PROVA DE MATEMÁTICA

Principais notações

Z - o conjunto de todos os números inteiros.
R - o conjunto de todos os números reais.
C - o conjunto de todos os números complexos.

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R}: a \le x \le b\}$	$]-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R}: x \le b\}$
$[a, b[= \{x \in \mathbf{R}: a \le x < b\}$	$]-\infty, b[= \{x \in \mathbf{R}: x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \mathbf{R}: a < x \le b\}$	$[a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R}: a \le x\}$
$]a, b[= \{x \in \mathbf{R}: a < x < b\}$	$]a, +\infty[= \{x \in \mathbf{R}: a < x\}$
(a, b) - par ordenado	g o *f* - função composta de *g* e *f*
A^{-1} = matriz inversa da matriz A	A^t - matriz transposta da matriz A

1) (ITA-99) Sejam *E, F, G* e *H* subconjuntos não vazios de ***R***. Considere as afirmações:
I - Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $E \subset F$ e $G \subset H$.
II - Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$.
III - Se $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$, então $(E \times G) \subset (F \times H)$.
Então:
a) ( ) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
b) ( ) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
c) ( ) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
d) ( ) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
e) ( ) Todas as afirmações são verdadeiras.

Resolução: Alternativa E
I – Verdadeira. Suponha (E x G) Ì (F x H). Como E e G não são vazios, dado x Î E, existe pelo menos um y Î G, tal que (x;y) Î E x G. Assim, (x;y) Î F x H, isto é, x Î F. Portanto, para todo x. x Î E Þ x Î F, ou seja, E Ì F. Analogamente G Ì H.
Para as afirmações II e III, lembremos que, para quaisquer conjuntos A e B, A Ì B Û A È B = B.
II – Verdadeira. Tomando A = E x G e B = F x H. temos que se E x G Ì F x H, então (E x G) È (F x H) = F x H.
III – Verdadeira. Tomando, novamente, A = E x G e B = F x H, temos que se (E x G) È (F x H) = F x H, então E x G Ì F x H.

2) (ITA-99) Listando-se em ordem crescente todos os números de cinco algarismos distintos formados com os elementos do conjunto {1, 2, 4, 6, 7}, o número 62417 ocupa o *n*-ésimo lugar. Então *n* é igual a:
a) ( ) 74 b) ( ) 75 c) ( ) 79
d) ( ) 81 e) ( ) 92

Resolução: Alternativa D
Temos 3 . 4! números com cinco algarismos distintos que começam com 1, 2 ou 4; 3! números que começam com 61 e 2! números que começam com 621. Assim, o total de números de cinco algarismos distintos, formados com os elementos do conjunto (1;2;4;6;7), menores ou iguais a 62417 é 3 . 4! + 3! + 2! + 1 = 81.

3) (ITA-99) Sejam *f, g:* ***R*** $\to$ ***R*** funções definidas por $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Considere as afirmações:
I - Os gráficos de *f* e *g* não se interceptam.
II- As funções *f* e *g* são crescentes.
III- $f(-2)\,g(-1) = f(-1)\,g(-2)$.
Então:
a) ( ) Apenas a afirmação (I) é falsa.
b) ( ) Apenas a afirmação (III) é falsa.
c) ( ) Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.
d) ( ) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.
e) ( ) Todas as afirmações são falsas.

Resolução: Alternativa E
I – Falsa, pois para x = 0, temos f(0) = $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$ ***e g(0) =*** $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$***, isto é, o ponto (0,1) é o ponto de intersecção dos gráficos de f e g.***
II – Falsa, pois como $0 < \frac{1}{3} < 1$***, a função exponencial g(x) =*** $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ***é estritamente decrescente.***
III – Falsa, pois f (-2) g (-1) = $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{3}\right)$ ***e***
f(-1) g(-2) = $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 6$

4) (ITA-99) Seja $a \in \mathbf{R}$ com $a > 1$. O conjunto de todas as soluções reais da inequação $\mathbf{a}^{2x(1-x)} > \mathbf{a}^{x-1}$, é:
a) ( )]-1, 1[b) ( )]1, + ∞[c) ( )]-½,1[
d) ( )]- ∞, 1[e) ( ) vazio

