ÂNGULOS

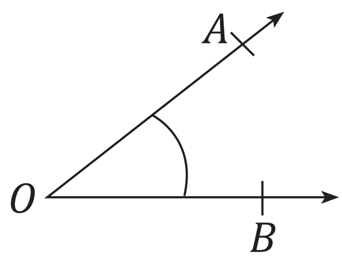
Nesta apostila trataremos dos ângulos! Vamos falar sobre a definição de ângulo, o que é um grau, um radiano e a relação entre eles. Vamos também explorar um pouco mais alguns conceitos relacionados aos ângulos, os quais vão ser muito importantes para o estudo da geometria plana e seus objetos. Comecemos pela definição do ângulo e seus elementos.

Definição, Elementos e Unidades de Medida de um Ângulo

Definimos ângulo da seguinte forma:

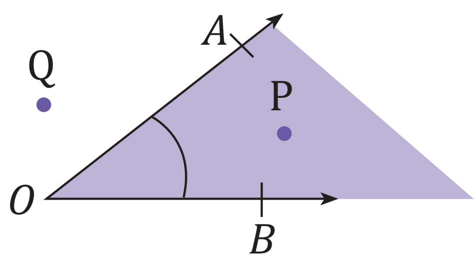
Ângulo é a abertura formada por 2 semirretas não contidas na mesma reta que possuem a mesma origem.

Visualmente temos:



- As semirretas $(\overrightarrow{OA})$ e $(\overrightarrow{OB})$ são os **lados** do ângulo;
- O ponto O é o **vértice** do ângulo;
- A notação para ângulos é AÔB ou simplesmente Ô, ou seja, colocamos o ^ no vértice do ângulo – ou ainda, letras gregas (α,β,γ,...).

Agora, observe o seguinte:



Dizemos que:

- A região compreendida entre as duas semirretas é chamada de **interior do ângulo** – incluindo as semirretas (em lilás na imagem);
- O **exterior do ângulo** é o conjunto dos pontos que não estão no interior do ângulo;
- O ponto P é um **ponto interior** ao ângulo;
- O ponto Q é um **ponto exterior** ao ângulo.

Já sabemos o que é um ângulo e seus elementos, agora nos resta saber como medimos ângulos.

As unidades de medidas de ângulo são duas: **graus** e **radiano**, que possuem as seguintes definições:

1 grau é uma parte das 360 partes da circunferência, já, 1 radiano é um arco sob a circunferência cuja medida é igual à medida do raio.

Temos então que $1° = \frac{1}{360}$ partes da circunferência, logo, uma circunferência possui 360°.

E como essas unidades se relacionam?

- Temos que 1 radiano vale aproximadamente 57,3° ($1\ rad \cong 57{,}3°$).
- Temos também que 1 volta completa vale 2π radianos, ou seja, 360°=2π e, consequentemente, 180° = $\pi\ rad$.

Usando a relação de 180° = $\pi\ rad$ e através de uma regra de três é possível fazer as transformações de unidades de ângulos.

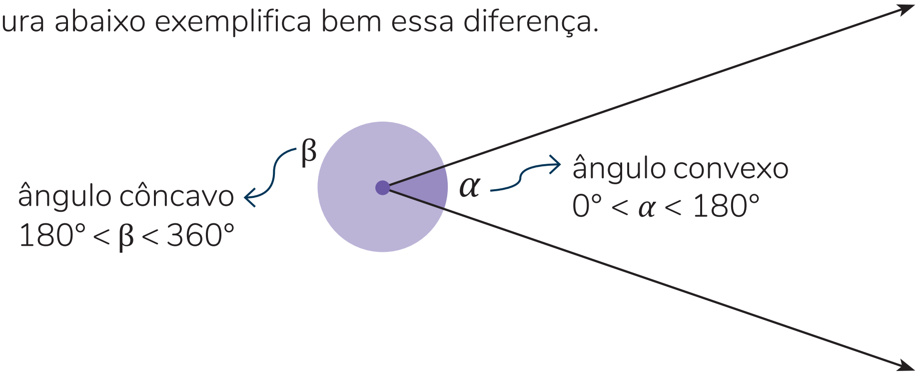
Observação: você pode encontrar essas relações de uma forma mais detalhada no material de ângulos em trigonometria.

