, sem cortes ou sobreposições de placas, é necessário e suficiente que:

a) L seja um número par.
b) L divida 12.
c) L divida 18.
d) L divida o MDC (12,18).
e) L divida o MMC (12,18).

12. **(EsSA) Os números 756 e $2^x \times 3^y$ têm 9 como MDC. Então *x* + *y* vale:**
a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

13. **(CN) Sejam x e y números naturais Se A = $2^x \times 3^2 \times 5^3 \times 7$, B = $2^4 \times 3^3 \times 5^y$, C = $2^3 \times 5^4 \times 11$ e MDC(A, B, C) = 200, então *x* + *y* é um número natural igual a:**
a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

14. **O professor "Girão" possui três turmas com 24, 36 e 48 alunos. Deseja repartir os alunos em grupos, para uma pesquisa, de tal modo que todos os grupos, nas três turmas, tenham a mesma quantidade e a maior quantidade possível de alunos. Quantos serão os grupos formados?**
a) 12.
b) 8.
c) 6.
d) 9.
e) 5.

15. **Um hortigranjeiro colheu, ao final de uma semana, 230 laranjas, 207 caquis e 115 maçãs. Ao armazenar essas frutas, usou caixotes. Esses caixotes têm o mesmo número de frutas de uma só espécie e o maior número possível de frutas. Quantos caixotes usou?**
a) 19.
b) 23.
c) 24.
d) 184.
e) 185.

Gabaritos:

1. B
2. B
3. C
4. B
5. C
6. C
7. B
8. B
9. D
10. B
11. D
12. A
13. D
14. D
15. B

Capítulo 4
Números primos

Exercícios propostos

1. **(CESd) É primo o número:**
a) 121.
b) 133.
c) 137.
d) 141.
e) 153.

2. **(EsSA) Decompondo o número 1.500 em fatores primos, obtém-se**
a) $2^2 \times 3^2 \times 5$
b) $2 \times 3^2 \times 5^2$
c) $2^3 \times 3 \times 5^2$
d) $2^2 \times 3 \times 5^3$
e) $2^2 \times 3^3 \times 5^3$

3. **(CFC) Dos números primos compreendidos entre 30 e 40, sabemos que:**
a) seu produto é 1147.
b) sua soma é 65.
c) sua diferença é 8.
d) são em número de três.
e) são em número de quatro.

4. **A quantidade de números primos distintos encontrados na forma fatorada do número 8500 é:**
a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

5. **Fatorando os números 51, 92 e 228 temos para a soma dos três maiores números primos, o valor de:**
a) 47.
b) 57.
c) 59.
d) 61.
e) 63.

6. **A forma fatorada completa do número 60 é $2^m \times 3^n \times 5^p$. O valor de "*m + n – p*" é:**
a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

7. **(CFC) Decompondo-se o número 6048 em fatores primos, obtém-se $2^m \times 3^n \times 7^p$. O valor da expressão *m + n + p* é:**
a) 8.
b) 9.
c) 10.
d) 11.
e) 13.

8. **(CFC) O número, cuja forma fatorada é $3^3 \times 5^4 \times 11^2$, é divisível por**
a) 6.
b) 15.
c) 30.
d) 40.
e) 41.

9. **(CESd) O menor primo que não divide o número 210 é:**
a) 7.
b) 1.
c) 9.
d) 17.
e) 11.

10. **(CFC) Quantos números primos estão compreendidos entre 90 e 100?**
a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

Gabaritos:

1. C	3. A	5. C	7. B	9. E
2. D	4. B	6. C	8. B	10. B

Capítulo 5
Múltiplos de um número natural: D(*n*)

Exercícios propostos

1. **Qual é a única afirmação falsa?**
   a) Todo múltiplo de 6 é múltiplo de 3.
   b) Todo divisor de 12 é múltiplo de 6.
   c) Todo múltiplo de 10 é múltiplo de 5.
   d) Todo divisor de 9 é divisor de 18.
   e) Todo divisor de 15 é divisor de 105.

2. **(CFC) A quantidade de números múltiplos comuns de 90 e 135 formados por três algarismos é:**
   a) 5.
   b) 4.
   c) 3.
   d) 2.
   e) 1.

3. **(EEAR) Analise as afirmações:**
   I. 150 é múltiplo de 25.
   II. 150 é divisível por 2, 3, 5 e 6.
   III. 150 é múltiplo comum de 20 e 25.
   São verdadeiras as afirmações:
   a) I e II apenas.
   b) I e III apenas.
   c) II e II apenas.
   d) I, II e III.
   e) nenhuma.

4. **(CFC) A soma dos algarismos do número compreendido entre 150 e 200 que é, ao mesmo tempo, múltiplo de 3, 4 e 7 vale:**
   a) 20.
   b) 18.
   c) 15.
   d) 12.
   e) 10.

5. **(CN) A diferença positiva entre o maior e o menor número compreendido entre 200 e 300 que são, ao mesmo tempo, múltiplos de 2, 3 e 7 vale:**
   a) 24.
   b) 42.
   c) 84.
   d) 96.
   e) 100.

Gabaritos:

1. B	2. C	3. A	4. C	5. C

Capítulo 6

Mínimo Múltiplo Comum

Exercícios propostos

1. **(FCC) Três funcionários fazem plantões nas seções em que trabalham: um a cada 10 dias, outro a cada 15 dias, e o terceiro a cada 20 dias, inclusive aos sábados, domingos e feriados. Se no dia 18/05/02 os três estiveram de plantão, a próxima data em que houve coincidência no dia de seus plantões foi em:**
   a) 18/11/02.
   b) 17/09/02.
   c) 18/08/02.
   d) 17/07/02.
   e) 18/06/02.

2. **(EsSA) Sabendo-se que MDC(150; 250) = *a* e *mmc*(150; 250) = *b*, então o produto *a* × *b* é igual a:**
   a) 7.500.
   b) 12.500.
   c) 37.500.
   d) 75.000.
   e) 90.000.

3. **(Cesgranrio) A jornada do soldado Saldanha é de 12 horas de trabalho por 24 horas de folga e a de seu sobrinho, Sardinha, que é motorista de transporte coletivo, é de 9 horas de trabalho por 18 horas de folga. Se, em certo dia, os dois iniciaram suas jornadas de trabalho em um mesmo momento, então essa coincidência voltaria a ocorrer em:**
   a) 96 horas.
   b) 108 horas.
   c) 132 horas.
   d) 144 horas.
   e) 156 horas.

4. **(CN) Sendo *mmc* o mínimo múltiplo comum e o MDC o máximo divisor comum. Qual a razão entre $\frac{\text{mmc}(30,45)}{\text{MDC}(30,45)}$?**
   a) 4.
   b) 3.
   c) 5.
   d) 6.
   e) 15.

5. **(Consulplan) Aplicando o método decomposição em fatores primos, o mínimo múltiplo comum, *mmc*(80; 120; 150) vale:**
   a) 1.200.
   b) 800.
   c) 900.
   d) 300.
   e) 240.

6. **(Cesgranrio) Duas pessoas, fazendo seus exercícios diários, partem de um mesmo ponto e contornam, andando, uma pista oval. Uma dessas pessoas anda de forma mais acelerada e dá uma volta completa na pista em 12 minutos, enquanto a outra leva 20 minutos para completar a volta.**
   Depois de quanto tempo essas duas pessoas voltarão a se encontrar no ponto de partida?

a) 40 min.
b) 50 min.
c) 60 min.
d) 70 min.
e) 90 min.

7. (NCE) Duas luzes piscam com frequências diferentes. A primeira pisca quinze vezes por minuto e a segunda pisca dez vezes por minuto. Se em certo instante as luzes piscarem simultaneamente, após quantos *segundos* elas voltarão a piscar ao mesmo tempo?

a) 10.
b) 12.
c) 15.
d) 20.
e) 30.

8. (Cesgranrio) Numa avenida que mede 4.500 m, a partir do início, a cada 250 m, há uma parada de ônibus e a cada 225 m, uma de bonde. A distância do início até o ponto em que, pela primeira vez, coincide a parada de ônibus com a de bonde é, em metros.

a) 4.500.
b) 3.500.
c) 2.250.
d) 775.
e) 525.

9. (FGV) Duas luzes, dispostas no alto de uma torre, "piscam" com frequências diferentes. A primeira "pisca" 20 vezes por minuto e a segunda "pisca" 12 vezes por minuto. Se elas "piscam" simultaneamente num certo instante, após quantos segundos elas voltarão a "piscar" simultaneamente?

a) 10.
b) 15.
c) 20.
d) 30.
e) 60.

10. (NCE) Um colecionador possui mais de 2500 selos e menos de 3000. Contando o número de selos de 15 em 15, de 25 em 25 e de 35 em 35, sempre sobram 13. O número de selos do colecionador é, portanto:

a) 2.963.
b) 2.918.
c) 2.715.
d) 2.638.
e) 2.578.

11. (FCC) Um relógio bate a cada 15 minutos, outro relógio a cada 25 minutos e um terceiro a cada 40 minutos. O menor intervalo de tempo decorrido entre duas batidas simultâneas dos três relógios é:

a) 1 hora.
b) 5 horas.
c) 6 horas.
d) 10 horas.
e) 30 horas.

12. (FCC) De uma estação urbana, partem ônibus para o bairro A, de 18 em 18 minutos; para o bairro B, de 10 em 10 minutos; e para o bairro C, de 15 em 15 minutos. Sabendo-se que às 10 horas e 48 minutos partiram juntos os ônibus dessas três linhas, a que horas partirão juntos novamente?

a) 12 h 18 min.
b) 12 h 48 min.
c) 12 h 26 min.
d) 12 h 56 min.
e) 12 h 58 min.

13. **(EsSA) Se o mínimo múltiplo comum (*mmc*) entre os inteiros ($2^m \times 15$) e (4×3^n) é 360, então:**

a) $m = n$.
b) $m + n$ é ímpar.
c) $m \times n$ é múltiplo de 4.
d) $m \times n$ é múltiplo de 15.
e) $m - n$ é primo.

14. **(FCC) O controle estatístico de uma indústria produtora de veículos pretende estabelecer um regime de acompanhamento de 4 itens do produto final da seguinte maneira:**

– A cada lote de 10 unidades é testado o motor da última unidade produzida.
– A cada lote de 6 unidades é testada a injeção eletrônica da última unidade produzida.
– A cada lote de 4 unidades é testado o ar condicionado da última unidade.
– A cada lote de 3 unidades é testada a qualidade dos freios da última unidade.

Iniciando o processo descrito no início da manhã de segunda-feira e prevendo uma produção de 360 unidades até o final da semana, quantas unidades produzidas terão 3 ou mais itens testados simultaneamente?

a) 6.
b) 12.
c) 18.
d) 30.
e) 36.

15. **(EEAr) Três satélites artificiais giram em torno da Terra em órbitas constantes. O tempo de rotação do primeiro é de 42 minutos, do segundo 72 minutos e do terceiro 126 minutos. Em dado momento eles se alinham em um mesmo meridiano, embora em latitudes diferentes. Eles voltarão em seguida a passar simultaneamente pelo mesmo meridiano depois de:**

a) 16 h 24 min.
b) 7 h 48 min.
c) 140 min.
d) 126 min.
e) 8 h 24 min.

Gabaritos:

1. C	4. D	7. E	10. D	13. B
2. C	5. A	8. C	11. C	14. E
3. B	6. C	9. E	12. A	15. E

Capítulo 7

Sistema de unidades de medidas

Exercícios propostos

1. **(Cesgranrio) Um terreno quadrado foi cercado com cinco voltas de arame. Se foram gastos para isso, já descontadas as emendas, exatamente 200 metros do arame, então cada lado desse terreno, em centímetros, mede:**

a) 40.
b) 50.
c) 1.000.
d) 4.000.
e) 10.000.

2. **(Cesgranrio) Um balde, que pode conter no máximo 2 litros, está com água até a metade de sua capacidade. Sabendo que 1 litro é igual a 1.000 mililitros, quantos mililitros de água há nesse balde?**
a) 2.000.
b) 1.000.
c) 750.
d) 500.
e) 250.

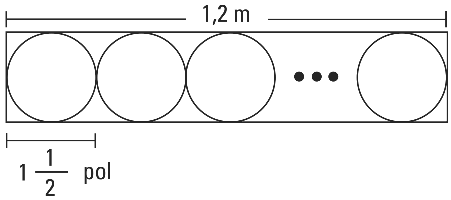
3. **(Cesgranrio) Uma viagem de ônibus de Boa Vista a Manaus leva, normalmente, 10 horas e 30 minutos. O ônibus que saiu de Boa Vista às 9h deve chegar a Manaus às:**
a) 21h 30min.
b) 21h.
c) 20h 30min.
d) 20h.
e) 19h 30min.

4. **(Cesgranrio) Para uma sala retangular, com 5,25 m de comprimento e 4,30 m de largura, foram comprados 20 m de rodapé. Quantos centímetros de rodapé sobraram?**
a) 70.
b) 85.
c) 90.
d) 92.
e) 95.

5. **(Cesgranrio) Num dia de outono, em certa cidade da Região Sudeste, o sol nasceu às 6h 9min e se pôs às 17h 31min. Num determinado instante, o tempo decorrido desde o nascer do sol era igual ao tempo que faltava para o pôr do sol. Esse instante ocorreu às:**
a) 11h 50min.
b) 11h 38min.
c) 11h 22min.
d) 10h 28min.
e) 9h 38min.

6. **(FCC) A jornada diária de trabalho de um soldado é de 8 horas. Se ele iniciar sua jornada quando forem decorridos $\frac{13}{36}$ do dia e interrompê-la durante 1 hora e 35 minutos para almoçar, sua jornada nesse dia se encerrará às:**
a) 17 horas e 25 minutos.
b) 17 horas e 35 minutos.
c) 17 horas e 45 minutos.
d) 18 horas e 15 minutos.
e) 18 horas e 25 minutos.

7. **(FCC) O sistema de tubulação de um prédio prevê a instalação de tubos de $1\frac{1}{2}$ polegadas de diâmetro numa extensão de 1,2 metros, conforme indica a figura:**



Sabendo que 1 polegada equivale a 25 mm, o total de tubos utilizados na instalação será igual a:

a) 32.
b) 30.
c) 26.
d) 18.
e) 10.

8. (FCC) A coleta seletiva de lixo de uma escola prevê conseguir 5 quilos de alumínio, por semana, provenientes de latas recicláveis. Se três latas vazias têm massa aproximada de 20 gramas, a meta da escola será atingida se forem arrecadadas semanalmente um total de latas igual a:

a) 250.
b) 300.
c) 550.
d) 600.
e) 750.

9. (FCC) As paredes de um escritório terão aumento de espessura após serem recobertas com tijolos de 4 centímetros, fibra de vidro de 2½ polegadas e uma camada de 6,5 milímetros de massa. Sabendo que uma polegada é igual a 2,54 centímetros, a espessura de cada parede aumentará em:

a) 7,19 cm.
b) 9,00 cm.
c) 10,35 cm.
d) 11,00 cm.
e) 15,95 cm.

10. (FCC) Dividindo-se todos os 0,36 km de corda de um rolo em pedaços de 180 cm de comprimento cada um, quantas partes serão obtidas?

a) Trezentas.
b) Duzentas.
c) Trinta.
d) Vinte.
e) Doze.

11. (FCC) Pretende-se acondicionar 1.200 litros de fertilizante em recipientes, cada um com capacidade para 0,025m^3. A menor quantidade de frascos que deverão ser usados é:

a) 48.
b) 50.
c) 96.
d) 480.
e) 500.

12. (FCC) Se 1 hectare corresponde à área de um quadrado com 100 m de lado, então expressando-se a área de 3,6 hectares em quilômetros quadrados obtém-se:

a) 3 600.
b) 36.
c) 0,36.
d) 0,036.
e) 0,0036.

13. (FCC) O caixa automático de um banco possui notas de 2, 5, 10 e 50 reais para operações de saque e está programado para disponibilizar sempre o menor número possível de notas para o sacador. Nestas condições, um único saque de R$ 298,00 implicará um total de notas igual a:

a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.
e) 14.

14. (FCC) Para a retirada de um doce, uma máquina aceita quaisquer combinações de moedas de 5, de 10 e de 25 centavos, desde que haja, pelo menos, uma moeda de cada tipo. Assim sendo, o maior número possível de combinações que podem ser feitas com os três tipos de moedas, para que possa ser retirada uma barra de chocolate que custa R$1,00, é:

a) 13.
b) 10.
c) 8.
d) 7.
e) 5.

15. (FCC) Em uma rodovia, uma carreta está transportando 65 toras de madeira, cada qual com peso de 82 kg. Se a carreta vazia pesa 3,5 toneladas, então, ao parar num posto de pesagem, quantas toneladas a balança marcará?

a) 6,43.
b) 7,87.
c) 8,83.
d) 9,27.
e) 9,63.

16. (FCC) Dizer que são decorridos $\frac{25}{72}$ de um dia é o mesmo que dizer que são:

a) 7 horas e 10 minutos.
b) 7 horas e 20 minutos.
c) 7 horas e 40 minutos.
d) 8 horas e 10 minutos.
e) 8 horas e 20 minutos.

17. (FCC) Se os 13,56 litros de água no interior de um bebedouro estão ocupando os $\frac{2}{3}$ de sua capacidade, quantos metros cúbicos de água faltam para encher esse bebedouro?

a) 0,968.
b) 0,678.
c) 0,0968.
d) 0,0678.
e) 0,00678.

18. (FCC) Um técnico judiciário deve cumprir uma jornada diária de 8 horas de trabalho. Certo dia, ele chegou ao trabalho quando eram decorridos $\frac{23}{72}$ do dia, saiu às 11h38min para almoçar e retomou suas atividades às 12h50min. Se saiu do trabalho quando eram decorridos $\frac{2}{3}$ do dia, então, nesse dia:

a) sua jornada foi cumprida.
b) ele deixou de cumprir 38 minutos de sua jornada.
c) ele deixou de cumprir 52 minutos de sua jornada.
d) ele excedeu sua jornada em 18 minutos.
e) ele excedeu sua jornada em 24 minutos.

19. (FCC) O volume de uma caixa d'água é de 2,760 m^3. Se a água nela contida está ocupando os $\frac{3}{5}$ de sua capacidade, quantos decalitros de água devem ser colocados nessa caixa para enchê-la completamente?

a) 331,2.
b) 184.
c) 165,6.
d) 110,4.
e) 55,2.

20. (FCC) Um motorista iniciou uma viagem às 9h 25min e chegou ao seu destino às 18h10min. Essa viagem durou:

a) oito horas e trinta e cinco minutos.
b) oito horas e quarenta e cinco minutos.
c) nove horas e cinco minutos.
d) nove horas e quinze minutos.
e) nove horas e trinta e cinco minutos.

21. (FCC) Em uma seção há um garrafão contendo 10 *litros* de água. Quantos copos com capacidade de 200 *ml* cada dever-se-ão encher para esvaziar esse garrafão?

a) 5.
b) 20.
c) 50.
d) 200.
e) 500.

22. (FCC) Certo dia, um auxiliar gastou 5.040 segundos para entregar as correspondências de diferentes setores do Tribunal. Se essa tarefa teve início às 8 horas e 56 minutos e foi executada ininterruptamente, então ele finalizou a entrega das correspondências às:

a) 10 horas.
b) 10 horas e 5 minutos.
c) 10 horas e 20 minutos.
d) 10 horas e 36 minutos.
e) 10 horas e 45 minutos.

23. (FCC) Sabe-se que a água existente no interior de um recipiente X ocupa $\frac{2}{5}$ de sua capacidade. Se, usando toda essa água, é possível encher 18 garrafas, cada qual com volume de 1.250 cm^3, a capacidade de X, em litros, é:

a) 55,75.
b) 56,25.
c) 56,50.
d) 56,75.
e) 57,25.

24. (FEC) Para servir durante o almoço, Maria misturou em uma jarra, 600 ml de suco de laranja, 300 ml de suco de acerola e 450 ml de água. A quantidade total da mistura na jarra, em litros, é de:

a) 13,5.
b) 1,35.
c) 12,5.
d) 1,25.
e) 145.

25. (Consulplan) Litro, metro cúbico e grama são medidas de:

a) capacidade, volume e massa, respectivamente.
b) massa, comprimento e volume, respectivamente.
c) área, comprimento e massa, respectivamente.
d) capacidade, área e volume, respectivamente.
e) nenhuma das alternativas anteriores.

Gabaritos:

1. D	6. D	11. A	16. E	21. C
2. B	7. A	12. A	17. E	22. C
3. E	8. E	13. D	18. C	23. B
4. C	9. D	14. A	19. D	24. B
5. A	10. B	15. C	20. B	25. A

Capítulo 8

Equação do 1º grau

Exercícios propostos

1. **Qual é o valor de "*x*" que torna verdadeira a equação 2.(1 – 0,4*x*) + *x* = 4.(0,1*x* – 0,4)?**
   a) 18.
   b) – 18.
   c) 1,8.
   d) – 1,8.
   e) 36.

2. **Sabendo que $4+\frac{k}{2}+1+\frac{k}{8}+\frac{1}{4}+\frac{k}{32}=9$, o valor de "*k*" é:**
   a) 1.
   b) 20/7.
   c) 40/7.
   d) 7/20.
   e) 7/40.

3. **As expressões $-\frac{2}{3}x-3+x$ e $4-x+\frac{4}{5}x-7$ são iguais. Nessas condições, o conjunto solução da equação obtida, em Q, é igual a:**
   a) $\{-1\}$
   b) $\{0\}$
   c) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$
   d) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$
   e) $\varnothing$.

4. **Se a expressão 4*y* – 3 é igual a 0,75, então *y* vale:**
   a) 16/15.
   b) 5/8.
   c) 4/5.
   d) 8/5.
   e) 15/16.

5. **A soma do quadrado com o dobro do valor de "*x*" que satisfaz a equação 4*x* + 10 = 5*x* +2 + *x* é:**
   a) 16.
   b) 18.
   c) 20.
   d) 24.
   e) 32.

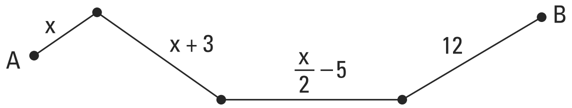
6. **Sabendo que x é raiz da equação (0,125).2*x* = $\sqrt{0,25}$, então o valor de 10*x* é:**
   a) 2.
   b) 20.
   c) 15.
   d) 50.
   e) 10.

7. **Sabe-se que *y* = *ax* + 7. Se *x* = 11 e *y* = 29, o número racional "*a*" vale:**
   a) 6.
   b) 5.
   c) 4.
   d) 3.
   e) 2.