Resolução: Alternativa C
Como a Î R e a > 1.
$a^{2x(1-x)} > a^{x-1}$ Û 2x(1 – x) > x – 1 Û $2x^2 – x – 1 > 0$
$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 1$
Portanto V = $\left]-\frac{1}{2};\ 1\right[$

5) (ITA-99) Seja *S* o conjunto de todas as soluções reais da equação

$$\log_{\frac{1}{4}}(x + 1) = \log_4 (x - 1)$$

Então:
a) ( ) *S* é um conjunto unitário e $S \subset]2, +\infty[$.
b) ( ) *S* é um conjunto unitário e $S \subset]1, 2[$.
c) ( ) *S* possui dois elementos distintos e $S \subset]-2, 2[$.
d) ( ) *S* possui dois elementos distintos e $S \subset]1, +\infty[$.
e) ( ) *S* é o conjunto vazio.

Resolução: Alternativa B

Temos $\log_{\frac{1}{4}}(x+1) = \log_4(x-1)$ ***Û***

Û $-\log_4(x+1) = \log_4(x-1)$ ***Û***

Û $\log_4(x+1)^{-1} = \log_4(x-1)$ ***Û***

$$Û \left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{x+1} = x-1 \\ x-1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 = 2 \\ x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Assim, S = $\left(\sqrt{2}\right)$ ***é um conjunto unitário e S Ì]1,2[.***

6) (ITA-99) Sejam f, g, h: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ funções tais que a função composta $h \circ g \circ f$ $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ é a função identidade. Considere as afirmações:

I - A função h é sobrejetora.

II- Se $x_0 \in \boldsymbol{R}$ é tal que $f(x_0) = 0$, então $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \boldsymbol{R}$ com $x \neq x_0$.

III- A equação $h(x) = 0$ tem solução em $\boldsymbol{R}$.

Então:

a) ( ) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
b) ( ) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
c) ( ) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
d) ( ) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) ( ) Todas as afirmações são falsas.

Resolução: Alternativa D

Temos que h o g o f(x) = x, para todo x Î R. Assim:

I – É verdadeira. Dado qualquer y Î R, existe x = gof(y) Î R tal que h(x) = h(gof(y)) = h o g o f(y) = y e, portanto, h é sobrejetora.

II – É verdadeira. Seja x Î R tal que f(x) = 0. Então

f(x) = f(x₀) Þ hog(f(x)) = hog(f(x₀)) Û

Û h o g o f(x) = h o g o f(x₀) Û

Û x = x₀. Portanto f(x) ¹ 0 para todo x Î R com x ¹ x₀.

III – É verdadeira. Como foi demonstrado anteriormente h é sobrejetora, logo a equação h(x) = 0 tem solução em R.

7) (ITA-99) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se x e y são soluções do sistema $(AA' - 3I)X = B$, então $x + y$ é igual a:

a) ( ) 2 b) ( ) 1 c) ( ) 0 d) ( ) -1 e) ( ) -2

Resolução: ***Alternativa D***

Temos $AA^t - 3I =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, $(AA^t - 3I)X = B$ ***Û***

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -x-2y = 1 \\ -2x+2y = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Logo a solução da equação matricial é $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ***e***

$x + y = -1 + 0 = -1$

8) (ITA-99) Sejam x, y e z números reais com $y \neq 0$. Considere a matriz inversível

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ z & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então:

a) ( ) A soma dos termos da primeira linha de A^{-1} é igual a x + 1.
b) ( ) A soma dos termos da primeira linha de A^{-1} é igual a 0.
c) ( ) A soma dos termos da primeira coluna de A^{-1} é igual a 1.
d) ( ) O produto dos termos da segunda linha de A^{-1} é igual a y.
e) ( ) O produto dos termos da terceira coluna de A^{-1} é igual a 1.