Além das unidades de medida, podemos classificar o ângulo de acordo com o tamanho da sua abertura, como vamos observar a seguir.

Ângulos Côncavos e Ângulos Convexos

Dizemos que um ângulo α é **convexo** se sua medida estiver entre 0° e 180°. Por outro lado, dizemos que um ângulo β é **côncavo** se sua medida estiver entre 180° e 360°.

A figura abaixo exemplifica bem essa diferença.

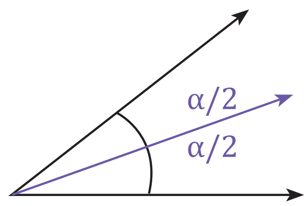


Você já ouviu falar sobre a bissetriz de um ângulo? Caso não, fiquei tranquilo, pois é o que veremos a seguir.

Bissetriz de um Ângulo

Bissetriz de um ângulo é a semirreta que parte do vértice e divide o ângulo em dois ângulos com medidas iguais.

A figura abaixo exemplifica a bissetriz, considerando um ângulo **α.**



Perceba que a bissetriz de um ângulo o divide exatamente **no meio**. Podemos falar que os ângulos gerados pela bissetriz são congruentes. Mas o que significa isso?

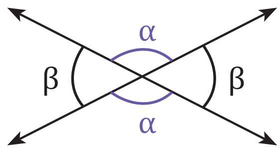
Dizemos que dois ângulos são **congruentes** se, e somente se, **possuem medidas iguais.**

Agora que já conhecemos o conceito de ângulos congruentes, podemos falar dos famosos ângulos opostos pelo vértice.

Ângulos Opostos pelo Vértice

Quando temos duas semirretas concorrentes, dizemos que os ângulos de seus lados opostos são ângulos opostos pelo vértice (OPV).

Não ficou claro? Observe a figura abaixo.



Os ângulos α são ângulos opostos pelo vértice, assim como os β.

Você deve estar se perguntando, “mas os ângulos opostos pelo vértice vão ser iguais?”. Sim, é exatamente isso! Assim como apresentado na figura acima, temos que os ângulos opostos pelo vértice serão sempre **congruentes**.

Vamos fazer um **exemplo**: dois ângulos opostos pelo vértice medem $2x + 20°$ e $x + 80°$. Quanto mede um deles?

Resolução:

Sabemos que dois ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida. Assim, basta igualar os dois para extrair a resposta:

$$2x+20°=x+80°$$

$$2x-x=80°-20°$$

$$x=60°$$

Assim, se chamarmos de α os ângulos opostos pelo vértice, temos que:

$$\alpha=2.60°+20°$$

$$\alpha=140°$$

Obteríamos o mesmo resultado se usássemos o segundo ângulo para calcular:

$$\alpha=60°+80°$$

$$\alpha=140°$$

Você se lembra que no começo da apostila falamos em ângulos côncavos e ângulos convexos? Além dessa classificação geral, podemos classificar um pouco melhor os ângulos. É essa classificação que veremos a seguir.

Classificação dos Ângulos

Os ângulos podem ser classificados quanto:

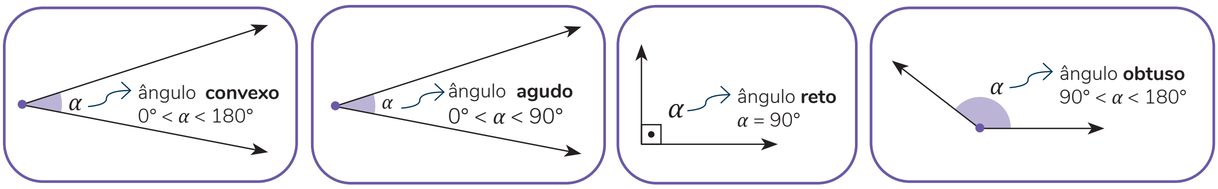
- à sua medida;
- à sua soma;
- à sua posição.

