Estratégia Militares

EXTENSIVO 2021.2

MATEMÁTICA PARA EEAR

TRIGONOMETRIA I

Prof. Victor So

AULA 00

05 DE OUTUBRO DE 2020

Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá, aluno(a)! Seja bem-vindo(a) ao nosso curso!

Antes de mais nada, gostaria de me apresentar. Meu nome é Victor So Taa Rhan, fui aprovado nos vestibulares da AFA, do ITA e do IME no ano de 2011. Obtive o 3° lugar no vestibular do IME e, atualmente, sou graduado em Engenharia da Computação pelo ITA.

Minha preparação para o vestibular do ITA teve duração de 2 anos. No primeiro ano de cursinho, eu não entendia coisa alguma que os professores falavam e, por isso, fui classificado na última turma! No fim do meu ensino médio, eu prestei o vestibular do ITA e resolvi quase nenhuma questão de matemática, até o enunciado era difícil de entender. Depois de muito estudo, eu aprendi a resolver as questões da banca e, também, vários bizus de matemática de provas militares!

Eu sei que o caminho é árduo, mas eu vou ajudar você a alcançar sua aprovação. Passarei todo o conhecimento que acumulei durante a minha preparação.

A minha missão é ver o seu nome na lista dos aprovados! Conte comigo nessa jornada!

Qualquer dúvida, crítica ou sugestão, entre em contato conosco pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

METODOLOGIA DO CURSO

Este curso apresentará toda a base da matemática para que você consiga resolver todas as questões da prova da **EEAR**. Não será necessário consultar outras fontes externas. Ao longo do curso, resolveremos diversos exercícios e com isso você será capaz de aprender como as questões são cobradas na prova. Você terá que se dedicar se quiser passar nesse concurso, então será **essencial** que você resolva as diversas questões que estão disponíveis nesse curso! Lembre-se: a prática leva à perfeição!

Se você já possui uma base sobre a matéria, você pode pular direto para a lista de questões. Surgindo alguma dúvida, veja resolução do exercício e/ou consulte a teoria para sanar suas dúvidas.

INTRODUÇÃO

Olá,

Vamos iniciar o estudo sobre trigonometria. Veremos todos os conceitos fundamentais que precisamos para resolver as questões envolvendo esse tema e vamos aprender a resolver cada tipo de questão das provas anteriores!

Nesse curso, tentei deixar os comentários das questões bem detalhados, então, se você for um aluno avançado ou intermediário, apenas confira o gabarito e tente resolver todas as questões dessa aula. Lembre-se! O importante é ganhar velocidade na hora da prova, então, tente resolver a maior quantidade de exercícios possível e não perca tempo verificando questões que você já sabe! Caso você seja um aluno iniciante, você pode conferir o passo a passo das resoluções e aprender com elas.

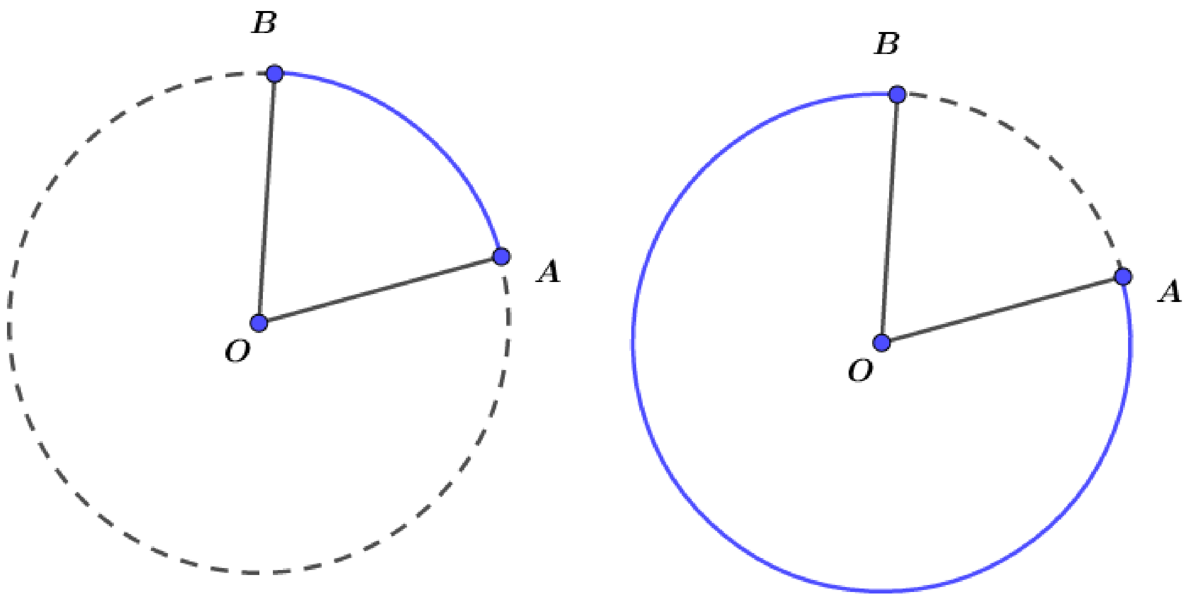
Sem mais delongas, vamos começar! Bons estudos!

1. ELEMENTOS BÁSICOS DA TRIGONOMETRIA

1.1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

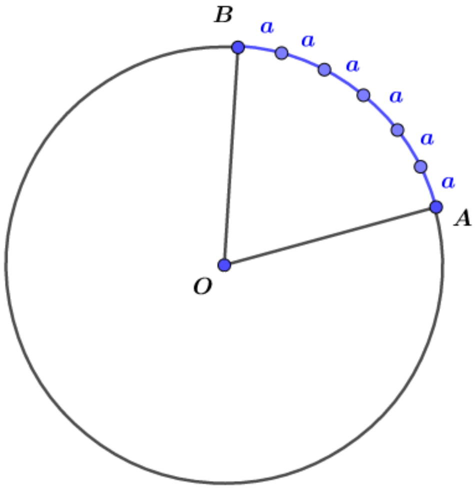
1.1.1. ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

Tomando-se dois pontos A e B em uma circunferência, esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes é um arco de circunferência. A e B são as extremidades desses arcos.



1.1.2. MEDIDA DE UM ARCO

Para medir arcos de circunferência, precisamos estabelecer uma unidade de medida. Vamos definir a nossa unidade de medida como o arco a. Então, a medida de um arco $\widehat{AB}$ é determinada pela quantidade de arco a que cabem nela:



Nesse exemplo, o arco $\widehat{AB}$ equivale a 6 arco a:

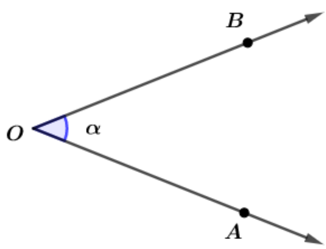
$$\widehat{AB} = 6 \cdot arco\ a$$

Usando termos mais genéricos, temos:

$$\widehat{AB} = \frac{\boldsymbol{comprimento\ de\ \widehat{AB}}}{\boldsymbol{comprimento\ da\ unidade}}$$

1.1.3. ÂNGULO

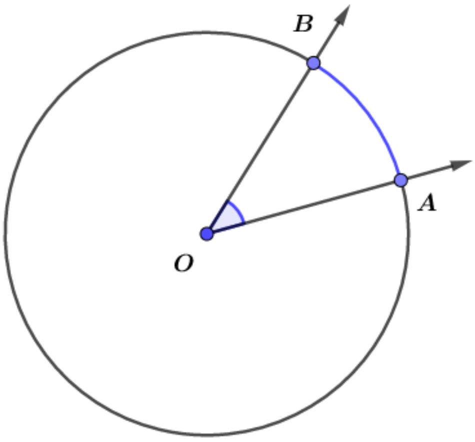
Dados duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de mesma origem O, a diferença de direção entre elas determina um ângulo:



α é o ângulo $A\hat{O}B$.

Geralmente, usamos o alfabeto grego para nomear os ângulos: α (alfa), β (beta), γ (gama), θ (teta).

1.1.4. MEDIDA DE UM ÂNGULO

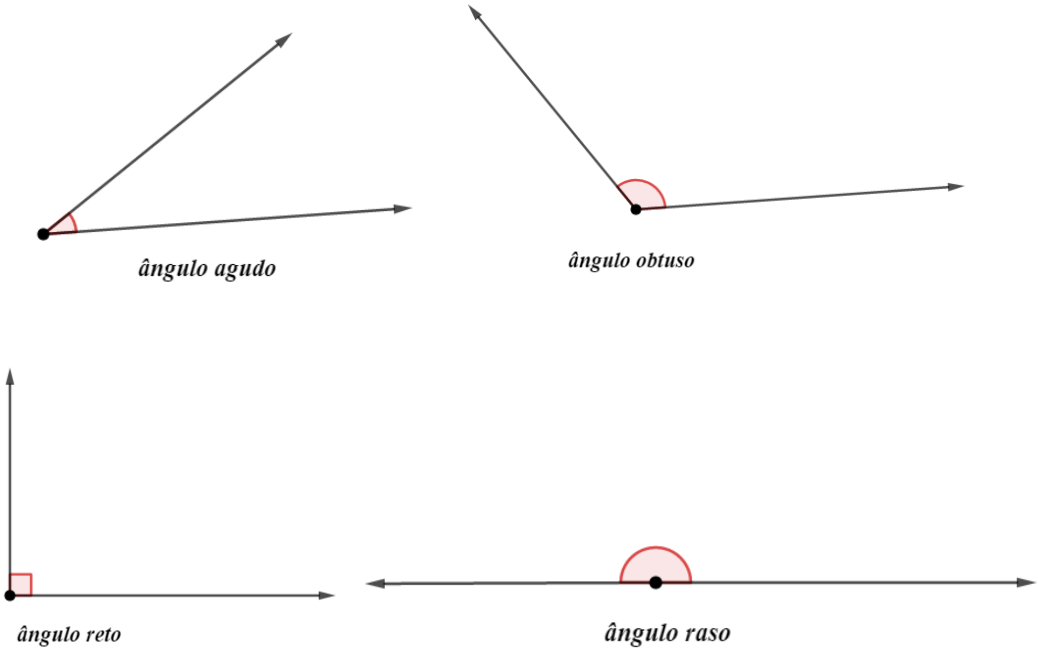


O ângulo central $A\hat{O}B$ é igual à medida do arco $\widehat{AB}$ no caso em que o raio da circunferência é unitário:

$$A\hat{O}B = \widehat{AB}$$

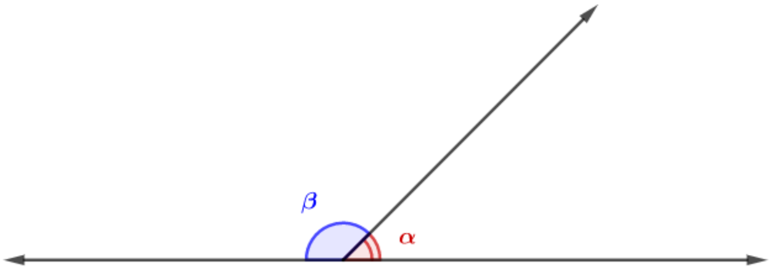
1.1.5. CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS

Os ângulos podem ser classificados nos seguintes tipos:



1.1.6. ÂNGULOS SUPLEMENTARES

Dois ângulos são suplementares quando sua soma é $180°$.

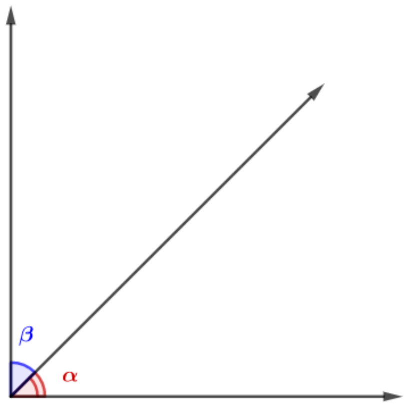


α e β são ângulos suplementares:

$$\alpha + \beta = 180°$$

1.1.7. ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Dois ângulos são complementares quando sua soma é $90°$.

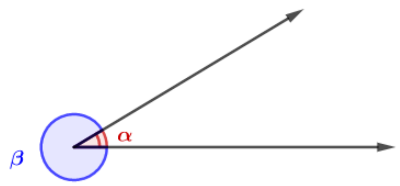


α e β são ângulos complementares:

$$\alpha + \beta = 90°$$

1.1.8. ÂNGULOS REPLEMENTARES

Dois ângulos são replementares quando sua soma é $360°$.

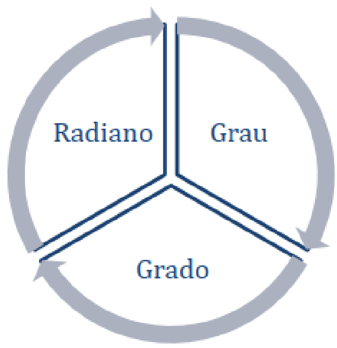


α e β são replementares:

$$\alpha + \beta = 360°$$

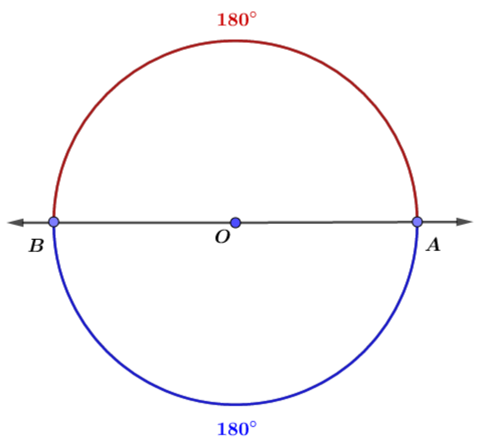
1.1.9. UNIDADES USUAIS DE MEDIDAS

Vimos que para medir um arco de circunferência, precisamos estabelecer uma unidade de medida como referência. Atualmente, temos três unidades de medidas mais famosos: grau, grado e radiano. Vamos estudar cada um deles:



I) Grau:

Um grau (1°) é a unidade de medida determinada pela divisão de uma circunferência em 360 partes iguais. Assim, se dividimos uma circunferência no meio, cada arco que obtemos terá a medida de 180°.



O grau pode ser subdividido em duas outras:

Definimos um minuto por $1'$ e ele equivale a $1/60$ do ângulo de um grau.

Um segundo é representado por $1''$ e equivale a 1/60 do ângulo de um minuto.

Dessa forma, temos as seguintes relações:

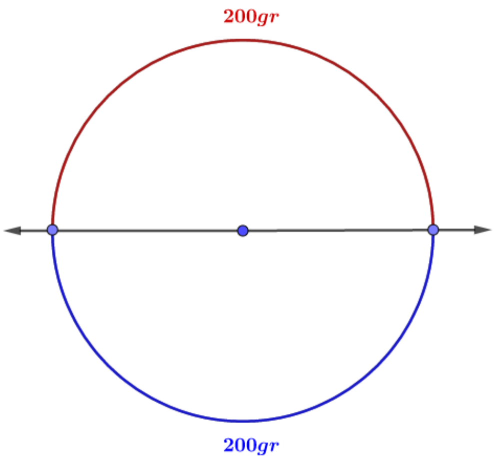
$$1' = \frac{1°}{60} \; e \; 1'' = \frac{1'}{60}$$

$$\boxed{1° = 60' \; (60 \; minutos)}$$

$$\boxed{1' = 60'' \; (60 \; segundos)}$$

II) Grado

Um grado $(1 \; gr)$ é a unidade de medida determinada pela divisão da circunferência em 400 partes iguais. Dessa forma, se dividimos a circunferência no meio, cada arco terá a medida de $200 \; gr$.



III) Radiano

Um radiano $(1 \; rad)$ é a unidade de medida igual ao comprimento do raio da circunferência. O comprimento total de uma circunferência é dado por:

$$C = 2\pi r$$

Onde r é o raio da circunferência e C é o seu comprimento total.

π, lê-se “pi”, e seu valor numérico é aproximadamente:

$$\pi \cong 3{,}14$$

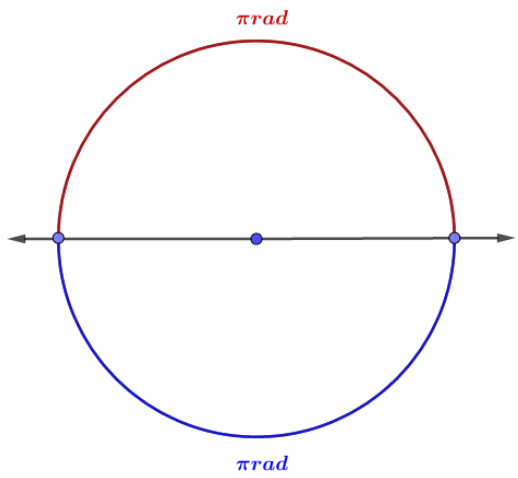
Então, usando a fórmula:

$$\widehat{AB} = \frac{comprimento\ de\ \widehat{AB}}{comprimento\ da\ unidade}$$

E tomando $\widehat{AB}$ como o arco de uma volta completa na circunferência, temos:

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

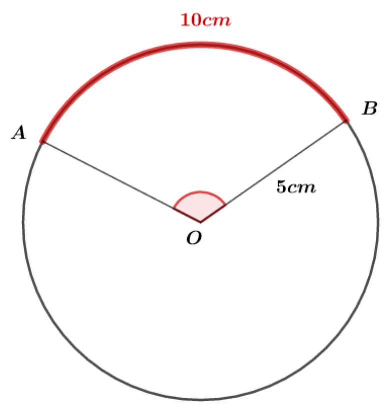
Assim, o arco de uma volta completa corresponde a $2\pi\ rad$.