Resolução: ***Alternativa C***

Temos que

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -y & -y \\ -2 & x-z & x+z \\ 0 & y & -y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -y & x-z & y \\ -y & x+z & -y \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2y$$

Assim, como y ¹ 0.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{y} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{z-x}{2y} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{-(x+z)}{2y} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto a soma dos termos da primeira coluna de A^{-1} ***é*** $0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

9) (ITA-99) Se $x \in [0, \pi/2[$ é tal que $4\,\mathrm{tg}^4 x = \dfrac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de

sen 2x + sen 4x

a) ( ) $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ b) ( ) $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ c) ( ) $\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$
d) ( ) ½ e) ( ) 1

Resolução: ***Alternativa B***

Temos $4\,\mathrm{tg}^4 x = \dfrac{1}{\cos^4 x} + 4 \Leftrightarrow \dfrac{4\,\mathrm{sen}^4 x}{\cos^4 x} = \dfrac{1 + 4\cos^4 x}{\cos^4 x} \Leftrightarrow$

Û $4\,\mathrm{sen}^4 x = 1 + 4\cos^4 x$ ***Û*** $4(\cos^4 x - \mathrm{sen}^4 x) = -1$ ***Û***

Û $4.\,(\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x)(\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x) = -1$ ***Û***

Û $4 . \cos 2x . 1 = -1$ ***Û*** $\cos 2x = -\dfrac{1}{4}$.

Para $0 \le x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le 2x < \pi$***, temos sen 2x ≥ 0.***

Assim, $\operatorname{sen} 2x = \sqrt{1-\cos^2 2x} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Logo sen 2x + sen 4x = sen 2x + sen 2(2x) = sen 2x + 2 sen 2x cos 2x = $\frac{\sqrt{15}}{4} + 2.\frac{\sqrt{15}}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

10) (ITA-99) O conjunto de todos os números reais $q > 1$, para os quais a_1, a_2 e a_3, formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão q e representam as medidas dos lados de um triângulo, é:

a) ( ) $\left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ b) ( ) $\left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

c) ( ) $\left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right]$ d) ( ) $\left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right[$

e) ( ) $\left]1, 1+\sqrt{5}\right[$

Resolução: ***Alternativa A***
Uma vez que os termos da PG representam as medidas dos lados de um triângulo, eles devem ser positivos. Portanto, como $q > 1$, $0 < a_1 < a_2 < a_3$. ***Logo*** $a_1 . a_2 . a_3$ ***são as medidas dos lados de um triângulo se, e somente se,*** $a_3 < a_1 + a_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_1q^2 < a_1 + a_1q \Leftrightarrow q^2 - q - 1 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

11) (ITA-99) Sejam a_k e b_k números reais com k = 1, 2, ..., 6. Os números complexos $z_k = a_k + ib_k$ são tais que $|z_k| = 2$ e $b_k \ge 0$, para todo k = 1, 2, ..., 6. Se $(a_1, a_2, ..., a_6)$ é uma progressão aritmética de razão -1/5 e soma 9, então z_3 é igual a:

a) ( ) 2i b) ( ) $\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i$ c) ( ) $\sqrt{3}+i$

d) ( ) $\frac{-3\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{73}}{5}i$ e) ( ) $\frac{4\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{17}}{5}i$

Resolução: ***Alternativa B***
A soma dos termos da progressão aritmética é:
$\frac{(a_1+a_6)}{2}.6 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\left(a_1 + a_1 + 5\left(-\frac{1}{5}\right)\right)}{2}.6 = 9 \Leftrightarrow a_1 = 2$ ***e, portanto,***

$a_3 = 2 + 2\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{5}$.

Como $|z_3| = 2$ ***e*** $z_3 = a_3 + ib_3$, ***com*** $b_3 \ge 3$.

$a_3^2 + b_3^2 = 2^2 \Leftrightarrow \left(\frac{8}{5}\right)^2 + b_3^2 = 4 \Leftrightarrow b_3 = \frac{6}{5}$. Logo

$z_3 = \frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$.

12) (ITA-99) Considere a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ e a elipse E de equação $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$. Então:
a) ( ) C e E interceptam-se em dois pontos distintos.
b) ( ) C e E interceptam-se em quatro pontos distintos.
c) ( ) C e E são tangentes exteriormente.
d) ( ) C e E são tangentes interiormente.
e) ( ) C e E têm o mesmo centro e não se interceptam.