8. **Sabe-se que as expressões $\frac{3}{2}x + 3$ e $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ são iguais. Qual é o valor do número x?**

a) 27.
b) 18.
c) 30.
d) 15.
e) 36.

9. **Na figura a seguir, "*x*" representa uma medida em centímetros. Qual o menor valor inteiro de "*x*" para que o caminho traçado de A a B tenha medida maior do que 110 centímetros?**



a) 39.
b) 40.
c) 41.
d) 42.
e) 43.

10. **Um possível valor de "*x*" que satisfaça a igualdade $\dfrac{\frac{2}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}} = \dfrac{1}{2}$ vale:**

a) −1.
b) 0.
c) 1.
d) 2.
e) 3.

11. **Um possível valor de "*x*" que satisfaça a igualdade $\frac{x-1}{x+3}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{2x+1}{x+3}$, no conjunto dos reais (IR), vale:**

a) −1/3.
b) −2/3.
c) −4/3.
d) −8/3.
e) −10/3.

12. **O quadrado da solução inteira encontrada na equação $\frac{4}{2x-8}+\frac{1}{2}=\frac{5x}{4x-16}$ é igual a:**

a) 1.
b) 4.
c) 9.
d) 16.
e) 25.

13. **A solução da equação $\frac{x}{4}+1-\frac{x}{12}=x-\frac{5x-4}{6}$ é:**

a) igual a 1.
b) igual a 0.
c) impossível.
d) igual aos reais (IR).
e) nula.

14. **O quadrado da solução inteira encontrada na equação $\frac{4}{2x-8}+\frac{1}{2}=\frac{5x}{4x-16}$ é igual a:**

a) 1.
b) 4.
c) 9.
d) 16.
e) 25.

15. O conjunto verdade da equação $\frac{16.(1+2x)}{10}-\frac{3.(3x-1)}{4}=\frac{11x+25}{10}$ vale:

a) $\{-2\}$.
b) $\{0\}$.
c) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
d) $\{2\}$.
e) $\varnothing$.

16. Resolvendo a igualdade $\frac{x+4}{x-1}-\frac{3}{x-1}=\frac{x-2}{x-3}$, obtemos como solução:

a) $\{5\}$.
b) $\{3\}$.
c) $\{1\}$.
d) $\{-1\}$.
e) $\{0\}$.

17. Resolvendo a igualdade $\frac{4}{x-2}+\frac{2}{3}=\frac{8}{x-2}$:

a) $\{10\}$.
b) $\{8\}$.
c) $\{6\}$.
d) $\{3\}$.
e) $\{2\}$.

18. A raiz quadrada da solução $\frac{x}{x-4}-\frac{2x-1}{x-4}+\frac{2x}{x-4}=2$ vale:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

19. Resolvendo a equação $\frac{x}{3-x}-\frac{x}{x-3}=4$, obtemos como solução:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

20. Resolvendo a equação $\frac{\frac{x}{2}-\frac{x}{3}}{2}+\frac{3.(x-2)}{5}=\frac{8.(x-2)-3.(x+2)}{10}$, encontramos como solução:

a) um número natural.
b) um número inteiro.
c) uma solução vazia.
d) um número racional.
e) um múltiplo de 15.

21. Resolvendo a equação $\frac{3}{2}.\left(x-\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}x-1$, obtemos como conjunto verdade:

a) impossível.
b) unitária.
c) possível e determinada.
d) não nula.
e) IR.

22. A solução da equação $2x-\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=2x-3.\left(x-\frac{x+3}{2}\right)$ é um número racional do tipo $\frac{A}{B}$.

Portanto, o valor de $\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt{B}}$ será igual a:

a) 1,5.
b) 2,5.
c) 3,5.
d) 4,5.
e) 5,5.

23. Resolvendo a equação $\frac{5x-3}{4}-\frac{2-3x}{5}+1=\frac{2}{5}+\frac{5.(-x-1)}{2}$, em Q, encontramos como conjunto verdade o valor:

a) –13/29.
b) –21/19.
c) –14/23.
d) 13/27.
e) 23/29.

24. Resolvendo a equação $\frac{2}{x-1}+3=\frac{1}{x-1}$, em Q, encontramos como conjunto verdade uma fração própria cuja soma dos seus termos, vale:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 5.
e) 7.

25. Resolvendo a equação $\frac{3}{x-4}+\frac{2}{x-3}=\frac{5}{x}$, em Q, encontramos como conjunto verdade uma fração imprópria cuja diferença entre o numerador e o denominador resulta em:

a) um número múltiplo de 5.
b) um divisor de 34.
c) um número primo.
d) um número múltiplo de 7.
e) um divisor de 36.

Gabaritos:

1. A	6. A	11. E	16. A	21. E
2. C	7. E	12. C	17. A	22. A
3. B	8. B	13. C	18. C	23. A
4. E	9. B	14. C	19. B	24. D
5. D	10. E	15. E	20. D	25. C

Capítulo 9

Sistemas lineares do 1º grau com duas variáveis

Exercícios propostos

1. **(NCE) Na venda de ingressos para um show havia *x* bilhetes de R$10,00 e *y* bilhetes de R$15,00, num total de 500 bilhetes. Sabendo-se que nesse show arrecadou-se R$5.900,00 com a venda de ingressos, pode-se afirmar que o número *y* de bilhetes de R$15,00 vendidos corresponde a:**
   a) 180.
   b) 200.
   c) 240.
   d) 300.
   e) 320.

2. **(NCE) O dono de uma sapataria decidiu adquirir 224 pares de sapatos de uma certa marca nas cores preta e marrom. Como a cor preta é preferida, pediu que viessem 30 pares a mais de sapatos nessa cor. Assim, o número de pares de sapatos pedidos na cor marrom foi:**
   a) 97.
   b) 100.
   c) 122.
   d) 127.
   e) 130.

3. **(FCC) A soma de três números naturais é 13.455. O maior deles é 7.946. A diferença entre os outros dois é 2 125. O triplo do menor deles é:**
   a) 1.692.
   b) 3.384.
   c) 3.817.
   d) 4.749.
   e) 5.076.

4. **(Cesgranrio) De acordo com o Plano Nacional de Viação (PNV) de 2009, a malha de estradas não pavimentadas de Goiás tem 62.868km a mais do que a malha de estradas pavimentadas. Sabe-se também que a extensão total, em quilômetros, das estradas não pavimentadas supera em 393km o sêxtuplo da extensão das estradas pavimentadas. Quantos quilômetros de estradas pavimentadas há em Goiás?**
   a) 12.495.
   b) 12.535.
   c) 12.652.
   d) 12.886.
   e) 12.912.

5. **(FCC) Bento e Caio tinham, juntos, R$96,00. Bento emprestou R$20,00 a Caio e restou-lhe a metade da quantia com que Caio ficou. Originalmente, Bento tinha:**
   a) R$58,00.
   b) R$56,00.
   c) R$54,00.
   d) R$52,00.
   e) R$50,00.

6. **(FCC) Em certo mês, duas auxiliares entregaram aos analistas um total de 580 correspondências. Se a primeira entregou 68 correspondências a mais do que a segunda, então o número de correspondências entregues pela primeira foi:**
   a) 256.
   b) 284.
   c) 296.
   d) 312.
   e) 324.

7. (FCC) Em uma papelaria, o preço de certo tipo de caneta é o triplo do preço de certo tipo de lapiseira. Uma pessoa comprou seis dessas canetas e algumas dessas lapiseiras e, ao receber a conta para pagar, verificou que os números de canetas e lapiseiras pedidos haviam sido trocados, acarretando com isso um aumento de 50% sobre o valor a ser pago. O número de lapiseiras compradas era:

a) 6.
b) 8.
c) 10.
d) 12.
e) 14.

8. (Cespe) Considerando-se que três caixas de encomenda do tipo 2B e três caixas de encomenda do tipo *flex* correios custem, ao todo, R$12,00 e que cinco caixas do tipo 2B e 10 do tipo do tipo *flex* correios custem, ao todo, R$28,00, é correto afirmar que uma caixa do tipo 2B custa:

a) R$2,40.
b) R$3,15.
c) R$3,20.
d) R$1,20.
e) R$2,00.

9. (Cesgranrio) Uma lata cheia de chocolate em pó tem *massa total* (massa da lata + massa de chocolate em pó contido na lata) igual a 440 gramas. Após terem sido consumidos 80% do chocolate em pó, a massa total passa a ser igual a 120 gramas. A massa da lata é, em gramas, igual a:

a) 20.
b) 30.
c) 40.
d) 80.
e) 88.

10. (Cesgranrio) Para comprar um suco e um doce, gasto R$1,90. Comprando um suco e um salgado, a despesa é de R$2,20. Se eu quiser comprar três sucos, dois salgados e um doce, vou gastar, em reais:

a) 5,80.
b) 6,00.
c) 6,20.
d) 6,30.
e) 6,80.

11. (FCC) Certo dia, um técnico judiciário arquivou relatórios e projetos num total de 56 unidades. Se o dobro da quantidade de relatórios era igual à terça parte do número de projetos, a diferença positiva entre as quantidades dos dois tipos de documentos arquivados é:

a) 25.
b) 28.
c) 32.
d) 35.
e) 40.

12. (FCC) Duas cestas idênticas, uma com laranjas e outra com maçãs, são colocadas juntas em uma balança que acusa massa total igual a 32,5 kg. Juntando as laranjas e as maçãs em uma única cesta, a massa indicada na balança é igual a 31,5 kg. Nessas condições, a massa de duas cestas vazias, em kg, é igual a:

a) 0,5.
b) 1,0.
c) 1,5.
d) 2,0.
e) 2,5.

13. **(NCE) O ingresso para entrar em um parque nacional custa R$2,00 por criança e R$5,00 por adulto. Num dia entraram 57 pessoas no parque, e foi obtida a receita total de R$222,00. Nesse dia, o valor absoluto da diferença entre o número de crianças e adultos que entraram no parque foi de:**

a) 15.
b) 21.
c) 26.
d) 30.
e) 36.

14. **(FCC) Certo dia um correntista fez três depósitos, de valores A, B e C reais, num total de R$3.660,00. Se de C subtrairmos B, obtemos R$305,00 e B corresponde a 3/5 de A. O menor desses três depósitos foi de:**

a) R$879,00.
b) R$915,00.
c) R$1.021,35.
d) R$1.220,00.
e) R$1.326,35.

15. **(FCC) Um total de 120 caixas de lápis e de borrachas foi distribuído a alguns setores de uma empresa. Se o número de caixas de lápis acrescido de cinco unidades excede a terça parte do número das de borrachas em 21 unidades, então a quantidade de caixas de:**

a) borrachas é 75;
b) lápis é 40;
c) borrachas é 78;
d) lápis é 45;
e) borrachas é 80.

16. **Um cavalo e um burro caminhavam juntos lado a lado, transportando sobre seus dorsos pesadas cargas. Lamentava-se muito o cavalo de seu revoltante fardo e, nisso o burro falou-lhe:**

– “De que te queixas cavalo?

– Se eu te tomasse um dos meus sacos, a minha carga passaria a ser o dobro da sua.

– Porém, se eu te desse um dos meus sacos, a tua carga se igualaria a minha.”

De acordo com esse diálogo, então, a diferença entre o número de sacos que cada um dos animais levava era de:

a) 6 sacos.
b) 5 sacos.
c) 4 sacos.
d) 3 sacos.
e) 2 sacos.

17. **(Cespe/UnB) Se apenas cédulas de R$10,00 e de R$20,00 estavam disponíveis para saque em um caixa eletrônico e se um cliente recebeu 40 notas ao fazer um saque de R$600,00, então ele recebeu quantidade de cédulas de R$10,00 igual a:**

a) 10.
b) 20.
c) 30.
d) 40.
e) 50.

18. **(Cespe/UnB) Considere que $x = x_0$ e $y = y_0$ seja a solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$. Nesse caso, $x_0 + y_0$ é igual a:**

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

19. (Cespe/UnB) Um escritório comprou oito cadeiras e cinco mesas por R$1.280,00. Algum tempo depois, esse mesmo escritório comprou mais quatro cadeiras e três mesas, pagando R$700,00. Sabendo-se que cada cadeira tem preço único, e também, que cada mesa tem preço único, então uma cadeira e uma mesa custam, juntas:

a) R$205,00;
b) R$195,00;
c) R$185,00;
d) R$175,00;
e) R$165,00.

20. (Cespe/UnB) Uma loja de produtos musicais fez uma promoção, oferecendo todos os seus CDs pelo mesmo preço unitário. Roberto aproveitou a promoção e comprou vários CDs, gastando um total de R$176,00. Rogério comprou sete CDs a menos que Roberto, gastando R$64,00. Nessas condições, o total de CDs comprados por Roberto e Rogério é igual a:

a) 14.
b) 13.
c) 12.
d) 11.
e) 15.

Gabaritos:

1. A	6. E	11. E	16. E
2. A	7. E	12. D	17. B
3. D	8. A	13. A	18. C
4. A	9. C	14. B	19. A
5. D	10. D	15. C	20. E

Capítulo 10

Problemas do 1º grau

Exercícios propostos

1. (FCC/TRF22ª) Dos X reais que foram divididos entre três pessoas, sabe-se que: a primeira recebeu 2/3 de X, diminuídos de R$600,00; a segunda, 1/4 de X; e a terceira, a metade de X, diminuída de R$4000,00. Nessas condições, o valor de X é:

a) 10 080.
b) 11 000.
c) 11 040.
d) 11 160.
e) 11 200.

2. (FCC) João gasta 1/3 do seu salário no aluguel do apartamento onde mora e 2/5 do que lhe sobra em alimentação, ficando com R$480,00 para as demais despesas. Portanto, o salário de João é igual a:

a) R$1.200,00.
b) R$1.500,00.
c) R$1.800,00.
d) R$2.100,00.
e) R$2.400,00.

3. **(Cespe/UnB) Antônio comprou três objetos em um armarinho. O primeiro objeto custou o dobro do segundo, e este custou o dobro do terceiro. Se Antônio pagou R$49,00 pelos três objetos, então o primeiro objeto custou:**
a) R$22,00.
b) R$24,00.
c) R$26,00.
d) R$28,00.
e) R$30,00.

4. **(Cesgranrio) Sérgio, Julia e Marcelo estão juntos, nessa ordem, em uma fila.**
Sérgio diz: "O número de pessoas que está atrás de mim é o triplo do número de pessoas que está à minha frente."
Marcelo diz: "O número de pessoas que está atrás de mim é o dobro do número de pessoas que está à minha frente."
O número de pessoas dessa fila é:
a) 16.
b) 18.
c) 20.
d) 25.
e) 28.

5. **(Cesgranrio) Ao receber seu décimo terceiro salário, Sérgio gastou 1/3 do valor recebido comprando presentes de Natal. Da quantia que sobrou, ele utilizou 1/5 para pagar uma dívida, e ainda sobraram R$1.920,00. O décimo terceiro salário de Sérgio, em reais, foi:**
a) 2.400,00.
b) 3.225,00.
c) 3.600,00.
d) 3.850,00.
e) 4.115,00.

6. **(FCC) Certo dia, três ônibus foram usados para transportar simultaneamente 138 operários que trabalham nas obras de uma Linha do Metrô de São Paulo. Sabe-se que no primeiro ônibus viajaram nove operários a mais do que no segundo e, neste, três operários a menos que no terceiro. Nessas condições, é correto afirmar que o número de operários que foram transportados em um dos ônibus é:**
a) 53.
b) 51.
c) 48.
d) 43.
e) 39.

7. **(FCC) Certa quantidade de equipamentos deveria ser entregue em subestações das Linhas do Metrô e, para tal, foi usado um mesmo caminhão. Sabe-se que, em sua primeira viagem o caminhão entregou a quarta parte do total de equipamentos e, em cada uma das duas viagens subsequentes, a terça parte do número restante. Se, após essas três viagens, restaram 52 equipamentos a transportar, o total de equipamentos que deveriam ser entregues inicialmente era um número compreendido entre:**
a) 100 e 130.
b) 130 e 150.
c) 150 e 180.
d) 180 e 200.
e) 200 e 230.

8. **(FCC) Ao registrar todos os objetos devolvidos aos clientes no dia anterior, um atendente de um Posto de Achados e Perdidos observou que 3/7 do total havia sido entregue pela manhã e 1/3 do número restante no período da tarde. Considerando que a quantidade devolvida no período da noite era um número compreendido entre 20 e 30, o total de objetos registrados por tal atendente foi:**

a) 28.
b) 32.
c) 42.
d) 58.
e) 63.

9. **(FCC) Antônio, Bernardo, Cláudio e Daniel elaboraram juntos uma prova de 40 questões, tendo recebido por ela um total de R$2.200,00. Os três primeiros fizeram o mesmo número de questões, e Daniel fez o dobro do que fez cada um dos outros. Se o dinheiro deve ser repartido proporcionalmente ao trabalho de cada um, Daniel deverá receber uma quantia, em reais, igual a:**
a) 800,00.
b) 820,00.
c) 850,00.
d) 880,00.
e) 890,00.

10. **(FCC) Alguns processos a serem arquivados foram distribuídos a três técnicos judiciários, A, B e C, do seguinte modo: B recebeu o triplo de A e C recebeu a metade de B. Se a diferença entre a maior e a menor quantidade de processos distribuídos era de 48 unidades, o total de processos era:**
a) 132.
b) 148.
c) 156.
d) 168.
e) 176.

11. **(Consulplan) Numa rua, o número de casas amarelas é igual ao dobro do número de casas azuis, o número de casas verdes é igual à metade do número de casas brancas, o número de casas vermelhas é igual ao triplo de casas azuis e 66 casas não são brancas. Se não existem casas de outras cores e apenas seis casas são verdes, é correto afirmar que o total de casas nesta rua é igual a:**
a) 74.
b) 80.
c) 82.
d) 76.
e) 78.

12. **(Consulplan) Se a soma de 5 números inteiros consecutivos for 225, então, o segundo número dessa sequência é:**
a) Múltiplo de 3.
b) Divisor de 150.
c) Múltiplo de 7 .
d) Divisor de 120.
e) Múltiplo de 11.

13. **(Cesgranrio) Um feirante distribuiu laranjas entre três clientes, de modo que o primeiro recebe a metade das laranjas, mais meia laranja; o segundo a metade das laranjas restantes, mais meia laranja e o terceiro a metade desse último resto, mais meia laranja. Sabendo-se que não sobrou nem uma laranja, calcule o número total de laranjas e quantas foram dadas a cada cliente.**
a) 9.
b) 8.
c) 7.
d) 6.
e) 5.

14. **(FEC) A soma da sexta parte com a quarta parte de um determinado número é o mesmo que a diferença entre esse número e 56. Qual é o número?**
a) 100.
b) 96.
c) 92.
d) 88.
e) 86.

15. (Consulplan) Um reservatório contém combustível até 2/5 de sua capacidade total e necessita de 15 litros para atingir 7/10 da mesma. Qual é a capacidade total desse reservatório:

a) 60.
b) 55.
c) 50.
d) 45.
e) 40.

16. (Consulplan) Paulo trabalha em uma hidrelétrica há 12 anos, e Pedro, seu tio, trabalha nessa mesma usina há 24 anos. Há quantos anos o tempo de serviço de Pedro nessa hidrelétrica foi o triplo do tempo de serviço de Paulo?

a) há 3 anos.
b) há 5 anos.
c) há 6 anos.
d) há 7 anos.
e) há 8 anos.

17. (Consulplan) Hoje, se ao quadrado da idade de Juliana, aumentarmos o dobro de sua idade atual, encontraremos 35 e assim descobriremos a idade de Laís. Quantos anos Laís têm?

a) 4 anos.
b) 5 anos.
c) 6 anos.
d) 7 anos.
e) 8 anos.

18. (Consulplan) José é pai de Natália. Se há seis anos, a idade de José era o dobro da idade de Natália e, atualmente, a soma de suas idades é igual a 93, quantos anos José é mais velho que sua filha?

a) 29.
b) 27.
c) 25.
d) 30.
e) 32.

19. (Consulplan) A soma das idades de Rodrigo e Eduardo é 20 anos. Sendo Rodrigo quatro anos mais velho que Eduardo, qual a idade de Eduardo?

a) 12 anos.
b) 11 anos.
c) 9 anos.
d) 8 anos.
e) 3 anos.

20. (Consulplan–PMTB/SE/2005) Há cinco anos, a idade de Tiago era o dobro da idade de Juliana. Dentro de cinco anos, será somente 4/3. Qual a idade de Tiago atualmente?

a) 15 anos.
b) 13 anos.
c) 11 anos.
d) 10 anos.
e) N.R.A.

Gabaritos:

1. C
2. A
3. D
4. D
5. C
6. B
7. C
8. E
9. D
10. A
11. E
12. E
13. C
14. B
15. C
16. C
17. B
18. B
19. D
20. A

Capítulo 11

Inequações do 1º grau

Exercícios propostos

1. **(CFC) Para que o conjunto solução da inequação $2x - \frac{3a}{5} > \frac{2a}{5}$ seja S = {*x* ∈ R | *x* > 3}, o valor de *a* deve ser:**

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

2. **(Cesgranrio) A soma de todos os números inteiros e negativos que satisfazem a inequação $2 . \left(\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2}\right) \leq \frac{x+3}{4}$ é:**

a) –3.
b) –5.
c) –6.
d) –8.
e) –10.

3. **(FGV) Quantos números inteiros verificam a desigualdade $-3 < x + 2 \leq 4$?**

a) 10.
b) 9.
c) 8.
d) 7.
e) 6.

4. **(Cesgranrio) A solução da inequação $\frac{x}{2} \leq \frac{1}{4} - \frac{2-3x}{5}$, sendo U = Q, é:**

a) S = {x ∈ Q / $x \geq 3$}.
b) S = {x ∈ Q / $x \leq -3/22$}.
c) S = {x ∈ Q / $x \geq 3/2$}.
d) S = {x ∈ Q / $x \leq 3/2$}.
e) S = {x ∈ Q / $x < 3/2$}.

5. **(FGV) O conjunto solução da inequação $4(1 - x) < 2x - 1$, considerando como universo o conjunto R, está definido por:**

a) $x > \frac{1}{2}$.
b) $x < \frac{5}{2}$.
c) $x < \frac{5}{6}$.
d) $x > \frac{5}{6}$.
e) $x \leq \frac{5}{6}$.

6. **(Cesgranrio) O menor número inteiro que pertence ao conjunto solução da inequação $\frac{4x-1}{5} - \frac{3x-2}{2} < 3x - 14$ é:**

a) 3.
b) 5.
c) 7.
d) 8.
e) 10.

7. **(EsSA) Sendo $x \in R$ e S o conjunto solução da inequação $7(2x-4) > -5(1-2x)-3$, é correto afirmar que são elementos de S os números:**

a) –3 e 5.
b) 0 e 6.
c) 0 e 5.
d) 5 e 6.
e) 8 e 9.