Classificação dos ângulos quanto à sua medida

Para os ângulos convexos (relembrando: menores de 180°), temos três distinções:

- **Ângulos agudos:** quando estão entre 0° e 90°;
- **Ângulos retos:** que são exatamente iguais a 90°;
- **Ângulos obtusos:** quando estão entre 90° e 180°.

Observe as diferenças entre estes ângulos abaixo:



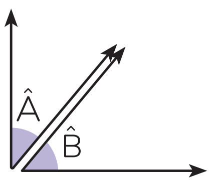
Observação: os ângulos côncavos não possuem distinções.

Classificação dos ângulos quanto à sua soma

Dados dois ângulos quaisquer, dependendo do valor de sua soma, esses ângulos recebem denominações especiais.

- **Ângulos complementares:** dois ângulos são ditos complementares quando sua soma é igual a 90°.

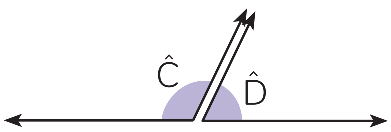
Dizemos que o complemento de um ângulo x é $90° - x$. Em outras palavras, dizemos que o complemento de um ângulo é o valor de 90° decrescido do próprio ângulo (por exemplo, o complemento de 30° é o valor 90° - 30° = 60°).



$\hat{A} + \hat{B} = 90°$

- **Ângulos suplementares:** dois ângulos são ditos suplementares quando sua soma é igual a 180°.

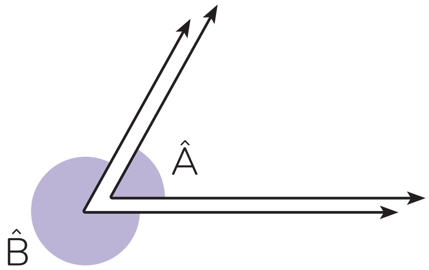
Dizemos que o suplemento de um ângulo x é $180° - x$. Em outras palavras, dizemos que o suplemento de um ângulo é o valor de 180° decrescido do próprio ângulo (por exemplo, o suplemento de 100° é o valor 180° - 100° = 80°).



$\hat{C} + \hat{D} = 180°$

- **Ângulos replementares:** dois ângulos são ditos replementares quando sua soma é igual a 360°.

Dizemos que o replemento de um ângulo x é 360° $-x$. Em outras palavras, dizemos que o replemento de um ângulo é o valor de 360° decrescido do próprio ângulo (por exemplo, o replemento de 150° é o valor 360° - 150° = 210°).



$\hat{A} + \hat{B} = 360°$

- **Ângulos explementares:** dois ângulos são ditos explementares quando o módulo da sua diferença é igual a 180°.

Dados dois ângulos α e β, dizemos que eles são explementares quando $|\alpha - \beta| = 180°$. Por exemplo, 20° e 200° são ângulos explementares.

$|\alpha - \beta| = 180°$

Vamos fazer um exemplo que aborde esse conhecimento.

Exemplo: O triplo do complemento de um ângulo diminuído em 120° é igual à metade do suplemento do ângulo. O valor do ângulo é?

Resolução:

Vamos chamar o valor do ângulo que querermos encontrar de x. Neste caso, como sabemos que o complemento de um ângulo é o valor 90° diminuído do próprio ângulo e o suplemento de um ângulo é o valor 180° diminuído do próprio ângulo, escrevemos a equação correspondente:

$$\left[3.\overbrace{(90^\circ - x)}^{\textit{complemento de } x}\right] - 120^\circ = \frac{\overbrace{(180^\circ - x)}^{\textit{suplemento de } x}}{2}$$

$$270^\circ - 3x - 120^\circ = \frac{(180^\circ - x)}{2}$$

$$150^\circ - 3x = \frac{(180^\circ - x)}{2}$$

$$300^\circ - 6x = 180^\circ - x$$

$$5x = 120^\circ$$

$$x = 24^\circ$$

Temos que o valor do ângulo procurado é 24°.