Resolução: ***Alternativa C***
A circunferência C de equação
$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$
tem centro (-1;1) é raio igual a 1.
A elipse E de equação

$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$

tem centro (2;-1), semi-eixo maior igual a 2 e semi-eixo menor igual a 1, sendo seu eixo maior paralelo ao eixo 0x. Como os centros têm mesma ordenada –1 e a soma do semi-eixo maior da elipse com o raio da circunferência é igual à distância entre os centros, conclui-se que C e E são tangentes exteriormente no ponto (0;-1).

13) (ITA-99) Num cone circular reto, a altura é a média geométrica entre o raio da base e a geratriz. A razão entre a altura e o raio da base é:

a) ( ) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) ( ) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ c) ( ) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$

d) ( ) $\frac{\sqrt[3]{5}-1}{3}$ e) ( ) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

Resolução: ***Alternativa E***
Sejam r, g, h $\in \mathbb{R}_+^*$, ***respectivamente, o raio da base, a geratriz e a altura do cone.***
Temos que h = $\sqrt{rg}$ ***e, pelo teorema de Pitágoras,***

$h^2 + r^2 = g^2 \Leftrightarrow rg + r^2 = g^2 \Leftrightarrow g^2 - rg - r^2 = 0 \Leftrightarrow g = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}r$

$\Leftrightarrow g_r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Assim, $\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{rg}}{r} = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

14) (ITA-99) Duas circunferências C_1 e C_2, ambas com 1 m de raio, são tangentes. Seja C_3 outra circunferência cujo raio mede $(\sqrt{2}-1)$m e que tangência C_1 e C_2. A área, m², da região limitada e exterior às três circunferências dadas, é:

a) ( ) $1 - \pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) ( ) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{6}$ c) ( ) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

d) ( ) $\frac{\pi}{16}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$ e) ( ) $\pi\left(\sqrt{2}-1\right)-1$

Resolução: ***Alternativa A***
Sendo A, B e C os centros das circunferências C_1, C_2 ***e*** C_3, ***respectivamente, temos que AB = 1 + 1 = 2m e AC = BC = 1 +*** $\sqrt{2}$ ***- 1 =*** $\sqrt{2}$ ***m.***

Assim, o triângulo ABC é isósceles e retângulo em C, e a área S em questão é igual à área do triângulo menos a soma das áreas de 3 setores circulares cujos ângulos centrais medem

$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ ***e cujos raios são, respectivamente, 1m, 1m e*** $\sqrt{2}$ ***- 1m.***
Assim:

$$S = S_{\Delta ABC} - \left(2.\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}.\pi.1^2 + \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}.\pi(\sqrt{2}-1)^2\right) =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^2}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right) = 1 - \pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)m^2$$

15) (ITA-99) Um poliedro convexo de 10 vértices apresenta faces triangulares e quadrangulares. O número de faces quadrangulares, o número de faces triangulares e o número total de faces formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. O número de arestas é:
a) ( ) 10 b) ( ) 17 c) ( ) 20 d) ( ) 22
e) ( ) 23

Resolução: ***Alternativa C***
Sejam T e Q, respectivamente, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares do poliedro. Como (Q, T, Q + T) é uma PA, temos Q + Q + T = 2T Û T = 2Q. Logo o poliedro possui Q + T = 3Q faces.
Assim, o número de arestas do poliedro é

$$\frac{3T+4Q}{2} = \frac{3(2Q)+4Q}{2} = 5Q.$$

Pela relação de Euler, temos: 10 – 5Q + 3Q = 2 Û Q = 4
Portanto o número de arestas do poliedro é 5Q = 20.

