DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Até este momento, estamos trabalhando com funções polinomiais de segundo grau escritas na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. No entanto, existem outras maneiras de escrever uma função quadrática, que podem ser mais vantajosas dependendo do contexto no qual estamos trabalhando.

A **forma parcelada**, com a qual trabalhamos até aqui, tem a vantagem de nos dizer explicitamente quem são os coeficientes a, b e c e, como já vimos, estes coeficientes nos dão informações valiosas a respeito da parábola associada à função em questão.

Para escrevermos a função do segundo grau na forma parcelada, precisamos conhecer 3 pontos da parábola e resolver um sistema de 3 equações e 3 variáveis (os valores de a, b e c).

Agora, vamos definir a **forma fatorada** de uma função de segundo grau:

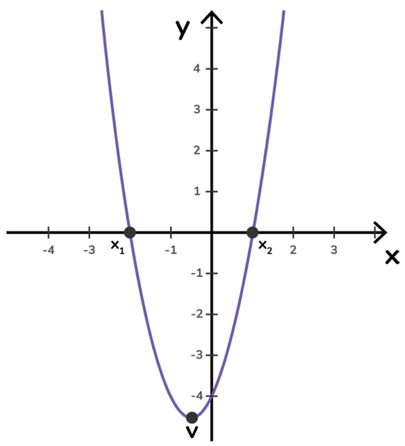
Seja f uma função polinomial de segundo grau e sejam x_1, x_2 suas raízes. Então, a forma fatorada de f é $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

A forma fatorada de uma função é muito útil quando conhecemos as raízes da mesma. Essa forma não nos mostra, no entanto, quais os valores dos coeficientes b e c, de forma que não é vantajoso usar a forma fatorada para analisar o gráfico de f. A seguir, definimos a última forma de representação que estudaremos, a chamada **forma canônica**:

Seja f uma função polinomial de segundo grau e $V = (x_V, y_V)$ seu vértice. Então, a forma canônica de f é $y - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$.

A forma canônica de uma função quadrática é usada quando conhecemos as coordenadas do vértice. Assim como a forma fatorada da função, a forma canônica não nos mostra explicitamente os valores de b e c.

Exemplo: Encontre a forma fatorada e a forma canônica da função $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$.



Para encontrarmos a forma fatorada, precisamos conhecer as raízes de f. Então, pela Fórmula de Bhaskara, temos:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+6}{4} = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-6}{4} = -2$$

Assim, a forma fatorada de f é $f(x) = 2.(x-1).\big(x-(-2)\big)$, isto é, $f(x) = 2.(x-1).(x+2)$.

Agora, vamos encontrar a forma canônica de f. Para isso, precisamos encontrar as coordenadas do vértice V. Já vimos que $V = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Assim, substituindo os valores de a, b e c temos $V = \left(\frac{-2}{4}, -\frac{36}{8}\right) = \left(\frac{-1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$. Logo, a forma canônica de f é $y - \frac{(-9)}{2} = 2\left(x - \frac{(-1)}{2}\right) \Rightarrow y + \frac{9}{2} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

FUNÇÕES DEFINIDAS POR VÁRIAS SENTENÇAS

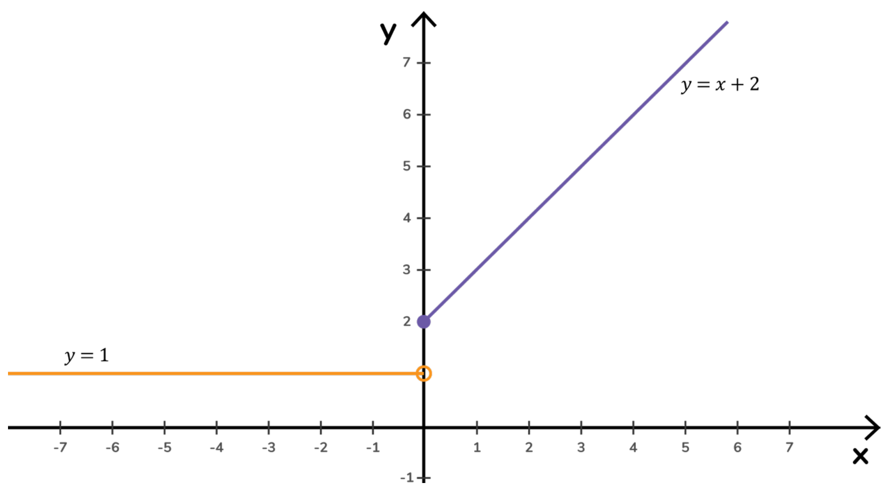
Agora, vamos nos dedicar ao estudo de um tipo especial de funções: as **funções definidas por várias sentenças**, definida a seguir:

Uma função é dita definida por várias sentenças se tiver duas ou mais leis de formação.