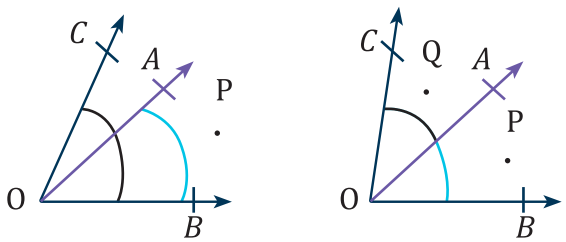
Bom, é isso de classificação, certo? Não, ainda não! Ainda não abordamos a classificação pela posição dos ângulos.

Classificação dos ângulos quanto à sua posição

Em relação à posição, os ângulos podem ser consecutivos ou adjacentes.

> Dois ângulos são ditos **consecutivos** quando, além de possuírem um vértice em comum, possuírem um de seus lados em comum. Já dois ângulos são ditos **adjacentes** quando eles são consecutivos, mas não possuírem nenhum ponto interno em comum.

Na imagem abaixo, podemos observar na figura da esquerda que os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ são consecutivos: possuem um vértice em comum (O) e um lado em comum ($\overrightarrow{OA}$). Notando a figura da direita, $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ são adjacentes, pois **além** de serem consecutivos, não possuem nenhum ponto interno em comum (os ângulos não "se misturam").

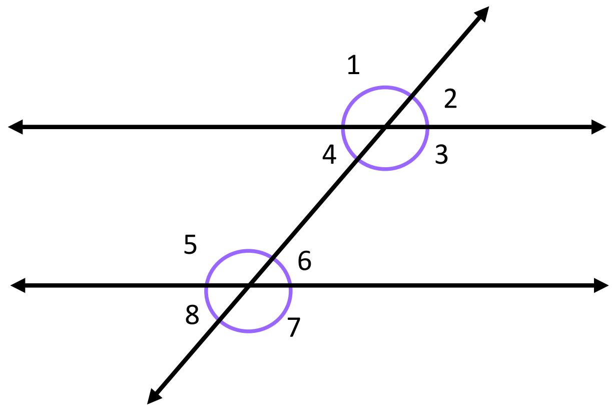


Na figura da esquerda, o ponto P é interior aos ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$. Já, na figura da direita, o ângulo P é ponto interior apenas do ângulo $A\hat{O}B$ e o ponto Q é ponto interior apenas do ângulo $A\hat{O}C$.

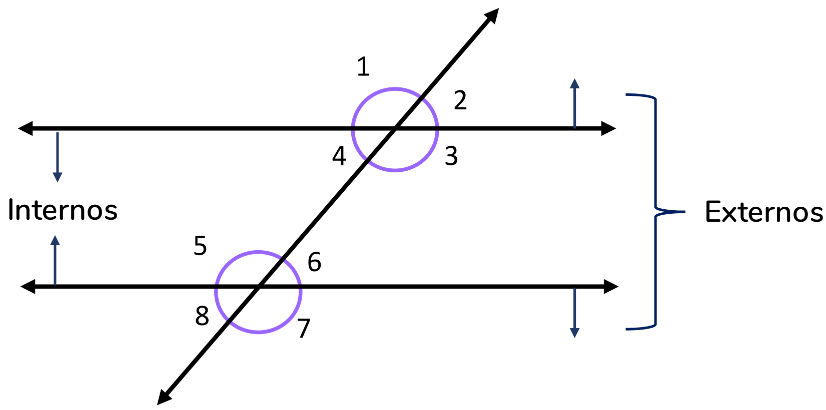
Para finalizarmos o nosso estudo de ângulos, passemos a tratar sobre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por reta transversal.

Retas Paralelas Cortadas por Reta Transversal

Observe as duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal na figura abaixo. Essa disposição das retas gera 8 ângulos, numerados de 1 a 8 para melhor posicionar a linha de raciocínio que abordaremos.