Nota*: resolva as questões numeradas de 16 a 25 no caderno de respostas. Na folha de leitura óptica assinale a alternativa escolhida em cada uma das 25 questões. Ao terminar a prova, entregue ao fiscal o caderno de respostas e a folha de leitura óptica.*

16) (ITA-99) Considere as funções *f* e *g* definidas por *f*(x) = x - 2/x, para x ≠ 0 e
g(x) = $\frac{x}{x+1}$, para x ≠ -1. O conjunto de todas a s soluções da inequação

$$(g \circ f)(x) < g(x)$$

é:
a) ( ) [1, + ∞[b) ( )]-∞, -2[c) ( ) [-2, -1[
d) ( )]-1, 1[e) ( )]-2, -1[∪]1, + ∞[

Resolução: ***Alternativa E***
Para x ¹ 0 e x ¹ -1, (gof)(x) < g(x) Û

$$\frac{f(x)}{f(x)+1} < \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x-\frac{2}{x}}{x-\frac{2}{x}+1} - \frac{x}{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x+2)(x-1)(x+1)} < 0$$

$$(x+2)(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -2 < x < -1 \\ \text{ou} \\ x > 1 \end{array} \right.$$

Portanto V =]-2;-1[È]1;¥[

17) (ITA-99) Seja a ∈ ***R*** com a > 1. Se b = $\log_2$ a, então o valor de

$$\log_4 a^3 + \log_2 4a + \log_2 \frac{a}{a+1} + (\log_8 a)^2 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{a^2-1}{a-1}$$

é:
a) ( ) 2b - 3 b) ( ) $\frac{65}{18}b+2$ c) ( ) $\frac{2b^2-3b+1}{2}$
d) ( ) $\frac{2b^2+63b+36}{18}$ e) ( ) $\frac{b^2+9b+7}{9}$

Resolução: ***Alternativa D***
Para a Î R, com a > 1, e b = log₂a, temos $\log_4 a^3 + \log_2 4^a + \log_2 \frac{a}{a+1} + (\log_8 a)^2 -$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{a^2-1}{a-1} = \log_{2^2} a^3 + \log_2 4 + \log_2 a + \log_2 a -$$

$$-\log_2(a+1) + \left(\log_{2^3} a\right)^2 - \log_{2^{-1}}(a+1) = \frac{3}{2}\log_2 a +$$

$$+2 + 2\log_2 a - \log_2(a+1) + \left(\frac{1}{3}\log_2 a\right)^2 + \log_2(a+1) = \frac{3}{2}b +$$

$$+2 + 2b + \frac{1}{9}.b^2 = \frac{2b^2+63b+36}{18}$$

18) (ITA-99) Seja p(x) um polinômio de grau 3 tal que p(x) = p(x + 2) - x^2 - 2, para todo x ∈ ***R***. Se -2 é uma raiz de p(x), então o produto de todas as raízes de p(x) é:
a) ( ) 36 b) ( ) 18 c) ( ) -36
d) ( ) -18 e) ( ) 1

Resolução: ***Alternativa C***
Como x = -2 é raiz de p(x), então
p(-2) = p(-2+2) – (-2)² – 2 Û p(0) = 6.
Logo p(x) = ax³ + bx² + cx + 6, a, b, c Î R, a ¹ 0,
tem-se p(x) = p(x + 2) – x² – 2 Û
Ûax³ + bx² + cx + 6 = a(x+2)³ + b(x+2)² + c(x+2) + 6 – x² – 2
Û ax³ + bx² + cx = ax³ + (6a + b – 1)x² + (12a+4b+c)x + 8ᵃ + + 4b + 2c – 2 Û

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 6a+b-1=b \\ 12a+4b+c=c \\ 8a+4b+2c-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=\frac{1}{6} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=-\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Assim, o produto das raízes de p(x) é $\frac{-6}{\frac{1}{6}} = -36$