Veja o exemplo:

1) Um arco de circunferência $\widehat{AB}$ mede 10 cm e o raio da circunferência mede 5 cm. Calcule a medida do arco em radianos:

Temos a seguinte figura:



Vamos usar a fórmula da medida do arco:

$$\widehat{AB} = \frac{comprimento\ \widehat{AB}}{comprimento\ raio}$$

$$A\hat{O}B = \frac{10\ cm}{5\ cm} = 2\ rad$$

Vimos os três principais tipos de medidas usadas para os ângulos. Podemos estabelecer a seguinte equivalência entre elas:

$$2\pi\ rad = 360° = 400\ gr$$

A tabela abaixo esquematiza essas relações:

Grau	Grado	Radiano
$360°$	$400gr$	$2\pi\ rad$
$180°$	$200gr$	$\pi\ rad$

1.1.10. CONVERSÃO DE UNIDADES DE MEDIDA

Para converter ângulos em sistemas de medidas diferentes, podemos aplicar a regra de três. Sendo G a medida em graus e g a medida em grados, a conversão de graus em radianos é dada por:

$$360° - 400\ gr$$

$$G - g$$

Aplicando a regra de três, temos:

$$360g = 400G$$

$$g = \frac{10}{9}G$$

Para converter graus em radianos, podemos usar a mesma ideia. Sendo r a medida em radianos:

$$360° - 2\pi\ rad$$

$$G - r$$

$$360r = 2\pi G$$

$$r = \frac{\pi}{180}G$$

Vejamos um exemplo:

Vamos fazer a conversão de 240° em grado e em radianos:

Chamando de x e y os valores que queremos calcular, temos:

$$360° - 2\pi\, rad$$

$$240° - x$$

Aplicando a regra de três:

$$360x = 240 \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{4}{3}\pi\, rad$$

Analogamente para grados:

$$360° - 400gr$$

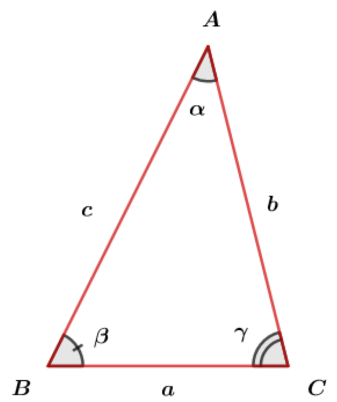
$$240° - y$$

$$360y = 240 \cdot 400$$

$$y = \frac{800}{3}gr$$

1.1.11. TRIÂNGULO

Um triângulo é determinado por 3 pontos não colineares (que não estão em uma mesma reta):



No triângulo temos os seguintes elementos:

a) Vértices: A, B, C

b) Medida dos lados: $\overline{AB} = b, \overline{BC} = a, \overline{AC} = c$

c) Ângulos internos: $B\hat{A}C = \hat{A} = \alpha, A\hat{B}C = \hat{B} = \beta, A\hat{C}B = \hat{C} = \gamma$

Temos também a seguinte propriedade:

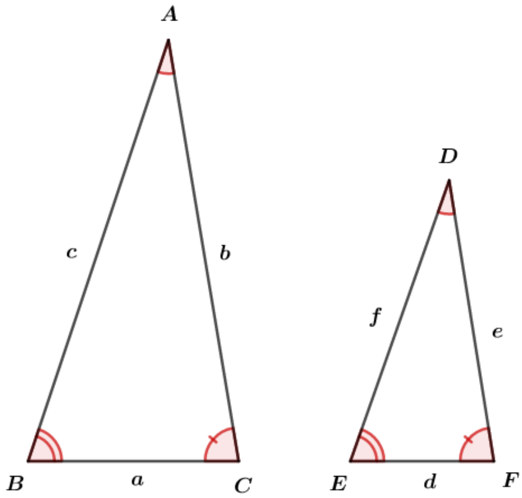
$$\boxed{\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = \pi}}$$

Veremos a sua demonstração na aula de Geometria Plana.

1.1.12. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são ditos semelhantes quando os seus lados forem proporcionais entre si e os seus ângulos correspondentes forem congruentes.

Veja:



Os triângulos ABC e DEF são semelhantes:

$$\hat{A} \equiv \hat{D}$$

$$\hat{B} \equiv \hat{E}$$

$$\hat{C} \equiv \hat{F}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{f} = \frac{b}{e}$$

1. Transforme para radianos os seguintes ângulos dados em graus:

a) $120°$

b) $135°$

c) $150°$

d) $210°$

e) $225°$

f) $240°$

g) $300°$

h) $315°$

i) $330°$

j) $360°$

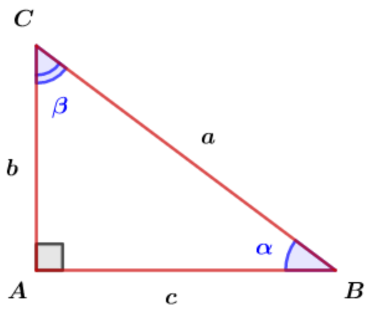
Resolução:

Arco em graus	Arco em radianos
$120°$	$120° = 120° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{2}\cancel{120°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{3}\cancel{180°}} = \frac{2\pi}{3} rad$
$135°$	$135° = 135° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{3}\cancel{135°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{4}\cancel{180°}} = \frac{3\pi}{4} rad$
$150°$	$150° = 150° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{5}\cancel{150°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{6}\cancel{180°}} = \frac{5\pi}{6} rad$
$210°$	$210° = 210° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{7}\cancel{210°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{6}\cancel{180°}} = \frac{7\pi}{6} rad$
$225°$	$225° = 225° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{5}\cancel{225°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{4}\cancel{180°}} = \frac{5\pi}{4} rad$
$240°$	$240° = 240° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{4}\cancel{240°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{3}\cancel{180°}} = \frac{4\pi}{3} rad$
$300°$	$300° = 300° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{5}\cancel{300°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{3}\cancel{180°}} = \frac{5\pi}{3} rad$
$315°$	$315° = 315° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{7}\cancel{315°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{4}\cancel{180°}} = \frac{7\pi}{4} rad$
$330°$	$330° = 330° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{11}\cancel{330°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{6}\cancel{180°}} = \frac{11\pi}{6} rad$
$360°$	$360° = 360° \cdot \frac{\pi\, rad}{180°} = {}^{2}\cancel{360°} \cdot \frac{\pi\, rad}{{}^{1}\cancel{180°}} = 2\pi\, rad$

Gabarito: a) $\frac{2\pi}{3} rad$ b) $\frac{3\pi}{4} rad$ c) $\frac{5\pi}{6} rad$ d) $\frac{7\pi}{6} rad$ e) $\frac{5\pi}{4} rad$ f) $\frac{4\pi}{3} rad$ g) $\frac{5\pi}{3} rad$ h) $\frac{7\pi}{4} rad$ i) $\frac{11\pi}{6} rad$ j) $2\pi\, rad$

2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Um triângulo é classificado como triângulo retângulo quando um de seus ângulos for igual a 90°:



No triângulo retângulo, chamamos de hipotenusa o lado BC e de catetos os lados AB e AC.

Na trigonometria temos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Além dessas, temos as razões secante, cossecante e cotangente. Elas são dadas por:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} = \frac{a}{c}$$

$$cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{a}{b}$$

$$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{c}{b}$$

Perceba que também podemos escrever tangente como:

$$tg\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}}$$

Para a cotangente, temos:

$$cotg\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

$$\boxed{\boldsymbol{cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}}}$$

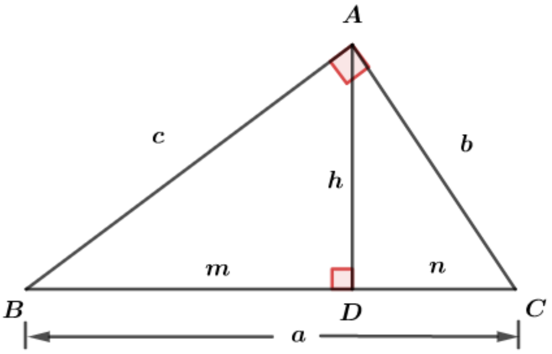
Ainda, das relações do triângulo retângulo, temos o **Teorema de Pitágoras**:

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}}$$

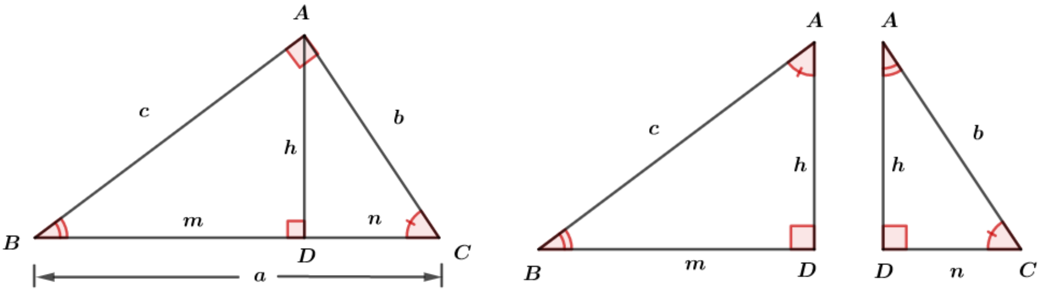
O Teorema de Pitágoras afirma que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Demonstração:

Considere o seguinte triângulo ABC:



Note que os triângulos ABC, ABD, CAD são semelhantes:



Assim, podemos escrever a seguinte razão de proporção entre os triângulos semelhantes:

$$ABC \sim ADC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an$$

$$ABC \sim ABD \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am$$

Somando essas duas relações, temos:

$$b^2 + c^2 = an + am$$

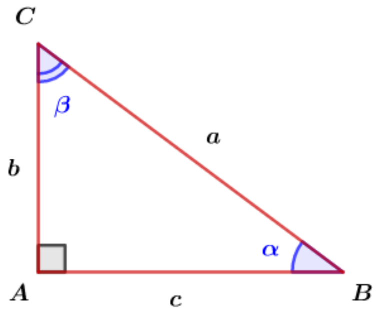
$$b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como $m + n = a$, substituindo na equação, obtemos:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

2.1. RELAÇÃO FUNDAMENTAL

Dado o seguinte triângulo retângulo, temos:



$$sen\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\ sen\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\ cos\alpha$$

Usando o Teorema de Pitágoras, encontramos a relação fundamental entre seno e cosseno:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (asen\alpha)^2 + (acos\alpha)^2$$

$$a^2 = a^2 sen^2\alpha + a^2 \cos^2\alpha$$

$$\boxed{\boldsymbol{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}}$$

Podemos, então dizer que a soma dos quadrados do seno e cosseno de um ângulo vale 1.

Se dividirmos a equação da relação fundamental por $\cos^2\alpha$, obtemos:

$$\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{\boldsymbol{tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}}$$

Se dividirmos por $sen^2\alpha$, obtemos:

$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha}$$

$$\boxed{\boldsymbol{1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha}}$$

Essas relações são muito úteis para resolver as questões do militares. Então, decore!

Além dessas apresentadas, temos mais duas que podem ajudar a resolver a questões da prova:

$$\boxed{\boldsymbol{\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}}}$$

Demonstração:

Sabemos que $sec\alpha = 1/cos\alpha$, assim, temos:

$$\cos\alpha = \frac{1}{sec\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{\sec^2\alpha}$$

Usando a relação fundamental $\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$, obtemos:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}$$

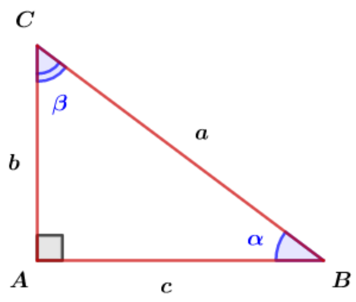
Para $cossec\alpha$:

$$sen\alpha = \frac{1}{cossec\alpha} \Rightarrow sen^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Rightarrow sen^2\alpha = \cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha$$

$$\Rightarrow sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

2.2. ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Das relações do triângulo, temos:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$

Na figura, $\hat{A} = \pi/2$. Substituindo na equação acima:

$$\frac{\pi}{2} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$

$$\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$$

⇒ $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares

Dessa relação, temos as seguintes consequências:

$$sen\alpha = \frac{b}{a} \; e \; cos\beta = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow sen\alpha = cos\beta$$

$$sen\beta = \frac{c}{a} \; e \; cos\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow sen\beta = cos\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{b}{c} \; e \; cotg\beta = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = cotg\beta = \frac{1}{tg\beta}$$

$$tg\beta = \frac{c}{b} \; e \; cotg\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow tg\beta = cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

ESQUEMATIZANDO

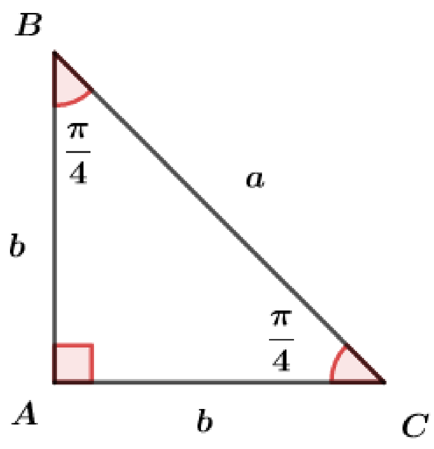
$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
$sen\alpha = cos\beta$
$sen\beta = cos\alpha$
$tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$
$tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}$

2.3. ÂNGULOS NOTÁVEIS

Os ângulos $\pi/6, \pi/4$ e $\pi/3$ são considerados ângulos notáveis. Vamos calcular o valor do seno, cosseno e tangente desses ângulos.

1) $\pi/4$:

Considere o seguinte triângulo isósceles:



Através do Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + b^2$$

$$a^2 = 2b^2$$
$$a = \sqrt{2}b$$

Usando a definição de seno, cosseno e tangente, obtemos:

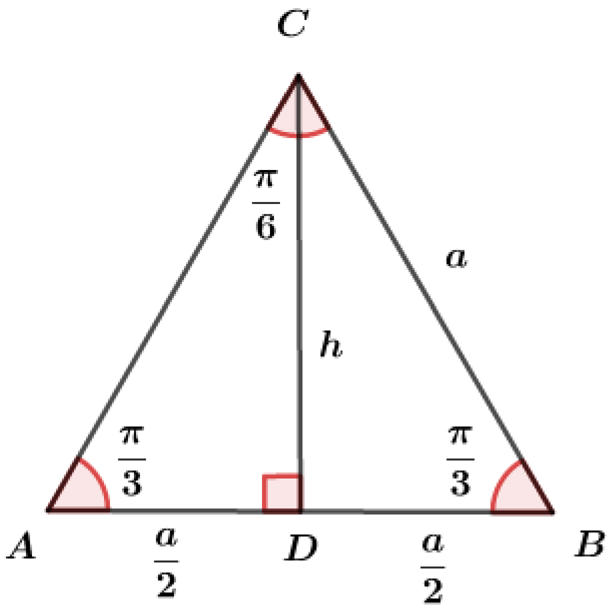
$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{b} = 1$$

2) $\pi/6$ e $\pi/3$:

Agora, considere o triângulo equilátero:



Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Calculando o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos $\pi/6$ e $\pi/3$:

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

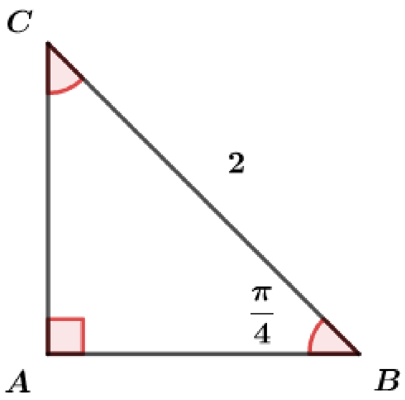
$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Podemos construir a tabela dos ângulos notáveis:

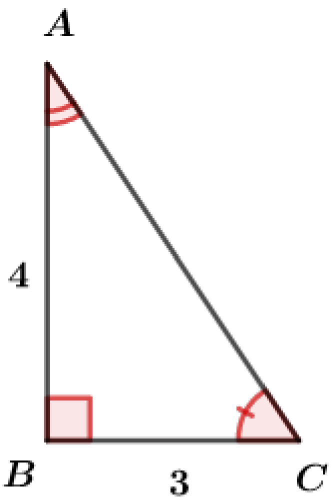
	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2. Dados os triângulos abaixo, calcule o valor dos lados que faltam:

a)



b)