8. **(CFC) O maior número inteiro que pertence ao conjunto-solução da inequação $\frac{x+3}{5} > \frac{2x}{7}$ é:**

a) 9.
b) 8.
c) 7.
d) 6.
e) 5.

9. **(FGV) O maior número inteiro que satisfaz a inequação $x/4 - x/3 > 1/12$, sendo D = R é:**

a) 1.
b) –2.
c) 0.
d) –1.
e) 2.

10. **(EsSA) O maior múltiplo de 5 que satisfaz a inequação $x + 6 > 3x - 5$ é:**

a) 10.
b) –5.
c) –10.
d) 5.
e) 0.

11. **(EsSA) Sendo U = N o conjunto verdade da inequação $8 - 3x \rightarrow 2$, é:**

a) $V = \varnothing$.
b) V = {0, 1, 2}.
c) V = {0, 1}.
d) V = {..., –1, 0, 1, 2}.
e) V = {1, 2}.

Gabaritos:

1. E	4. C	7. E	10. D
2. C	5. D	8. D	11. C
3. D	6. B	9. C	

Capítulo 12
Equação do 2º grau

Exercícios propostos

1. **O valor do discriminante da equação $x^2 - 8x + 16 = 0$ é:**

a) 0.
b) 16.
c) 32.
d) 64.
e) 81.

2. A raiz real da equação: $\frac{x-3}{x-2}-\frac{2}{x}=-\frac{2}{x(x-2)}$ é um número:

a) par.
b) ímpar.
c) irracional.
d) fracionário.
e) dízima periódica simples.

3. A diferença entre a maior e a menor raiz da equação: $12x + 36 = 25 - x^2$ é:

a) 10.
b) 9.
c) 6.
d) 4.
e) 2.

4. Dada a equação: $5x^2 + 7x + 1 = 3x^2 + 2x + 1$, então uma de suas raízes reais é igual a:

a) 3.
b) 2/3.
c) −1.
d) −5/2.
e) −3/2.

5. A maior raiz de uma equação do 2º grau, na variável "x", é o valor da solução da equação: $2(y-1)=2\left(\frac{y}{2}+4\right)$, e a menor raiz dela corresponde a $\frac{3}{5}$ da maior. Essa equação do 2º grau na variável "x" pode ser expressa por:

a) $x^2 + 16x + 60 = 0$.
b) $x^2 + 4x + 60 = 0$.
c) $x^2 - 16x + 60 = 0$.
d) $x^2 - 4x + 60 = 0$.
e) $x^2 - 8x + 60 = 0$.

6. Para $x = -3$, a expressão: $2x^2 + 3x$ é igual a 9. Outro valor real de "x", para o qual essa expressão também é igual a 9, é:

a) 3.
b) 2.
c) 3/2.
d) 2/3.
e) 1/3.

7. A maior das raízes da equação: $2x^2 + 3x - 9 = 0$ é um número que está compreendido entre:

a) −2 e −1.
b) −1 e 0.
c) 0 e 1.
d) 1 e 2.
e) 3 e 4.

8. A equação do 2º grau em "x", cujas raízes são: $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{3}$, é:

a) $6x^2 - 15x + 2 = 0$.
b) $15x^2 - 6x - 19 = 0$.
c) $15x^2 + 19x + 6 = 0$.
d) $15x^2 - 19x + 6 = 0$.
e) $15x^2 - 19x - 6 = 0$.

9. Para $x = -3$, a expressão $2x^2 + 3x$ é igual a 9. Outro valor real de "x", para o qual essa expressão também é igual a 9, é:

a) 3.
b) 2.
c) $\frac{3}{2}$.
d) $\frac{2}{3}$.
e) 1.

10. **Dada a equação: $mx^2 + 10x + 3 = 0$, uma de suas raízes é igual ao inverso da outra. Nessas condições, o valor de "m" é:**

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 7.

11. **Uma das equações do 2º grau, em $\Re$, na incógnita "x", cuja soma das raízes é: $-\frac{4}{3}$, e cujo produto delas é: $\frac{1}{3}$, vale:**

a) $\frac{x^2}{3}+\frac{x}{12}-\frac{1}{4}=0$
b) $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{12}+\frac{1}{3}=0$
c) $\frac{x^2}{12}+\frac{x}{3}+\frac{1}{4}=0$
d) $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}+\frac{1}{12}=0$
e) $\frac{x^2}{12}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}=0$

12. **Para que a equação $3x^2 - 3x - k = 0$ não tenha duas raízes reais, devemos ter:**

a) $k > 3/4$.
b) $k < 3/4$.
c) $k > -3/4$.
d) $k < -3/4$.
e) $k = -3/4$.

13. **Se as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com: "$a \neq 0$" são inversas, então uma das condições é:**

a) $a = c$.
b) $a > c$.
c) $a < c$.
d) $a > -c$.
e) $a < -c$.

14. **A equação $x^2 + 10x + 24 = -1$ admite:**

a) duas raízes reais e diferentes;
b) duas raízes reais iguais e nulas;
c) duas raízes reais e iguais;
d) nenhuma raiz real;
e) duas raízes reais e inversas.

15. **A equação cuja soma das raízes é $-\frac{2}{3}$ é:**

a) $3a^2 - 2a + 1 = 0$
b) $4a^2 + 6a - 1 = 0$
c) $6a^2 + 4a - 1 = 0$
d) $2a^2 - 3a + 1 = 0$
e) $12a^2 - 8a + 1 = 0$

16. **Dada a equação $5x^2 + 7x + 1 = 3x^2 + 2x + 1$, uma de suas raízes reais é:**

a) 3.
b) $\frac{2}{3}$.
c) -1.
d) $-\frac{5}{2}$.
e) 2.

17. **Dada a equação $mx^2 + 10x + 3 = 0$, uma de suas raízes é igual ao inverso da outra. Nessas condições, o valor de *m* é:**

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 10.

18. **Se o conjunto solução da equação $x^2 - 4x - (m + 1) = 0$, em R, é unitário, então o valor de *m* é:**

a) 12.
b) 10.
c) –5.
d) –2.
e) 0.

19. **A equação $3x(x + 1) + 4(x - 2) = -5(1 + x) - 3$ tem raízes "*a*" e "*b*". Se $b > a$, então o valor de "$b - a$" é:**

a) –2.
b) –1.
c) 4.
d) 5.

20. **Para que a soma das raízes da equação $10x^2 - kx - 1 = 0$ seja igual a $\frac{5}{4}$, o valor de *k* deve ser:**

a) $\frac{15}{2}$.
b) $\frac{25}{2}$.
c) 15.
d) 5.
e) 2.

21. **A equação $x^2 - 4x + (m - 1) = 0$ tem raízes reais e desiguais quando:**

a) $m > 5$.
b) $m < -5$.
c) $m > -5$.
d) $m < 5$.
e) $m = 5$.

22. **Se "*p*" e "*q*" são raízes não nulas da equação $x^2 + 5px - 8q = 0$, então o valor de $p + q$ é igual a:**

a) –32.
b) 32.
c) 64.
d) 40.
e) 56.

23. **A equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes reais x' e x'', podemos afirmar que:**

a) $x' + x'' = b/a$.
b) $x' + x'' = c/a$.
c) $x' + x'' = -b/2a$.
d) $x' + x'' = 0$.
e) $x' + x'' = -b/a$.

24. **Para que a equação $8x^2 - 3x + p = 0$ tenha uma raiz nula, é preciso que:**

a) $p = 1$.
b) $p = 0$.
c) $p = 8/3$.
d) $p = 3/8$.
e) $p = 11$.

25. A equação do 2º grau cujas raízes são 5 e 2 é:

a) $x^2 + 7x + 10 = 0$.
b) $x^2 - 7x - 10 = 0$.
c) $x^2 - 10x + 7 = 0$.
d) $x^2 + 10x + 7 = 0$.
e) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

26. O produto das raízes da equação $x^2 - 4x = 0$ é:

a) 0.
b) –2.
c) –3.
d) –6.
e) 6.

27. Uma das raízes da equação $3x^2 - px - q = 0$, na qual "x" é a variável, é o elemento – 1. O valor de "$p - q$" é:

a) –1.
b) 0.
c) –3.
d) 3.
e) 1.

28. A equação do 2º grau na incógnita "x", sabendo que as raízes dessa equação são os inversos das raízes da equação $x^2 + \frac{x}{12} - \frac{1}{24} = 0$ é:

a) $x^2 - x - 12 = 0$.
b) $x^2 - 2x - 24 = 0$.
c) $x^2 - 10x + 24 = 0$.
d) $x^2 + 10x + 24 = 0$.
e) $x^2 + 2x - 24 = 0$.

29. Para que a equação $(k + 1)x^2 - 7x + 2k - 1 = 0$ tenha raízes dois números inversos, o valor de "k" deve ser:

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
d) 4.

30. A soma de dois números é –5 e o produto entre eles é 4. Para determinar esses números, pode-se empregar a seguinte equação do 2º grau, com uma variável:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$.
b) $x^2 - 4x - 5 = 0$.
c) $x^2 + 4x + 5 = 0$.
d) $x^2 - 5x - 4 = 0$.
e) $x^2 + 5x + 4 = 0$.

Gabaritos:

1. A
2. B
3. A
4. D
5. C
6. C
7. D
8. D
9. C
10. A
11. D
12. D
13. A
14. C
15. C
16. D
17. A
18. C
19. C
20. B
21. D
22. D
23. E
24. B
25. E
26. A
27. C
28. E
29. C
30. E

Capítulo 13

Problemas do 2º grau com números naturais, inteiros e racionais

Exercícios propostos

1. (FEC) A representação geral de um número par é 2*n*, então, dois números pares naturais e não consecutivos cujo produto é igual a 80, então, o quadrado do maior deles vale:

a) 256.
b) 400.
c) 64.
d) 576.
e) 100.

2. (FCC) Alguns técnicos judiciários decidiram dividir igualmente entre si as 300 páginas de um texto a ser digitado. Entretanto, um deles foi designado para outra atividade e, assim, coube a cada um dos outros digitar 15 páginas a mais que o combinado. O número de páginas que cada técnico digitou foi:

a) 80.
b) 75.
c) 72.
d) 65.
e) 60.

3. (FCC) Alguns técnicos judiciários de certo Cartório Eleitoral combinaram dividir igualmente entre si um total de 84 processos a serem arquivados. Entretanto, no dia em que o serviço deveria ser executado, dois deles faltaram ao trabalho e, assim, coube a cada um dos presentes arquivar sete processos a mais que o previsto. Quantos processos cada técnico arquivou?

a) 14.
b) 18.
c) 21.
d) 24.
e) 28.

4. (FCC) O chefe de uma seção de certa empresa dispunha de 60 ingressos para um espetáculo, que pretendia dividir igualmente entre seus funcionários. Como no dia da distribuição dos ingressos faltaram três funcionários, coube a cada um dos outros receber um ingresso a mais do que o previsto. O número de ingressos entregues a cada funcionário presente foi:

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 7.

5. (FCC) Alguns técnicos judiciários combinaram dividir igualmente entre si 108 processos a serem arquivados. Entretanto, no dia em que o trabalho seria realizado, dois técnicos faltaram ao serviço e, assim, coube a cada um dos outros arquivar nove processos a mais que o inicialmente previsto. O número de processos que cada técnico arquivou foi:

a) 16.
b) 18.
c) 21.
d) 25.
e) 27.

6. (FCC) Um técnico administrativo foi incumbido de arquivar 120 processos em "*x*" caixas, nas quais todos os processos deveriam ser distribuídos em quantidades iguais. Entretanto, ao executar a tarefa, ele usou apenas "*x* – 3" caixas e, com isso, cada caixa ficou com nove processos a mais que o previsto inicialmente. Nessas condições, o número de processos colocados em cada caixa foi:

a) 24.
b) 22.
c) 21.
d) 17.
e) 15.

7. (FCC) Alguns técnicos judiciários decidiram dividir igualmente entre si as 300 páginas de um texto a ser digitado. Entretanto, um deles foi designado para outra atividade e, assim, coube a cada um dos outros digitar 15 páginas a mais que o combinado. O número de páginas que cada técnico digitou foi:

a) 80.
b) 75.
c) 72.
d) 65.
e) 60.

8. (Cesgranrio) Vinte pessoas se reuniram para organizar uma festa. Calcularam as despesas e decidiram dividir o total igualmente entre todos, mas, na semana da festa, três dessas pessoas precisaram viajar. Com isso, cada uma das demais teve de aumentar sua contribuição em R$9,00 para que todas as despesas fossem pagas. A quantia, em reais, que cada pessoa pagou para participar dessa festa foi:

a) 51,00.
b) 54,00.
c) 60,00.
d) 66,00.
e) 74,00.

9. (FCC) Duas torneiras podem, juntas, encher completamente um reservatório em 18 horas. Quanto o tempo a torneira de menor vazão gastaria sozinha para encher totalmente esse reservatório, se a primeira delas gasta nessa operação, 27 horas mais que a segunda?

a) 135.
b) 108.
c) 81.
d) 54.
e) 27.

10. (FEC) Dois capitais, cuja soma é de R$5.000.000,00, são colocados a juros simples, a diferentes taxas. O primeiro deles rende R$80.000,00 por ano e o segundo R$180.000,00 por ano. A soma das duas taxas é de 10% ao ano. Então o maior desses capitais vale:

a) R$2.800.000,00.
b) R$3.200.000,00.
c) R$2.400.000,00.
d) R$3.600.000,00.
e) R$3.000.000,00.

11. (FEC) Calculando-se três números ímpares e consecutivos sabendo que seu produto é igual a 319 igual a sua soma, encontraremos o maior deles, sendo:

a) 17.
b) 19.
c) 27.
d) 33.
e) 37.

12. (Consulplan) Quando seu filho nasceu um pai tinha exatamente 24 anos. Hoje, o produto das idades deles é o triplo do quadrado da idade do filho. Então, daqui a 15 anos suas idades somarão?

a) 62.
b) 65.
c) 68.
d) 72.
e) 80.

13. (FGV) Os primeiros 18 km e o restante, em uma bicicleta, Fernando percorreu 90 km em 7 horas. A velocidade média da bicicleta foi de 12 km/hora a mais do que ele fez a pé. Qual foi a velocidade média de caminhada.

a) 3,0 km/hora.
b) 3,6 km/hora.
c) 5,0 km/hora.
d) 6,0 km/hora.
e) 6,5 km/hora.

14. (FCC) Dois atletas de ciclismo decidiram partir de um mesmo ponto e, ao mesmo tempo, no mesmo sentido em direção a uma cidade que se localiza a 90 km desse ponto de partida. O primeiro deles percorre 1 km por hora mais que o segundo e chega ao destino 1 hora antes do que o outro. A diferença positiva entre as duas respectivas velocidades é de:

a) 1,0 km/hora.
b) 2,0 km/hora.
c) 3,0 km/hora.
d) 5,0 km/hora.
e) 6,0 km/hora.

15. (PUC) Beto e Rodrigo são dois técnicos judiciários e tiram cópias juntos, de um processo, em seis minutos. Quantos minutos gastará Beto para realizar sozinho essa mesma tarefa, se ele empregar cinco minutos a menos do que Rodrigo, trabalhando sozinho?

a) 8 minutos.
b) 10 minutos.
c) 12 minutos.
d) 15 minutos.
e) 18 minutos.

16. (Cesgranrio) Duas torneiras juntas podem encher completamente um reservatório em 18 horas. Então, o quociente entre os tempos da torneira de maior vazão, sozinha para a de menor vazão, também sozinha, para que possam encher esse reservatório, sabendo-se que a primeira (de menor vazão) gasta para realizar essa tarefa 27 horas a mais que a segunda (de maior vazão), é:

a) 1/2.
b) 1/3.
c) 1/9.
d) 2.
e) 6.

17. (FGV) Um pai ao falecer deixou R$12.000,00 para serem divididos igualitariamente entre certo número de seus filhos. Porém, dois desses folhos renunciaram às suas partes, então as dos demais forem aumentadas em R$1.600,00 cada uma delas. Então, o número de herdeiro que esse pai vai contemplar é de:

a) 8.
b) 6.
c) 5.
d) 4.
e) 3.

18. **(ETFPE) Num grupo de pessoas, que deliravam de alegria por terem sido aprovados no vestibular de 2007 da ETFPE, o quadrado da oitava parte saltava numa euforia incontida, enquanto 12 outras não podiam conter lágrimas por tão grande vitória. O número máximo de pessoas era de:**
a) 27.
b) 37.
c) 48.
d) 16.
e) NDR.

19. **(FEC) Numa fração própria o denominador ultrapassa o denominador em duas unidades. Adicionando-se duas unidades ao numerador e uma unidade, essa fração cresce o seu valor de 7/30. Então, o inverso dessa fração inicial é expresso por:**
a) 5/3.
b) 7/5.
c) 9/7.
d) 15/13.
e) 18/21.

20. **(Fuvest) O quociente do resultado de certa divisão vale os 3/8 do divisor, e o resto 36 é a quinquagésima quinta parte do dividendo. Então o valor da raiz cúbica desse quociente é:**
a) 4.
b) 3.
c) 6.
d) 9.
e) 2.

Gabaritos:

1. E	5. E	9. D	13. D	17. E
2. B	6. A	10. E	14. A	18. C
3. C	7. B	11. D	15. B	19. A
4. C	8. C	12. C	16. D	20. B

Capítulo 14
Equações Irracionais

Exercícios propostos

1. **Resolver, em R, as seguintes equações irracionais:**

a) $\sqrt{x+1}=3$

b) $3+\sqrt{x-1}=x$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$

d) $\sqrt{x-5}=x-7$

e) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x-3}=1$

f) $(x+9)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}=(x-5)^{\frac{1}{2}}$

g) $3.\sqrt{x}-5.\sqrt[4]{x}=12$

h) $\dfrac{5+\sqrt{3x^2-2}}{\sqrt{3x^2-2}}=\sqrt{3x^2-2}-3$

i) $\sqrt{5x-27}+\sqrt{3x-19}=\sqrt{7x-13}$

j) $\sqrt{(x-2)(x-3)}+5.\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}=\sqrt{x^2+6x+8}$

k) $\sqrt{2+\sqrt[3]{3x-1}}+\sqrt[3]{3x-1}=4$, $(x \in Z)$

2. **O número de raízes racionais da equação $\sqrt{x+1} = x^2 - 1$ é:**
a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

3. **A solução da equação $\sqrt{x+2} = 4 - x$ pertence ao intervalo:**
a)] 2; 7].
b)] 2; 3 [.
c)] 0; 1].
d) [– 1; 3].
e) [– 1; 1].

4. **A soma das raízes da equação $\sqrt{4x+13} = 2x - 1$ é:**
a) 2.
b) 3.
c) −1.
d) 4.
e) −2.

5. **Se "k" é a raiz da equação $\sqrt{x+4} = x - 2$, então $k^2 + k$ é:**
a) 20.
b) 25.
c) 30.
d) 35.
e) 40.

6. **O conjunto verdade da equação $\sqrt{2x+12} = x - 6$ é:**
a) {12 ; 2}.
b) {14}.
c) {12}.
d) {2}.
e) ∅.

7. **No conjunto R o conjunto verdade da equação $\sqrt{x+1} = x + 1$ é:**
a) é vazio.
b) tem um elemento.
c) tem dois elementos.
d) tem três elementos.
e) tem infinitos elementos.

8. **O valor de "*x*" na equação $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 9 - x$ é um número:**
a) racional fracionário negativo.
b) inteiro positivo.
c) inteiro negativo.
d) irracional.
e) inteiro múltiplo de 2.

9. **Seja V o conjunto de todas as soluções da equação $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 1 + x$. Então:**
a) V = ∅.
b) V = R.
c) $V = \{x \in R \mid x \leq -1\}$.
d) $V = \{x \in R \mid x \geq -1\}$.
e) V = {0}.

10. **Seja a equação irracional $1 - 2x + \sqrt[3]{8x^3 - 9x^2 - 1} = 0$. Determinar o seu conjunto solução:**
a) S = {0}.
b) V = {2}.
c) V = {0 ; 2}.
d) V = {1 ; 2}.
e) V = {2 ; 4}.

11. **A soma das raízes, em R_+, da equação $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$ é:**
a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

12. **A raiz da equação $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-18}=1$ é:**
a) 10.
b) 19.
c) 25.
d) 34.
e) 36.

13. **O número de raízes reais da equação $\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{2}$ é:**
a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

14. **O conjunto verdade da equação $\sqrt{x-1+\sqrt{2x-2}}=2$ é:**
a) {3}.
b) {3 ; 9}.
c) 9.
d) {–3}.
e) ∅.

15. **Resolva a equação irracional $\sqrt{5+\sqrt{1+2x}}=\sqrt{2x}$:**
a) 4 e 3/2.
b) 4 e 2/3.
c) 4.
d) 2/3.
e) 1.

16. **A raiz da equação irracional $\sqrt[4]{78+3\sqrt{5x+1}}=3$. Pertence ao intervalo:**
a) $10 \leq x \leq 18$.
b) $-1 \leq x \leq 3$.
c) $5 \leq x \leq 9$.
d) $-8 \leq x \leq -3$.
e) $1 \leq x \leq 5$.

17. **Quanto à raiz da equação $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+9}=\sqrt{7x+8}$. Podemos afirmar que:**
a) é um numero primo.
b) é um numero irracional.
c) é um múltiplo de 5.
d) é um múltiplo de 3.
e) é uma potência de 2.

18. **A soma das raízes da equação $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$ é:**
a) 10.
b) 4.
c) 8.
d) 5.
e) 6.

19. **A raiz da equação $x-1=\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}$ é:**
a) um número primo.
b) um número par.
c) um número ímpar.
d) uma fração irredutível.
e) uma dízima periódica composta.

20. **Com relação a equação $\sqrt{2y+3}+\sqrt{3y+2}-\sqrt{2y+5}=\sqrt{3y}$ vale afirmar que possui uma raiz:**
a) inteira e negativa.
b) não inteira e positiva.
c) ímpar.
d) par.
e) inteira negativa e outra não inteira e positiva.

21. Resolver a equação $\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$.

a) $S=\{\pm\sqrt{3}\}$.
b) $S=\{0\}$.
c) $S=\{0,1\}$.
d) $S=\{0,1,\pm\sqrt{3}\}$.
e) $S=\{0,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$.

22. O produto das soluções da equação $3\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}=11$ é:

a) 4.
b) 9.
c) 1.
d) 25.
e) 16.

23. O conjunto verdade da equação $\sqrt{x+10}-\frac{6}{\sqrt{x+10}}=5$ é:

a) {–9, 26}.
b) {26}.
c) {–9}.
d) {–26, –9}.
e) {26, 9}.