---

19) (ITA-99) A equação polinomial p(x) = 0 de coeficientes reais e grau 6 é recíproca de 2^a espécie e admite i como raiz. Se p(2) = $-\frac{105}{8}$ e p(-2) = $\frac{255}{8}$, então a soma de todas as raízes de p(x) é igual a:

a) ( ) 10 b) ( ) 8 c) ( ) 6 d) ( ) 2
e) ( ) 1

Resolução: ***Alternativa C***
A equação dada tem coeficientes reais e admite i como raiz, logo –i também é raiz. Toda equação polinomial recíproca de 2ª espécie de grau par admite 1 e –1 como raízes. Sendo r ≠ 0 uma das raízes restantes de p(x) = 0, então $\frac{1}{r}$ ***também é raiz, pois a equação é recíproca. Assim, existe a ∈ R*, tal que***

$$p(x) = a(x-r)\left(x-\frac{1}{r}\right)(x^2-1)(x^2+1) =$$

$$= a\left(x^2-\left(r+\frac{1}{r}\right)x+1\right)(x^2-1)(x^2+1)$$

$$\text{Portanto} \left|\begin{array}{l} p(2)=\frac{-105}{8} \\ p(-2)=\frac{255}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a\left(5-2\left(r+\frac{1}{r}\right)\right)3.5=\frac{-105}{8} \\ a\left(5+2\left(r+\frac{1}{r}\right)\right)3.5=\frac{225}{8} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5-2\left(r+\frac{1}{r}\right)}{5+2\left(r+\frac{1}{r}\right)} = \frac{\frac{-105}{8}}{\frac{255}{8}} = -\frac{7}{17} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 85-34\left(r+\frac{1}{r}\right) = -35-14\left(r+\frac{1}{r}\right) \Leftrightarrow r+\frac{1}{r}=6$$

Conseqüentemente, a soma de todas as raízes da equação é

1 + (-1) + i + (-i) + r + $\frac{1}{r}$ ***= 0 + 0 + 6 = 6.***

---

20) (ITA-99) O conjunto de todos os números complexos z, z ≠ 0, que satisfazem à igualdade

$$|z+1+i| = \big||z| - |1+i|\big|$$

é:

a) ( ) $\{z \in C\text{: arg } z = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z\}$

b) ( ) $\{z \in C\text{: arg } z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z\}$

c) ( ) $\{z \in C\text{: } |z| = 1 \text{ e arg } z = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z\}$

d) ( ) $\{z \in C\text{: } |z| = \sqrt{2} \text{ e arg } z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z\}$

e) ( ) $\{z \in C\text{: arg } z = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z\}$

Resolução: ***Alternativa A***
Como z ≠ 0 e 1 + i são vetores no plano complexo, pela desigualdade triangular. |z + 1 + i| ≥ ||z| - |1 + i||, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, z e 1 + i têm a mesma direção e sentidos contrários, ou seja, z = - λ(1 + i), λ > 0. Assim,

$$z = \sqrt{2}\lambda\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Leftrightarrow z = \sqrt{2}\lambda\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$$

Logo o conjunto de todos os números complexos z, z ≠ 0, que satisfazem a igualdade |z + 1 + i| = ||z| - |1 + i|| é

$$V = \left\{z \in C : \arg z = \frac{5\pi}{4} = 2k\pi,\ k \in Z\right\}.$$

---

21) (ITA-99) Seja a ∈ ***R*** com $0 < a < \frac{\pi}{2}$. A expressão

$$\left[\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}+a\right)+\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-a\right)\right]\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$$

é idêntica a:

a) ( ) $\frac{\sqrt{2}\text{cotg}^2 a}{1+\text{cotg}^2 a}$ b) ( ) $\frac{\sqrt{2}\text{cotg} a}{1+\text{cotg}^2 a}$ c) ( ) $\frac{\sqrt{2}}{1+\text{cotg}^2 a}$

d) ( ) $\frac{1+3\text{cotg} a}{2}$ e) ( ) $\frac{1+2\text{cotg} a}{1+\text{cotg} a}$

Resolução: ***Alternativa A***

Para $0 < a < \frac{\pi}{2}$

$$\left[\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}+a\right)+\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-a\right)\right]\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right) =$$

$$= \left[2\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\cos a\right].\cos a = \sqrt{2}\cos^2 a =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}\cos^2 a}{\text{sen}^2 a}}{\frac{1}{\text{sen}^2 a}} = \frac{\sqrt{2}\,\text{cot g}^2 a}{\frac{\text{sen}^2 a+\cos^2 a}{\text{sen}^2 a}} = \frac{\sqrt{2}\,\text{cot g}^2 a}{1+\text{cot g}^2 a}$$