Os ângulos que estão **entre as duas retas paralelas** recebem a denominação de **ângulos internos**, já, os que estão **do lado de fora das retas paralelas** recebem a denominação de **ângulos externos**. Observe abaixo:



Na imagem acima, temos então que os ângulos 3, 4, 5 e 6 são ângulos internos e 1, 2, 7 e 8 são ângulos externos.

Em relação à **reta transversal**, ângulos que estão **de um mesmo lado** são denominados **ângulos colaterais** e ângulos que estão **em lados opostos** são denominados **ângulos alternos**. Na imagem acima, temos então que os ângulos 1, 4, 5 e 8 são colaterais, assim como os ângulos 2, 3, 6 e 7. Já, se pegarmos por exemplo os ângulos 1 e 7 eles são alternos.

Em relação às medidas dos 8 ângulos temos:

- Os pares de ângulos **1** e **5**, **2** e **6**, **3** e **7** e **4** e **8** são chamados de **ângulos correspondentes** (é como se eles fossem o "mesmo ângulo em retas diferentes") e os ângulos que compõem cada par são **congruentes**.

- Os pares de ângulos **1** e **8** e **2** e **7** são chamados de **ângulos colaterais externos** e os ângulos que compõem cada par são **suplementares**.

- Os pares de ângulos **4** e **5** e **3** e **6** são chamados de **ângulos colaterais internos** e os ângulos que compõem cada par são **suplementares**.

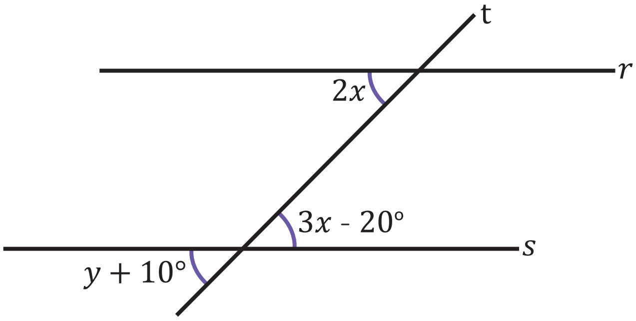
- Os pares de ângulos **1** e **7** e **2** e **8** são chamados de **ângulos alternos externos** e os ângulos que compõem cada par são **congruentes**.

- Os pares de ângulos **3** e **5** e **4** e **6** são chamados de **ângulos alternos internos** e os ângulos que compõem cada par são **congruentes**.

- Os pares de ângulos **1** e **3**, **2** e **4**, **5** e **7** e **6** e **8** são **ângulos opostos pelo vértice** (lembram deles?) e os ângulos que compõem cada par são **congruentes**.

É essencial para o aprendizado de geometria plana que você consiga identificar as relações entre esses ângulos! Vamos fixar esse assunto através de um exemplo:

Exemplo: Sabendo que a reta r é paralela à reta s, qual é o valor de $x + y$?



Resolução:

Vamos primeiro identificar quais são os ângulos que compõem a figura e as relações entre eles. Do conteúdo que vimos acima, estamos falando de duas retas paralelas cortadas por uma transversal. De início, vemos que os ângulos $\mathbf{2x}$ e $\mathbf{y + 10°}$ são correspondentes, logo, possuem a mesma medida. Além disso, o ângulo $\mathbf{2x}$ e o $\mathbf{3x - 20°}$ são alternos internos, logo, também possuem a mesma medida. Escrevemos primeira esta última equação:

$$2x=3x-20°$$

$$3x-2x=20°$$

$$x=20°$$

Agora que já temos o valor de uma variável, montamos a segunda equação:

$$2x=y+10°$$

$$2.(20°)=y+10°$$

$$40°=y+10°$$

$$y=30°$$

Assim, temos o valor de $x + y = 20° + 30° = 50°$.

Finalizamos assim o nosso estudo de ângulos.

Recapitulando então: aprendemos na primeira apostila os fundamentos da geometria plana e nessa apostila aprendemos a respeito dos ângulos. A partir destas construções a geometria plana começa a "brincar" de montar objetos geométricos. Na próxima apostila vamos começar nosso estudo dos objetos geométricos pelo mais simples: o triângulo!

ANOTAÇÕES