Exemplo: A função f abaixo é definida por várias sentenças, pois possui duas leis de formação:

- Para os valores de x maiores ou iguais a zero, temos $f(x) = x + 2$;
- Para os valores de x menores que zero, temos $f(x) = 1$.

Observe o gráfico de f:



A bola aberta no ponto (0,1) no gráfico do exemplo anterior indica que o valor da função em $x = 0$ não é 1 e a bola fechada no ponto (0,2) do gráfico indica que o valor da função em $x = 0$ é 2.

Sempre que tivermos uma função definida por várias sentenças, devemos usar as bolas abertas e/ou fechadas no ponto onde as sentenças se "colam", para que não haja confusão na análise do gráfico. Preste bastante atenção nesse fato durante a resolução do exercício.

Quando trabalhamos com funções definidas por sentenças, é importante tomar cuidado ao determinar o domínio e a imagem da função. A seguir, definimos o domínio e a imagem de uma função definida por várias sentenças:

O domínio de uma função definida por várias sentenças é dado pela união dos domínios de suas sentenças.

A imagem de uma função definida por várias sentenças é dada pela união das imagens de suas sentenças.

Exemplo:

Determine o domínio e a imagem da função $f(x) = \begin{cases} x^2, se -2 \leq x < 0 \\ x+2, se\ 0 \leq x < 3 \\ 2, se\ 3 \leq x < 4 \\ 5, se\ 6 \leq x < 7 \end{cases}$.

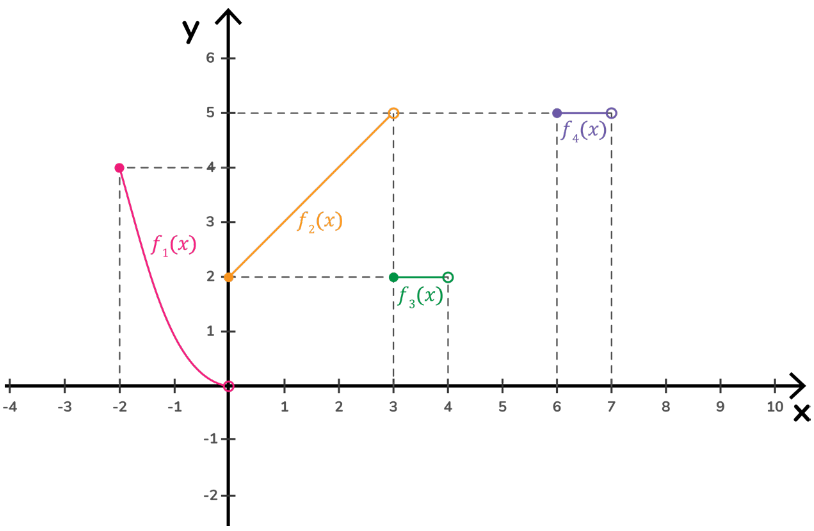
Antes de começarmos a resolver o exercício, vamos nomear as sentenças que definem f por $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x + 2$, $f_3(x) = 2$ e $f_4(x) = 5$, respeitando os domínios indicados acima.

Agora, para encontrarmos o domínio de f, vamos fazer a união dos domínios de suas sentenças, isto é,

$$Dom(f) = Dom(f_1) \cup Dom(f_2) \cup Dom(f_3) \cup Dom(f_4) = [-2,0) \cup [0,3) \cup [3,4) \cup [6,7)$$
$$= [-2,4) \cup [6,7)$$

Assim, o domínio de f é $Dom(f) = [-2,4) \cup [6,7)$.

Para vermos com mais clareza qual é a imagem de cada uma das partes da função, vamos olhar para o gráfico de f:



Olhando para o gráfico, podemos ver que:

- $Im(f_1) = (0,4]$;
- $Im(f_2) = [2,5)$;
- $Im(f_3) = \{2\}$;
- $Im(f_4) = \{5\}$.

Logo, temos $Im(f) = Im(f_1) \cup Im(f_2) \cup Im(f_3) \cup Im(f_4) = (0,5]$.

ANOTAÇÕES