---

22) (ITA-99) A soma de todos os valores de a ∈ [0, 2π[que tornam o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x\ \text{sen}\,a + y\cos a + z\,(2\,\text{sen}\,a+\cos a) = 0 \\ x\ \text{sen}^2 a + y\cos^2 a + z\,(1+3\,\text{sen}^2 a + 2\,\text{sen}\,2a) = 0 \end{cases}$$

possível e indeterminado é:

a) ( ) 5π b) ( ) 4π c) ( ) 3π
d) ( ) 2π e) ( ) π

Resolução: ***Alternativa A***
Seja A a matriz incompleta do sistema. Então det A =

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} a & \cos a & 2\operatorname{sen} a+\cos a \\ \operatorname{sen}^2 a & \cos^2 a & 1+3\operatorname{sen}^2 a+2\operatorname{sen}2a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} a & \cos a & 2\operatorname{sen} a+\cos a \\ \operatorname{sen}^2 a & \cos^2 a & (2\operatorname{sen} a+\cos a)^2 \end{vmatrix} = (\text{det. de Vandermonde})$$

$$= (\cos a - \operatorname{sen} a)(2\operatorname{sen} a + \cos a - \operatorname{sen} a)(2\operatorname{sen} a + \cos a - \cos a) =$$

$$= (\cos a - \operatorname{sen} a)(\operatorname{sen} a + \cos a)(2\operatorname{sen} a)$$

Como o sistema é homogêneo, ele é possível e indeterminado se, e somente se.

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \text{coa} - \operatorname{sen} a = 0 \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen} a + \text{coa} = 0 \\ \text{ou} \\ 2\operatorname{sen} a = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} |\operatorname{sen} a| = |\cos a| \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen} a = 0 \end{array} \right.$$

Para a $a \in [0, 2\pi[$ ***os valores possíveis são*** $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, ***cuja soma é*** 5π

---

23) (ITA-99) Pelo ponto C: (4, -4) são traçadas duas retas que tangenciam a parábola $y = (x-4)^2 + 2$ nos pontos A e B. A distância do ponto C à reta determinada por A e B é:

a) ( ) $6\sqrt{12}$ b) ( ) $\sqrt{12}$ c) ( ) 12
d) ( ) 8 e) ( ) 6

Resolução: ***Alternativa C***
A reta que passa por C = (4;-4) e é paralela ao eixo 0y é o eixo da parábola de equação $y = (x-4)^2 + 2$.
As retas que passam por C = (4;-4) e não são paralelas ao eixo 0y têm equações da forma $y + 4 = a(x-4)$, ***com*** $a \in \mathbb{R}$.
Então uma reta passando pelo ponto C = (4;-4) é tangente à parábola de equação $y = (x-4)^2 + 2$ ***se, e somente se, é única a solução do sistema.***

$$\left| \begin{array}{l} y+4 = a(x-4) \\ y = (x-4)^2+2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} y = a(x-4)-4 \\ a(x-4)-4 = (x-4)^2+2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} y = a(x-4)-4 \\ (x-4)^2 - a(x-4) + 6 = 0 \end{array} \right.$$

Assim, para que a solução do sistema seja única, devemos ter
$\Delta = (-a)^2 - 4.6 = a^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{6}$, ***temos***

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} (x-4)^2 - (\pm 2\sqrt{6})(x-4) + 6 = 0 \\ y = (x-4)^2 + 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} x = 4 \pm \sqrt{6} \\ y = 8 \end{array} \right.$$

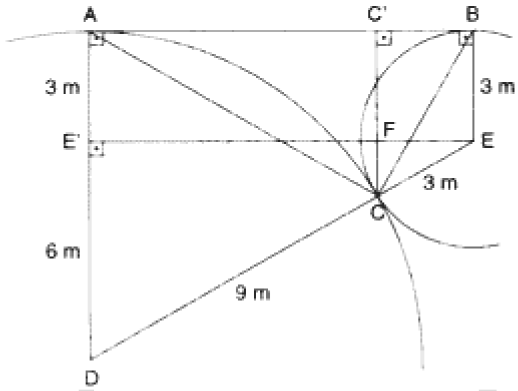
Portanto a distância do ponto C = (4;-4) à reta determinada pelos pontos A e B, de coordenadas $(4 + \sqrt{6} : 8)$ ***e*** $(4 - \sqrt{6} : 8)$ ***é igual à distância de C à reta de equação y = 8, isto é,*** $|-4-8| = 12$.