24. Calcule a soma das raízes da equação $\sqrt{x^2+9}+\frac{15}{\sqrt{x^2+9}}=8$:

a) 8.
b) 0.
c) –4.
d) –8.
e) –6.

25. A respeito do conjunto solução da equação $\sqrt{\frac{x^2+3}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x^2+3}}=\frac{3}{2}$, em R*, pode-se afirmar que:

a) tem um elemento igual a zero.
b) tem dois elementos.
c) é unitário.
d) tem quatro elementos.
e) é vazio.

Gabaritos:

1. a) 8
   b) 5
   c) 4
   d) 9
   e) 4
   f) 16
   g) 81
   h) ±3
   i) 9
   j) 8
   k) 2
2. B
3. D
4. A
5. C
6. C
7. C
8. B
9. A
10. C
11. D
12. D
13. A
14. A
15. C
16. B
17. E
18. E
19. D
20. C
21. A
22. A
23. B
24. B
25. B

Capítulo 15
Equações Biquadradas

Exercícios propostos

1. (EAM) Resolva a equação biquadrada $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$, em R.
a) S = {4, 9}.
b) S = {–2, 2}.
c) S = {–3, 3}.
d) S = ∅.
e) S = {–3, –2, 2, 3}.

2. (EAM) Encontre o conjunto solução da equação $y^4 - 10x^2 + 9 = 0$, em R.
a) {–3, –1, 1, 3}.
b) {1, 0, –1, 0}.
c) {4, 2, –1, –2}.
d) {–2, –1, 1, 2}.
e) {1, –8, –1, –3}.

3. (EEAr) As raízes da equação $100x^4 - 41x^2 + 4 = 0$ são:
a) $-2, \frac{1}{2}, \frac{-3}{5}, \frac{3}{5}$.
b) $\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-2}{5}, \frac{1}{2}$.
c) $\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-2}{2}, \frac{-1}{2}$.
d) $\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-2}{5}, \frac{2}{5}$.

4. (EEAr) O número de soluções reais da equação $5x^4 + x^2 + 3 = 0$ é:
a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.

5. (FEI/SP) O número de raízes reais da equação $(2x - 1).(2x^3 + x^2 + 2x + 1) = 26$, é:
a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) NDR.

6. (EAM) Encontre o conjunto solução da equação $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$, em R.
a) {–3, –1, 1, 3}.
b) {–2, –3/2, 3/2, 2}.
c) {–2, –1/2, 1/2, 2}.
d) {–2, –1, 1, 2}.
e) {–4, –1, 1, 4}.

7. (UFBA) A soma das raízes reais positivas da equação $36x^4 - 25x^2 + 4 = 0$, vale:
a) 1/6.
b) 7/6.
c) 3/6.
d) 6.
e) 3.

8. (CN) Calcule a média aritmética das raízes da equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$:
a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

9. (IERJ) A soma das raízes da equação: $3x^4 + x^2 + 5 = 0$:

a) 3.
b) 3/2.
c) 1.
d) 1/2.
e) 0.

10. (PUC) As raízes da equação: $3x^4 - 6x^2 = 0$ são:

a) 0; 0; $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.
b) -1 ; 1; $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.
c) 0; 0; $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.
d) $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.
e) 0; 0; $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

11. (CN) Resolvendo a equação $(x^2 - 10).(x^2 - 5) = 66$, encontramos a solução real representada pelo(a):

a) par ordenado {(–3; 3)}.
b) quadra ordenada {(–2; –1; 1; 2)}.
c) par ordenado {(–4; 4)}.
d) quadra ordenada {(–3; –2; 3; 3)}.
e) quadra ordenada {(–2; –1/2; 1/2; 2)}.

12. A maior solução inteira da equação $= \frac{3}{} + \frac{26}{}$ é um número:

a) divisível por 4.
b) divisor de 25.
c) quadrado perfeito.
d) par.
e) primo.

13. (FEC) O produto das raízes não inteiras da equação $(3x^2 - 7) - (2x^2 - 5)^2 = 16$ é de:

a) 4.
b) 0,4.
c) 2.
d) –2.
e) –0,4.

14. (CN) As raízes da equação $7x^{-2} - x^4 = 12$ é a quadra ordenada representada por:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ -1; 1; $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
d) $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.
e) 0; 0; $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

15. (Cesgranrio) A diferença entre a maior e a menor inteira da equação $3x^2 - \frac{8}{x^2} = 10$ vale:

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

Gabaritos:

1. D	4. A	7. B	10. A	13. E
2. A	5. B	8. A	11. C	14. A
3. D	6. C	9. E	12. E	15. E

Capítulo 16
Radicais Duplos

Exercícios propostos

1. Transforme numa diferença ou em uma soma de *radicais simples* os seguintes *radicais duplos*:

a) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$

b) $\sqrt{17+\sqrt{208}}$

c) $\sqrt{16+\sqrt{60}}$

d) $\sqrt{12+\sqrt{80}}$

e) $\sqrt{21+\sqrt{405}}$

f) $\sqrt{15-\sqrt{56}}$

g) $\sqrt{6-\sqrt{35}}$

h) $\sqrt{19-\sqrt{217}}$

i) $\sqrt{\frac{5}{6}-\sqrt{\frac{2}{3}}}$

k) $\sqrt{1-2\sqrt{1-x^2}}$

Gabaritos:

a) $\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt{13}+2$

c) $\sqrt{15}+1$

d) $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

e) $\sqrt{\frac{27}{2}}+\sqrt{\frac{15}{2}}$

f) $\sqrt{14}-1$

g) $\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}$

h) $\sqrt{\frac{31}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}$

i) $\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}$

k) $\sqrt{1-x^2}-x$

Capítulo 17
Razões e aplicações notáveis

Exercícios propostos

1. (FCC) O estoque de determinado produto de um laboratório tem previsão de duração de 18 dias a partir dessa data. Porém, o fabricante avisou que vai atrasar em nove dias a próxima entrega do produto, obrigando assim o laboratório a

programar uma redução no consumo diário anterior. Supondo que a redução do consumo seja a mesma todos os dias, a razão entre o novo consumo diário e o previsto inicialmente é:

a) $\frac{5}{6}$.
b) $\frac{3}{4}$.
c) $\frac{2}{3}$.
d) $\frac{1}{2}$.
e) $\frac{1}{3}$.

2. **(FCC) Para percorrer um mesmo trajeto de 72.900 metros, dois veículos gastaram: um, 54 minutos, e o outro, 36 minutos. A diferença positiva entre as velocidades médias desses veículos, nesse percurso, em quilômetros por hora, era:**

a) 11,475.
b) 39,25.
c) 40,5.
d) 42,375.
e) 45,5.

3. **(Cesgranrio) Para encher um tanque com apenas uma torneira são necessários 12 minutos. Em quantos minutos esse tanque estará cheio, se acrescentarmos duas torneiras iguais à primeira?**

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 8.

4. **(Vunesp) A miniatura de um carro foi feita na escala de $\frac{1}{30}$. Se na miniatura a distância entre as rodas é de 4,5 cm, no carro em tamanho real, essa medida será de:**

a) 1,05 m.
b) 1,15 m.
c) 1,25 m.
d) 1,35 m.
e) 1,45 m.

5. **(Vunesp) Na maquete de uma praça pública construída na escala 1:75, o edifício da prefeitura, de 13,5 m de altura, está representado com uma altura de:**

a) 16 cm.
b) 18 cm.
c) 20 cm.
d) 22 cm.
e) 24 cm.

6. **(FCC) Um reservatório é alimentado por duas torneiras. A primeira sozinha pode enchê-lo em 8 horas e a segunda em 12 horas. Abertas as duas, simultaneamente, encherão por completo este reservatório em quantas horas?**

a) 4.
b) 4,5.
c) 4,8.
d) 5.
e) 5,2.

7. **(FEC) Em uma maquete, um prédio com altura de 60m é representado por um prédio de 90cm de altura. Mantida essa escala, a piscina circular com medida de raio de 5m, está representada na maquete com diâmetro de:**

a) 15 cm.
b) 7,5 cm.
c) 5 cm.
d) 12 cm.
e) 10 cm.

8. **(NCE) Num concurso, havia 90 candidatos. Tendo sido aprovados 30, a razão entre o número de reprovados e o número de aprovados é:**
a) 1.
b) 2.
c) 1/2.
d) 1/3.
e) 3.

9. **(Cetro) Em uma fábrica trabalham 216 funcionários, sendo que 135 são do sexo masculino e 81 pertencem ao sexo feminino. Calcule a razão entre o número de funcionários do sexo masculino e o número do sexo feminino.**
a) 4/3.
b) 3/5.
c) 3/7.
d) 2/5.
e) 5/3.

10. **(Cetro) A razão entre o comprimento e a largura de um retângulo é 3/2. Sabendo que a largura é 10 cm, qual é a área desse retângulo em centímetros quadrados?**
a) 120.
b) 150.
c) 80.
d) 180.
e) 340.

11. **(Consulplan) Em uma prova com 40 questões, um candidato acertou 25, deixando 5 em branco e errando as demais. Qual é a razão do número de questões certas para o de questões erradas?**
a) 5/2.
b) 1/4.
c) 3/5.
d) 5/3.
e) 7/2.

12. **(Consulplan) Para encher um reservatório de água dispõe-se de duas torneiras de entrada que o enchem em 8h e 6h, respectivamente. Para esvaziá-lo, dispõe-se de uma terceira torneira de saída que o esvazia completamente em 4h. Estando o reservatório totalmente vazio e as três torneiras abertas simultaneamente, quantas horas (h) serão necessárias para enchê-lo?**
a) 18 h.
b) 22 h.
c) 26 h.
d) 24 h.
e) 16 h.

13. **(FCC) Numa fábrica, duas máquinas de rendimentos diferentes, funcionando ininterruptamente, mantêm constante, cada uma, uma certa produção por hora. A primeira produz por hora 36 peças a mais do que a segunda. Se, em 8 horas de funcionamento, as duas produzem juntas um total de 1.712 peças, e o número de peças produzidas pela:**
a) segunda em 3 horas de funcionamento é 270.
b) segunda em 5 horas de funcionamento é 400.
c) primeira em 2 horas de funcionamento é 200.
d) primeira em 4 horas de funcionamento é 500.
e) primeira em 6 horas de funcionamento é 720.

14. **(FCC) Um atleta que completou a distância de 10 quilômetros em 45 minutos percorreu cada quilômetro no tempo médio de**
a) 4 minutos e 50 segundos.
b) 4 minutos e 45 segundos.
c) 4 minutos e 40 segundos.
d) 4 minutos e 35 segundos.
e) 4 minutos e 30 segundos.

15. **(FCC) Um determinado serviço é realizado por uma única máquina em 12 horas de funcionamento ininterrupto e, em 15 horas, por uma outra máquina, nas mesmas condições. Se funcionarem simultaneamente, em quanto tempo realizarão esse mesmo serviço?**
a) 3 horas.
b) 9 horas.
c) 25 horas.
d) 4 horas e 50 minutos.
e) 6 horas e 40 minutos.

16. **(FCC) Uma máquina imprime um relatório em 4 horas. Outra máquina, menos eficiente, imprimiria o mesmo relatório em 6 horas. Funcionando simultaneamente, as duas imprimiriam esse relatório em:**
a) duas horas.
b) duas horas e vinte e quatro minutos.
c) duas horas e quarenta minutos.
d) duas horas e quarenta e oito minutos.
e) cinco horas.

17. **(FCC) Dispõe-se de um bloco maciço de madeira com volume de 0,04 m^3. Se a densidade da madeira é de 0,93 g/cm^3, o peso desse bloco, em quilogramas, é:**
a) 23,25.
b) 37,2.
c) 232,5.
d) 372.
e) 2.325.

18. **(Cespe) Dois arquivos contêm as mesmas quantidades de processos. No arquivo X, 20% dos processos são cíveis e o restante, processos penais. No arquivo Y, 25% dos processos são cíveis e o restante, processos penais. Todos os processos dos arquivos X e Y foram transferidos para o arquivo Z, que se encontrava vazio. Nessa situação, é correto afirmar que, no arquivo Z, a razão entre o número de processos penais e o número de processos cíveis é igual a:**
a) $\frac{4}{5}$.
b) $\frac{23}{7}$.
c) $\frac{31}{9}$.
d) $\frac{15}{4}$.
e) $\frac{13}{4}$.

19. **(FCC) Uma região de 840 km^2 foi representada em um mapa na escala de 1:50.000. Sua representação reduzida nesse mapa, em m^2, será de:**
a) 3360.
b) 336.
c) 33,6.
d) 3,36.
e) 0,336.

20. **(Consulplan) Uma torneira é capaz de encher completamente um reservatório em 4 horas, enquanto um sifão é capaz de esvaziá-lo em 9 horas. Aberto, simultaneamente, a torneira e o sifão, esse reservatório estará completamente cheio em:**
a) 5 horas e 30 minutos.
b) 6 horas e 40 minutos.
c) 7 horas 12 minutos.
d) 7 horas e 40 minutos.
e) 8 horas e 24 minutos.

Gabaritos:

1. C	5. B	9. E	13. E	17. B
2. C	6. C	10. B	14. E	18. C
3. B	7. A	11. A	15. E	19. C
4. D	8. B	12. D	16. B	20. C

Capítulo 18
Proporção

Exercícios propostos

1. (Cesgranrio) Sabe-se que Adriano tem cinco anos a mais que Bruno, e que o quadrado da idade de Adriano está para o quadrado da idade de Bruno assim como 9 está para 4. Quais são as idades de Adriano e de Bruno?

a) 8 e 6.
b) 10 e 8.
c) 13 e 12.
d) 15 e 10.
e) 20 e 18.

2. (FEC) Dada a proporção $\frac{x}{y} = \frac{19}{14}$, determine x – y sabendo que x + y = 132:

a) 5.
b) 10.
c) 20.
d) 30.
e) 40.

3. (NCE) Os números 2*a* + *b* e *a* + *b* formam, entre si, uma razão de $\frac{6}{5}$. Pode-se afirmar que, se *a* e *b* não são nulos, então:

a) a = b.
b) — .
c) $a = \frac{b}{3}$.
d) $a = \frac{b}{4}$.
e) a = 4b.

4. (FCC) Certo dia, um técnico judiciário observou que o triplo do número *x*, de documentos por ele arquivados, excedia em 12 unidades a terça parte do número *y*, de documentos que havia protocolado. Se a razão entre *x* e *y*, nessa ordem, é $\frac{1}{5}$, então *x* + *y* é igual a:

a) 46.
b) 48.
c) 52.
d) 54.
e) 60.

5. **(NCE) Os salários de dois técnicos judiciários, X e Y, estão entre si assim como 3 está para 4. Se o dobro do salário de X menos a metade do salário de Y corresponde a R$720,00, então os salários dos dois totalizam:**
   a) R$1.200,00.
   b) R$1.260,00.
   c) R$1.300,00.
   d) R$1.360,00.
   e) R$1.400,00.

6. **(NCE) Sabendo que a soma do quadrado de dois números positivos é de 100 e a razão entre eles é igual a $\frac{4}{3}$,então, o maior desses números vale:**
   a) 5.
   b) 6.
   c) 8.
   d) 10.
   e) 12.

7. **(Cetro) Se a razão entre dois números é 5 e a soma entre eles é 30, pode-se afirmar que a diferença entre eles é:**
   a) 10.
   b) 12.
   c) 15.
   d) 20.
   e) 25.

8. **(FCC) Certo dia, um técnico judiciário constatou que de cada oito pessoas que atendera, cinco eram do sexo feminino. Se, nesse dia, ele atendeu a 96 pessoas, quantas eram do sexo masculino?**
   a) 30.
   b) 32.
   c) 34.
   d) 36.
   e) 38.

9. **(FCC) No almoxarifado de um Órgão Público há um lote de pastas, *x* das quais são na cor azul e as *y* restantes na cor verde. Se $\frac{x}{y} = \frac{9}{11}$, a porcentagem de pastas azuis no lote é de:**
   a) 81%.
   b) 55%.
   c) 52%.
   d) 45%.
   e) 41%.

10. **(Cesgranrio) Em uma empresa, a razão do número de empregados homens para o de mulheres é $\frac{3}{7}$. Portanto, a porcentagem de homens empregados nessa empresa é:**
    a) 30%.
    b) 43%.
    c) 50%.
    d) 70%.
    e) 75%.

11. **(Cesgranrio) Dona Maria vende doces e salgados. Ela vende um cento de doces por R$40,00, e um cento de salgados, por R$50,00. No último mês, ela observou que, para cada dois doces vendidos, foram vendidos três salgados. Se Dona Maria vendeu 6.000 doces, quanto ela faturou em reais, com a venda dos salgados?**
    a) 4.500,00.
    b) 3.000,00.
    c) 2.000,00.
    d) 3.600,00.
    e) 2.400,00.

12. (Cesgranrio) Para produzir tinta azul clara, um pintor mistura 5 partes de tinta branca com 3 partes de tinta azul escura. Para fazer 6 litros de tinta azul clara, quantos litros de tinta branca serão necessários?

a) 1,20.
b) 2,00.
c) 2,25.
d) 3,25.
e) 3,75.

13. (FCC) Das pessoas atendidas em um ambulatório certo dia, sabe-se que 12 foram encaminhadas a um clínico geral e as demais para tratamento odontológico. Se a razão entre o número de pessoas encaminhadas ao clínico e o número das restantes, nessa ordem, é 3/5, o total de pessoas atendidas foi:

a) 44.
b) 40.
c) 38.
d) 36.
e) 32.

14. (Cesgranrio) Uma pesquisa sobre os direitos do consumidor revelou que os brasileiros conhecem razoavelmente seus direitos. Foram entrevistadas 1.400 pessoas e, em cada 50 entrevistados, 41 afirmaram conhecer seus direitos como consumidores. De acordo com essas informações, das 1.400 pessoas entrevistadas, quantas afirmaram NÃO conhecer seus direitos como consumidores?

a) 252.
b) 348.
c) 644.
d) 820.
e) 1.148.

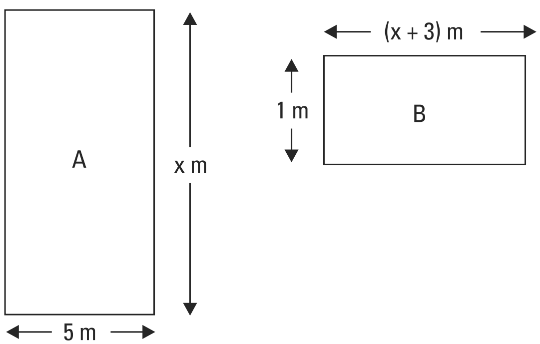
15. (FCC) Uma empresa gerou um lucro de R$420.000,00, que foi dividido entre seus três sócios, da seguinte maneira: a parte recebida pelo primeiro está para a do segundo assim como 2 está para 3; a parte do segundo está para a do terceiro assim como 4 está para 5. Nessa divisão, a menor das partes é igual a:

a) R$80 000,00.
b) R$96 000,00.
c) R$120 000,00.
d) R$124 000,00.
e) R$144 000,00.

16. (FEC) As dimensões de um terreno retangular estão na razão $\frac{2}{5}$. Se a área do terreno é de $40m^2$, então sua maior dimensão em metros é de:

a) 20.
b) 10.
c) 8.
d) 5.
e) 4.

17. (Vunesp) Observe os desenhos a seguir. Dividindo-se a área do retângulo A pela área do retângulo B, obtém-se a razão $\frac{9}{2}$. Portanto, a área do retângulo A é:



a) $180m^2$.
b) $135m^2$.
c) $125m^2$.
d) $90m^2$.
e) $45m^2$.

18. (FCC) Relativamente aos tempos de serviço de dois funcionários do Banco do Brasil, sabe-se que sua soma é 5 anos e 10 meses e que estão entre si na razão $\frac{3}{2}$. Nessas condições, a diferença positiva entre os tempos de serviço desses funcionários é de:

a) 2 anos e 8 meses.
b) 2 anos e 6 meses.
c) 2 anos e 3 meses.
d) 1 anos e 5 meses.
e) 1 anos e 2 meses.

19. (Cesgranrio) Numa pesquisa sobre acesso à internet, três em cada quatro homens e duas em cada três mulheres responderam que acessam a rede diariamente. A razão entre o número de mulheres e de homens participantes dessa pesquisa é, nessa ordem, igual a $\frac{1}{2}$.

Que fração do total de entrevistados corresponde àqueles que responderam que acessam a rede todos os dias?

a) $\frac{13}{18}$.
b) $\frac{17}{24}$.
c) $\frac{25}{36}$.
d) $\frac{5}{7}$.
e) $\frac{8}{11}$.

20. (Cetro) Em uma festa, a razão entre o número de moças e o de rapazes é de 3/2. A porcentagem de rapazes na festa é:

a) 25%.
b) 30%.
c) 33%.
d) 38%.
e) 40%.

Gabaritos:

1. D	6. C	11. A	16. B
2. C	7. D	12. E	17. B
3. D	8. D	13. E	18. E
4. D	9. D	14. A	19. A
5. B	10. A	15. B	20. D

Capítulo 19

Sucessões de números proporcionais – Grandezas proporcionais (diretas e/ou inversas)

Exercícios propostos

1. **Dois auxiliares de serviços gerais do TRE trabalham numa repartição e suas gratificações internas são proporcionais ao tempo de serviço. O primeiro tem 12 anos de serviço e ganha R$840,00 de gratificação. O segundo, que tem 15 anos de serviço ganhará uma gratificação de:**
   a) R$1.000,00.
   b) R$1.050,00.
   c) R$1.100,00.
   e) R$1.200,00.
   d) R$1.150,00.

2. **Dois operários receberam uma gratificação por assiduidade ao serviço. O primeiro faltou oito dias ao trabalho e recebeu R$420,00. Quanto deve receber o segundo, que faltou 10 dias, sabendo-se que a gratificação deve ser inversamente proporcional ao número de faltas?**
   a) R$306,00.
   b) R$310,00.
   c) R$314,00.
   d) R$320,00.
   e) R$336,00.

3. **Dois funcionários de um almoxarifado decidiram dividir entre si a tarefa de conferir um lote contendo certo número de documentos. Foi decido que a divisão seria inversamente proporcional ao número de atrasos referente aquele mês e, ao mesmo tempo, diretamente proporcional às suas respectivas idades. Se Daniel, de 20 anos, conferiu 240 documentos tendo chegado atrasado três vezes, então Eduardo, que possui 24 anos e chegou atrasado apenas duas vezes irá conferir uma quantidade de documentos igual a:**
   a) 380.
   b) 400.
   c) 412.
   d) 432.
   e) 460.