Resolução:

a) Conhecemos o valor do $sen(\pi/4)$, podemos calcular o valor dos catetos usando a seguinte razão:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$AB = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

b) Basta aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = 4^2 + 3^2$$

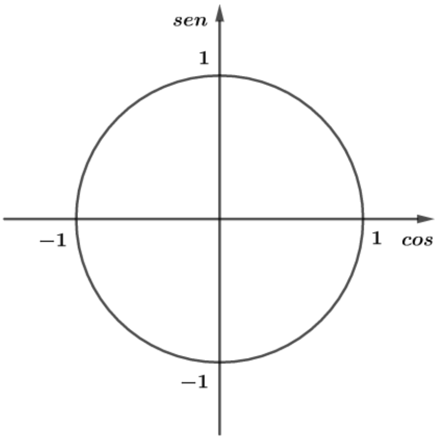
$$AC = \sqrt{25} = 5$$

Gabarito: a) $AB = \sqrt{2}$ b) $AC = 5$

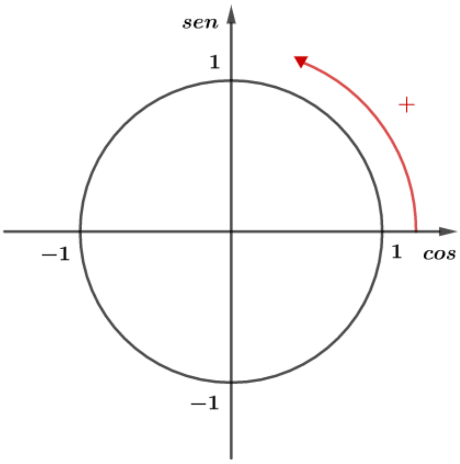
3. CICLO TRIGONOMÉTRICO

3.1. DEFINIÇÃO

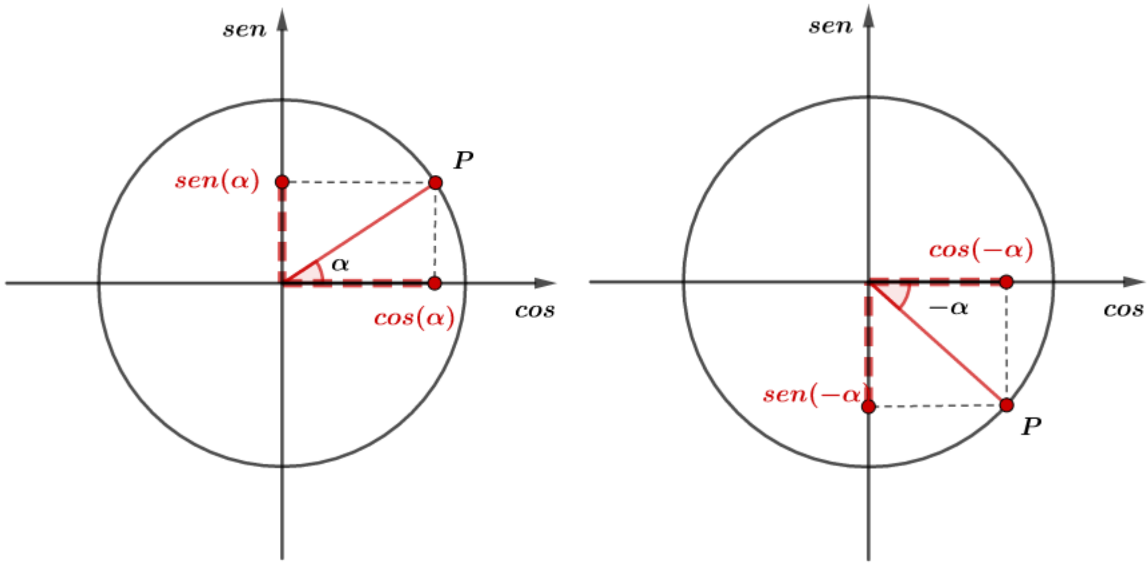
O ciclo trigonométrico ou círculo trigonométrico é a representação de uma circunferência de raio 1 em um plano cartesiano ortogonal, onde o eixo horizontal é o cosseno e o eixo vertical é o seno:



No ciclo trigonométrico, o sentido de rotação positivo é o anti-horário e a origem se dá no extremo à direita:

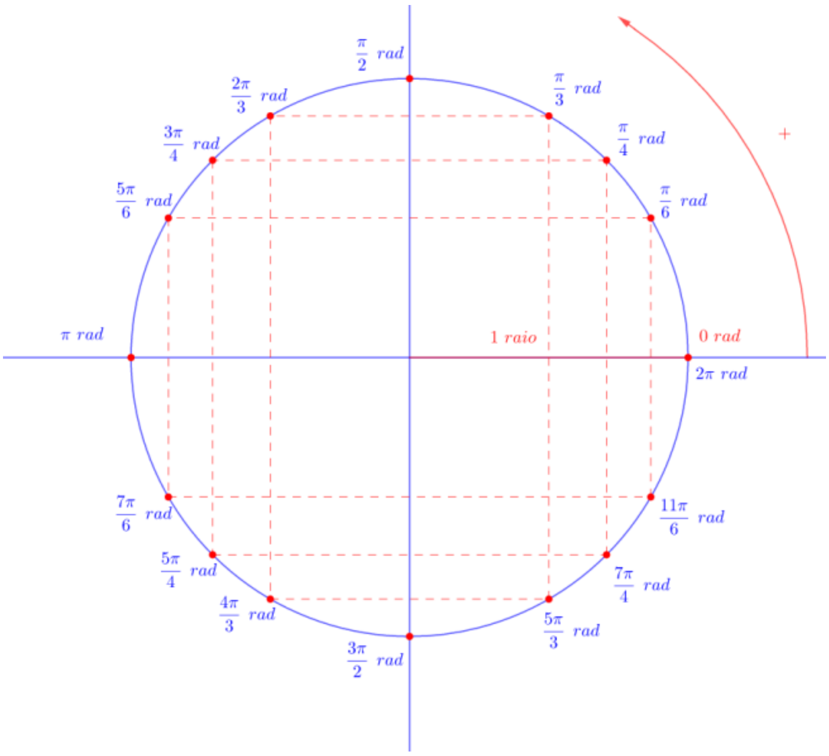


Tomando-se um ponto qualquer na circunferência, a projeção horizontal desse ponto é o cosseno do ângulo entre o ponto e a reta horizontal. A projeção vertical desse ponto resulta no seno do ângulo. Veja:



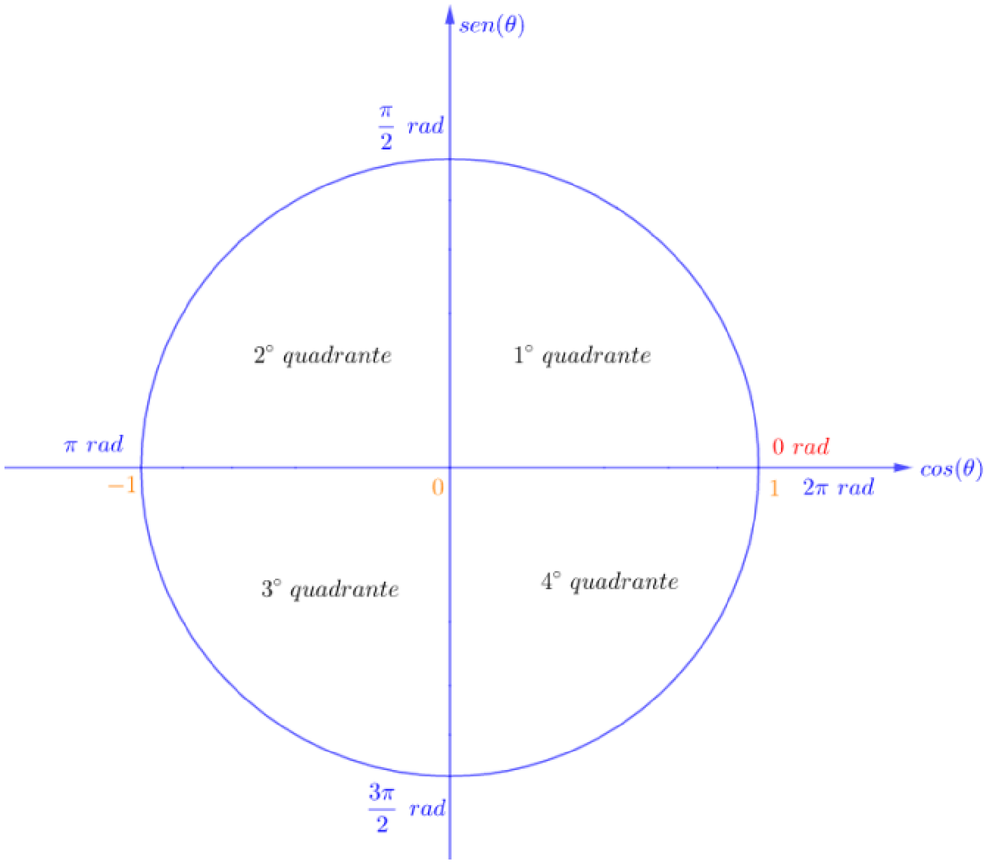
3.2. ÂNGULOS NOTÁVEIS

A seguinte figura ilustra os principais ângulos do círculo trigonométrico:



3.3. QUADRANTES

Dividindo o ciclo trigonométrico em 4 partes iguais, obtemos 4 quadrantes. Elas recebem a seguinte denominação:



Cada quadrante possui os seguintes intervalos de valores:

1° Quadrante: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2° Quadrante: $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

3° Quadrante: $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

4° Quadrante: $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

3.4. ÂNGULOS CONGRUENTES

O que acontece quando consideramos um arco maior do que 2π?

Sabemos que no círculo trigonométrico, os arcos variam de 0 a 2π. Para calcular os valores do seno e cosseno de ângulos maiores do que 2π, devemos encontrar o seu ângulo congruente no intervalo de 0 a 2π.

Vamos ver a definição de ângulos congruentes:

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}}$$

α e β são congruentes se, e somente se, satisfazem a relação acima.

Essa relação é importante para encontrar todas as raízes de uma equação.

Vejamos um exemplo:

Determine os arcos positivos, menores do que 10π, congruentes a $\pi/3$.

Podemos aplicar diretamente a fórmula dos ângulos de congruência e variar os valores de $k \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi \Rightarrow \alpha_1 = \frac{7\pi}{3}$$

$$k = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 4\pi \Rightarrow \alpha_2 = \frac{13\pi}{3}$$

$$k = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 6\pi \Rightarrow \alpha_3 = \frac{19\pi}{3}$$

$$k = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 8\pi \Rightarrow \alpha_4 = \frac{25\pi}{3}$$

De acordo com o que acabamos de calcular, $\frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{19\pi}{3}$ e $\frac{25\pi}{3}$ são arcos côngruos a $\pi/3$.

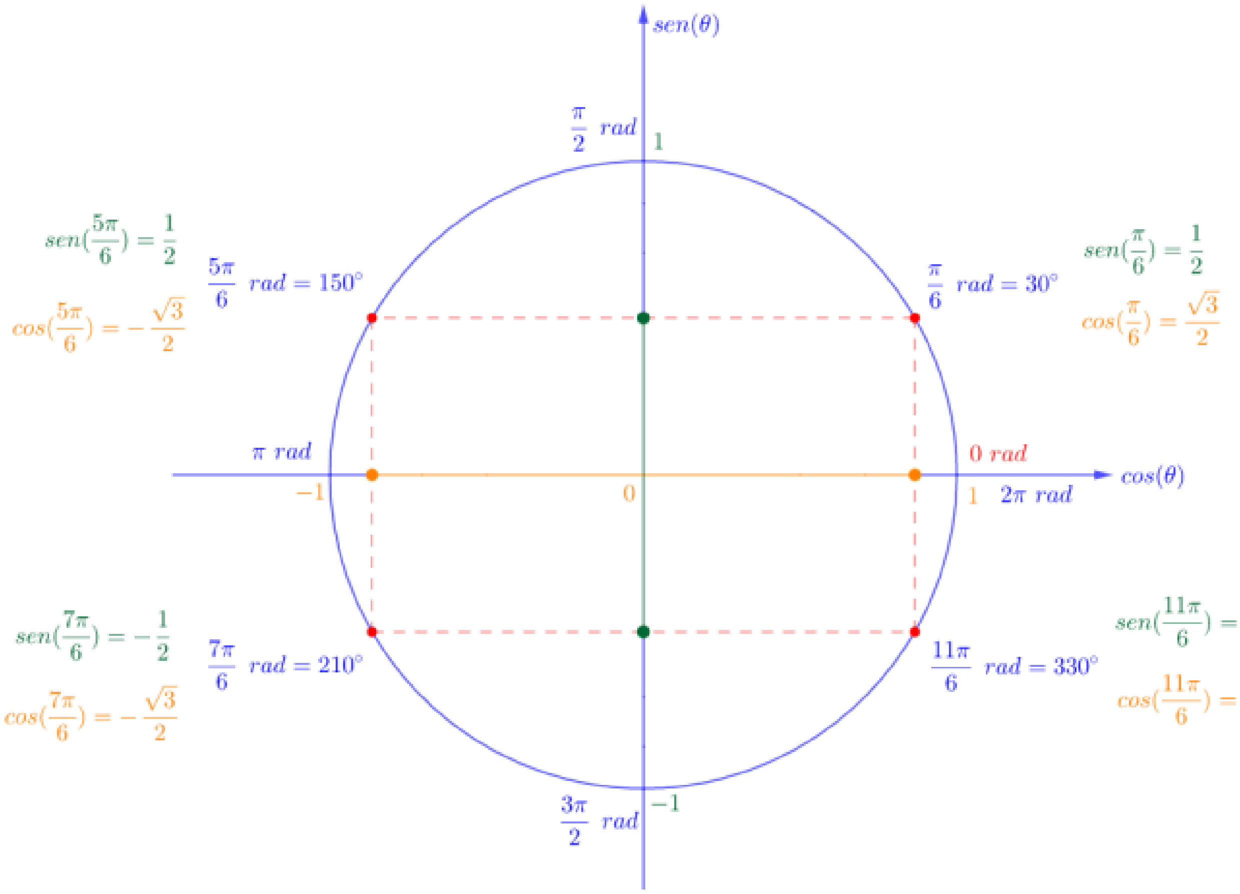
Assim, podemos afirmar:

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{7\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{13\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{19\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{25\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{25\pi}{3}\right)$$

3.5. REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

Conhecendo apenas as razões trigonométricas do primeiro quadrante, podemos encontrar o valor do seno e cosseno dos outros quadrantes. Essa técnica é conhecida como redução ao primeiro quadrante. Vejamos para o caso do arco de 30°:



4. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

4.1. FUNÇÕES PERIÓDICAS

Vimos que as funções seno e cosseno repetem seus valores a cada volta completo no ciclo trigonométrico. Antes de estudar as funções circulares, vamos ver o que é uma função periódica.

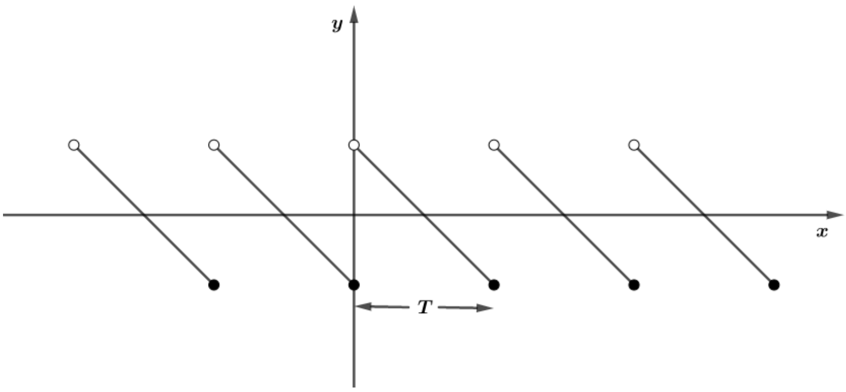
Definição:

Uma função $f: A \to B$ é periódica se vale a relação:

$$f(x+T) = f(x), \forall x \in A$$

Onde $T > 0$, o menor valor de T que satisfaz essa relação é chamado de período fundamental da função f.

Exemplo gráfico:



Note que a função se repete a cada período T.

4.1. FUNÇÃO SENO

4.1.1. DEFINIÇÃO

Seja $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, a função seno é dada por:

$$f(x) = senx$$

O domínio da função é o conjunto dos reais e sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

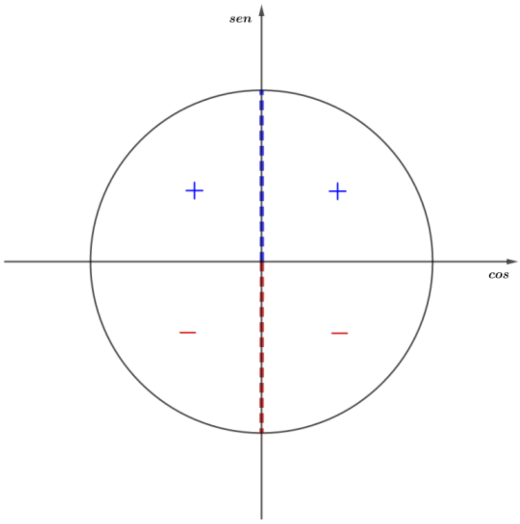
A função seno é periódica e seu período vale 2π. A cada volta completa no ciclo trigonométrico os valores do seno se repetem.

