

MÓDULO 18

1. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

1.1 DEFINIÇÃO

Denomina-se **Progressão Aritmética (P.A.)** a sequência em que se obtém cada termo, a partir do segundo, adicionando-se uma constante r ao termo anterior. Essa constante r chama-se **razão da P.A.**

Exemplo:

A sequência (5,8,11,14, ...) é uma P.A. de razão 3, pois:

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_2 &= 5 + 3 = 8 \\ a_3 &= 8 + 3 = 11 \\ a_4 &= 11 + 3 = 14 \end{aligned}$$

⋮
⋮
⋮

1.2 CÁLCULO DA RAZÃO DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Teorema

A razão r de uma Progressão Aritmética (a_1, a_2, a_3, \dots) é dada por:

$$r = a_{n+1} - a_n \text{ para todo } n, n \in \mathbb{N}^*$$

1.3 CLASSIFICAÇÃO

As progressões aritméticas podem ser classificadas de acordo com o valor da razão r .

- $r > 0$ (P.A. crescente)
- $r = 0$ (P.A. constante)
- $r < 0$ (P.A. decrescente)

Exemplos:

- a) (1,4,7,10, ...) $r = 3 \rightarrow$ P.A. crescente
- b) (2,2,2,2, ...) $r = 0 \rightarrow$ P.A. constante
- c) (8,5,2,-1,-4, ...) $r = -3 \rightarrow$ P.A. decrescente

2. TERMO GERAL

A partir da definição, podemos escrever os elementos da P.A. ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 3r \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r = a_1 + (n - 1)r \end{aligned}$$

Observe que cada termo é obtido adicionando-se ao primeiro um número de razões r igual à posição do termo menos uma unidade.

O termo geral a_n da P.A. é dado, portanto, pela fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

3. MEIOS ARITMÉTICOS

Numa P.A. finita ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$) os termos $a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}$ são chamados de **“meios aritméticos da P.A.”**.

Exemplo:

Na P.A. (1, 4, 7, 10, 13, 16) temos que 4, 7, 10, 13 são os meios aritméticos da P.A..

4. INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Interpolar (ou inserir) k meios aritméticos entre dois números a e b , significa determinar a Progressão Aritmética de $k + 2$ termos, em que a representa o primeiro termo e b o último.

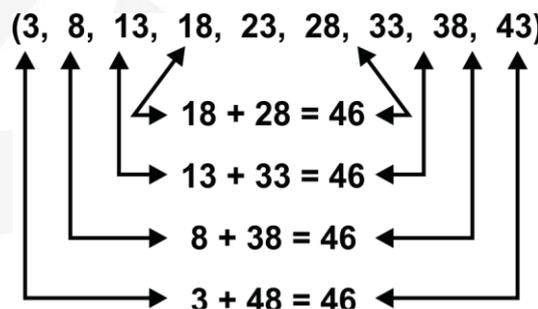
5. PROPRIEDADES DE UMA P.A.

1ª Propriedade

Numa P.A. finita a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} \dots$$

Exemplo:



2ª Propriedade

A sequência (a, b, c) é P.A. se, e somente se, o termo médio é igual a média aritmética entre a e c , isto é:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

Demonstração:

Temos que: (a, b, c) é P.A. $\Leftrightarrow b - a = c - b \Rightarrow b = \frac{a + c}{2}$

Logo, (a, b, c) é P.A. $b = \frac{a + c}{2}$.

Exemplos:

Na P.A. (8, 11, 14) temos $11 = \frac{8 + 14}{2}$.

3ª Propriedade

Numa P.A. com número ímpar de termos, o termo médio é igual à média aritmética entre os extremos.

$$a_K = \frac{a_{K-1} + a_{K+1}}{2}$$

Logo, pela 1ª propriedade, temos:

$$a_k = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Exemplo:

(8, 11, 14, 17, 20, 23, 26)
termo médio = 17

6. REPRESENTAÇÃO GENÉRICA DE UMA P.A.

É de grande utilidade, para a resolução de certos problemas, sabermos representar genericamente uma P.A. Como exemplos, mostraremos algumas representações.

• P.A. de três termos:

(x, x + r, x + 2r) ou (x - r, x, x + r), em que a razão é r.

• P.A. de quatro termos:

(x, x + r, x + 2r, x + 3r) ou (x - 3r, x - r, x + r, x + 3r), em que a razão é 2r.

7. CÁLCULO DA SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.A.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

8. EXERCÍCIOS

1)

Qual a razão da progressão aritmética, na sequência 1,3,5,7,9,11,13,15.

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

2)

Qual a classificação da progressão aritmética, na sequência -1,-3,-5,-7,-9,-11.

- a) crescente
- b) decrescente
- c) constante
- d) alternante
- e) estacionária

3) (ESA – 2020)

A fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética é $a_n = a_1 + (n - 1).r$, então na PA: 3, 5, 7, ..., o milésimo termo é:

- a) 1999
- b) 2000
- c) 2001
- d) 2002
- e) 2003

4)

O termo geral é dado pela expressão

$a_n = 3n - 1$. qual a razão da P.A.?

- a) 5
- b) 3
- c) 1
- d) - 1

5) (EEAR)

O quinto termo de uma P.A. vale 23, e o décimo segundo termo é - 40. O primeiro termo negativo dessa P.A. é o:

- a) Sétimo
- b) Oitavo
- c) Nono
- d) Décimo

6) (ESA – 2019)

Em uma Progressão Aritmética, o décimo termo vale 16 e o nono termo é 6 unidades maior do que o quinto termo. Logo, o décimo segundo termo vale:

- a) 16,5
- b) 19,5
- c) 19,0
- d) 17,5
- e) 17,5

7) (ESA – 2020)

As medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo são expressas por $x+1$, $2x$ e x^2-5 e estão em progressão aritmética, nessa ordem. Calcule o perímetro do triângulo.

- a) 18 cm
- b) 25 cm
- c) 15 cm
- d) 20 cm
- e) 24 cm

8) (ESA – 2013)

Em uma progressão aritmética, o primeiro termo é 5 e o décimo primeiro termo é 45. Pode-se afirmar que o sexto termo é igual a:

- a) 15.
- b) 21.
- c) 25.
- d) 29.
- e) 35.

9) (EEAR)

Inscrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, obtém-se uma P.A. cujo sexto termo é:

- a) 25
- b) 30
- c) 33
- d) 42