4. **Um número "α" é diretamente proporcional ao cubo de um número "*x*", ao quadrado de um número "*y*" e inversamente proporcional ao número "*z*" e a raiz cúbica de um número "*t*", simultaneamente. Quando: "α" vale 180; "*x*" vale 6; "*y*" vale 4; "*z*" vale 16 e "*t*" vale 216. Então, o novo valor de "*z*", se "α" for igual a 20; "*x*" for igual a 4; "*y*" igual a 3 e "*t*" igual a 729, será de:**
   a) 24.
   b) 36.
   c) 12.
   d) 16.
   e) 6.

5. As duas sucessões numéricas (I) e (II) são, respectivamente, inversamente proporcionais e diretamente proporcionais, como vemos a seguir:

$$\text{(I)}\begin{cases}(3x+24) & ; & 5 & ; & 3 & ; & (4-6z)\\ 2 & ; & 12 & ; & (2y-6) & ; & 6\end{cases}$$

$$\text{(II)}\begin{cases}(4a+3) & ; & 27 & ; & 36 & ; & (18-9c)\\ 5 & ; & (2b-7) & ; & 12 & ; & 3\end{cases}$$

Então, a única opção falsa é:

a) $x + y + z = a + b + 7c$.
b) $2x + y + 3z = 4a + 3b - 14c$.
c) $3x - 2y + 3z = a + b + 7c$.
d) $y = x + z + a + b + 3c$.
e) $x + 2y + 2z = a + 2b - 2c$.

Gabaritos:

1. B
2. E
3. D
4. D
5. D

Capítulo 20

Divisão em Partes Proporcional

Exercícios propostos

1. (FCC) Pedro e Paulo são funcionários de uma mesma empresa há 12 e 9 anos, respectivamente. Eles foram incumbidos de inventariar todos os utensílios do serviço de copa da empresa e, para isso, dividiram o total de peças entre si, na razão inversa de seus respectivos tempos de serviço na empresa. Se a Paulo coube inventariar 48 peças a mais do que Pedro, o total de utensílios vistoriados era:

a) 144.
b) 192.
c) 264.
d) 336.
e) 388.

2. (FCC) Uma empresa gerou um lucro de R$420.000,00, que foi dividido entre seus três sócios, da seguinte maneira: a parte recebida pelo primeiro está para a do segundo assim como 2 está para 3; a parte do segundo está para a do terceiro assim como 4 está para 5. Nessa divisão, a menor das partes é igual a:

a) R$80 000,00.
b) R$96 000,00.
c) R$120 000,00.
d) R$124 000,00.
e) R$144 000,00.

3. **(FCC) Três soldados compraram um presente de aniversário para um colega. Para tal, contribuíram com quantias inversamente proporcionais aos seus respectivos tempos de serviço na corporação: dois anos, cinco anos e oito anos. Se o presente custou R$66,00, um deles desembolsou:**
a) R$38,00.
b) R$24,00.
c) R$18,00.
d) R$10,00.
e) R$9,60.

4. **(FCC) O enunciado a seguir se refere às questões as 04 e 05 a seguir. Na tabela a seguir têm-se as idades e os tempos de serviço de três soldados na corporação, que devem dividir entre si um certo número de fichas cadastrais para verificação.**

Soldado	Idade, em anos	Tempo de serviço, em anos
Abel	20	3
Daniel	24	**4**
Manoel	**30**	**5**

Se o número de fichas for 518 e a divisão for feita em partes diretamente proporcionais às suas respectivas idades, o número de fichas que caberá a Abel é:
a) 140.
b) 148.
c) 154.
d) 182.
e) 210.

5. **(FCC) Se o número de fichas for 504 e a divisão for feita em partes diretamente proporcionais às suas respectivas idades, mas inversamente proporcionais aos seus respectivos tempos de serviço na corporação, o número de fichas que caberá a:**
a) Daniel é 180.
b) Manoel é 176.
c) Daniel é 170.
d) Manoel é 160.
e) Daniel é 162.

6. **(FCC) Três pessoas formaram, na data de hoje, uma sociedade com a soma dos capitais investidos igual a R$100 000,00. Após um ano, o lucro auferido de R$7 500,00 é dividido entre os sócios em partes diretamente proporcionais aos capitais iniciais investidos. Sabendo-se que o valor da parte do lucro que coube ao sócio que recebeu o menor valor é igual ao módulo da diferença entre os valores que receberam os outros dois, tem-se que o valor do capital inicial do sócio que entrou com maior valor é:**
a) R$75 000,00.
b) R$60 000,00.
c) R$50 000,00.
d) R$40 000,00.
e) R$37 500,00.

7. **(EsSA) Uma firma comercial teve um lucro de R$56.000,00. Calcule a parte que cabe a cada um de seus três sócios, sabendo que seus capitais são de R$15.000,00, R$20.000,00 e R$35.000,00 respectivamente.**
a) 10.000, 18.000, 28.000.
b) 12.000, 16.000, 28.000.
c) 12.000, 14.000, 30.000.
d) 10.000, 14.000, 32.000.
e) 14.000, 18.000, 36.000.

8. **(FCC) Para executar a tarefa de manutenção de 111 microcomputadores, três técnicos judiciários dividiram o total de microcomputadores entre si, na razão *inversa* de suas respectivas idades: 24, 30 e 36 anos. Assim sendo, o técnico de 30 anos, recebeu:**
   a) 2 micros a mais do que o de 24 anos.
   b) 4 micros a menos do que o de 36 anos.
   c) 4 micros a menos do que o de 24 anos.
   d) 6 micros a menos do que o de 36 anos.
   e) 4 micros a menos do que o de 24 anos.

9. **(FCC) Em certo dia do mês de maio, dois Auxiliares Judiciários procederam a entrega de um lote de documentos em algumas Unidades do Tribunal Regional do Trabalho. Para a execução da tarefa, dividiram o total de documentos entre si, na razão inversa dos respectivos números de horas-extras que haviam cumprido no mês anterior: 12 e 18 horas. Nessas condições, se aquele que cumpriu o menor número de horas-extras entregou 48 documentos, então:**
   a) o total de documentos distribuídos era 90.
   b) o outro entregou mais do que 48 documentos.
   c) o outro entregou menos do que 30 documentos.
   d) o outro entregou exatamente 52 documentos.
   e) o outro entregou exatamente 32 documentos.

10. **(NCE) Paco fundou uma empresa com R$20 000,00 de capital e, após quatro meses, admitiu Capo como sócio, que ingressou com o capital de R$32 000,00. Se após um ano de atividades, a empresa gerou um lucro de R$19 840,00, então Paco recebeu:**
   a) R$520,00 a menos que Capo.
   b) R$580,00 a mais que Capo.
   c) R$580,00 a menos que Capo.
   d) R$640,00 a mais que Capo.
   e) R$640,00 a menos que Capo.

11. **(FEC) Dividir o número 46 em partes diretamente proporcionais a 5 e 4 e inversamente proporcionais a 2 e 3, respectivamente.**
   a) 30 e 16.
   b) 20 e 26.
   c) 25 e 21.
   d) 10 e 36.
   e) 15 e 31.

12. **(FCC) Dois auxiliares deveriam instalar 56 aparelhos telefônicos em uma empresa e resolveram dividir essa tarefa entre si, em partes diretamente proporcionais as suas respectivas idades. Se um tem 21 anos e o outro tem 28, o número de aparelhos que coube ao mais velho foi:**
   a) 24.
   b) 26.
   c) 28.
   d) 30.
   e) 32.

13. **(FCC) Um comerciante resolveu dividir parte de seu lucro com seus três empregados, em partes diretamente proporcionais ao tempo de serviço. Se a quantia distribuída foi R$69.000,00 e cada empregado está na casa, respectivamente há cinco, oito e dez anos, o empregado mais antigo recebeu:**

a) R$15.000,00.
b) R$18.000,00.
c) R$21.000,00.
d) R$24.000,00.
e) R$30.000,00.

14. (Vunesp) Julio (12 anos), Ricardo (10 anos) e Paulo (7anos) herdaram de seu avô uma coleção com 1.160 moedas, que deverão ser divididas em partes diretamente proporcionais às suas idades. Dessa maneira, Julio receberá a mais que Paulo:
a) 200 moedas.
b) 180 moedas.
c) 150 moedas.
d) 120 moedas.
e) 100 moedas.

15. (FCC) Em uma seção há duas funcionárias, uma com 20 anos de idade e a outra com 30. Um total de 150 processos foi dividido entre elas, em quantidades inversamente proporcionais às suas respectivas idades. Qual o número de processos recebido pela mais jovem?
a) 90.
b) 80.
c) 60.
d) 50.
e) 30.

16. (FCC) Um total de 141 documentos devem ser catalogados por três técnicos judiciários. Para cumprir a tarefa, dividiram os documentos entre si, em partes inversamente proporcionais às suas respectivas idades: 24, 36 e 42 anos. Nessas condições, o número de documentos que coube ao mais jovem foi:
a) 78.
b) 63.
c) 57.
d) 42.
e) 36.

17. (FCC) Uma gratificação deverá ser dividida entre dois funcionários de uma empresa, em partes que são, ao mesmo tempo, inversamente proporcionais às suas respectivas idades e diretamente proporcionais aos seus respectivos tempos de serviço na empresa. Sabe-se também que X, que tem 24 anos, trabalha há cinco anos na empresa, e Y, que tem 32 anos, trabalha há 12 anos. Se Y receber R$1 800,00, o valor da gratificação é:
a) R$2 500,00.
b) R$2 650,00.
c) R$2 780,00.
d) R$2 800,00.

18. (FCC) Três técnicos do T.R.T. foram incumbidos de catalogar alguns documentos e os dividiram entre si, na razão inversa de seus tempos de serviço público: quatro anos, seis anos e 15 anos. Se àquele que tem seis anos de serviço coube catalogar 30 documentos, a diferença positiva entre os números de documentos catalogados pelos outros dois é:
a) 28.
b) 33.
c) 39.
d) 42.
e) 55.

19. **(FCC) Certo dia, para a execução de uma tarefa de reflorestamento, dois auxiliares de serviços de campo foram incumbidos de plantar 324 mudas de árvores em uma reserva florestal. Dividiram a tarefa entre si, na razão inversa de suas respectivas idades: 24 e 30 anos. Assim, o número de mudas que coube ao mais jovem deles foi:**

a) 194.
b) 180.
c) 156.
d) 144.
e) 132.

20. **(Cesgranrio) Uma cidade tem ao todo 42 vereadores. A divisão do número de vereadores na Assembleia é proporcional ao número de votos obtidos por cada partido. Em uma eleição na referida cidade, concorreram apenas os partidos A, B e C. O quadro a seguir mostra o resultado da eleição.**

Partidos	Nº de votos
A	10.000
B	20.000
C	40.000

Quantos vereadores fez o partido B?

a) 6.
b) 8.
c) 12.
d) 18.
e) 24.

21. **(NCE) Um prêmio foi distribuído entre Ana, Bernardo e Cláudio, em partes diretamente proporcionais aos seus tempos de serviço. Esses tempos são, respectivamente, 3, 4 e 9 anos. Se Cláudio recebeu R$720,00 de prêmio, o valor total do prêmio foi de:**

a) R$1.280,00.
b) R$1.440,00.
c) R$2.560,00.
d) R$4.000,00.
e) R$4.500,00.

22. **(FCC) Na oficina de determinada empresa há um certo número de aparelhos elétricos a serem reparados. Incumbidos de realizar tal tarefa, dois técnicos dividiram o total de aparelhos entre si, na razão inversa de seus respectivos tempos de serviço na empresa: 8 anos e 12 anos. Assim, se a um deles coube 9 aparelhos, o total reparado foi:**

a) 21.
b) 20.
c) 18.
d) 15.
e) 12.

23. **(FCC) Dois técnicos judiciários foram incumbidos de catalogar alguns documentos, que dividiram entre si em partes inversamente proporcionais aos seus respectivos tempos de serviço no cartório da seção onde trabalham. Se o que trabalha há 12 anos deverá catalogar 36 documentos e o outro trabalha há 9 anos, então o total de documentos que ambos deverão catalogar é:**

a) 76.
b) 84.
c) 88.
d) 94.
e) 96.

Gabaritos:

1. D
2. B
3. D
4. B
5. C
6. C
7. B
8. E
9. E
10. E
11. A
12. E
13. E
14. A
15. A
16. B
17. D
18. B
19. B
20. C
21. A
22. D
23. B

Capítulo 21
Regra de sociedade

Exercícios propostos

1. **(FCC) Três sócios lucraram R$350.000,00. Sabendo-se que o lucro do primeiro está para o do segundo, assim como 2 : 3, e que o lucro do segundo está para o do terceiro assim como, 4 : 5. A diferença entre o maior e o menor lucro, vale:**
a) R$55.800,00.
b) R$62.300,00.
c) R$70.000,00.
d) R$75.000,00.
e) R$80.000,00.

2. **(Cesgranrio) Três amigos compraram um terreno de 5.400 m^2 para montar uma empresa. Sabendo que o primeiro entrou com R$8.000,00, o segundo com R$10.000,00 e o terceiro com R$12.000,00. Se caso a sociedade fosse desmantelada, a porção do terreno que caberia ao segundo sócio seria de:**
a) 1.440 m^2.
b) 1.640 m^2.
c) 1.700 m^2.
d) 1.800 m^2.
e) 2.160 m^2.

3. **(NCE) Dois sócios lucraram R$276.900,00. O primeiro entrou para sociedade com R$180.000,00 e o segundo com R$210.000,00. A menor parcela do lucro foi de:**
a) R$127.800,00.
b) R$128.000,00.
c) R$130.200,00.
d) R$131.100,00.
e) R$132.000,00.

4. **(FCC) Caetano fundou uma empresa com um capital de R$300 000,00 e após oito meses admitiu Milton como sócio, com R$120.000,00 de capital. Ao completar um ano de atividades da empresa, houve um lucro de R$170 000,00. Na divisão proporcional desse lucro, a parte que coube a Milton foi:**
a) R$20 000,00.
b) R$40 000,00.
c) R$50 000,00.
d) R$60 000,00.
e) R$80 000,00.

5. (FCC) Dois sócios constituíram uma empresa com capitais iguais, sendo que o primeiro fundou a empresa e o segundo foi admitido quatro meses depois. No fim de um ano de atividades, a empresa apresentou um lucro de R$20 000,00. Eles receberam, respectivamente:

a) R$10 500,00 e R$9 500,00.
b) R$12 000,00 e R$8 000,00.
c) R$13 800,00 e R$6 200,00.
d) R$15 000,00 e R$5 000,00.
e) R$16 000,00 e R$4 000,00.

Gabaritos:

1. C
2. D
3. A
4. A
5. B

Capítulo 22

Regra de três simples e Compostas

22.1. Regra de três simples

Exercícios propostos

1. (ECT) Um moinho utiliza 20 kg de trigo para fazer 15 kg de farinha. Considerando que uma pessoa adulta coma, em média, 1,5 quilogramas de farinha de trigo por dia, então, quantos quilogramas de trigo esse moinho necessita moer para abastecer uma família de 4 pessoas adultas durante 1 semana?

a) 8 kg.
b) 10,5 kg.
c) 31,5 kg.
d) 42 kg.
e) 56 kg.

2. (FCC) Suponha que, para entregar cilindros de CO_2 do Sistema de Detecção de Incêndio nas estações de certa Linha do Metrô de São Paulo, um funcionário usa um caminhão da empresa e, ao longo do percurso gasta, em média, 5 horas e 50 minutos. Considerando desprezível o tempo gasto para descarregar os cilindros em cada estação, então, se ele aumentar a velocidade média do caminhão em 40%, o esperado é que o mesmo percurso seja feito em:

a) 4 horas e 10 minutos.
b) 4 horas e 20 minutos.
c) 4 horas e 30 minutos.
d) 4 horas e 40 minutos.
e) 4 horas e 50 minutos.

3. (ECT) Um ciclista percorre uma certa distância em 45 minutos, pedalando com velocidade média de 36 km/h. Considerando o rendimento desse ciclista constante, se ele pedalasse com uma velocidade média de 27 km/h, essa mesma distância seria percorrida em:

a) 30 minutos.
b) 33 minutos.
c) 40 minutos.
d) 50 minutos.
e) 1 hora.

4. (IBGE) Uma fita de vídeo pode gravar durante duas horas (em velocidade padrão) ou durante quatro horas (em velocidade reduzida). Se uma fita foi usada durante 40 minutos em velocidade padrão, durante quanto tempo ela ainda poderá ser usada em velocidade reduzida?

a) 2h 20 min.
b) 2h 40 min.
c) 3h.
d) 3h 10 min.
e) 3h 20 min.

5. (FGV) O tanque de um automóvel está com 60 litros de combustível. Se esse automóvel gasta, em média, 0,15 litro a cada quilômetro rodado, quantos quilômetros, aproximadamente, ele pode rodar sem abastecer?

a) 400.
b) 360.
c) 350.
d) 320.
e) 380.

6. (Vunesp) Certo remédio para gado é vendido em galões. A dose para cada animal é de 3 *ml.* Com um galão de 3,783 litros desse medicamento, a quantidade de doses que pode ser obtida é:

a) 1.261.
b) 1.281.
c) 1.301.
d) 1.321.
e) 1.341.

7. (FCC) Uma impressora é capaz de imprimir as 1.275 páginas de um texto se operar ininterruptamente por 1 hora e 15 minutos. Operando nas mesmas condições, outra impressora, cuja velocidade de impressão é de 20 páginas por minuto, imprimiria o mesmo texto em:

a) 1 hora, 30 minutos e 45 segundos.
b) 1 hora, 20 minutos e 30 segundos.
c) 1 hora, 13 minutos e 15 segundos.
d) 1 hora, 3 minutos e 45 segundos.
e) 1 hora, 1 minuto e 15 segundos.

8. (FCC) Suponha que quatro técnicos judiciários sejam capazes de atender, em média, 54 pessoas por hora. Espera-se que seis técnicos, com a mesma capacidade operacional dos primeiros sejam capazes de atender, por hora, a quantas pessoas?

a) 71.
b) 75.
c) 78.
d) 81.
e) 85.

9. (FCC) Um auxiliar deve arquivar em pastas um certo número de documentos iguais. Se ele colocar 75 documentos em cada pasta, usará 50 pastas. Entretanto, se ele colocar 30 documentos em cada pasta, de quantas pastas precisará?

a) 45.
b) 100.
c) 110.
d) 112.
e) 125.

10. (FCC) Para a realização de uma determinada tarefa administrativa em 21 dias, é necessário alocar exclusivamente para esse trabalho três funcionários. Se dispomos de apenas dois funcionários para a tarefa, é razoável admitir que ela será realizada em:

a) 7 dias.
b) 14 dias.
c) 18 dias e meio.
d) 23 dias e meio.
e) 31 dias e meio.

11. (FGV) Se 80% do alumínio empregado na fabricação de latas pode ser reciclado, de quantas latas velhas se necessita para fabricar 1.000 latas novas?

a) 1.020.
b) 1.025.
c) 1.050.
d) 1.200.
e) 1.250.

12. (NCE) A dose diária recomendada de um remédio líquido é de 40 gotas. Uma gota desse medicamento pesa, em média, 5×10^{-2} gramas. Então, num frasco contendo 80 gramas desse remédio, temos medicamento suficiente para um tratamento de no máximo:

a) 40 dias.
b) 30 dias.
c) 20 dias.
d) 15 dias.
e) 10 dias.

13. (FCC) Um automóvel faz um certo percurso em duas horas, com velocidade média de 80 km/h. Se a velocidade média fosse de 60 km/h, em quanto tempo faria esse mesmo percurso?

a) Uma hora e trinta minutos.
b) Uma hora e cinquenta e cinco minutos.
c) Duas horas e vinte minutos.
d) Duas horas e trinta minutos.
e) Duas horas e quarenta minutos.

14. (Cesgranrio) Para pintar uma parede com $70m^2$ de área, um pintor gastou 5 litros de tinta. Se tivesse pintado apenas $28m^2$, quantos litros de tinta teria gasto?

a) 2.
b) 2,5.
c) 3.
d) 4.
e) 4,5.

15. (FJPF) Um barco com velocidade de 46 km/h percorre um trajeto em 58 min. Para percorrer o mesmo trajeto com 40% da velocidade anterior, este barco gastará:

a) 2h e 15 min.
b) 2h e 20 min.
c) 2h e 25 min.
d) 2h e 30 min.
e) 2h e 35 min.

16. (FJPF) Uma parede de 9 m^2 de área deve ser azulejada com ladrilhos de 15cm por 15cm. O número mínimo de ladrilhos necessários à obra é de:

a) 350.
b) 400.
c) 450.
d) 500.
e) 550.

17. (Cesgranrio) Um comerciante vende tapetes de sisal. Se o metro quadrado do tapete custa R$16,00, quanto custará um tapete de $3m^2$?

a) R$20,00.
b) R$24,00.
c) R$32,00.
d) R$48,00.
e) R$60,00.

18. (Cesgranrio) Certa mercadoria foi comprada por R$4,00 o quilograma e vendida por R$0,10 cada 20 g. Qual foi o lucro, em reais, obtido pelo comerciante na venda de 5 kg desta mercadoria?

a) 1,00.
b) 2,00.
c) 3,00.
d) 4,00.
e) 5,00.

19. (Cesgranrio) Para fazer $\frac{1}{4}$ de litro de suco, são usadas 4 laranjas. Quantas laranjas serão usadas para fazer 3 litros desse suco?

a) 24.
b) 30.
c) 36.
d) 48.
e) 49.

20. (NCE) Se $\frac{2}{5}$ de certa quantia corresponde a R$56,00, então $\frac{9}{7}$ dessa mesma quantia corresponde a:

a) R$22,40.
b) R$28,80.
c) R$56,00.
d) R$72,00.
e) R$180,00.

21. (NCE) Um grupo de três peritos fizeram análises balísticas de certas armas em oito dias. O número de peritos que serão necessários para refazer essas análises balísticas em seis dias é:

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 9.

22. (FCC) Se os funcionários de certa empresa consomem, em média, a água de 2,4 garrafões a cada dois dias, quantos dias espera-se que eles levariam para consumir a água de 36 garrafões, todos com a mesma capacidade do primeiro?

a) 28.
b) 30.
c) 35.
d) 36.
e) 40.

23. (NCE) Após um levantamento pericial numa residência, os técnicos constataram que os invasores haviam circulado por 60% da área interna dessa residência e que não circularam pelos 80 m^2 restantes de área interna. A área interna dessa residência corresponde a:

a) 120 m^2.
b) 140 m^2.
c) 180 m^2.
d) 200 m^2.
e) 205 m^2.