Para uma função do tipo $g(x) = sen(ax)$, o período fundamental é definido por:

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

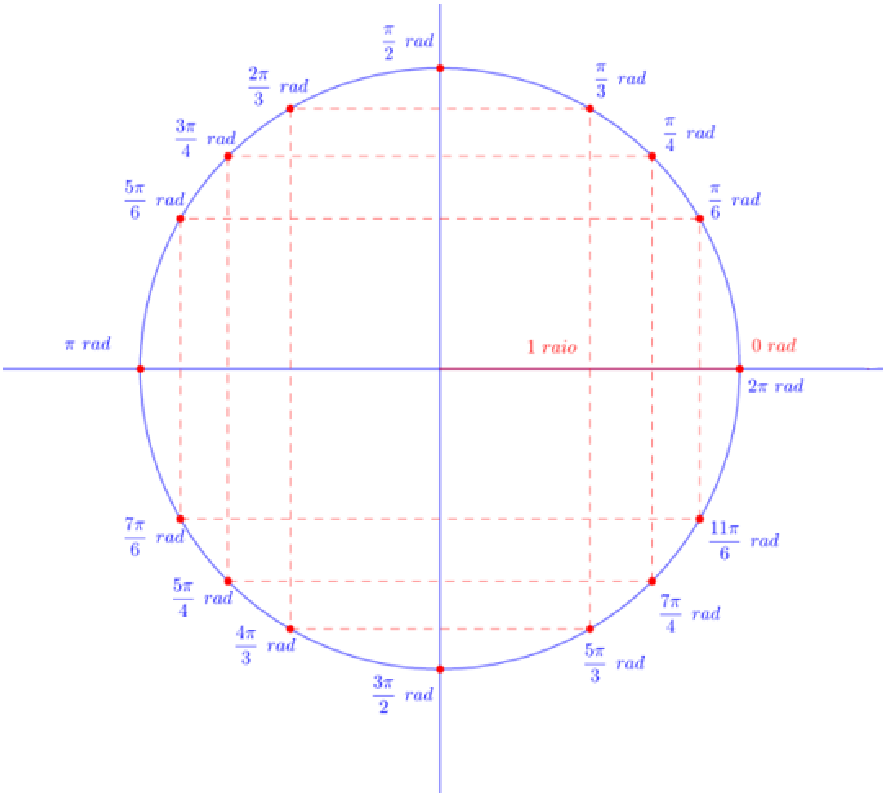
4.1.2. ESTUDO DO SINAL

Como o seno é o eixo vertical do ciclo trigonométrico, todos os pontos que estiverem no intervalo $[0, \pi]$ resultam em um seno positivo e no intervalo $[\pi, 2\pi]$ temos seno negativo.



4.1.3. ÂNGULOS NOTÁVEIS

Usando a seguinte figura, podemos ver o valor do seno dos ângulos notáveis:



Note que:

$$sen(0) = sen(\pi) = sen(2\pi) = 0$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

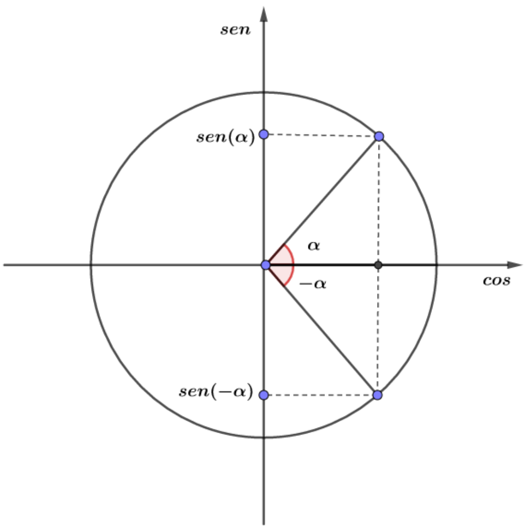
$$sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.1.4. PARIDADE

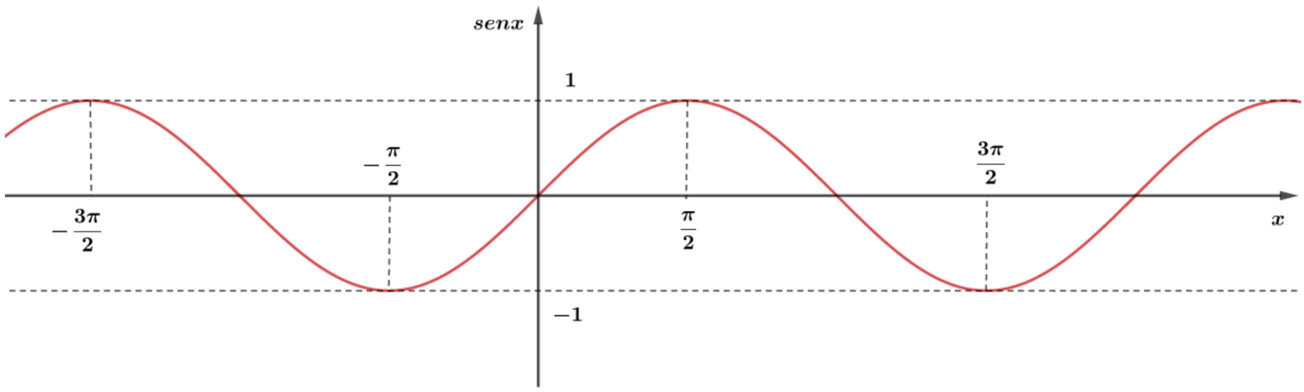
A função seno possui paridade ímpar, veja:



Pela figura, podemos ver que $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$. Isso caracteriza uma função ímpar.

4.1.5. GRÁFICO

A função seno possui o seguinte gráfico:



4.2. FUNÇÃO COSSENO

4.2.1. DEFINIÇÃO

Seja $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, a função cosseno é dada por:

$$f(x) = cosx$$

O domínio da função é o conjunto dos reais e sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$.

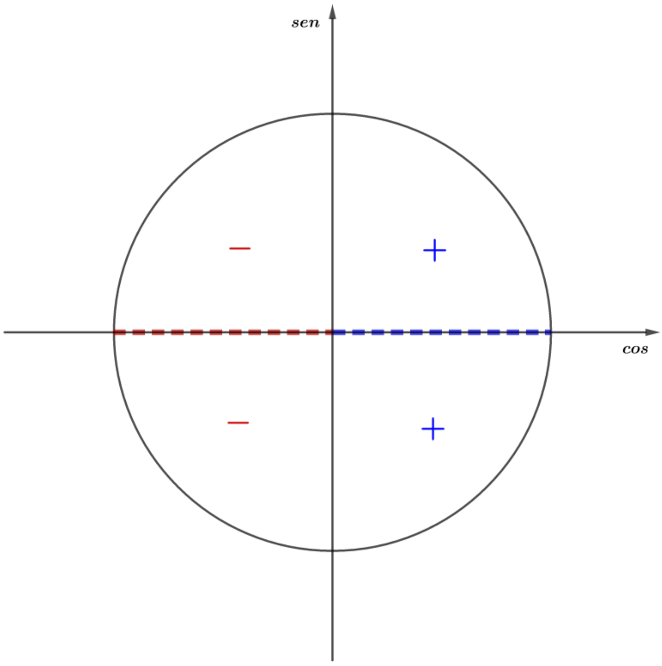
A função cosseno é periódica e seu período vale 2π. A cada volta completa no ciclo trigonométrico os valores do cosseno se repetem.

Para uma função do tipo $g(x) = cos(ax)$, o período fundamental é definido por:

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

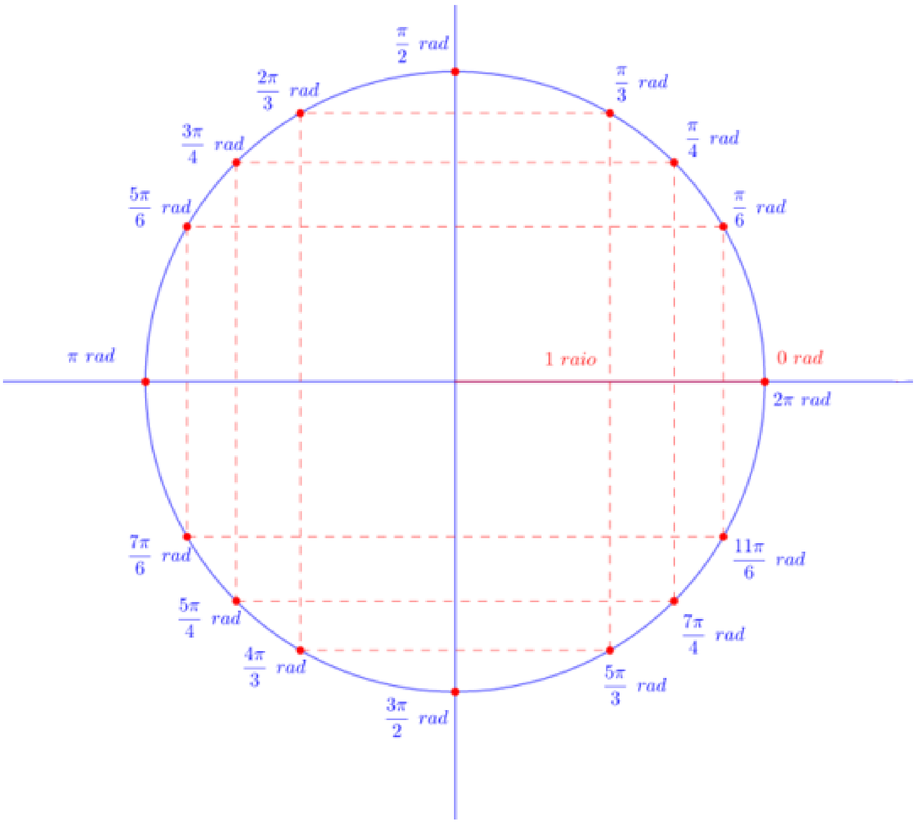
4.2.2. ESTUDO DO SINAL

Como o cosseno é o eixo horizontal do ciclo trigonométrico, todos os pontos que estiverem no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ resultam em um cosseno positivo e no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ temos cosseno negativo.



4.2.3. ÂNGULOS NOTÁVEIS

Usando a seguinte figura, podemos ver o valor do cosseno dos ângulos notáveis:



Note que:

$$cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$cos(0) = \cos(2\pi) = 1$$

$$cos(\pi) = -1$$

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

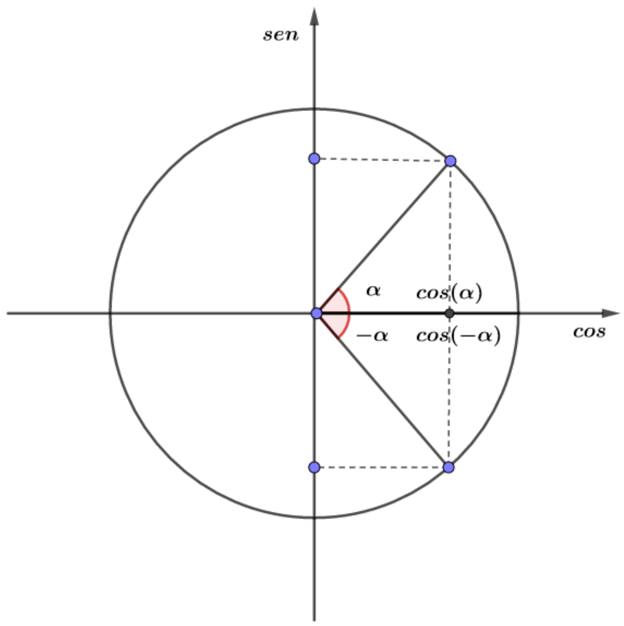
$$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.2.4. PARIDADE

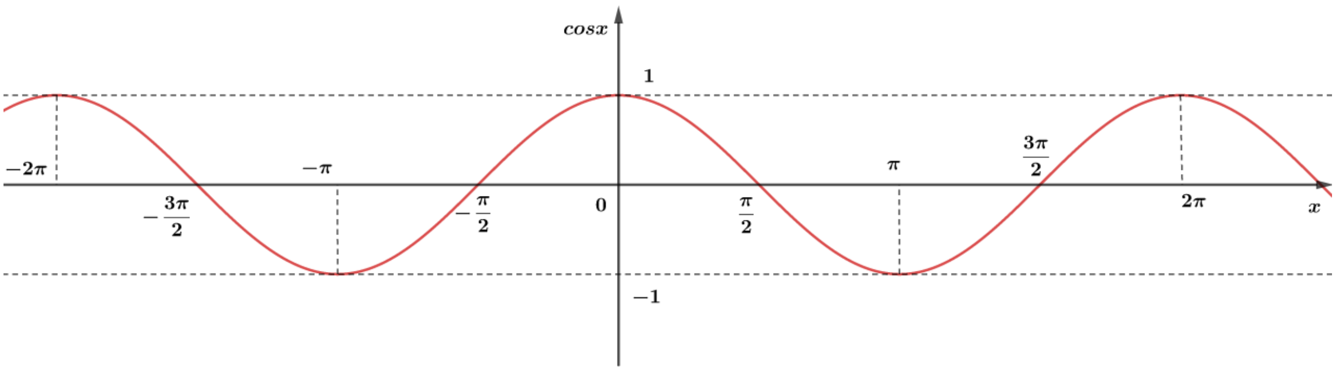
A função cosseno possui paridade par, veja:



Podemos ver que $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$. Isso caracteriza uma função par.

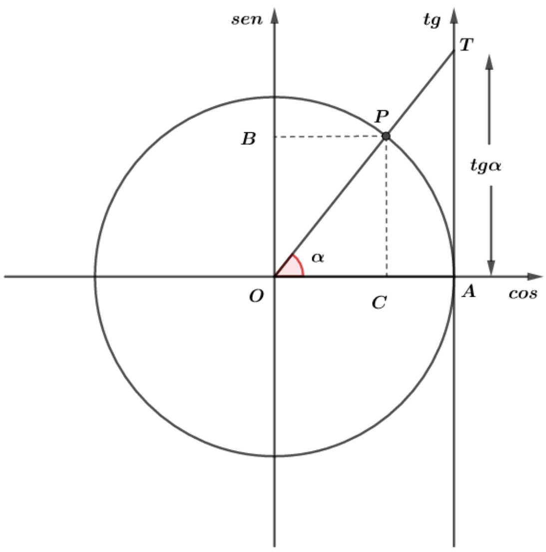
4.2.5. GRÁFICO

A função cosseno possui o seguinte gráfico:



4.3. FUNÇÃO TANGENTE

Podemos representar a reta tangente no ciclo. Essa reta é paralela ao eixo do seno e é chamada de eixo das tangentes. Veja a figura:



Tomando-se um ponto P na circunferência, a reta que passa pela origem e por P resulta na projeção da sua tangente no eixo das tangentes.

Perceba que os triângulos POC e TOA são semelhantes. Pela figura, podemos escrever:

$$\frac{BC}{OC} = \frac{TA}{OA}$$

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{tg\alpha}{1}$$

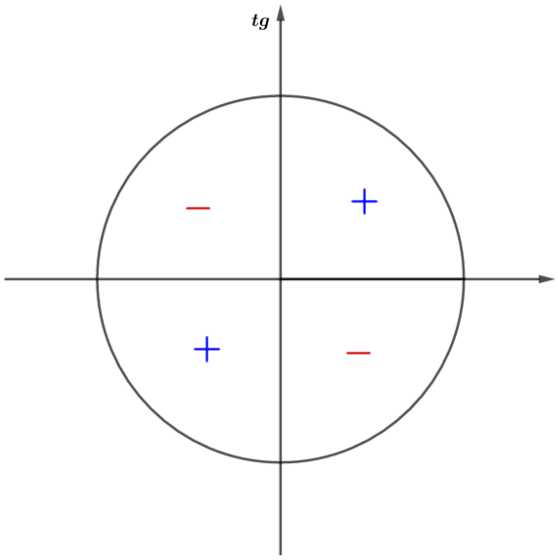
$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Assim, verificamos a relação fundamental da tangente.

4.3.1. ESTUDO DO SINAL

Como a tangente é a razão entre o seno e cosseno, o sinal resultante será o produto dos sinais do numerador e denominador dessa razão.

Assim, temos a seguinte ilustração:



4.3.2. INTERVALO DE VALORES

Um fato a se notar é que quando P percorre a circunferência, passando em cada quadrante, a tangente vai aumentando seu valor indefinidamente. Assim, podemos ver que ela assume qualquer valor real, diferentemente do seno e cosseno. Ainda, como a tangente é a razão entre seno e cosseno, sabemos que o denominador não pode ser nulo, caso contrário, o valor da tangente fica indefinido. Assim, todos os ângulos que resultam em cosseno nulo não pertencem ao domínio da tangente:

$$\boldsymbol{tg\alpha \in]-\infty, +\infty[, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

A função tangente também é periódica e seu período vale π.