---

24) (ITA-99) Duas circunferências de raios iguais a 9 m e 3m são tangentes externamente num ponto C. Uma reta tangencia estas duas circunferências nos pontos distintos A e B. A área, em m^2, do triângulo ABC é:

a) ( ) $27\sqrt{3}$ b) ( ) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ c) ( ) $9\sqrt{3}$
d) ( ) $27\sqrt{2}$ e) ( ) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

Resolução: ***Alternativa B***
Sejam D e E os centros das circunferências de raios 9m e 3m, respectivamente. Sejam E' a projeção ortogonal de E sobre $\overline{AD}$ ***e C' a projeção ortogonal de C sobre*** $\overline{AB}$. ***Seja F a intersecção de*** $\overline{EE'}$ ***e*** $\overline{CC'}$, ***como mostra a figura.***



Como A e B são pontos de tangência, temos que $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ e $\overline{BE} \perp \overline{AB}$. ***Como C é o ponto de tangência, DE = DC + CE = 9 + 3 = 12m e E'D = AD – AE' = AD – BE = 9 – 3 = 6m, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo EE'D, temos:***

$EE'^2 + E'D^2 = DE^2 \Leftrightarrow EE'^2 + 6^2 + 12^2 \Leftrightarrow EE' = 6\sqrt{3}$ ***m, do que se conclui que AB = EE' =*** $6\sqrt{3}$ ***m***

Além disso, $\overline{FC} \,//\, \overline{E'D}$, ***logo*** $\Delta EFC \sim \Delta EE'D \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{EC}{FC} = \frac{ED}{E'D} \Leftrightarrow \frac{3}{FC} = \frac{12}{6} \Leftrightarrow FC = \frac{3}{2}\,m \text{ e } CC' = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}\,m$$

Portanto a área do triângulo ABC vale

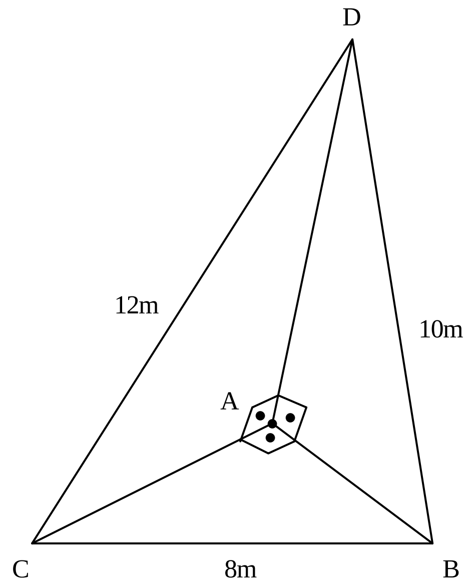
$$\frac{AB.CC'}{2} = \frac{6\sqrt{3}.\frac{9}{2}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}\,m^2.$$

---

25) (ITA-99) Um triedro tri-retângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com lados medindo 8m, 10m, e 12m. O volume, em m^3, do sólido formado é:

a) ( ) $15\sqrt{6}$ b) ( ) $5\sqrt{30}$ c) ( ) $6\sqrt{15}$
d) ( ) $30\sqrt{6}$ e) ( ) $45\sqrt{6}$

Resolução: ***Alternativa A***
O sólido formado é a pirâmide ABCD, em que os ângulos das faces de vértice A são retos, como mostra a figura a seguir:



Pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{cases} AB^2 + AC^2 = 8^2 \\ AB^2 + AD^2 = 10^2 \\ AC^2 + AD^2 = 12^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$