24. (Cesgranrio) Quantos quilos "pesa" um saco de cimento, se $\frac{4}{5}$ dele correspondem a 40 quilos?

a) 30.
b) 35.
c) 42.
d) 45.
e) 50.

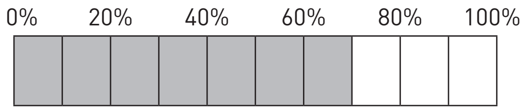
25. (FCC) Um agente executou uma certa tarefa em 3 horas e 40 minutos de trabalho. Outro agente, cuja eficiência é de 80% da do primeiro, executaria a mesma tarefa se trabalhasse por um período de:

a) 2 horas e 16 minutos.
b) 3 horas e 55 minutos.
c) 4 horas e 20 minutos.
d) 4 horas e 35 minutos.
e) 4 horas e 45 minutos.

26. (FCC) Um atleta faz um treinamento cuja primeira parte consiste em sair de casa e correr em linha reta até certo local à velocidade de 12 km/h. Depois, sem intervalo, ele retorna andando a 8 km/h. Se o tempo gasto nesse treinamento foi exatamente 3 horas, o tempo em que ele correu superou o tempo em que caminhou em:

a) 36 minutos.
b) 30 minutos.
c) 25 minutos.
d) 22 minutos.
e) 15 minutos.

27. (FCC) A figura a seguir mostra o indicador do nível de tinta de um cartucho de impressora, marcando em cor escura o percentual de tinta já utilizada.



Sabendo que o consumo de tinta desse cartucho é o mesmo a cada dia, e que em 20 dias de uso foram consumidos 50% da tinta, é possível afirmar que ainda existe no cartucho tinta suficiente para exatamente:

a) 6 dias.
b) 10 dias.
c) 12 dias.
d) 15 dias.
e) 28 dias.

28. (FCC) Uma transfusão de sangue é programada para que o paciente receba 25 gotas de sangue por minuto. Se a transfusão se estendeu por 2 horas e 12 minutos, e cada gota injeta 0,1ml de sangue, quantos ml de sangue o paciente recebeu?

a) 330.
b) 530.
c) 880.
d) 1.900.
e) 3.300.

29. (FCC) Um funcionário protocolou alguns documentos recebidos em 1 hora e 15 minutos de trabalho contínuo. Outro funcionário, cuja capacidade operacional é 60% da capacidade do primeiro, executaria a mesma tarefa se trabalhasse ininterruptamente por um período de:

a) 1 hora e 50 minutos.
b) 2 horas e 5 minutos.
c) 2 horas e 25 minutos.
d) 2 horas e 50 minutos.
e) 3 horas e 15 minutos.

30. (NCE) Uma cooperativa de suco produz semanalmente 120 garrafas de 3 litros. Se a capacidade de cada garrafa fosse de 5 litros, o número de garrafas utilizadas semanalmente seria:

a) 24.
b) 72.
c) 100.
d) 192.
e) 200.

31. **(FCC) Para pintar uma parede com 70 m² de área, um pintor gastou 5 litros de tinta. Se tivesse pintado apenas 28 m², quantos litros de tinta teria gasto?**

a) 2.
b) 2,5
c) 3.
d) 4.
e) 4,5.

32. **(Cesgranrio) Segundo dados do *Sinduscon-Rio*, em fevereiro de 2010 o custo médio da construção civil no Rio de Janeiro era R$875,18 por metro quadrado. De acordo com essa informação, qual era, em reais, o custo médio de construção de um apartamento de 75m² no Rio de Janeiro no referido mês?**

a) 65.638,50.
b) 65.688,00.
c) 66.048,50.
d) 66.128,50.
e) 66.634,00.

33. **(FCC) Certa máquina gasta 20 segundos para cortar uma folha de papelão de formato retangular em seis pedaços iguais. Assim sendo, quantos segundos essa mesma máquina gastaria para cortar em 10 pedaços iguais outra folha igual à primeira se, em ambas as folhas, todos os cortes devem ter o mesmo comprimento?**

a) 36.
b) 35,5.
c) 34.
d) 33,3.
e) 32.

34. **(Cesgranrio) Vinte e quatro operários fazem uma obra em cinco dias. Em quanto tempo quarenta operários, igualmente capacitado, fariam a mesma obra?**

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 4,5.

35. **(Consulplan) Na festa de inauguração de uma determinada empresa, foram consumidas 120 garrafas de 600ml de refrigerantes. Se tivesse comprado garrafas de 3 litros, quantas garrafas a menos teriam sido consumidas?**

a) 24.
b) 40.
c) 62.
d) 96.
e) 100.

Gabaritos:

1. E
2. A
3. E
4. B
5. A
6. A
7. D
8. D
9. E
10. E
11. E
12. A
13. E
14. C
15. C
16. B
17. D
18. E
19. D
20. E
21. A
22. B
23. D
24. C
25. C
26. D
27. C
28. A
29. B
30. B
31. A
32. A
33. A
34. C
35. D

22.2. Regra de três compostas

Exercícios propostos

1. **(Cesgranrio) Uma máquina produz 1.200 peças em quatro horas. Quantas máquinas iguais a essa devem funcionar juntas, durante três horas, para que sejam produzidas 8.100 peças no total?**
   a) 5.
   b) 6.
   c) 7.
   d) 8.
   e) 9.

2. **(Cesgranrio) Manter uma televisão ligada três horas por dia, durante 30 dias, consome 9,9 kWh de energia. Quantos kWh de energia serão consumidos por uma TV que permanecer ligada quatro horas por dia, durante 20 dias?**
   a) 6,6.
   b) 6,8.
   c) 7,2.
   d) 8,8.
   e) 9,2.

3. **(Cesgranrio) A produção de 1.200 garrafas plásticas de meio litro consome 720 kWh de energia. Quantos kWh de energia são necessários para produzir 1.950 garrafas plásticas de meio litro?**
   a) 1.170.
   b) 1.230.
   c) 1.340.
   d) 1.430.
   e) 1.470.

4. **(FCC) Quatro torneiras iguais despejam um total de 2.800 litros de água em duas horas. Calcular, em quantas horas, três dessas torneiras despejam um total de 2.100 litros de água.**
   a) 1.
   b) 2.
   c) 3.
   d) 4,5.
   e) 5.

5. **(Vunesp) Uma bicicleta tem uma roda de 40 cm de raio e a outra de 50 cm de raio. Sabendo que a roda maior dá 120 voltas para fazer certo percurso, quantas voltas dará a roda menor, para fazer 80 % do mesmo percurso?**
   a) 78,8.
   b) 187,5.
   c) 120.
   d) 96.
   e) 130.

6. **(Cesgranrio) Em um canteiro de obras, seis pedreiros, trabalhando 12 horas por dia, levam nove dias para fazer uma certa tarefa. Considerando-se que todos os pedreiros têm a mesma capacidade de trabalho e que essa capacidade é a mesma todos os dias, quantos pedreiros fariam a mesma tarefa, trabalhando nove horas por dia, durante 18 dias?**
   a) 4.
   b) 5.
   c) 6.
   d) 8.
   e) 9.

7. **(FGV) Um navio com uma tripulação de 3600 homens necessita de 210000 litros de água para fazer uma viagem com duração de 35 dias. Se a quantidade de marinhei-**

ros for reduzida em 600 homens e o número de litros de água passar a ser 250000, quantos dias poderá durar essa viagem?

a) 40.
b) 50.
c) 60.
d) 80.
e) 90.

8. **(Cesgranrio) Doze pedreiros realizam uma obra em 10 dias, trabalhando 8h por dia. Quantos dias levariam 20 pedreiros trabalhando 6h por dia?**

a) 8 dias.
b) 9 dias.
c) 10 dias.
d) 7 dias.
e) 5dias.

9. **(FCC) Franco e Jade foram incumbidos de digitar as laudas de um texto. Sabe-se que ambos digitaram suas partes com velocidades constantes e que a velocidade de Franco era 80% da de Jade. Nessas condições, se Jade gastou 10 minutos para digitar três laudas, o tempo gasto por Franco para digitar 24 laudas foi:**

a) 1 hora e 15 minutos.
b) 1 hora e 20 minutos.
c) 1 hora e 30 minutos.
d) 1 hora e 40 minutos.
e) 2 horas.

10. **(FCC) Uma empresa deseja iniciar a coleta seletiva de resíduos em todas as suas unidades e, para tanto, encomendou a uma gráfica a impressão de 140 000 folhetos explicativos. A metade desses folhetos foi impressa em três dias por duas máquinas de mesmo rendimento, funcionando três horas por dia. Devido a uma avaria em uma delas, a outra deve imprimir os folhetos que faltam em dois dias. Para tanto, deve funcionar diariamente por um período de:**

a) 9 horas e meia.
b) 9 horas.
c) 8 horas e meia.
d) 8 horas.
e) 7 horas e meia.

11. **(FCC) Em três dias, 72 000 bombons são embalados, usando-se duas máquinas embaladoras funcionando oito horas por dia. Se a fábrica usar três máquinas iguais às primeiras, funcionando seis horas por dia, em quantos dias serão embalados 108 000 bombons?**

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 4,5.

12. **(PUC) Oito operários cavam um poço de 2 m de altura, 3 m de largura e 4,5 m de comprimento em 18 dias. Quantos operários serão necessários para cavar um poço de 1,5 m de altura, 4 m de largura e 6 m de comprimento, em 16 dias?**

a) 12.
b) 10.
c) 9.
d) 6.
e) 5.

13. **(FCC) Considere que a carência de um seguro-saúde é inversamente proporcional ao valor da franquia e diretamente proporcional à idade do segurado. Se o tempo de carência para um segurado de 20 anos, com uma franquia de R$1 000,00 é dois meses, o tempo de carência para um segurado de 60 anos com uma franquia de R$1 500,00 é:**

a) 6 meses.
b) 5 meses e meio.
c) 5 meses.
d) 4 meses e meio.
e) 4 meses.

14. (FCC) A impressora X é capaz de tirar um certo número de cópias de um texto em 1 hora e 15 minutos de funcionamento ininterrupto. A impressora Y, que tem 75% da capacidade de produção de X, tiraria a metade do número de cópias desse texto, se operasse ininterruptamente durante:

a) 50 minutos.
b) 1 hora.
c) 1 hora e 10 minutos.
d) 1 hora e 20 minutos.
e) 1 hora e 30 minutos.

15. (FCC) Um veículo percorre os 5/8 de uma estrada em quatro horas, à velocidade média de 75 km/h. Para percorrer o restante dessa estrada em uma hora e 30 minutos, sua velocidade média deverá ser:

a) 90 km/h.
b) 100 km/h.
c) 115 km/h.
d) 120 km/h.
e) 125 km/h.

16. (FCC) Uma impressora tem capacidade para imprimir 14 páginas por minuto em preto e 10 páginas por minuto em cores. Quanto tempo outra impressora levaria para imprimir um texto com 210 páginas em preto e 26 em cores, se sua capacidade de operação é igual a 80% da capacidade da primeira?

a) 16 minutos e 45 segundos.
b) 20 minutos.
c) 21 minutos e 25 segundos.
d) 22 minutos.
e) 24 minutos e 30 segundos.

17. (FCC) Uma impressora trabalhando continuamente emite todos os boletos de pagamento de uma empresa em três horas. Havendo um aumento de 50% no total de boletos a serem emitidos, três impressoras, iguais à primeira, trabalhando juntas poderão realizar o trabalho em 1 hora e:

a) 30 minutos.
b) 35 minutos.
c) 40 minutos.
d) 45 minutos.
e) 50 minutos.

18. (FCC) Juntas, quatro impressoras de mesma capacidade operacional são capazes de tirar 1.800 cópias iguais em 5 horas de funcionamento ininterrupto. Duas dessas impressoras tirariam a metade daquele número de cópias se operassem, juntas, por um período contínuo de:

a) 2 horas e 30 minutos.
b) 5 horas.
c) 7 horas e 30 minutos.
d) 10 horas.
e) 12 horas e 30 minutos.

19. (FCC) Dois operários, após oito dias de serviços, receberão R$4.000,00. Se cinco operários trabalharem por 12 dias, quanto será o valor recebido?

a) R$12.000,00.
b) R$15.000,00.
c) R$16.000,00.
d) R$14.000,00.
e) R$13.000,00.

20. (FCC) Um guarda em serviço percorre 22 km em dois dias, andando três horas por dia. Se ele passar a andar quatro horas por dia, mantendo o mesmo ritmo anterior, em quantos dias percorrerá 396 km?

a) 23.
b) 24.
c) 25.
d) 26.
e) 27.

21. (FCC) Pretende-se que uma máquina tire em quatro dias o mesmo número de cópias que ela já havia tirado em sete dias, operando seis horas por dia. Se sua capacidade de produção for aumentada em 2/5, então, para executar tal trabalho, ela deverá operar diariamente por um período de:

a) 7 horas e 12 minutos.
b) 7 horas e 24 minutos.
c) 7 horas e 30 minutos.
d) 7 horas e 35 minutos.
e) 7 horas e 48 minutos.

22. (Consulplan) Doze operários, em 90 dias, trabalhando oito horas por dia, fazem 36 m de certo tecido. Quantos dias levarão para fazer 12 m do mesmo tecido, com o dobro da largura, 15 operários, trabalhando seis horas diárias?

a) 12.
b) 36.
c) 64.
d) 8.
e) 6.

23. (Cesgranrio) Os desabamentos, em sua maioria, são causados por grande acúmulo de lixo nas encostas dos morros. Se 10 pessoas retiram 135 t (toneladas) de lixo em nove dias, quantas toneladas serão retiradas por 40 pessoas, em 30 dias?

a) 140 t.
b) 150 t.
c) 160 t.
d) 170 t.
e) 180 t.

24. (Cesgranrio) Para armar um circo, 50 homens levam dois dias, trabalhando nove horas por dia. Com a dispensa de 20 homens, em quantos dias o circo será armado, trabalhando-se 10 horas por dia?

a) 7 dias.
b) 6 dias.
c) 5 dias.
d) 4 dias.
e) 3 dias.

25. (FCC) Doze pedreiros fizeram cinco barracões em 30 dias, trabalhando seis horas por dia. O número de horas, por dia, que deverão trabalhar 18 pedreiros para fazerem 10 barracões em 20 dias é:

a) 8.
b) 9.
c) 10.
d) 12.
e) 15.

26. (FGV) Paulo percorre 4320 km em seu automóvel, durante cinco dias, rodando oito horas por dia. Calcule quantas horas diárias deverá Paulo rodar com o mesmo veículo para percorrer 2916 km em três dias, mantidas as mesmas condições.

a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

27. (FGV) Num programa de reflorestamento de certa região, quatro homens, trabalhando oito horas por dia, plantaram, em 10 dias, 6.000 mudas. Quantas horas por dia terão que trabalhar seis homens para plantar 9.000 mudas, em apenas oito dias?

a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

28. (FCC) Cinco tratores iguais preparam para plantação um terreno de 20 hectares, trabalhando oito horas por dia durante sete dias. Quantas horas por dia precisam trabalhar 14 tratores para preparar 54 hectares de terreno em seis dias?

a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

29. (EPCAR) Uma fábrica recebeu uma encomenda de 50 aviões. A fábrica montou os aviões em cinco dias, utilizando seis robôs de mesmo rendimento, que trabalharam oito horas por dia. Uma nova encomenda foi feita, desta vez 60 aviões. Nessa ocasião, um dos robôs não participou da montagem. Para atender o cliente, a fábrica trabalhou 12 horas por dia. O número de dias necessários para que a fábrica entregasse as duas encomendas foi:

a) exatamente 10.
b) mais de 10.
c) entre 9 e 10.
d) exatamente 9.
e) menos de 9.

30. (PUC) Um grupo de jovens, em 15 dias, fabricam 300 colares de 1,20 m cada. Quantos colares de 1,25 m serão fabricados em 5 dias?

a) 84.
b) 88.
c) 96.
d) 104.
e) 112.

31. (Cesgranrio) Dois pedreiros levam nove dias para construir um muro com 2 m de altura. Trabalhando três pedreiros e aumentando a altura para 4 m, qual será o tempo necessário para completar esse muro?

a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.
e) 14.

32. (FCC) Um caminhão andando a uma velocidade média de 50 km/h, durante seis horas por dia, viaja do Rio a Recife em nove dias. Na volta, a velocidade média foi de 45 km/h, e o motorista só dirigiu cinco horas por dia. Em quantos dias foi feita a viagem de volta? (Considere: trajeto de ida = trajeto de volta)

a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 14.
e) 15.

33. (FCC) Três máquinas, funcionando 10 horas por dia, durante quatro dias, imprimem 60.000 folhas. Admitindo-se que uma das máquinas não esteja funcionando e havendo necessidade de imprimir, em seis dias, 120.000 folhas, o número de horas por dia que cada uma das máquinas restantes deve funcionar é:

a) 10.
b) 15.
c) 20.
d) 24.
e) 25.

34. (Cesgranrio) Em um mês, 15 homens, trabalhando oito horas por dia, pavimentaram 1200 m de uma estrada. No mês seguinte, quantos homens serão necessários para pavimentar 1500 m dessa estrada trabalhando seis horas por dia?
a) 18.
b) 20.
c) 25.
d) 30.
e) 32.

35. (FCC) Para abrir uma valeta de 300 m de comprimento por 2 m de profundidade e 80 cm de largura, 25 operários da Cedae levaram 10 dias. Se aumentarmos de 1/5 do número de operários, a profundidade passar para 3 m e a largura diminuir de 1/4 de sua medida, o tempo necessário para abrir 160 m de valeta será de:
a) 3 dias.
b) 5 dias.
c) 6 dias.
d) 7 dias.
e) 8 dias.

36. (FCC) Um grupo de 18 homens pretende construir um muro em 15 dias. Ao final de 10 dias perceberam que só haviam realizado 2/5 da obra. Se o grupo for reforçado com mais 12 homens, quanto tempo a mais que o pretendido levarão para concluir a obra?
a) 4.
b) 13.
c) 14.
d) 15.
e) 16.

37. (FEC) Doze escavadeiras cavam 1400 m^2 de um terreno em quatro dias. Em quantos dias oito escavadeiras cavarão 2100 m^2 de um terreno cuja dureza é 2/3 da dureza do outro terreno?
a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

38. (FCC) Vinte pedreiros constroem 270 metros de muro em cinco dias, trabalhando oito horas por dia. Quantos metros de muro, seis pedreiros, com o dobro da atividade dos primeiros, construirão trabalhando quatro horas por dia, durante 25 dias?
a) 390 m.
b) 395 m.
c) 400 m.
d) 405 m.
e) 410 m.

39. (Cesgranrio) Alfredo abate 240 frangos em três dias trabalhando cinco horas por dia. Já Pedro abate 600 frangos trabalhando seis horas por dia, em quatro dias. Se os dois trabalham juntos quatro horas por dia, em quanto tempo abaterão 2460 frangos?
a) 12.
b) 13.
c) 14.
d) 15.
e) 16.

40. **(PUC) Um pastor possui 16 ovelhas e ração suficiente para alimentá-las durante 19 dias. Após quatro dias, um bando de lobos matou seis ovelhas e após três dias desse evento o pastor adquiriu algumas ovelhas, constatando-se que a ração restante daria para alimentar o novo rebanho por mais 15 dias. Quantas ovelhas foram adquiridas pelo pastor?**

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 6.

Gabaritos:

1. E
2. D
3. A
4. B
5. C
6. A
7. B
8. A
9. D
10. B
11. D
12. A
13. E
14. A
15. D
16. D
17. A
18. B
19. B
20. E
21. C
22. C
23. E
24. E
25. D
26. D
27. E
28. D
29. E
30. C
31. C
32. C
33. C
34. C
35. B
36. A
37. A
38. D
39. D
40. D

Capítulo 23
Porcentagens

Exercícios propostos

1. **(Fuvest) Um recipiente contém uma mistura de leite natural e de leite de soja num total de 200 litros, dos quais 25% são de leite natural. Qual é a quantidade de leite de soja que deve ser acrescentada a essa mistura para que ela venha a conter 20% de leite natural?**

a) 40.
b) 43.
c) 48.
d) 50.
e) 55.

2. **(FGV) Em 1º/03/2011, um artigo que custava R$250,00 teve seu preço diminuído em *p*% do seu valor. Em 1/04/2011, o novo preço foi novamente diminuído em *p*% do seu valor, passando a custar R$211,60. O preço desse artigo em 31/032011 era:**

a) R$225,80.
b) R$228,00.
c) R$228,60.
d) R$230,00.
e) R$230,80.

3. (Unesp) Entre 10 de fevereiro e 10 de novembro de 2010 o preço do quilograma de mercadorias num determinado "sacolão" sofreu um aumento de 275%. Se o preço do quilograma em 10 de novembro era de R\$67,50, qual era o preço em 10 de fevereiro?

a) R\$17,00.
b) R\$18,00.
c) R\$18,50.
d) R\$19,00.
e) R\$19,50.

4. (FGV) Um indivíduo, ao engordar, passou a ter 38% a mais em seu peso. Se tivesse engordado de tal maneira a aumentar seu peso em apenas 15%, estaria pesando 18,4 kg a menos. Qual era seu peso original, em quilogramas?

a) 40.
b) 50.
c) 60.
d) 70.
e) 80.

5. (PUC) Em certa comunidade existem 200.000 professores de 1º e 2º graus que trabalham na rede oficial do Estado, 25.000 professores de 1º e 2º graus que trabalham na rede particular de ensino e 12.000 professores de 3º grau. Se 2,5% dos professores da rede oficial trabalham na rede particular, se 0,25% dos professores da rede oficial trabalham no 3º grau, e se 2% dos professores da rede particular trabalham no 3º grau, quantos professores possui essa comunidade, se apenas 200 professores trabalham, simultaneamente, na rede pública, particular, e no 3º grau?

a) 213200.
b) 231200.
c) 212300.
d) 223100.
e) 231000.

6. (ESPM) O preço do papel sulfite, em relação ao primeiro semestre de 2011, teve um aumento de 40% em agosto e outro de 32% em setembro. No mês de novembro, teve um desconto de 25%. Qual seria o aumento do papel se ele fosse único?

a) 37%.
b) 38,6%.
c) 36,8%.
d) 35,4%.
e) 34,5%.

7. (Cesgranrio) O abatimento que se faz sobre R\$30.000,00 quando se concede um desconto de 20% e, a seguir, mais um desconto de 5% é:

a) R\$7.200,00.
b) R\$6.200,00.
c) R\$5.200,00.
d) R\$8.200,00.
e) R\$8.400,00.