Para uma função do tipo $g(x) = tg(ax)$, o período fundamental é definido por:

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

4.3.3. PARIDADE

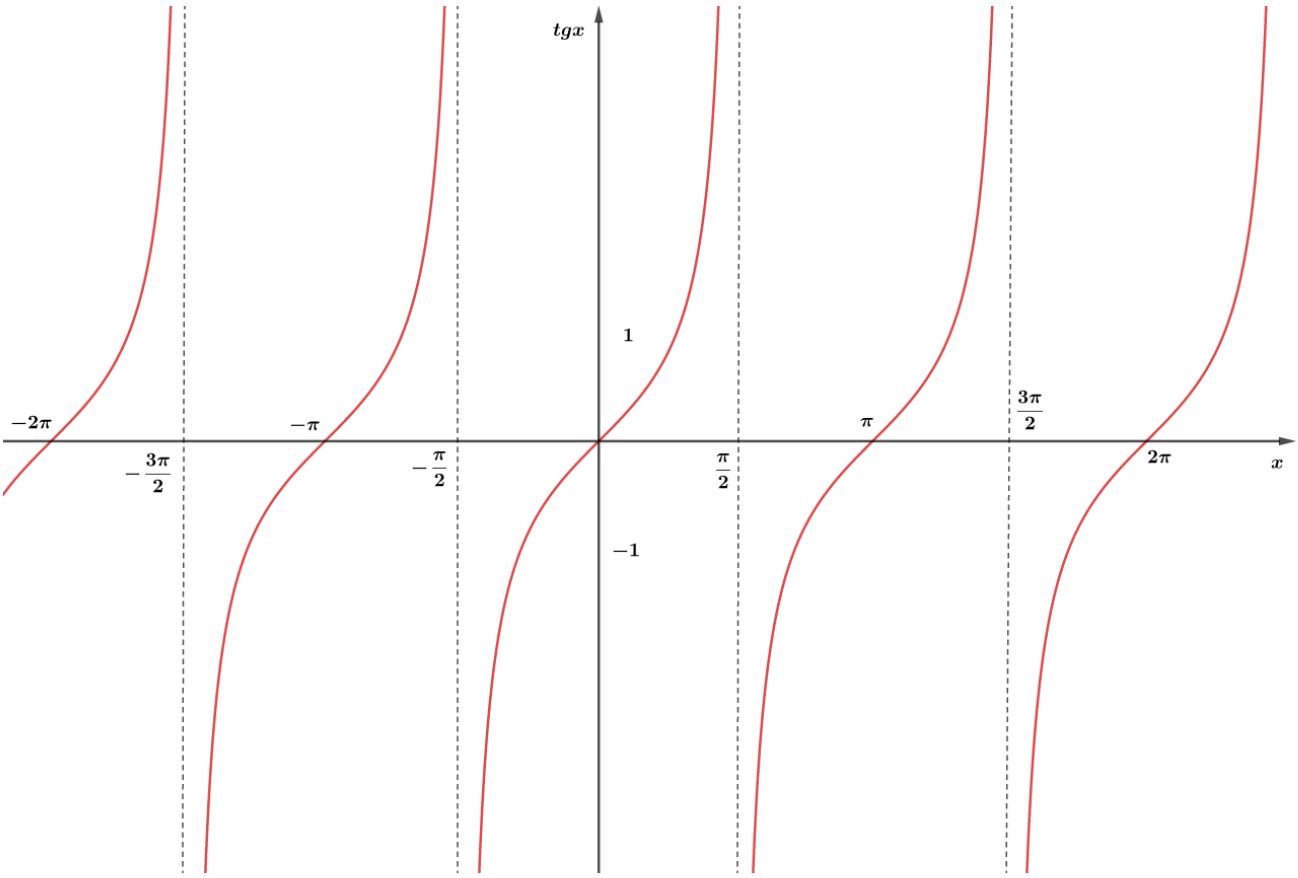
Vamos verificar a paridade da função tangente:

$$tg(-\alpha) = \frac{sen(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -tg(\alpha)$$

Podemos concluir que a função tangente é ímpar.

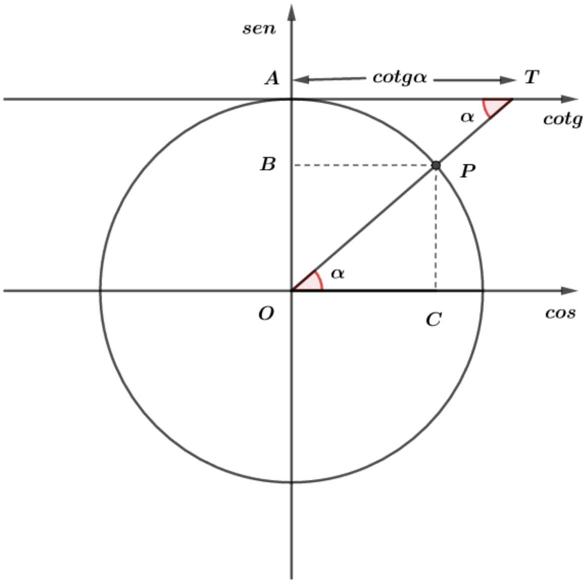
4.3.4. GRÁFICO

A função tangente possui o seguinte gráfico:



4.4. FUNÇÃO COTANGENTE

O eixo da cotangente também pode ser representado no ciclo trigonométrico. Veja a figura:



Os triângulos POC e OTA são semelhantes, assim, podemos escrever as seguintes razões:

$$\frac{AT}{AO} = \frac{OC}{BC}$$

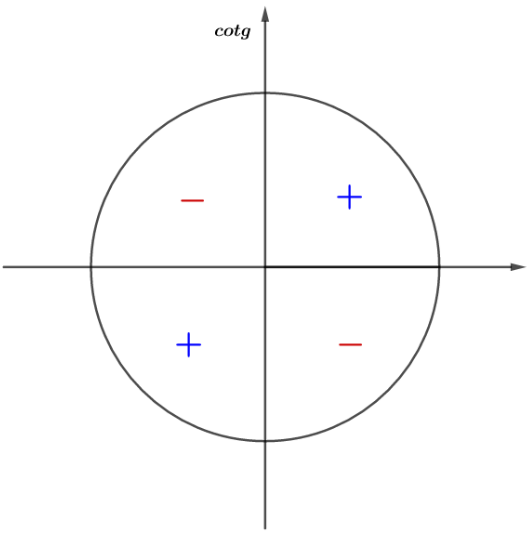
$$\frac{cotg\alpha}{1} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

$$\Rightarrow cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}$$

O que nos mostra que a relação fundamental é satisfeita.

4.4.1. ESTUDO DO SINAL

Como a cotangente é o inverso da tangente, o seu sinal seguirá o mesmo padrão:



4.4.2. INTERVALO DE VALORES

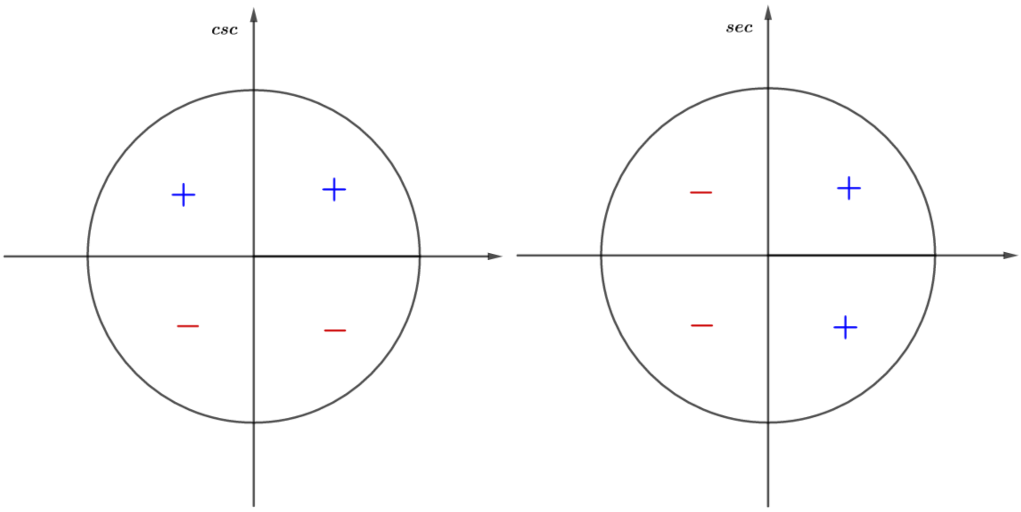
A cotangente também assume valores no conjunto dos reais, a sua única limitação é quando o seno é nulo. Assim, temos:

$$\boldsymbol{cotg\alpha} \in \,]-\infty, +\infty[, \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{k\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$$

4.5. FUNÇÕES SECANTE E COSSECANTE

4.5.1. ESTUDO DO SINAL

As funções secante e cossecante são o inverso do cosseno e seno, respectivamente. Desse modo, o sinal dessas funções seguirá o mesmo padrão das funções a elas relacionadas:



4.5.2. INTERVALO DE VALORES

As funções seno e cosseno variam entre os valores -1 e 1. Então, as funções secante e cossecante, sendo inversas, assumirão os seguintes intervalos de valores:

$$-1 \leq sen\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{sen\alpha} \geq 1 \; ou \; \frac{1}{sen\alpha} \leq -1$$

$$-1 \leq cos\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{cos\alpha} \geq 1 \; ou \; \frac{1}{cos\alpha} \leq -1$$

$$\boldsymbol{sec\alpha} \in (-\infty, \boldsymbol{-1}] \cup [\boldsymbol{1}, +\infty)$$

$$\boldsymbol{csc\alpha} \in (-\infty, \boldsymbol{-1}] \cup [\boldsymbol{1}, +\infty)$$

Temos que observar a condição de existência da secante e cossecante. Para cada um dos casos, temos:

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} \Rightarrow cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha} \Rightarrow sen\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

5. TRANSFORMAÇÕES

Vamos estudar as principais transformações que podem ser cobradas no vestibular. Tente decorar pelo menos as fórmulas de soma e diferença de arcos. Assim, se você esquecer as outras, você saberá deduzi-las na hora da prova.

5.1. SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS

Esse assunto é muito cobrado nas questões de trigonometria dos concursos! Então, tente decorar todas elas!

$$\boxed{\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{sen(A+B) = \mathrm{sen}(\mathrm{A})\cos(\mathrm{B}) + \mathrm{sen}(\mathrm{B})\cos(\mathrm{A})}$$

$$\boxed{sen(A-B) = \mathrm{sen}(\mathrm{A})\cos(\mathrm{B}) - \mathrm{sen}(\mathrm{B})\cos(\mathrm{A})}$$

$$\boxed{tg(A+B) = \frac{tg(A) + tg(B)}{1 - tg(A)tg(B)}}$$

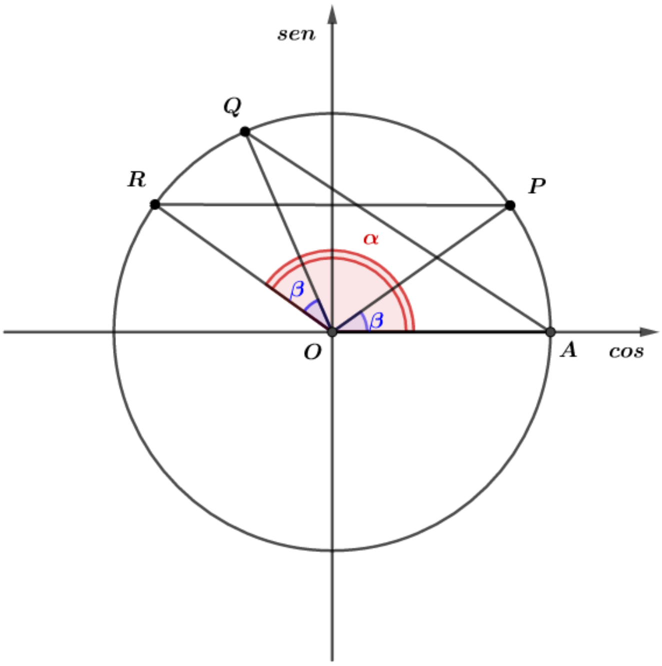
$$\boxed{\boldsymbol{tg(A-B)=\frac{tg(A)-tg(B)}{1+tg(A)tg(B)}}}$$

Demonstração:

1) $\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-sen(A)sen(B)$

Vamos usar o ciclo trigonométrico para demonstrar essa propriedade e a fórmula da distância da geometria analítica.

Sejam dados os pontos A, P, Q, R conforme ilustra a figura abaixo:



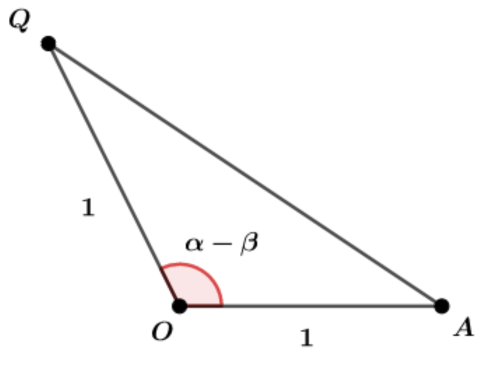
Os pontos P, Q, R possuem as seguintes coordenadas no plano:

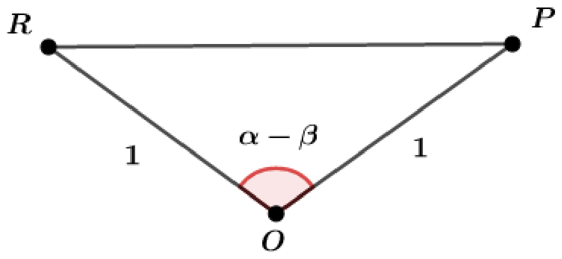
$$P(cos\beta, sen\beta)$$

$$Q(\cos(\alpha-\beta), sen(\alpha-\beta))$$

$$R(cos\alpha, sen\alpha)$$

Note que os triângulos OAQ e OPR são semelhantes:





Como os arcos Ô são iguais, podemos afirmar que $AQ = PR$. Usando a fórmula da distância da geometria analítica ($d_{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$), temos:

(Estudaremos com mais detalhes na aula de Geometria Analítica)

$$AQ^2 = \left(x_A - x_Q\right)^2 + \left(y_A - y_Q\right)^2$$

$$AQ^2 = (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + (0 - \operatorname{sen}(\alpha - \beta))^2$$

$$AQ^2 = (1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta)) + sen^2(\alpha - \beta)$$

$$AQ^2 = 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1$$

$$\Rightarrow AQ^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

$$PR^2 = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2$$

$$PR^2 = (cos\beta - cos\alpha)^2 + (sen\beta - sen\alpha)^2$$

$$PR^2 = \cos^2\beta - 2cos\alpha cos\beta + \cos^2\alpha + sen^2\beta - 2sen\alpha sen\beta + sen^2\alpha$$

$$PR^2 = \underbrace{\cos^2\beta + sen^2\beta}_{1} + \underbrace{\cos^2\alpha + sen^2\alpha}_{1} - 2cos\alpha cos\beta - 2sen\alpha sen\beta$$

$$\Rightarrow PR^2 = 2 - 2cos\alpha cos\beta - 2sen\alpha sen\beta$$

Igualando $AQ = PR$, temos:

$$AQ^2 = PR^2$$

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2cos\alpha cos\beta - 2sen\alpha sen\beta$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta}$$

2) $\cos(A + B) = cosAcosB - senAsenB$

Para demonstrar essa propriedade, podemos usar a fórmula acima e inserir $\beta = -\beta'$:

$$\cos\left(\alpha - (-\beta')\right) = cos\alpha\cos(-\beta') + sen\alpha sen(-\beta')$$

A função cosseno é par: $\cos(-\beta') = \cos(\beta')$.

A função seno é ímpar: $sen(-\beta') = -sen(\beta')$.

$$\Rightarrow \mathbf{cos(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}') = \boldsymbol{cos\alpha cos\beta' - sen\alpha sen\beta'}}$$

3) $sen(A + B) = \text{sen}(\text{A})\cos(\text{B}) + \text{sen}(\text{B})\cos(\text{A})$

Vamos usar a relação de ângulos complementares:

$$sen(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$$

Usando a fórmula da diferença de arcos do cosseno, temos:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) cos\beta + sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) sen\beta = sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{sen(\alpha+\beta) = sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta}$$

4) $sen(A - B) = \text{sen}(\text{A})\cos(\text{B}) - \text{sen}(\text{B})\cos(\text{A})$

Podemos obter o seno da diferença usando o seno da soma:

$$sen\big(\alpha + (-\beta)\big) = sen\alpha\cos(-\beta) + cos\alpha sen(-\beta)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{sen(\alpha-\beta) = sen\alpha cos\beta - sen\beta cos\alpha}$$

5) $tg(A + B) = \frac{tg(A)+tg(B)}{1-tg(A)tg(B)}$

Vamos usar o seno e o cosseno da soma:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta}{cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta}$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{sen\alpha cos\beta + cos\alpha sen\beta}{cos\alpha cos\beta}}{\dfrac{cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta}{cos\alpha cos\beta}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}}$$

6) $tg(A - B) = \frac{tg(A)-tg(B)}{1+tg(A)tg(B)}$

Podemos usar a fórmula da demonstração 5:

$$tg\big(\alpha + (-\beta)\big) = \frac{tg\alpha + tg(-\beta)}{1 - tg\alpha tg(-\beta)}$$

Como a função tangente é ímpar, temos:

$$\Rightarrow \boldsymbol{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}}$$

5.2. ARCO DUPLO E ARCO METADE

Agora que conhecemos as fórmulas da soma e diferença de arcos, podemos expandir o conhecimento para arco duplo, arco triplo e arco metade.

5.2.1. FÓRMULAS DE ARCO DUPLO

$$\boxed{\cos(2A)=\cos^2 A-sen^2A}$$

$$\boxed{sen(2A)=2senAcosA}$$

$$\boxed{tg(2A)=\frac{2tgA}{1-tg^2A}}$$

Demonstrações:

1) $\cos(2A)=\cos^2 A-sen^2A$

Usando a fórmula da soma do cosseno, temos:

$$\cos(A+A)=cosAcosA-senAsenA$$

$$\Rightarrow \cos(2A)=\cos^2 A-sen^2A$$

Também podemos representar essa identidade de outras formas. Usando a relação fundamental $sen^2A+\cos^2 A=1$:

$$\cos(2A)=(1-sen^2A)-sen^2A$$

$$\Rightarrow \cos(2A)=1-2sen^2A$$

$$\cos(2A)=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)$$

$$\Rightarrow \cos(2A)=2\cos^2 A-1$$

2) $sen(2A)=2senAcosA$

Usando a fórmula da soma do seno, temos:

$$sen(A+A)=senAcosA+senAcosA$$

$$\Rightarrow sen(2A) = 2senAcosA$$

3) $tg(2A) = \frac{2tgA}{1-tg^2A}$

Usando a fórmula da soma da tangente, temos:

$$tg(A+A) = \frac{tgA + tgA}{1 - tgAtgA}$$

$$\Rightarrow tg(2A) = \frac{2tgA}{1 - tg^2A}$$

5.2.2. FÓRMULAS DE ARCO METADE

$$\boxed{\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cosA}{2}}}$$

$$\boxed{\mathrm{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cosA}{2}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cosA}{1 + cosA}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - cosA}{senA} = \frac{senA}{1 + cosA}}$$

$$\boxed{senA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\cos(A) = \frac{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{tgA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

Demonstrações:

1) $\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cosA}{2}}$

Podemos usar a fórmula do arco duplo do cosseno:

$$\cos(2A) = 2\cos^2 A - 1$$

Fazendo $A = \alpha/2$, temos:

$$\cos\left(2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(1+\cos\alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

2) $\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cosA}{2}}$

Sabemos que $\cos(2A) = 1 - 2sen^2A$, assim, temos:

$$\cos\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - cos\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}$$

3) $tg\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cosA}{1+cosA}}$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

$$\Rightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}}$$

4) $tg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - cosA}{senA} = \frac{senA}{1 + cosA}$

Usando as fórmulas de arco duplo, temos:

$$\frac{1 - cosA}{senA} = \frac{1 - \left(1 - 2sen^2\left(\frac{A}{2}\right)\right)}{2sen\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{2sen^2\left(\frac{A}{2}\right)}{2sen\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{sen\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = tg\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\frac{senA}{1 + cosA} = \frac{2sen\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1} = \frac{sen\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = tg\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow tg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - cosA}{senA} = \frac{senA}{1 + cosA}$$

5) $senA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

Para deduzir essa fórmula, podemos usar o seno do arco duplo e usar $A = \frac{\alpha}{2}$:

$$sen\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = 2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$sen(\alpha) = \frac{2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$sen(\alpha) = 2\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\frac{1}{\sec^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow sen(\alpha) = \frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

6) $tgA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

Usando o arco duplo da tangente e fazendo $A = \alpha/2$, temos:

$$tg(2A) = \frac{2tgA}{1 - tg^2A}$$

$$\Rightarrow tg(\alpha) = \frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

7) $\cos(A) = \frac{1-tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$cos\alpha = \frac{sen\alpha}{tg\alpha}$$

Substituindo $sen\alpha$ e $tg\alpha$ na relação do cosseno, encontramos:

$$cos\alpha = \frac{\frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

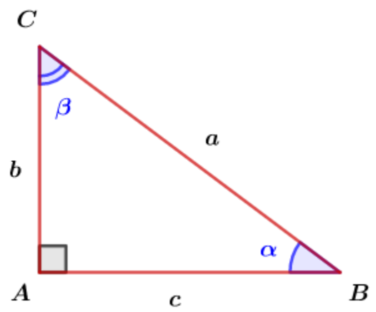
$$\Rightarrow cos\alpha = \frac{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

6. RESUMO

6.1. MEDIDAS USUAIS

Grau	Grado	Radiano
$360°$	$400gr$	$2\pi\, rad$
$180°$	$200gr$	$\pi\, rad$

6.2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS



Principais Razões	
$sen\alpha$	$\frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa} = \frac{b}{a}$
$cos\alpha$	$\frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} = \frac{c}{a}$
$tg\alpha$	$\frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = \frac{b}{c}$
$sec\alpha$	$\frac{1}{cos\alpha}$
$csc\alpha$	$\frac{1}{sen\alpha}$
$cotg\alpha$	$\frac{1}{tg\alpha}$

6.3. RELAÇÃO FUNDAMENTAL

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}}$$

$$\boxed{cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}}$$

$$\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}$$

$$\boxed{1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}}$$

$$\boxed{sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}}$$

6.4. ÂNGULOS COMPLEMENTARES

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
$sen\alpha = cos\beta$
$sen\beta = cos\alpha$
$tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$
$tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}$

6.5. TRANSFORMAÇÕES

6.5.1. SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS

$$\boxed{\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + sen(A)sen(B)}$$

$$\boxed{sen(A + B) = \mathrm{sen}(\mathrm{A})\cos(\mathrm{B}) + \mathrm{sen}(\mathrm{B})\cos(\mathrm{A})}$$

$$\boxed{sen(A - B) = \mathrm{sen}(\mathrm{A})\cos(\mathrm{B}) - \mathrm{sen}(\mathrm{B})\cos(\mathrm{A})}$$

$$\boxed{tg(A + B) = \frac{tg(A) + tg(B)}{1 - tg(A)tg(B)}}$$

$$\boxed{tg(A - B) = \frac{tg(A) - tg(B)}{1 + tg(A)tg(B)}}$$

6.5.2. ARCO DUPLO

$$\boxed{\cos(2A) = \cos^2 A - sen^2 A}$$

$$\boxed{sen(2A) = 2senAcosA}$$

$$\boxed{tg(2A) = \frac{2tgA}{1 - tg^2 A}}$$

6.5.3. ARCO METADE

$$\boxed{\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cosA}{2}}}$$

$$\boxed{\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cosA}{2}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cosA}{1 + cosA}}}$$

$$\boxed{tg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - cosA}{senA} = \frac{senA}{1 + cosA}}$$

$$\boxed{senA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\cos(A) = \frac{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{tgA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

7. QUESTÕES DE PROVAS ANTERIORES

3. (ESA/2016)

Sabendo que x pertence ao 4° quadrante e que $\cos x = 0,8$, pode-se afirmar que o valor de $sen\ 2x$ é igual a:

a) $0,28$

b) $-0,96$

c) $-0,28$

d) $0,96$

e) 1

4. (ESA/2012)

A soma dos valores m que satisfazem as igualdades $\operatorname{sen} x = \frac{m+1}{m}$ e $\cos x = \frac{m+2}{m}$ é:

a) 5

b) 6

c) 4

d) -4

e) -6

5. (EEAR/2021)

Se $y = sen^2\theta + sen\ 2\theta + \cos^2\theta$ e $sen\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$, então y é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

c) 2

d) 3

6. (EEAR/2021)

Se $sen(a+b) = -\frac{1}{2}$ e $\cos(a-b) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, então o valor de $(sen\ a + \cos a)(sen\ b + \cos b)$ é

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{(1+\sqrt{3})}{2}$

7. (EEAR/2021)

O ângulo cuja medida é $\frac{37\pi}{4}$ rad pertence ao ____ quadrante.

a) $1°$

b) $2°$

c) $3°$

d) $4°$

8. (EEAR/2019)

Simplificando a expressão $\text{sen}(2\pi - x) + \text{sen}(3\pi + x)$, obtém-se

a) $\text{sen}\ x$

b) $-\text{sen}\ x$

c) $2\ \text{sen}\ x$

d) $-2\ \text{sen}\ x$

9. (EEAR/2019)

Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual a

a) $48°$

b) $54°$

c) $66°$

d) $72°$

10. (EEAR/2018)

O valor de $\text{sen}\, 1270°$ é igual a

a) $-\cos 10°$

b) $-\text{sen}\, 30°$

c) $-\text{sen}\, 10°$

d) $-\cos 30°$

11. (EEAR/2018)

As funções $f(x) = \text{sen}\, x \;\; e \;\; g(x) = \cos x$, no segundo quadrante, são, respectivamente,

a) decrescente e decrescente

b) decrescente e crescente

c) crescente e decrescente

d) crescente e crescente

12. (EEAR/2018)

O valor de $\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)$ é igual a

a) $\text{sen}\, 2a$

b) $\cos 2a$

c) $2\, \text{sen}\, b \cdot \cos a$

d) $2\, \text{sen}\, a \cdot \cos b$

13. (EEAR/2017)

Seja $M = \frac{\text{cossec}\, x + \sec x}{\text{cotg}\, x + 1}$, com $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar M igual a

a) $\text{sen}\, x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\mathbf{cossec}\, x$

14. (EEAR/2017)

Ao somar as medidas angulares $120°$ e $\frac{3\pi}{2}$ rad, obtém-se a medida de um arco pertencente ao _____quadrante.

a) $1°$

b) $2°$

c) $3°$

d) $4°$

15. (EEAR/2016)

O valor de $\cos 735°$ é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

16. (EEAR/2016)

O valor correspondente ao $\cos 15°$ é

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

d) 1

17. (EEAR/2015)

Se $\mathrm{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta = \frac{4}{13}$ e $\mathrm{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha = \frac{36}{65}$, então $\mathrm{sen}\,(\alpha+\beta)$ é igual a:

a) $\frac{56}{65}$

b) $\frac{40}{65}$

c) $\frac{13}{36}$

d) $\frac{13}{56}$

18. (EEAR/2015) [Adaptada]

Ao simplificar a expressão $(1 + \cos x)(1 - \cos x)$, tem-se

a) 2

b) $\text{sen}^2 x$

c) $\cos^2 x$

d) $2 + \cos^2 x$

19. (EEAR/2015)

Seja $A = \frac{\text{sen}\, x \cdot \sec x}{\text{tg}\, x}$, com $\text{tg}\, x \neq 0$. Nessas condições, o valor de A é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) 1

20. (EEAR/2015)

O valor de $\frac{7\pi}{30}$ rad em graus é:

a) 36

b) 38

c) 42

d) 46

21. (EEAR/2014)

Dados $\text{sen}\, a = x, \cos a = y, \text{sen}\, b = z$ e $\cos b = w$, então $\text{sen}(a + b)$ é igual a

a) $xw + yz$

b) $xz + yw$

c) $xy - wz$

d) $xw - yz$

22. (EEAR/2013)

Se x é um arco do $1°$ quadrante, com $\operatorname{sen} x = a$ e $\cos x = b$, então $y = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos(\pi + x)}$ é:

a) a

b) b

c) $-a$

d) $-b$

23. (EEAR/2013)

Ao expressar $\frac{16\pi}{9}$ rad em graus, obtém-se

a) $170°$

b) $220°$

c) $280°$

d) $320°$

24. (EEAR/2013)

Sejam $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} 2x = \frac{a}{b}$. Se $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $b - a$ é igual a

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

25. (EEAR/2013)

Sendo $\operatorname{tg} x = \frac{1}{t}$ e $\operatorname{sen} x = u$, uma maneira de expressar o valor de $\cos x$ é

a) t

b) $\frac{u}{t}$

c) $u \cdot t$

d) $u + t$

26. (EEAR/2012)

Sejam as sentenças:

I- período $p = \pi$;

II- domínio $D = \mathbb{R}$;

III- conjunto imagem $Im = [-1, 1]$.

Em relação à função tangente, é (são) verdadeira(s) a(s) sentença(s)

a) I.

b) III.

c) I e II.

d) II e III.

27. (EEAR/2011)

Um arco de circunferência de $\frac{5\pi}{6}$ rad pode ser dividido em ______ arcos de $30°$

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

28. (EEAR/2011)

Se $\text{sen}\, y = m$ e $\cos y = n$, o valor de $\frac{\sec y}{\text{cossec}\, y}$ é

a) m.

b) n^2.

c) mn.

d) $\frac{m}{n}$.

29. (EEAR/2011)

Se $A = \operatorname{tg} 120°$ e $B = \operatorname{tg} 240°$, então

a) $B = A$

b) $B = -A$

c) $B = 2A$

d) $B = -2A$

30. (EEAR/2011)

Se $\cos x = \frac{2}{3}$ e $\operatorname{sen} x > 0$, então $\operatorname{sen} 2x$ é

a) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

31. (EEAR/2010)

Simplificando-se a expressão $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x}$

a) $\operatorname{cossec} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{tg} x$

32. (EEAR/2010)

Se $\operatorname{sen} x + \cos 2x = 1$, então um dos valores de $\operatorname{sen} x$ é

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

33. (EEAR/2010)

Seja $x = 150°$. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças, a seguir assinale a alternativa que apresenta o número de sentenças verdadeiras

I) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

II) $\operatorname{sen} 2x < 0$

III) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 + \sqrt{3}$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

34. (EEAR/2010)

O valor de $\cos 15°$ é

a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

c) $2 - \sqrt{2}$

d) $2 + \sqrt{3}$

35. (EEAR/2010)

Para $x \cdot y \neq 0$, a expressão $\frac{y^2 \cos 180° - xy \operatorname{sen} 270° + y^2 \operatorname{sen} 90°}{x^2 \cos 0°}$ equivale a:

a) $\frac{y}{x}$

b) $\frac{1}{x}$

c) $\frac{y}{x^2}$

d) $\frac{y^2}{x^2}$

36. (EEAR/2009)

São negativas, no $4°$ quadrante, as funções

a) seno, cosseno e tangente.

b) seno, cosseno e cotangente.

c) cosseno, tangente e secante.

d) seno, tangente e cossecante.

37. (EEAR/2009)

Considere as igualdades:

I- $\operatorname{tg} 10° = \operatorname{tg}(-10°)$

II- $\operatorname{tg} 770° = -\operatorname{tg}(50°)$

III- $\operatorname{sen} 250° = \operatorname{sen} 20°$

IV- $\operatorname{sen} 460° = \operatorname{sen} 100°$

O número de igualdades verdadeiras é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

38. (EEAR/2009)

Sejam a e b arcos do primeiro quadrante. Se $a + b = 90°$, então $\cos(a - b)$, em função de b, é igual a

a) $\operatorname{sen} 2b$

b) $\cos 2b$

c) $\frac{\operatorname{sen} 2b}{2}$

d) $\frac{\cos 2b}{2}$

39. (EEAR/2009)

Se x e y são arcos do $1°$ quadrante, $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então o valor de $\cos(x + y)$ é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

40. (EEAR/2008)

Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$, então $\operatorname{sen} 2\alpha$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

d) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

41. (EEAR/2008)

Os valores de m que verificam simultaneamente as igualdades $\operatorname{sen} x = m$ e $\cos x = 1 - m$ pertencem ao intervalo

a) $[-1, 0[$.

b) $[0, 1[$.

c) $[1, 3[$.

d) $[0, 2[$.

42. (EEAR/2008)

Comparando-se $\operatorname{tg} 20°$, $\operatorname{tg} 110°$ e $\operatorname{tg} 200°$, obtém-se

a) $\operatorname{tg} 20° = \operatorname{tg} 200° > \operatorname{tg} 110°$.

b) $\operatorname{tg} 20° = \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

c) $\operatorname{tg} 20° < \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

d) $\operatorname{tg} 20° < \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

43. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})\cdot\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}$ é

a) $1-\sqrt{2}$

b) $1+\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

44. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cossec} x-1}$, para $0<x<\frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} x=\frac{1}{3}$, é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

45. (EEAR/2007)

Se $0<x<\frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x=3$, então $\operatorname{sen} 2x$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

46. (EEAR/2007)

Se $0<x<\frac{\pi}{2}$, e $y=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$, então y é igual a

a) $\operatorname{tg} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{sen} x$

47. (EEAR/2007)

Considere a soma S:

$$\begin{vmatrix} \cos 1° & \cos 2° \\ \cos 2° & \cos 1° \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{sen } 1° & \text{sen } 2° \\ \text{sen } 2° & \text{sen } 1° \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos 3° & \cos 4° \\ \cos 4° & \cos 3° \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{sen } 3° & \text{sen } 4° \\ \text{sen } 4° & \text{sen } 3° \end{vmatrix} + \cdots$$
$$+ \begin{vmatrix} \cos 9° & \cos 10° \\ \cos 10° & \cos 9° \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{sen } 9° & \text{sen } 10° \\ \text{sen } 10° & \text{sen } 9° \end{vmatrix}$$

O valor de $\log S$ é

a) zero.

b) positivo.

c) negativo.

d) inexistente.

48. (EEAR/2007)

Dois ângulos medem $\frac{2\pi}{9}$ rad e $\frac{5\pi}{18}$ rad. O menor deles, em graus, mede

a) 30.

b) 40.

c) 50.

d) 60.

49. (EEAR/2007)

O conjunto imagem da função $f(x) = 3 + 5\,\text{sen}\,x$ é

a) $[-2, 8]$.

b) $[3, 7]$.

c) $[-1, 5]$.

d) $[0, 4]$.

50. (EEAR/2007)

Seja x um arco do $1°$ quadrante. Se $\cos x = \frac{1}{8}$, então $\text{tg}\,\frac{x}{2} =$

a) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

51. (EEAR/2006)

Se $2 \cdot \operatorname{sen} x + 5 \cdot \cos x = 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então $\cos x =$

a) $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$

b) $\frac{2\sqrt{29}}{29}$

c) $-\frac{5\sqrt{29}}{29}$

d) $\frac{5\sqrt{29}}{29}$

52. (EEAR/2006)

O domínio da função $f(x) = 3 \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

53. (EEAR/2006)

O quadrante em que as funções seno, cosseno e tangente são, simultaneamente, crescentes é o

a) $1°$.

b) $2°$.

c) $3°$.

d) $4°$.

54. (EEAR/2006)

Sejam as medidas de arcos trigonométricos:

I- $\frac{17\pi}{8}$ rad e $\frac{41\pi}{8}$ rad;

II- $1490°$ e $-1030°$

É correto afirmar que as medidas

a) em I são de arcos côngruos.

b) em I são de arcos suplementares.

c) em II são de arcos côngruos.

d) em II são de arcos complementares.

55. (EEAR/2006)

Se $x \in 1°Q$ e $\cos x = \frac{3}{8}$, então $\cos\frac{x}{2} =$

a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{11}}{8}$

56. (EEAR/2005)

Se $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$, então $\text{tg}\,2\alpha$ é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{4}$

57. (EEAR/2005)

Existirá $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade $\text{sen}\,x = 2k - 5$ se, e somente se,

a) $1 < k \leq 3$.

b) $1 < k < 4$.

c) $2 \leq k < 4$.

d) $2 \leq k \leq 3$.