8. (FCC/TRF14ª) Sistematicamente, a cada início de mês, certo Técnico Administrativo entrega a um supervisor demonstrativos sobre serviços executados em obras e sobre a compra de equipamentos diversos. Na análise dos demonstrativos relativos aos meses de julho, agosto e setembro de 2009, observou-se que:

- **40% do total de demonstrativos do mês de julho eram referentes a compras de equipamentos diversos;**
- **em agosto e setembro, as quantidades de demonstrativos referentes a serviços executados aumentaram 20% em relação ao mês anterior, enquanto as quantidades dos relativos a compras de equipamentos diversos diminuíram 20% em relação ao mês anterior.**

Assim sendo, relativamente ao total de demonstrativos do mês de julho, o total de setembro

a) manteve-se constante.
b) aumentou em 1,2%.
c) diminuiu em 1,2%.
d) aumentou em 12%.
e) diminuiu em 12%.

9. (Cesgranrio) Apenas para decolar e pousar, um certo tipo de avião consome, em média, 1.920 litros de combustível. Sabendo-se que isso representa 80% de todo o combustível que ele gasta em uma viagem entre as cidades A e B, é correto afirmar que o número de litros consumidos numa dessas viagens é:

a) 2.100.
b) 2.150.
c) 2.200.
d) 2.350.
e) 2.400.

10. (FCC) Dos 120 funcionários convidados para assistir a uma palestra sobre doenças sexualmente transmissíveis, somente 72 compareceram. Em relação ao total de funcionários convidados, esse número representa:

a) 45%.
b) 50%.
c) 55%.
d) 60%.
e) 65%.

11. (MULT) 0,04% de 10.050 é equivalente a:

a) 420.
b) 402.
c) 40,2.
d) 4,02.
e) 0,402.

12. (FGV) Uma empresa tem a matriz em Blumenau e filiais em Joinville e Florianópolis. 50% dos empregados trabalham na matriz e 30%, em Joinville. São mulheres 40% dos funcionários da empresa, 10% dos funcionários da matriz e 25% dos funcionários de Florianópolis. Quantos dos funcionários de Joinville são mulheres?

a) 5%.
b) 20%.
c) 30%.
d) 50%.
e) 100%.

13. (FGV) Uma pesquisa mostrou que 80 entre cada grupo de 2000 habitantes de uma cidade tinha mais de 60 anos. A porcentagem de pessoas com no máximo 60 anos é:

a) 96%.
b) 90%.
c) 80%.
d) 4%.
e) 2%.

14. (FJPF) Um guarda verificou que das 175 pessoas identificadas por ele numa determinada semana, apenas 42 não estavam credenciadas. O percentual de pessoas credenciadas em relação ao total de pessoas identificadas corresponde a:

a) 78%.
b) 76%.
c) 74%.
d) 72%.
e) 70%.

15. (NCE) Num certo município a tarifa básica de ônibus subiu de R\$0,50 para R\$0,65. O aumento percentual foi de:

a) 1,5%.
b) 3%.
c) 10%.
d) 15%.
e) 30%.

16. (NCE) Um cofre contém apenas anéis e brincos, de ouro ou de prata. Sabe-se que 80% dos anéis são de prata e 10% das joias são brincos. A porcentagem de joias desse cofre que são anéis de ouro é:

a) 90%.
b) 63%.
c) 30%.
d) 18%.
e) 10%.

17. (Cesgranrio) Em uma empresa, a razão do número de empregados homens para o de mulheres é $\frac{3}{7}$. Portanto, a porcentagem de homens empregados nessa empresa é:

a) 30%.
b) 43%.
c) 50%.
d) 70%.
e) 75%.

18. (Cesgranrio) Em uma escola, 60% dos estudantes são do sexo masculino e 30% dos estudantes usam óculos. Das estudantes do sexo feminino, 25% usam óculos. Qual a porcentagem aproximada de estudantes do sexo feminino, entre os estudantes que usam óculos?

a) 10%.
b) 15%.
c) 25%.
d) 33%.
e) 67%.

19. (FCC) Em uma eleição para a diretoria de um clube, concorreram três candidatos, e a porcentagem do total de votos válidos que cada um recebeu dos 6.439 votantes é mostrada na tabela a seguir.

Candidato	Votos válidos (%)
João Pedro	20
José Plínio	30
Júlio Paulo	50

Se nessa eleição houve 132 votos nulos e 257 em branco, considerados não válidos, então

a) João Pedro obteve um total de 1 200 votos.
b) José Plínio obteve 620 votos a mais que João Pedro.
c) Júlio Paulo obteve 1 210 votos a mais que José Plínio.
d) o último colocado recebeu 2 000 votos a menos do que o primeiro.
e) o primeiro colocado recebeu 1 010 votos a mais do que o segundo.

20. (Cesgranrio) Veja as três afirmações no quadro a seguir.

I.	$\frac{3}{7}$ **de 28 = 12**
II.	**10% de 6.000 = 600**
III.	**1% de 3.000 = 300**

É(São) verdadeira(s) a(s) afirmação(ões):

a) I, somente.
b) I e II, somente.
c) I e III, somente.
d) II e III, somente.
e) I, II e III.

21. (Cesgranrio) De cada R$100,00 do lucro de certa empresa, R$20,00 vinham das vendas no mercado interno e R$80,00, de exportações. Se o valor referente às exportações fosse reduzido em 10%, o lucro total dessa empresa se manteria inalterado se as vendas no mercado interno aumentassem em:

a) 8%.
b) 10%.
c) 20%.
d) 34%.
e) 40%.

"Quanto maior a compra, maior o desconto. Lojas aderem ao abatimento progressivo. (...) Loja L.B.D.
– Na compra de peças que custam R$49,90, o cliente paga R$39,50 cada uma, se levar duas; a partir de três peças, cada uma sai por R$29,60."

Jornal O Globo, 22 abr. 2006

22. (Cesgranrio) Um cliente que comprar três ou mais dessas peças durante a promoção das Lojas L. B. D. receberá, em cada peça, um desconto de, aproximadamente:

a) 20,8%.
b) 23,3%.
c) 31,2%.
d) 40,7%.
e) 42,5%.

23. (Cesgranrio) Segundo o Departamento Nacional de Infraestrutura de Transporte, a sobrecarga é uma das principais causas de acidentes com caminhões nas estradas, estando relacionada a 60% dos acidentes rodoviários que envolvem caminhões. Se, dos 180.000 acidentes rodoviários que ocorrem por ano, 27% envolvem caminhões, em quantos desses acidentes há problemas de sobrecarga?

a) 16.200.
b) 29.160.
c) 48.600.
d) 54.240.
e) 108.000.

24. (FCC) Em dezembro de 2005, a análise de uma amostra da água de um reservatório acusou um aumento de 18% de impurezas, em relação ao mês anterior. Em janeiro de 2006, analisada outra amostra do mesmo reservatório, observou-se que houve uma redução de 5% de impurezas em relação às detectadas em dezembro. Relativamente ao mês de novembro, é correto afirmar que, em janeiro, as impurezas aumentaram em:

a) 13%.
b) 12,5%.
c) 12,1%.
d) 12%.
e) 11,8%.

25. (FCC) Com a implantação de um sistema informatizado estima-se que a secretaria de uma escola irá transferir para disquete 30% do arquivo morto no primeiro ano, e 40% do que sobrar ao final do segundo ano. Confirmada a estimativa ao final de dois anos, pode-se dizer que a escola terá reduzido seu arquivo morto em:

a) 30%.
b) 40%.
c) 58%.
d) 70%.
e) 88%.

26. (FCC) Uma certa quantidade de dados cadastrais está armazenada em dois disquetes e em discos compactos (CDs). A razão entre o número de disquetes e de discos compactos, nessa ordem, é $\frac{3}{2}$. Em relação ao total desses objetos, a porcentagem de:

a) disquetes é 30%.
b) discos compactos é 25%.
c) disquetes é 60%.
d) discos compactos é 30%.
e) disquetes é 75%.

27. (FCC) Um ciclista deseja percorrer uma distância de 31,25 km. Se percorrer 500 m a cada minuto, que porcentagem do total terá percorrido em $\frac{1}{4}$ de hora?

a) 20%.
b) 21%.
c) 22%.
d) 23%.
e) 24%.

28. (FCC) A tabela indica o número de crianças nascidas vivas em um município brasileiro.

Ano	**Crianças nascidas vivas**
2000	130
2001	125
2002	130
2003	143

Se toda criança deve tomar uma determinada vacina ao completar dois anos de vida, em relação ao total mínimo de vacinas que o posto de saúde reservou para 2003, haverá em 2004:

a) diminuição de 2%.
b) diminuição de 3%.
c) crescimento de 1%.
d) crescimento de 3%.
e) crescimento de 4%.

29. (FCC) Alguns técnicos judiciários foram designados para prestar serviços de segurança em alguns setores da Justiça Eleitoral: X deles para executar a fiscalização de material para votação e, os Y restantes, junto aos órgãos apuradores. Se X é igual aos $\frac{3}{5}$ de Y, então, em relação ao total de agentes designados, X corresponde a:

a) 25%.
b) 37,5%.
c) 40%.
d) 60%.
e) 62,5%.

30. (FCC) Considere o seguinte texto de jornal:
"O ministro X anunciou um corte de verbas de 2,43 bilhões de dólares, o que corresponde a uma economia equivalente a 0,3% do PIB."
Dessa informação deduz-se que o PIB do país, expresso em dólares, é:

a) 128.600.000.
b) 810.000.000.
c) 128.600.000.000.
d) 810.000.000.000.
e) 890.000.000.000.

31. (FCC) Alberto recebeu R$3.600,00, mas desse dinheiro deve pagar comissões a Bruno e a Carlos. Bruno deve receber 50% do que restar após ser descontada a parte de Carlos e este deve receber 20% do que restar após ser descontada a parte de Bruno. Nessas condições, Bruno e Carlos devem receber, respectivamente:

a) 1.800 e 720 reais.
b) 1.800 e 360 reais.
c) 1.600 e 400 reais.
d) 1.440 e 720 reais.
e) 1.440 e 288 reais.

32. (FCC) O medicamento A, usado para engorda de bovinos, é ineficaz em cerca de 20% dos casos. Quando se constata sua ineficácia, pode-se tentar o medicamento B, que é ineficaz em cerca de 10% dos casos. Nessas condições, é verdade que:

a) o medicamento B é duas vezes mais eficaz que o medicamento A;
b) numa população de 20 000 bovinos, A é ineficaz para exatamente 4 000 indivíduos;
c) numa população de 16 000 bovinos, B é eficaz em cerca de 12 800 indivíduos;
d) a aplicação de A e depois de B, se o A não deu resultado, deve ser ineficaz para cerca de 2% dos indivíduos;
e) numa população de 20 000 bovinos, A é eficaz para cerca de 18 000 indivíduos.

33. (FCC) Comparando as quantidades de processos arquivados por um técnico judiciário durante três meses consecutivos, observou-se que, a cada mês, a quantidade aumentara em 20% com relação ao mês anterior. Se no terceiro mês ele arquivou 72 processos, qual o total arquivado nos três meses?

a) 182.
b) 186.
c) 192.
d) 196.
e) 198.

34. (FCC) Suponha que, em uma eleição, apenas dois candidatos concorressem ao cargo de governador. Se um deles obtivesse 48% do total de votos e o outro, 75% do número de votos recebidos pelo primeiro, então, do total de votos apurados nessa eleição, os votos não recebidos pelos candidatos corresponderiam a:

a) 16%.
b) 18%.
c) 20%.
d) 24%.
e) 26%.

35. (FCC) Do total de inscritos em um certo concurso público, 62,5% eram do sexo feminino. Se foram aprovados 42 homens e esse número corresponde a 8% dos candidatos do sexo masculino, então o total de pessoas que se inscreveram nesse concurso é:

a) 1.700.
b) 1.680.
c) 1.600.
d) 1.540.
e) 1.400.

36. (FCC) Em uma seção de um Tribunal havia um certo número de processos a serem arquivados. O número de processos arquivados por um funcionário correspondeu a $\frac{1}{4}$ do total e os arquivados por outro correspondeu a $\frac{2}{5}$ do número restante. Em relação ao número inicial, a porcentagem de processos que deixaram de ser arquivados foi:

a) 35%.
b) 42%.
c) 45%.
d) 50%.
e) 52%.

37. (FCC) Paulo digitou $\frac{1}{5}$ das X páginas de um texto e Fábio digitou $\frac{1}{4}$ do número de páginas restantes. A porcentagem de X que deixaram de ser digitadas é

a) 20%.
b) 25%.
c) 45%.
d) 50%.
e) 60%.

38. (FEC) No desfile de abertura das olimpíadas de uma escola, participaram oito alunos da turma A. Se esse grupo de alunos corresponde a 20% dos alunos da turma A, o total de alunos dessa turma corresponde a:

a) 16 alunos.
b) 32 alunos.
c) 40 alunos.
d) 48 alunos.
e) 80 alunos.

39. (Cesgranrio) Um artigo é vendido à vista, com desconto de 20% no preço; ou a prazo, para pagamento integral, sem desconto e "sem juros", um mês após a compra. Na verdade, os que optam pela compra a prazo pagam juros mensais correspondentes a:

a) 10%.
b) 15%.
c) 20%.
d) 25%.
e) 30%.

40. (CAJ) Numa loja, um aparelho de televisão que custava R$600,00 está em oferta por R$570,00. O percentual de desconto oferecido pela loja é de:

a) 10%.
b) 3,0%.
c) 8,0%.
d) 5,0%.
e) 15%.

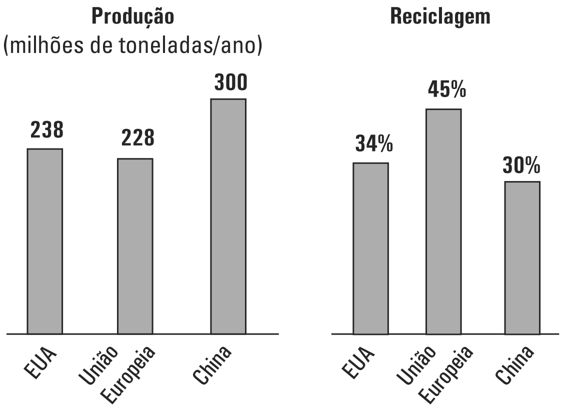
41. (Semad) Em uma loja, uma televisão custa à vista R$370,00. O gerente da loja foi autorizado a fazer queima de estoque, colocando todos os eletrodomésticos em promoção. Se, no preço da televisão, foi concedido o desconto de 20%, que equivale, aproximadamente, a R$74,00, então podemos afirmar que o valor da televisão com o desconto passou a ser de:

a) R$74,00.
b) R$296,00.
c) R$300,00.
d) R$304,00.
e) R$370,00.

42. **(FEC) Em um supermercado, um produto cujo preço normal é de R$0,59 a unidade, está sendo oferecido em promoção, em embalagem com seis unidades, por R$3,36. Nessa promoção, o desconto oferecido em cada unidade do produto é de:**
a) R$0,18.
b) R$1,80.
c) R$0,30.
d) R$0,03.
e) R$2,77.

43. **(FEC) Para aumentar as vendas durante este mês, uma loja oferece desconto de 10% em todos os seus produtos, independente da forma de pagamento. Especialmente para os ventiladores, foi estabelecido um segundo desconto, também de 10%, para as contas pagas á vista. Um ventilador que sem nenhum desconto custava R$80,00, se pago a vista, nessa loja, durante este mês, custará:**
a) R$72,00.
b) R$64,00.
c) R$60,00.
d) R$64,80.
e) R$72,80.

44. **(Cesgranrio) Um investidor aplicou certa quantia em um fundo de ações. Nesse fundo, 1/3 das ações eram da empresa A, 1/2 eram da empresa B e as restantes, da empresa C. Em um ano, o valor das ações da empresa A aumentou 20%, o das ações da empresa B diminuiu 30% e o das ações da empresa C aumentou 17%. Em relação à quantia total aplicada, ao final desse ano, esse investidor obteve:**
a) lucro de 10,3%.
b) lucro de 7,0%.
c) prejuízo de 5,5%.
d) prejuízo de 12,4%.
e) prejuízo de 16,5%.



Revista Veja. São Paulo: Abril, 2249. ed, ano 44, n. 52, 28 dez. 2011, p. 23. Edição especial. Sustentabilidade. Adaptado.

45. **(Cesgranrio) Esses gráficos apresentam dados sobre a produção e a reciclagem de lixo em algumas regiões do planeta. Baseando-se nos dados apresentados, qual é, em milhões de toneladas, a diferença entre as quantidades de lixo recicladas na China e nos Estados Unidos em um ano?**

a) 12,60.
b) 21,68.
c) 24,80.
d) 9,08.
e) 10,92.

Gabaritos:

1. D	16. D	31. E
2. D	17. A	32. D
3. B	18. D	33. A
4. E	19. C	34. A
5. B	20. B	35. E
6. B	21. E	36. C
7. A	22. D	37. E
8. D	23. B	38. C
9. E	24. C	39. D
10. D	25. C	40. D
11. D	26. E	41. B
12. E	27. B	42. D
13. A	28. E	43. D
14. B	29. B	44. C
15. E	30. C	45. D

Capítulo 24

Operações sobre mercadorias

Exercícios propostos

1. **(FEC) Um carro foi vendido por R$22.400,00, produzindo um lucro de 25% sobre o seu preço de custo. Qual foi o seu preço de custo?**

a) R$20.760,00.
b) R$20.000,00.
c) R$19.400,00.
d) R$17.920,00.
e) R$16.840,00.

2. **(Vunesp) Um aparelho de TV foi vendido por R$540,00, acarretando, com isso, um prejuízo de 20% sobre o seu preço de compra. Por quanto foi comprado esse aparelho de TV?**

a) R$432,00.
b) R$590,00.
c) R$648,00.
d) R$660,00.
e) R$675,00.

3. **(ESAF) Um computador foi adquirido por R$935,00 e deverá ser vendido apresentando um lucro de 15% sobre o seu preço de revenda. Por quanto esse computador será revendido?**
   a) R$1.209,00.
   b) R$1.075,25.
   c) R$1.100,00.
   d) R$1.122,60.
   e) R$1.309,80.

4. **(Esaf) Uma bicicleta foi comprada por R$360,00 e, como não conseguiu ser vendida com certo lucro, então, o jeito foi vendê-la, produzindo um prejuízo de 25% sobre o seu preço de venda. Por quanto ela foi vendida?**
   a) R$264,00.
   b) R$224,00.
   c) R$240,00.
   d) R$270,00.
   e) R$288,00.

5. **(FCC) Um par de tênis custa para um lojista R$84,00, se adquirido diretamente na indústria que o produziu. Se a política de vendas dessa loja costuma baixar seus produtos com um lucro de 25% sobre os seus preços de venda, então, por quanto esse par de tênis será vendido nessa loja?**
   a) R$108,00.
   b) R$100,00.
   c) R$118,00.
   d) R$112,00.
   e) R$120,00.

6. **(Esaf) Uma máquina de lavar roupas custou, na fábrica, R$693,00, e como não conseguiu ser vendida com lucro, produziu, então, na sua venda, um prejuízo de 10% sobre o preço pelo qual foi vendida. Calcule, assim, por quanto essa máquina de lavar foi vendida.**
   a) R$618,00.
   b) R$623,70.
   c) R$630,00.
   d) R$643,70.
   e) R$638,20.

7. **(FCC) Um comerciante compra um artigo por R$80,00 e pretende vendê-lo de forma a lucrar exatamente 30% sobre o valor pago, mesmo se der um desconto de 20% ao cliente. Esse artigo deverá ser anunciado por:**
   a) R$110,00.
   b) R$125,00.
   c) R$130,00.
   d) R$146,00.
   e) R$150,00.

8. **(Cesgranrio) Um revendedor de carros usados comprou um automóvel por R$11.000,00. Se ele desejar ter um lucro de 16% sobre o preço de compra, por quanto deverá revender esse carro, em reais?**
   a) 11.860,00.
   b) 12.500,00.
   c) 12.760,00.
   d) 12.860,00.
   e) 13.200,00.

9. **(NCE) Um comerciante pretende dar aos clientes um desconto de 18% sobre o preço marcado de certo artigo e ainda lucrar, na venda de cada unidade desse artigo, 20% sobre o seu custo. Se ele comprou cada artigo por R$41,00, então deverá anunciá-lo ao preço unitário de:**
   a) R$58,00.
   b) R$60,00.
   c) R$61,00.
   d) R$64,00.
   e) R$65,00.

10. (FCC) Um comerciante compra certo artigo ao preço unitário de R$48,00 e o coloca à venda por um preço que lhe proporcionará uma margem de lucro de 40% sobre o preço de venda. O preço unitário de venda desse artigo é:

a) R$78,00.
b) R$80,00.
c) R$84,00.
d) R$86,00.
e) R$90,00.

11. (FCC) Em dezembro de 2006, um comerciante aumentou em 40% o preço de venda de um microcomputador. No mês seguinte, o novo preço foi diminuído em 40% e, então, o micro passou a ser vendido por R$1 411,20. Assim, antes do aumento de dezembro, tal micro era vendido por:

a) R$1.411,20.
b) R$1.590,00.
c) R$1.680,00.
d) R$1.694,40.
e) R$1.721,10.

12. (FCC) Na compra de um lote de certo tipo de camisa para vender em sua loja, um comerciante conseguiu um desconto de 25% sobre o valor a ser pago. Considere que:

- **se não tivesse recebido o desconto, o comerciante teria pago R$20,00 por camisa;**
- **ao vender as camisas em sua loja, ele pretende dar ao cliente um desconto de 28% sobre o valor marcado na etiqueta e, ainda assim, obter um lucro igual a 80% do preço de custo da camisa.**

Nessas condições, o preço que deverá estar marcado na etiqueta é:

a) R$28,50.
b) R$35,00.
c) R$37,50.
d) R$39,00.
e) R$41,50.

13. (PUC-SP) O preço de venda de um bem de consumo é R$100,00. O comerciante tem um ganho de 25% sobre o preço de custo deste bem. O valor do preço de custo é:

a) R$25,00.
b) R$70,50.
c) R$75,00.
d) R$80,00.
e) R$125,00.

14. (Cesgranrio) João vendeu dois rádios por preços iguais. Um deles foi vendido com lucro de 20% sobre o preço de custo e o outro com prejuízo de 20% sobre o preço de custo. No total, em relação ao capital investido, João:

a) lucrou 4%.
b) lucrou 2%.
c) perdeu 4%.
d) perdeu 2%.
e) não lucrou e nem perdeu.

15. (FEC) Um comerciante vendeu um produto por R$144,00, perdendo o equivalente a 10% do seu preço de custo. Qual foi o seu preço de custo?

a) R$150,00.
b) R$160,00.
c) R$168,00.
d) R$174,00.
e) R$186,00.