58. (EEAR/2005)

Seja $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0$. **Simplificando-se a expressão** $\frac{\operatorname{sen} a + \cos a}{\operatorname{sen} a} + \frac{\operatorname{sen} a - \cos a}{\cos a}$, **obtém-se**

a) $\frac{1}{\operatorname{sen} 2a}$

b) $\frac{1}{\cos 2a}$

c) $\frac{2}{\operatorname{sen} 2a}$

d) $\frac{2}{\cos 2a}$

59. (EEAR/2005)

Sendo $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ **e** $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, **o valor de tg** $\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ **é**

a) 1

b) 7

c) $\frac{1}{7}$

d) $\frac{7}{16}$

60. (EEAR/2004)

Seja x **um arco do** $1°$ **quadrante. Se** $\operatorname{cossec} x = \frac{5}{2}$, **então** $\cos 2x$ **é**

a) $\frac{4}{25}$.

b) $\frac{33}{25}$.

c) $\frac{21}{25}$.

d) $\frac{17}{25}$.

61. (EEAR/2003)

No círculo trigonométrico:

I. o arco $\frac{11\pi}{4}$ **rad pertence ao** $2°$ **quadrante.**

II. o arco $1510°$ **pertence ao** $3°$ **quadrante.**

III. o arco $-\frac{13\pi}{3}$ rad pertence ao $4°$ quadrante.

A(s) assertiva(s) correta(s) é(são):

a) II.

b) I e II.

c) I e III.

d) I, II e III.

62. 66. (EEAR/2003)

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então a expressão $\text{tg}\frac{x}{2} + \text{cotg}\frac{x}{2}$ é equivalente a:

a) $2\ \text{sen}\ x$

b) $2\sec x$

c) $2\cos x$

d) $2\ \text{cossec}\ x$

63. (EEAR/2003)

A expressão $\frac{1+\text{cotg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}$ é idêntica à (ao)

a) $\text{tg}^2 x$

b) $\text{sen}^2 x$

c) $\text{cotg}^2 x$

d) $\cos^2 x$

64. (EEAR/2003)

Sendo $a - b = 30°$, calculando $y = (\text{sen}\ a + \cos b)^2 + (\text{sen}\ b - \cos a)^2$, obtemos

a) 1

b) $\frac{2}{3}$

c) 3

d) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

65. (EEAR/2003)

A expressão trigonométrica $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ é igual a

a) 1 para todo número real x.

b) -1 para todo número real x.

c) $2\cos^2 x - 1$, para todo número real x.

d) $\frac{4}{3}$ para alguns números reais de x.

66. (EEAR/2003)

O produto $(\operatorname{tg} x) \cdot (\operatorname{sen} 2x)$ é igual a

a) $\operatorname{sen}^2 x$

b) $\cos^2 x$

c) $2\operatorname{sen}^2 x$

d) $2\cos^2 x$

67. (EEAR/2002)

Sejam a e b dois números reais tais que $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$. Assinale a alternativa incorreta:

a) $2^{\operatorname{tg} b} < 2^{\operatorname{tg} a}$

b) $\cos b < \cos a$

c) $\operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b$

d) $2^{\operatorname{cotg} b} > 2^{\operatorname{cotg} a}$

68. (EEAR/2002)

Das afirmações:

I. $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$

II. $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$

III. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

Sendo x um arco no círculo trigonométrico compreendido entre $\frac{\pi}{2}$ e π, conclui-se que:

a) a única falsa é I

b) a única falsa é II

c) a única falsa é III

d) as três são verdadeiras

69. (EEAR/2002)

Se a $\mathbf{tg}\, x = \frac{3}{4}$ **e** $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$**, então o valor de** $\cos x - \operatorname{sen} x$ **é igual a:**

a) $\frac{7}{5}$

b) $-\frac{7}{5}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $-\frac{1}{5}$

70. (EEAR/2002)

O $\operatorname{sen}\frac{122\pi}{9}$ **é igual ao**

a) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{9}$

b) $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{9}$

c) $-\operatorname{sen}\frac{5\pi}{9}$

d) $-\operatorname{sen}\frac{4\pi}{9}$

71. (EEAR/2002)

Se θ **é um ângulo tal que** $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ **e o dobro do seu seno é igual ao triplo do quadrado de sua tangente, então o valor do seu cosseno é**

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2}{3}$

72. (EEAR/2001)

Numere a segunda coluna de acordo com a primeira, sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(1) $\operatorname{sen}^2 2x$	**( )**	$2\cos^2 x$
(2) $1+\cos 2x$	**( )**	$2\operatorname{sen} x \cos x$
(3) $\operatorname{sen} 2x$	**( )**	$1-\cos^2 2x$
(4) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	**( )**	$-\operatorname{sen} x$
(5) $\operatorname{sen}(-x)$	**( )**	$\cos x$

Lendo-se a segunda coluna de cima para baixo, a sequência correta é:

a) $1, 3, 4, 5, 2$

b) $2, 3, 1, 5, 4$

c) $3, 1, 2, 4, 5$

d) $2, 3, 5, 1, 4$

73. (EEAR/2001) [Adaptada]

Em $0 \leq x \leq 2\pi$**, a expressão** $y = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}$ **é tal que:**

a) $y > 0$ **somente se** $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b) $y < 0$ **se** $x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

c) $y > 0$ **se** $x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

d) $y < 0$ **somente se** $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

74. (EEAR/2001)

Se $\operatorname{tg} x = -3$**, então** $\operatorname{tg} 4x$ **é igual a:**

a) $-\frac{3}{4}$

b) $-\frac{24}{7}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{24}{7}$

75. (EEAR/2001)

A expressão $\frac{1+\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$ **é identicamente igual a:**

a) $\operatorname{cotg} x$

b) $\sec x$

c) $\text{sen}\, x$

d) $\text{tg}\, x$

76. (EEAR/2000)

O valor de $(\text{sen}\, 112°30' + \cos 112°30')^2$ é:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

77. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Sabe-se que a medida de um ângulo é $\frac{7\pi}{5}$ rad. Pode-se afirmar que esse ângulo é igual a

a) $108°$

b) $126°$

c) $252°$

d) $210°$

78. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Se α e β são ângulos de um triângulo retângulo tal que $sen\alpha = \frac{3}{5}$, então $sen\beta$ é igual a

a) $1/3$

b) $1/2$

c) $3/5$

d) $4/5$

79. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

O valor de $\cos 2080°$ é igual a

a) $\cos 10°$

b) $\mathrm{sen}\, 10°$

c) $\mathrm{sen}\, 80°$

d) $\cos 20°$

80. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Seja $M = \frac{\csc x \cdot \mathrm{tg}\, x}{\sec^2 x}$, com $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Podemos afirmar que M é igual a

a) $\cos x \cdot \mathrm{tg}^2\, x$

b) $\mathrm{tg}\, x$

c) $\sec x$

d) $\cos x$

81. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Se $\cos x = a$ e x é um arco do quarto quadrante, com $0 < |a| < 1$, então $\csc x$ é igual a

a) $-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

c) $\frac{1}{a}$

d) $-\frac{1}{a}$

82. (Estratégia Militares 2020)

Determine o valor de S na expressão a seguir:

$$S = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{7} - \mathrm{sen}\,\frac{6\pi}{7}}{\cos\frac{5\pi}{7}}$$

a) -1

b) 0

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

83. (Estratégia Militares 2020)

Sabendo que $tgx = t$, calcule $tg(3x)$.

a) $3t$

b) $3t - t^3$

c) $(2t - t^3)/(1 - 3t^2)$

d) $(3t - t^3)/(1 - 3t^2)$

84. (Estratégia Militares 2020)

Considere x um arco do 2º quadrante e que a cotangente de x é $cotg\, x$ e a cossecante de x é $cossec\, x$. Se $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, então o valor de $cotg^2 x - cossec^2 x + 2\,\text{sen}\, 2x$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

85. (Estratégia Militares 2020)

Ao somar $\text{sen}\, 315°$ com $\cos 780°$, obtém-se:

a) $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

86. (Estratégia Militares 2020)

O ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14h35min é igual a:

a) $132°30'$

b) $122°30'$

c) $92°60'$

d) $157°30'$

87. (Estratégia Militares 2020)

O valor do $sen\ 1570°$ é igual a:

a) $sen\ 135°$

b) $\cos 70°$

c) $\cos 40°$

d) $-\cos 130°$

88. (Estratégia Militares 2020)

Seja $P = \frac{1+\frac{1}{tg\ x}}{1+tg\ x} + \frac{cossec\ x}{\sec x}$ uma expressão tal que $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Dessa maneira, a solução em x para a equação $P = 2$ é:

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{8}$

e) $\frac{\pi}{2}$

89. (Estratégia Militares 2020)

Se $senx + \cos x = \frac{8}{13}$ e se $tgx = -\frac{3}{4}$, então, no ciclo trigonométrico, x pertence ao ______ quadrante:

a) 1º

b) 2º

c) 3º

d) 4º

e) Não há solução real.

90. (Estratégia Militares 2020)

Se $senx = \frac{3}{5}$, então $cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ é igual a:

a) $\frac{3}{5}$

b) $-\frac{3}{5}$

c) $\frac{4}{5}$

d) $-\frac{4}{5}$

e) 1

91. (Estratégia Militares 2020)

Sabendo que x pertence ao $2°$ quadrante no círculo trigonométrico e que $sen\,x = 0,8$, pode-se afirmar que o valor de $\cos 3x$ é igual a:

a) $0,936$

b) -1

c) $0,956$

d) $-0,846$

e) $0,7090$

92. (Estratégia Militares 2020)

A soma dos valores de n que satisfazem às igualdades $\cos x = \frac{n-1}{n}$ e $sen\,x = \frac{n+3}{n}$ é igual a:

a) 5

b) 6

c) 4

d) -4

e) -6

7.1. GABARITO

3. B
4. E
5. D
6. D
7. C
8. D
9. B
10. C
11. A
12. C
13. C
14. A
15. C
16. A
17. A
18. B
19. D
20. C
21. A
22. D
23. D
24. A
25. C
26. A
27. B
28. D
29. B
30. A
31. C
32. B
33. C
34. B
35. A
36. D
37. A
38. A
39. C
40. C
41. D
42. A
43. A
44. D
45. C
46. C
47. D
48. B
49. A
50. A
51. B
52. B
53. D
54. C
55. C
56. D
57. D
58. C
59. B
60. D
61. C
62. D
63. C
64. C
65. C

66. C	75. A	84. A
67. B	76. C	85. B
68. A	77. C	86. A
69. D	78. D	87. C
70. C ou D	79. B	88. C
71. B	80. D	89. E
72. B	81. A	90. B
73. C	82. B	91. A
74. D	83. D	92. D

8. QUESTÕES DE PROVAS ANTERIORES COMENTADAS

3. (ESA/2016)

Sabendo que x pertence ao 4° quadrante e que $\cos x = 0,8$, pode-se afirmar que o valor de $sen\ 2x$ é igual a:

a) $0,28$

b) $-0,96$

c) $-0,28$

d) $0,96$

e) 1

Comentários

$$\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \pm\sqrt{1-0{,}8^2} = \pm\sqrt{1-0{,}64} = \pm\sqrt{0{,}36} = \pm 0{,}6.$$

Como $x \in 4°$ quadrante, $\operatorname{sen} x < 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -0{,}6$.

Logo, $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \cdot 0{,}8 \cdot (-0{,}6) = -0{,}96$.

Gabarito: “b”.

---

4. (ESA/2012)

A soma dos valores m que satisfazem as igualdades $\operatorname{sen} x = \frac{m+1}{m}$ e $\cos x = \frac{m+2}{m}$ é:

a) 5

b) 6

c) 4

d) -4

e) -6

Comentários

Da identidade fundamental da trigonometria, temos, para $m \neq 0$:

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 + \left(\frac{m+2}{m}\right)^2 = \frac{2m^2 + 6m + 5}{m^2} \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 = 0$$

Usando a fórmula de Bháskara, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16$$

$$m_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 4}{2 \cdot 1} = -5, m_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 4}{2 \cdot 1} = -1.$$

Verificando se os valores encontrados fazem sentido:

Para m_1:

$$\operatorname{sen} x = \frac{-5 + 1}{-5} = \frac{4}{5}, \cos x = \frac{-5 + 2}{-5} = \frac{3}{5}. (ok!)$$

Para m_2:

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 + 1}{-1} = 0, \cos x = \frac{-1 + 2}{-1} = -1. (ok!)$$

Portanto, a soma dos valores de m é $S = m_1 + m_2 = -5 - 1 = -6$.

Observação: talvez o estudante queira usar logo uma relação de Girard para resolver o problema mais rápido. Acontece que é necessário verificar a condição que os valores resultantes de seno e cosseno de x estejam na imagem das funções seno e cosseno, que é $[-1,1]$.

Gabarito: “e”.

---

5. (EEAR/2021)

Se $y = sen^2\theta + sen\ 2\theta + \cos^2\theta$ e $sen\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$, então y é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

c) 2

d) 3

Comentários

Lembrando que $sen\ 2\theta = 2sen\theta\cos\theta$, temos de y:

$$y = sen^2\theta + 2sen\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$y = (sen\theta + \cos\theta)^2$$

Sabemos que $sen\theta + \cos\theta = \sqrt{3}$, logo:

$$(sen\theta + \cos\theta)^2 = 3$$

$$\therefore y = 3$$

*Note que a questão está inconsistente, pois:

$$sen\theta + \cos\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}sen\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow sen\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$$

Temos que seno é maior que 1, o que é um absurdo.

Gabarito: "d"

---

6. (EEAR/2021)

Se $sen(a+b) = -\frac{1}{2}$ e $\cos(a-b) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, então o valor de $(sen\ a + \cos a)(sen\ b + \cos b)$ é

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{(1+\sqrt{3})}{2}$

Comentários

Do enunciado, temos:

$$sen(a+b) = -\frac{1}{2} \Rightarrow sena\cos b + senb\cos a = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(a-b) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos a \cos b + sena\ senb = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Analisando a expressão pedida:

$$(sen\ a + \cos a)(sen\ b + \cos b) = sena\ senb + sena \cos b + \cos a\ senb + \cos a \cos b$$

$$= (sena \cos b + senb \cos a) + (\cos a \cos b + sena\ senb) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{(1+\sqrt{3})}{2}$$

Gabarito: “d”

---

7. (EEAR/2021)

O ângulo cuja medida é $\frac{37\pi}{4}$ rad pertence ao _____ quadrante.

a) $1°$

b) $2°$

c) $3°$

d) $4°$

Comentários

O ângulo é congruente a

$$\frac{37\pi}{4} = \frac{36\pi + \pi}{4} = 9\pi + \frac{\pi}{4} = 8\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = 8\pi + \frac{5\pi}{4}$$

Portanto, o ângulo $37\pi/4$ é congruente a $5\pi/4$, logo pertence ao 3° quadrante.

Gabarito: “c”

---

8. (EEAR/2019)

Simplificando a expressão $\operatorname{sen}(2\pi - x) + \operatorname{sen}(3\pi + x)$, obtém-se

a) $\operatorname{sen} x$

b) $-\operatorname{sen} x$

c) $2 \operatorname{sen} x$

d) $-2 \operatorname{sen} x$

Comentários

$$\operatorname{sen}(2\pi - x) + \operatorname{sen}(3\pi + x) = \operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen} x.$$

Gabarito: “d”.

---

9. (EEAR/2019)

Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual a

a) $48°$

b) $54°$

c) $66°$

d) $72°$

Comentários

Como π rad vale $180°$, temos:

$$\frac{3\pi}{10}\,rad\; = \frac{3}{10} \cdot 180° = 54°$$

Gabarito: "b".

---

10. (EEAR/2018)

O valor de $\operatorname{sen} 1270°$ é igual a

a) $-\cos 10°$

b) $-\operatorname{sen} 30°$

c) $-\operatorname{sen} 10°$

d) $-\cos 30°$

Comentários

$$\operatorname{sen} 1270° = \operatorname{sen}(3 \cdot 360° + 190°) = \operatorname{sen} 190° = \operatorname{sen}(180° + 10°) = -\operatorname{sen} 10°$$

Gabarito: "c".

---

11. (EEAR/2018)

As funções $f(x) = \operatorname{sen} x\ \ e\ g(x) = \cos x$, no segundo quadrante, são, respectivamente,

a) decrescente e decrescente

b) decrescente e crescente

c) crescente e decrescente

d) crescente e crescente

Comentários

A função seno atinge seu máximo em $x = \frac{\pi}{2}$, no início do segundo quadrante. Portanto, ela é decrescente no segundo quadrante. A função cosseno também é decrescente, atingindo seu mínimo ao final do segundo quadrante, em $x = \pi$.

Gabarito: “a”.

---

12. (EEAR/2018)

O valor de $\mathrm{sen}(a+b)-\mathrm{sen}(a-b)$ é igual a

a) $\mathrm{sen}\,2a$

b) $\cos 2a$

c) $2\,\mathrm{sen}\,b\cdot\cos a$

d) $2\,\mathrm{sen}\,a\cdot\cos b$

Comentários

$$\mathrm{sen}(a+b)=\mathrm{sen}\,a\cos b+\mathrm{sen}\,b\cos a$$

$$\mathrm{sen}(a-b)=\mathrm{sen}\,a\cos b-\mathrm{sen}\,b\cos a$$

Logo,

$$\mathrm{sen}(a+b)-\mathrm{sen}(a-b)=2\,\mathrm{sen}\,b\cdot\cos a$$

Gabarito: “c”.