16. (FEC) Uma loja de departamentos coloca à venda uma determinada mercadoria com um lucro de 13% sobre o preço seu custo. Determine o preço de venda sabendo-se que essa mercadoria custou R$230,00.

a) R$259,90.
b) R$259,00.
c) R$258,90.
d) R$258,00.
e) R$257,90.

17. (FEC) O dono de uma loja de eletrodomésticos comprou uma mercadoria por R$689,00 e quer vendê-la com um lucro de 25% sobre o preço de venda. Qual deve ser o valor de venda dessa mercadoria?

a) R$918,67.
b) R$912,33.
c) R$908,17.
d) R$905,43.
e) R$904,89.

18. (Vunesp) Um aparelho de jantar foi vendido com um prejuízo de 40% sobre o preço de custo. Sabendo-se que esse aparelho custou R$300,00, qual foi o preço de venda?

a) R$195,00.
b) R$192,25.
c) R$180,00.
d) R$175,00.
e) R$170,00.

19. (FCC) Uma mercadoria cujo custo é de R$96.000,00 foi vendida com um prejuízo de 20% sobre o preço de venda. Calcule o preço de venda dessa mercadoria.

a) R$90.000,00.
b) R$80.000,00.
c) R$78.000,00.
d) R$75.000,00.
e) R$70.000,00.

20. (Iades) Se o lucro de venda de um produto é de 2/3 do preço de custo, então o lucro considerado sobre o preço de venda é de:

a) 20%.
b) 33%.
c) 40%.
d) 50%.
e) 67%.

Gabaritos:

1. D
2. E
3. C
4. E
5. D
6. C
7. C
8. C
9. B
10. B
11. C
12. C
13. D
14. E
15. B
16. A
17. A
18. C
19. B
20. C

Capítulo 25
Juros Simples

Exercícios propostos

1. **(FGV) O montante de um principal de R$300,00 em dois meses e dez dias, a juros de 10% ao mês pela convenção linear, é igual a:**
   a) R$370,00.
   b) R$372,00.
   c) R$373,00.
   d) R$375,10.
   e) R$377,10.

2. **(FGV) Um artigo é vendido, à vista, por R$150,00 ou em dois pagamentos de R$80,00 cada um: o primeiro, no ato da compra e o segundo, um mês após a compra. Os que optam pelo pagamento parcelado pagam juros mensais de taxa aproximadamente igual a:**
   a) 14,29%.
   b) 13,33%.
   c) 9,86%.
   d) 7,14%.
   e) 6,67%.

3. **(FCC) Num mesmo dia, são aplicados juros simples: $\frac{2}{5}$ de um capital a 2,5% ao mês e o restante, a 1,8% ao ano. Se decorridos dois anos e oito meses da aplicação, obtém-se um juro total de R$7.600,00, o capital inicial era:**
   a) R$12.500,00.
   b) R$12.750,00.
   c) R$14.000,00.
   d) R$14.500,00.
   e) R$14.750,00.

4. **(FCC) Um capital de R$20.000,00 foi aplicado a juro simples e, ao final de um ano e oito meses, produziu o montante de R$25.600,00. A taxa mensal dessa aplicação era de:**
   a) 1,2%.
   b) 1,4%.
   c) 1,5%.
   d) 1,8%.
   e) 2,1%.

5. **(FCC) Um capital de R$5.000,00 foi aplicado por alguns meses a juros simples, à taxa mensal de 2%. Ao final desse prazo, o montante foi retirado e aplicado à taxa mensal de 1,5%, por um período de seis meses a mais que o da primeira aplicação, produzindo juros simples no valor de R$810,00. Nessas condições, durante quantos meses esteve aplicado o capital inicial?**
   a) 7.
   b) 6.
   c) 5.
   d) 4.
   e) 3.

6. **(FCC) Um capital de R$5.000,00, aplicado a juros simples, à taxa mensal de 3%, por um prazo de um ano e três meses, produzirá um montante no valor de:**
a) R$7 225,00.
b) R$7.250,00.
c) R$7.320,00.
d) R$7.500,00.
e) R$7.550,00.

7. **(FCC) Se, ao final de um prazo de oito anos, um capital teve o seu valor duplicado, então a taxa anual de juros simples da aplicação era de:**
a) 12%.
b) 12,5%.
c) 12,75%.
d) 13%.
e) 13,5%.

8. **(FCC) Um capital esteve aplicado à taxa de 1,5% ao mês, por um período de um ano. Se ao final desse período foram obtidos juros simples num total de R$2.250,00, o valor do capital era:**
a) R$12.500,00.
b) R$14.000,00.
c) R$15.000,00.
d) R$15.750,00.
e) R$18.000,00.

9. **(FCC) Qual é o capital que, investido a juros simples e à taxa anual de 15%, se elevará a R$17.760,00 ao fim de um ano e quatro meses?**
a) R$14.500,00.
b) R$14.800,00.
c) R$15.200,00.
d) R$15.500,00.
e) R$15.600,00.

10. **(FCC) De um capital de R$10.000,00 vão ser aplicados, a juros simples, $\frac{2}{5}$ à taxa de 2% ao mês e outros 2/5 à taxa de 1,5% ao mês. Para se obter o rendimento total de R$176,00 por mês, o restante do capital deve ser aplicado à taxa mensal de:**
a) 1,75%.
b) 1,8%.
c) 1,9%.
d) 2%.
e) 2,25%.

11. **(Cesgranrio) Um investidor aplicou R$50.000,00 em um banco pelo período de 180 dias, obtendo um rendimento de R$8.250,00, na data de resgate da aplicação. Sabendo que a aplicação inicial foi feita pelo método de juros simples, a taxa equivalente anual (ano de 360 dias) correspondente a essa aplicação, também em juros simples, foi de:**
a) 33,00%.
b) 31,667%.
c) 22,00%.
d) 19,1667%.
e) 9,1667%.

12. **(FCC) Um capital de R$5.500,00 foi aplicado a juro simples e, ao final de em ano e oito meses, foi retirado o montante de R$7.040,00. A taxa mensal dessa aplicação era de:**
a) 1,8%.
b) 1,7%.
c) 1,6%.
d) 1,5%.
e) 1,4%.

13. (FEC) Quando André tinha 13 anos, seu avô depositou R$13.000,00 em uma aplicação que rendeu 18% ao ano, de juros simples, por um período de cinco anos. Após esse tempo, o avô de André utilizou o montante dessa aplicação para comprar o primeiro carro de André. O montante utilizado corresponde a:

a) R$32.000,00.
b) R$11.700,00.
c) R$23.400,00.
d) R$17.100,00.
e) R$24.700,00.

14. (PMI) O capital de R$1.500,00 foi colocado a juros (simples), a uma taxa de 4% ao ano, tendo rendido R$200,00 de juros. O tempo em que este capital ficou aplicado foi:

a) 3 anos e 4 meses.
b) 20 meses.
c) 3,5 anos.
d) 42 meses.
e) 48 meses.

15. (Cesgranrio) Uma empresa oferece aos seus clientes desconto de 10% para pagamento no ato da compra ou desconto de 5% para pagamento um mês após a compra. Para que as opções sejam indiferentes, a taxa de juros mensal praticada deve ser, aproximadamente:

a) 0,5%.
b) 3,8%.
c) 4,6%.
d) 5,0%.
e) 5,6%.

16. (FCC) Um capital foi aplicado a juros simples, à taxa anual de 36%. Para que seja possível resgatar-se o quádruplo da quantia aplicada, esse capital deverá ficar aplicado por um período mínimo de:

a) 7 anos, 6 meses e 8 dias.
b) 8 anos e 4 meses.
c) 8 anos, 10 meses e 3 dias.
d) 11 anos e 8 meses.
e) 11 anos, 1 mês e 10 dias.

17. (FGV) A diferença entre os capitais de duas pessoas é de R$20.000,00. Uma delas coloca o seu capital a 9% e a outra aplica-o na indústria, de modo que lhe renda 45%. Sabendo-se que os rendimentos são iguais, então, o sêxtuplo do menor capital subtraído do maior, é de:

a) R$30.000,00.
b) R$25.000,00.
c) R$20.000,00.
d) R$15.000,00.
e) R$5.000,00.

18. (FCC) Uma pessoa empregou todo o seu capital da seguinte maneira: metade a 4% ao ano; 1/3 a 10% a.a., e a parte restante a uma taxa tal que seu lucro total no fim de um ano, foi de $7\frac{1}{3}$ % do capital. Qual é essa taxa?

a) 4%.
b) 8%.
c) 10%.
d) 12%.
e) 14%.

19. (FCC) Um capital de R$6.300,00 foi dividido em duas partes. A primeira parte foi investida a uma taxa e 3% a.a., durante quatro anos e rendeu os mesmos juros que a segunda parte que fora investida a taxa de 2,5% a.a., por seis anos. Calcule o valor da parte maior.

a) R$3.000,00.
b) R$3.100,00.
c) R$2.900,00.
d) R$3.400,00.
e) R$3.500,00.

20. (Cesgranrio) Um capital foi colocado a taxa fixa de 3% a.a. No fim de um ano foi retirado o montante, que acrescido de 20% do seu valor é igual a R$1.854,00. Qual o capital?

a) R$2.150,00.
b) R$2.000,00.
c) R$1.800,00.
d) R$1.500,00.
e) R$1.000,00.

Gabaritos:

1. D	6. B	11. A	16. B
2. A	7. B	12. E	17. E
3. A	8. A	13. E	18. D
4. B	9. B	14. A	19. E
5. D	10. B	15. E	20. D

Capítulo 26

Descontos simples

Exercícios propostos

1. (FCC) José vai receber os R$10.000,00 da venda de seu carro em duas parcelas de R$5.000,00, sendo a primeira dentro de 30 dias, e a segunda dentro de 60 dias. Considerando uma taxa de desconto de 2% ao mês, o valor atual, em reais, que José deveria receber hoje, com a certeza de estar recebendo o mesmo valor que irá receber no parcelamento, é de:

a) 9.709,65.
b) 9.719,65.
c) 9.729,65.
d) 9.739,65.
e) 9.749,65.

2. (FCC) Uma determinada conta no valor de *x* reais oferece cinco opções diferentes de pagamento em um determinado mês:

- **Opção 1: até o dia 5 com desconto de 3%;**
- **Opção 2: do dia 6 ao dia 15 com desconto de 2,5%;**
- **Opção 3: do dia 16 ao dia 25 com desconto de 1,5%;**
- **Opção 4: do dia 26 ao dia 30 sem desconto;**
- **Opção 5: no dia 31 com acréscimo de 2%.**

Se dispomos na conta bancária de *x* reais para resgate imediato, ou *x* reais acrescido de 2% para resgate a partir do dia 20, as melhores datas para o pagamento da conta são datas que estão na:

a) opção 1.
b) opção 2.
c) opção 3.
d) opção 4.
e) opção 5.

3. **(Esaf) Utilizando o desconto racional, o valor que devo pagar por um título com vencimento daqui a seis meses, se o seu valor nominal for de $29.500,00 e eu desejo ganhar 36% ao ano, é de:**

a) $24.000,00.
b) $25.000,00.
c) $27.500,00.
d) $18.800,00.
e) $6.240,00.

4. **(Esaf) Um título no valor nominal de R$20.000,00 sofre um desconto comercial simples de R$1.800,00 três meses antes de seu vencimento. Calcule a taxa mensal de desconto aplicada.**

a) 6%.
b) 5%.
c) 4%.
d) 3,3%.
e) 3%.

5. **(Esaf) O desconto comercial simples de um título quatro meses antes do seu vencimento é de R$600,00. Considerando uma taxa de 5% ao mês, obtenha o valor correspondente no caso de um desconto racional simples.**

a) R$400,00.
b) R$500,00.
c) R$600,00.
d) R$700,00.
e) R$800,00.

6. **(FCC) Uma empresa descontou em um banco uma duplicata de R$2.000,00, 2,5 meses antes de seu vencimento, a uma taxa de desconto comercial de 4% a.m. A taxa efetiva de juros da operação foi de:**

a) 10%.
b) 10,44%.
c) 10,77%.
d) 11,11%.
e) 12,04%.

7. **(Vunesp) A P.W.U. S.A. recebe uma proposta de desconto comercial para seus títulos de crédito do Banco Aventura S.A., o qual cobrará a taxa de juros efetiva de 26% a.a., para uma antecipação de seis meses. Portanto, a taxa anual de desconto comercial requerida pelo banco é de:**

a) 22,10%.
b) 23,01%.
c) 24,73%.
d) 25,56%.
e) 26,00%.

8. **(FCC) Determinado título é descontado seis meses antes de seu vencimento à taxa de desconto comercial simples de 6% a.m. A taxa efetiva semestral correspondente a essa operação é de:**

a) 24%.
b) 32%.
c) 36%.
d) 42,50%.
e) 56,25%.

9. **(Esaf) Uma nota promissória no valor nominal de R$5.000,00 sofre um desconto comercial simples a uma taxa de desconto de 4% ao mês. Qual o valor do desconto, dado que a nota foi resgatada três meses antes do seu vencimento?**
   a) R$416,70.
   b) R$524,32.
   c) R$535,71.
   d) R$555,00.
   e) R$600,00.

10. **(Esaf) Qual o valor hoje de um título de valor nominal de R$24.000,00, vencível ao fim de seis meses, a uma taxa de 40% ao ano, considerando um desconto simples comercial?**
   a) R$19.200,00.
   b) R$20.000,00.
   c) R$20.400,00.
   d) R$21.000,00.
   e) R$21.600,00.

11. **(FCC) Em uma operação de desconto racional com antecipação de cinco meses, o valor descontado foi de R$8.000,00, e a taxa de desconto foi 5% ao mês. Qual o valor de face desse título?**
   a) R$10.000,00.
   b) R$10.666,67.
   c) R$32.000,00.
   d) R$40.000,00.
   e) R$160.000,00.

12. **(Esaf) O valor atual racional de um título é igual a ½ de seu valor nominal. Calcular a taxa de desconto sabendo-se que o pagamento desse título foi antecipado em cinco meses.**
   a) 200% a.a.
   b) 20% a.m.
   c) 25% a.m.
   d) 28% a.m.
   e) 220% a.a.

13. **(Esaf) Você possui uma duplicata cujo valor de face é de R$150,00. Essa duplicata vence em três meses. O banco com o qual você normalmente opera, além da taxa normal de desconto mensal (simples por fora), também fará uma retenção de 15% do valor de face da duplicata a título de saldo médio, permanecendo bloqueado em sua conta esse valor, desde a data do desconto até a data do vencimento da duplicata você desconte a duplicata no banco, receberá líquidos, hoje, R$105,00. A taxa de desconto que mais se aproxima da taxa praticada por este banco é:**
   a) 5,0%.
   b) 5,2%.
   c) 4,6%.
   d) 4,8%.
   e) 5,4%.

14. **(Esaf) O valor atual racional de um título cujo valor de vencimento é de $256.000,00, daqui a sete meses, sendo a taxa de juros simples utilizada para o cálculo de 4% ao mês, é:**
   a) $200.000,00.
   b) $220.000,00.
   c) $180.000,00.
   d) $190.000,00.
   e) $210.000,00.

15. (Cesgranrio) Um título de $8.000,00 sofreu um desconto racional de $2.000,00, oito meses antes de seu vencimento. Qual a taxa anual empregada?

a) 28%.
b) 37,5%.
c) 45%.
d) 50%.
e) 52,5%.

16. (Cesgranrio) Um título vale $20.000,00 no vencimento. Entretanto, poderá ser resgatado antecipadamente, com um desconto racional (por dentro) simples de 12,5% ao trimestre. Quanto tempo antes do vencimento o valor do resgate seria de $16.000,00?

a) 1,6 trimestre.
b) 4 meses.
c) 5 meses.
d) 6 meses.
e) 150 dias.

17. (Esaf) Um cheque pré-datado é adquirido com um desconto de 20% por uma empresa especializada, quatro meses antes de seu vencimento. Calcule a taxa de desconto mensal da operação considerando um desconto simples por dentro.

a) 6,25%.
b) 6%.
c) 4%.
d) 5%.
e) 5,5%.

18. (FCC) Dois títulos com valores nominais iguais são descontados, na data de hoje, em um banco que utiliza uma taxa de desconto comercial simples de 4,5% ao mês. Sabe-se que o primeiro título foi descontado 45 dias antes de seu vencimento e o segundo 60 dias antes de seu vencimento. Se a soma dos valores correspondentes aos descontos dos dois títulos foi igual a R$630,00, tem-se que o valor nominal de cada título é igual a:

a) R$3.000,00.
b) R$3.150,00.
c) R$3.500,00.
d) R$4.000,00.
e) R$4.500,00.

19. (FCC) Uma empresa desconta no Banco Alpha, em uma mesma data, dois títulos com valores nominais diferentes. O de maior valor nominal foi descontado dois meses antes de seu vencimento e o respectivo valor do desconto foi igual a R$480,00. O outro título foi descontado quatro meses antes de seu vencimento e o valor do desconto também foi de R$480,00. Sabendo-se que o Banco trabalha com uma taxa de desconto comercial simples de 30% ao ano, tem-se que a soma dos valores recebidos pela empresa, referente a estes dois títulos, na data em que ocorreram os descontos, foi de:

a) R$14.400,00.
b) R$13.440,00.
c) R$12.840,00.
d) R$12.480,00.
e) R$10.200,00.

20. (FCC) Uma empresa desconta em um banco dois títulos, na data de hoje, recebendo um total de R$13.110,00. Sabe-se que o primeiro desses títulos foi descontado três meses antes de seu vencimento, e o segundo, seis meses antes. A taxa de desconto comercial simples utilizada pelo banco foi de 36% ao ano, e o valor do desconto, correspondente ao primeiro título, foi de R$810,00. Então, o valor nominal do segundo título, em reais, é:

a) 10000.
b) 9000.
c) 8000.
d) 7500.
e) 6000.

21. **(Cesgranrio) Qual a diferença entre os descontos por fora e por dentro de um título de valor nominal de $5.508,00 pago a dois meses do vencimento, à taxa de 12% ao ano?**

a) $2,16.
b) $0,24.
c) $2,24.
d) $0,16.
e) $1,53.

22. **(Esaf) Uma empresa descontou uma duplicata em um banco que adota uma taxa de 84% a.a., e o desconto comercial simples. O valor do desconto foi de $10.164,00. Se na operação fosse adotado o desconto racional simples, o valor do desconto seria reduzido em $1.764,00. Nessas condições, o valor nominal da duplicata é de:**

a) $45.000,00.
b) $46.700,00.
c) $47.300,00.
d) $48.400,00.
e) $50.000,00.

23. **(Esaf) Uma nota promissória sofre um desconto simples comercial de R$981,00, três meses antes do seu vencimento, a uma taxa de desconto de 3% ao mês. Caso fosse um desconto simples racional, calcule o valor do desconto correspondente à mesma taxa.**

a) R$1.000,00.
b) R$950,00.
c) R$927,30.
d) R$920,00.
e) R$900,00.

24. **(Esaf) Um título no valor nominal de R$10.900,00 deve sofrer um desconto comercial simples de R$981,00 três meses antes do seu vencimento. Todavia uma negociação levou a troca do desconto comercial por um desconto racional simples. Calcule o novo desconto, considerando a mesma taxa de desconto mensal.**

a) R$890,00.
b) R$900,00.
c) R$924,96.
d) R$981,00.
e) R$1.090,00.

25. **(Esaf) Uma empresa deseja realizar uma operação de desconto de um título no valor de R$3.200,00, a dois meses de seu vencimento. Qual o valor líquido recebido, considerando que, pela operação, o Banco cobra:**
Taxa de desconto comercial: 4% a.m.;
Taxa de abertura de crédito: R$3,50;
Taxa administrativa: 1% do valor nominal.

a) R$2.608,50.
b) R$2.708,50.
c) R$2.808,50.
d) R$2.908,50.
e) R$3.212,50.

26. **(FCC) Uma promissória de R$240.000,00 é descontada em um banco 60 dias antes do vencimento pelo desconto comercial simples, aplicando-se uma determinada taxa de desconto. Se a operação resulta em uma taxa linear efetiva de desconto de 12,5% ao mês, a taxa mensal de desconto comercial simples praticada pelo banco é de:**

a) 15,0%.
b) 10,0%.
c) 9,5%.
d) 8,5%.
e) 6,5%.

27. **(FCC) Uma empresa desconta em um banco um título com vencimento daqui a quatro meses, recebendo no ato o valor de R$19 800,00. Sabe-se que a operação utilizada foi a de desconto comercial simples. Caso tivesse sido aplicada a de desconto racional simples, com a mesma taxa de desconto anterior *i* (*i* > 0), o valor que a empresa receberia seria de R$20 000,00. O valor nominal deste título é de:**
a) R$21 800,00.
b) R$22 000,00.
c) R$22 400,00.
d) R$22 800,00.
e) R$24 000,00.

28. **(FCC) Uma empresa dispõe de uma duplicata de R$12.000,00, com vencimento em três meses. Ao procurar um banco e propor o desconto da duplicata, é informado que a taxa de desconto simples por fora é de 10% a.m. e ainda há a cobrança de uma taxa fixa de R$20,00 (cobrada na data do desconto) a título de administração. Que taxa de juros simples mensal equivalente foi cobrada pelo banco, referente ao adiantamento dos recursos?**
a) 14,10%.
b) 14,40%.
c) 14,15%.
d) 14,69%.
e) 14,50%.

29. **(Esaf) Marcos descontou um título 45 dias antes de seu vencimento e recebeu R$370.000,000. A taxa de desconto comercial simples foi de 60% ao ano. Assim, o valor nominal do título e o valor mais próximo da taxa efetiva de juros da operação são, respectivamente, iguais a:**
a) R$550.000,00 e 3,4% ao mês.
b) R$400.000,00 e 5,4% ao mês.
c) R$450.000,00 e 64,8% ao ano.
d) R$400.000,00 e 60% ao ano.
e) R$570.000,00 e 5,4% ao mês.

30. **(Esaf) Uma empresa desconta um título no valor de face de R$10.000,00 em um banco, 30 dias antes do vencimento, obtendo um desconto de 3% do valor nominal do título. Se o banco cobrasse ainda uma taxa de abertura de crédito de R$50,00 e 1% do valor nominal do título como imposto financeiro, no momento do desconto do título, qual seria o custo do empréstimo, em termos de taxa de juros real paga pela empresa?**
a) 3,09% ao mês.
b) 4,00% ao mês.
c) 4,71% ao mês.
d) 4,59% ao mês.
e) 4,50% ao mês.

Gabaritos:

1. A	11. A	21. A
2. C	12. B	22. D
3. B	13. A	23. E
4. E	14. A	24. B
5. B	15. D	25. D
6. D	16. D	26. B
7. B	17. A	27. B
8. E	18. D	28. B
9. E	19. B	29. E
10. A	20. E	30. C

página deixada intencionalmente em branco