---

13. (EEAR/2017)

Seja $M=\frac{\mathrm{cossec}\,x+\sec x}{\mathrm{cotg}\,x+1}$, com $x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar M igual a

a) $\mathrm{sen}\,x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\mathrm{cossec}\,x$

Comentários

$$M=\frac{\mathrm{cossec}\,x+\sec x}{\mathrm{cotg}\,x+1}=\frac{\frac{1}{\mathrm{sen}\,x}+\frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}+1}=\frac{\mathrm{sen}\,x+\cos x}{\cos^2 x+\mathrm{sen}\,x\cos x}=\frac{\mathrm{sen}\,x+\cos x}{(\cos x+\mathrm{sen}\,x)\cdot\cos x}$$

$$=\frac{1}{\cos x}=\sec x$$

Gabarito: “c”.

---

14. (EEAR/2017)

Ao somar as medidas angulares $120°$ e $\frac{3\pi}{2}$ rad, obtém-se a medida de um arco pertencente ao ____quadrante.

a) $1°$

b) $2°$

c) $3°$

d) $4°$

Comentários

Vamos transformar tudo para graus.

π rad $= 180°$

Logo:

$$\frac{3\pi}{2}\,rad = \frac{3}{2}\cdot 180° = 270°$$

Efetuando a soma: $\gamma = \alpha + \beta = 120° + 270° = 390° = 360° + 30° \in]0,90°[$

Isto é, a soma γ pertence ao primeiro quadrante.

Gabarito: "a".

---

15. (EEAR/2016)

O valor de $\cos 735°$ é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

Comentários

$$\cos 735° = \cos(2\cdot 360° + 15°) = \cos 15° = \cos(45° - 30°)$$

$$= \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Gabarito: "c".

---

16. (EEAR/2016)

O valor correspondente ao $\cos 15°$ é

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

d) 1

Comentários

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Gabarito: “a”.

---

17. (EEAR/2015)

Se $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta = \frac{4}{13}$ e $\operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha = \frac{36}{65}$, então $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ é igual a:

a) $\frac{56}{65}$

b) $\frac{40}{65}$

c) $\frac{13}{36}$

d) $\frac{13}{56}$

Comentários

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha = \frac{4}{13} + \frac{36}{65} = \frac{20 + 36}{65} = \frac{56}{65}$$

Gabarito: “a”.

---

18. (EEAR/2015) [Adaptada]

Ao simplificar a expressão $(1 + \cos x)(1 - \cos x)$, tem-se

a) 2

b) $\operatorname{sen}^2 x$

c) $\cos^2 x$

d) $2 + \cos^2 x$

Comentários

$$(1 + \cos x)(1 - \cos x) = 1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

Gabarito: “b”.

---

19. (EEAR/2015)

Seja $A = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \sec x}{\operatorname{tg} x}$, com $\operatorname{tg} x \neq 0$. Nessas condições, o valor de A é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) 1

Comentários

$$\frac{\operatorname{sen} x \cdot \sec x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos x}}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

Gabarito: "d".

---

20. (EEAR/2015)

O valor de $\frac{7\pi}{30}$ rad em graus é:

a) 36

b) 38

c) 42

d) 46

Comentários

Como π rad vale $180°$, temos:

$$\frac{7\pi}{30}\, rad = \frac{7}{30} \cdot 180° = 42°$$

Gabarito: "c".

---

21. (EEAR/2014)

Dados $\operatorname{sen} a = x, \cos a = y, \operatorname{sen} b = z$ e $\cos b = w$, então $\operatorname{sen}(a + b)$ é igual a

a) $xw + yz$

b) $xz + yw$

c) $xy - wz$

d) $xw - yz$

Comentários

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b = xw + yz$$

Gabarito: “a”.

---

22. (EEAR/2013)

Se x é um arco do $1°$ quadrante, com $\operatorname{sen} x = a$ e $\cos x = b$, então $y = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos(\pi + x)}$ é:

a) a

b) b

c) $-a$

d) $-b$

Comentários

$$y = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos(\pi + x)} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot (-\cos x)} = \frac{a \cdot b}{\frac{a}{b} \cdot (-b)} = -b$$

Gabarito: “d”.

---

23. (EEAR/2013)

Ao expressar $\frac{16\pi}{9}$ rad em graus, obtém-se

a) $170°$

b) $220°$

c) $280°$

d) $320°$

Comentários

Como π rad $= 180°$, temos:

$$\frac{16\pi}{9}\, rad = \frac{16}{9} \cdot 180° = 320°$$

Gabarito: “d”.

---

24. (EEAR/2013)

Sejam $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} 2x = \frac{a}{b}$. Se $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $b - a$ é igual a

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentários

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \Rightarrow b - a = 25 - 24 = 1$$

Gabarito: “a”.

---

25. (EEAR/2013)

Sendo $\operatorname{tg} x = \frac{1}{t}$ e $\operatorname{sen} x = u$, uma maneira de expressar o valor de $\cos x$ é

a) t

b) $\frac{u}{t}$

c) $u \cdot t$

d) $u + t$

Comentários

$$\cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{u}{\frac{1}{t}} = u \cdot t$$

Gabarito: “c”.

---

26. (EEAR/2012)

Sejam as sentenças:

I- período $p = \pi$;

II- domínio $D = \mathbb{R}$;

III- conjunto imagem $Im = [-1, 1]$.

Em relação à função tangente, é (são) verdadeira(s) a(s) sentença(s)

a) I.

b) III.

c) I e II.

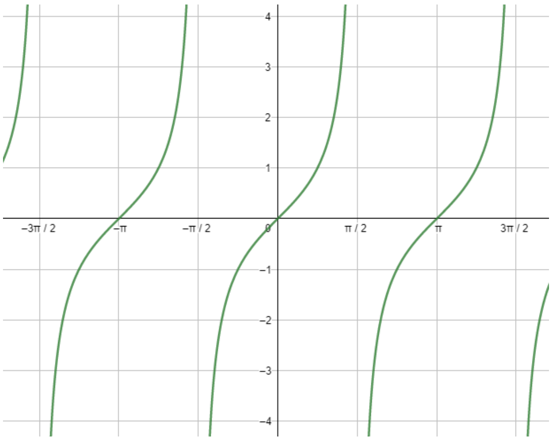
d) II e III.

Comentários

I-Verdadeiro.

II-Falso. Domínio $D = \mathbb{R} \backslash \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

III-Falso. $Im = \mathbb{R}$. De fato, dado $y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid y = \operatorname{tg} x$. Tome $x = \operatorname{arctg} y$, por exemplo.



Gabarito: "a".

---

27. (EEAR/2011)

Um arco de circunferência de $\frac{5\pi}{6}$ rad pode ser dividido em _______ arcos de $30°$

a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

Comentários

Como π rad $= 180°$, temos:

$$\frac{5\pi}{6}\ rad\ = \frac{5}{6}\cdot 180° = 150°$$

que pode ser dividido em $(150°/30°) = 5$ arcos de $30°$.

Gabarito: "b".

---

28. (EEAR/2011)

Se $\operatorname{sen} y = m$ e $\cos y = n$, o valor de $\frac{\sec y}{\operatorname{cossec} y}$ é

a) m.

b) n^2.

c) mn.

d) $\frac{m}{n}$.

Comentários

$$\frac{\sec y}{\operatorname{cossec} y} = \frac{\frac{1}{\cos y}}{\frac{1}{\operatorname{sen} y}} = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{m}{n}$$

Gabarito: "d".

---

29. (EEAR/2011)

Se $A = \operatorname{tg} 120°$ e $B = \operatorname{tg} 240°$, então

a) $B = A$

b) $B = -A$

c) $B = 2A$

d) $B = -2A$

Comentários

$$B = \operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(360° - 120°) = \operatorname{tg}(-120°) = -\operatorname{tg} 120° = -A$$

Gabarito: "b".

---

30. (EEAR/2011)

Se $\cos x = \frac{2}{3}$ e $\operatorname{sen} x > 0$, então $\operatorname{sen} 2x$ é

a) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Comentários

$$\operatorname{sen} x > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = +\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Gabarito: "a".

---

31. (EEAR/2010)

Simplificando-se a expressão $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x}$

a) $\operatorname{cossec} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{tg} x$

Comentários

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Gabarito: "c".

---

32. (EEAR/2010)

Se $\operatorname{sen} x + \cos 2x = 1$, então um dos valores de $\operatorname{sen} x$ é

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Comentários

Usando a fórmula de cosseno do arco duplo, $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$, ficamos com um polinômio do segundo grau em $\operatorname{sen} x$.

$$\operatorname{sen} x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x + (1 - 2\operatorname{sen}^2 x) = 1 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$$

$$\Leftrightarrow sen\, x(2\, sen\, x - 1) = 0$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \ ou \ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Gabarito: "b".

---

33. (EEAR/2010)

Seja $x = 150°$. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças, a seguir assinale a alternativa que apresenta o número de sentenças verdadeiras

I) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

II) $\operatorname{sen} 2x < 0$

III) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2 + \sqrt{3}$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

Comentários

I) Falsa.

$$\cos x = \cos(180° - 30°) = \cos 180° \cdot \cos 30° + \operatorname{sen} 180° \cdot \operatorname{sen} 30° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

II) Verdadeira.

$$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 300° = \operatorname{sen}(360° - 60°) = \operatorname{sen}(-60°) = -\operatorname{sen} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

III) Verdadeira.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{\operatorname{sen} 150°}{1 + \cos 150°} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{1 - \cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

Gabarito: "c".

---

34. (EEAR/2010)

O valor de $\cos 15°$ é

a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

c) $2 - \sqrt{2}$

d) $2 + \sqrt{3}$

Comentários

O estudante poderia tentar ir pelo seguinte caminho (talvez já tenha até decorado o resultado), sem sucesso:

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Provavelmente o que a banca esperava era:

$$\cos 30° = \cos(2 \cdot 15°) = 2\cos^2 15° - 1 \Rightarrow \cos 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Gabarito: "b".

---

35. (EEAR/2010)

Para $x \cdot y \neq 0$, a expressão $\frac{y^2 \cos 180° - xy \operatorname{sen} 270° + y^2 \operatorname{sen} 90°}{x^2 \cos 0°}$ equivale a:

a) $\frac{y}{x}$

b) $\frac{1}{x}$

c) $\frac{y}{x^2}$

d) $\frac{y^2}{x^2}$

Comentários

$$\frac{y^2 \cos 180° - xy \operatorname{sen} 270° + y^2 \operatorname{sen} 90°}{x^2 \cos 0°} = \frac{y^2 \cdot (-1) - xy \cdot (-1) + y^2 \cdot 1}{x^2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-y^2 + xy + y^2}{x^2} = \frac{xy}{x^2} = \frac{y}{x}.$$

Gabarito: "a".

---

36. (EEAR/2009)

São negativas, no $4°$ quadrante, as funções

a) seno, cosseno e tangente.

b) seno, cosseno e cotangente.

c) cosseno, tangente e secante.

d) seno, tangente e cossecante.

Comentários

No $4°$ quadrante, o seno e a cossecante são negativos, o cosseno e a secante são positivos e a tangente e a cotangente são negativas.

Gabarito: "d".

---

37. (EEAR/2009)

Considere as igualdades:

I- $\operatorname{tg} 10° = \operatorname{tg}(-10°)$

II- $\mathbf{tg\,770° = -tg(50°)}$

III- $\mathbf{sen\,250° = sen\,20°}$

IV- $\mathbf{sen\,460° = sen\,100°}$

O número de igualdades verdadeiras é

a) $\mathbf{1}$.

b) $\mathbf{2}$.

c) $\mathbf{3}$.

d) $\mathbf{4}$.

Comentários

I- Falsa. A tangente é uma função ímpar:

$$\operatorname{tg}(-10°) = \frac{\operatorname{sen}(-10°)}{\cos(-10°)} = \frac{-\operatorname{sen}(10°)}{\cos(10°)} = -\operatorname{tg}10°$$

II- Falsa.

$$\operatorname{tg}770° = \operatorname{tg}(4\cdot 180° + 50°) = \operatorname{tg}50° \neq \operatorname{tg}(-50°)$$

III-Falsa.

$$\operatorname{sen}250° = \operatorname{sen}(270° - 20°) = \operatorname{sen}270°\cos 20° - \operatorname{sen}20°\cos 270° = -\cos 20° \neq \operatorname{sen}20°.$$

IV-Verdadeira.

$$\operatorname{sen}460° = \operatorname{sen}(360° + 100°) = \operatorname{sen}100°$$

Gabarito: “a”.

---

38. (EEAR/2009)

Sejam $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ arcos do primeiro quadrante. Se $\mathbf{a + b = 90°}$, então $\mathbf{cos\,(a - b)}$, em função de $\boldsymbol{b}$, é igual a

a) $\mathbf{sen\,2b}$

b) $\mathbf{cos\,2b}$

c) $\mathbf{\frac{sen\,2b}{2}}$

d) $\mathbf{\frac{cos\,2b}{2}}$

Comentários

$$\cos(a-b) = \cos(90° - b - b) = \cos(90° - 2b) = \operatorname{sen}2b$$

Gabarito: "a".

39. (EEAR/2009)

Se x e y são arcos do $1°$ quadrante, $\mathrm{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então o valor de $\cos(x+y)$ é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

Comentários

x e y do primeiro quadrante $\Rightarrow \cos x > 0$ e $\mathrm{sen}\, y > 0$

$$\cos x = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{sen}\, y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo,

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Gabarito: "c".

40. (EEAR/2008)

Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\mathrm{sen}\, \alpha = \frac{2}{3}$, então $\mathrm{sen}\, 2\alpha$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

d) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

Comentários

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Gabarito: "c".

---

41. (EEAR/2008)

Os valores de m que verificam simultaneamente as igualdades $\operatorname{sen} x = m$ e $\cos x = 1 - m$ pertencem ao intervalo

a) $[-1, 0[$.

b) $[0, 1[$.

c) $[1, 3[$.

d) $[0, 2[$.

Comentários

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = m^2 + (1-m)^2 = 2m^2 - 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = 1$$

Perceba que $\{0,1\} \subseteq [0,2[$ apenas.

Gabarito: "d".

---

42. (EEAR/2008)

Comparando-se $\operatorname{tg} 20°$, $\operatorname{tg} 110°$ e $\operatorname{tg} 200°$, obtém-se

a) $\operatorname{tg} 20° = \operatorname{tg} 200° > \operatorname{tg} 110°$.

b) $\operatorname{tg} 20° = \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

c) $\operatorname{tg} 20° < \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

d) $\operatorname{tg} 20° < \operatorname{tg} 200° < \operatorname{tg} 110°$.

Comentários

$$\operatorname{tg} 110° = \operatorname{tg}(180° - 70°) = -\operatorname{tg} 70° < 0$$

$$\operatorname{tg} 200° = \operatorname{tg}(180° + 20°) = \operatorname{tg} 20° > 0$$

Temos então:

$$\operatorname{tg} 110° < 0 < \operatorname{tg} 200° = \operatorname{tg} 20°$$

Gabarito: "a".

---

43. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{\left(\text{sen}\frac{\pi}{6}-\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{2}+\text{sen}\frac{\pi}{3}}$ é

a) $1-\sqrt{2}$

b) $1+\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Comentários

$$\frac{\left(\text{sen}\frac{\pi}{6}-\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{2}+\text{sen}\frac{\pi}{3}}=\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sqrt{3}}{0+\frac{\sqrt{3}}{2}}=1-\sqrt{2}$$

Gabarito: “a”.

---

44. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{\text{tg}\, x}{\text{cossec}\, x-1}$, para $0<x<\frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}\, x=\frac{1}{3}$, é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Comentários

$$\text{tg}^2 x=\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\text{sen}^2 x}{1-\text{sen}^2 x}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{9}}=\frac{1}{8}$$

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \text{tg}\, x>0\Rightarrow \text{tg}\, x=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Logo,

$$\frac{\text{tg}\, x}{\text{cossec}\, x-1}=\frac{\text{tg}\, x}{\frac{1}{\text{sen}\, x}-1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{\frac{1}{3}}-1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{3-1}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

Gabarito: “d”.

---

45. (EEAR/2007)

Se $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3$, então $\operatorname{sen} 2x$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

Comentários

$$3 = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$3 = \frac{2}{sen\ 2x}$$

Logo,

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2}{3}$$

Gabarito: "c".

---

46. (EEAR/2007)

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, e $y = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot \operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$, então y é igual a

a) $\operatorname{tg} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{sen} x$

Comentários

Para facilitar as contas, seja $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$.

$$y = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cossec} \alpha}{\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}{\cos \alpha \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos(x)} = \sec x$$

Gabarito: "c".

---

47. (EEAR/2007)

Considere a soma S:

$$\begin{vmatrix} \cos 1° & \cos 2° \\ \cos 2° & \cos 1° \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{sen } 1° & \text{sen } 2° \\ \text{sen } 2° & \text{sen } 1° \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos 3° & \cos 4° \\ \cos 4° & \cos 3° \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{sen } 3° & \text{sen } 4° \\ \text{sen } 4° & \text{sen } 3° \end{vmatrix} + \cdots$$
$$+ \begin{vmatrix} \cos 9° & \cos 10° \\ \cos 10° & \cos 9° \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{sen } 9° & \text{sen } 10° \\ \text{sen } 10° & \text{sen } 9° \end{vmatrix}$$

O valor de $\log S$ é

a) zero.

b) positivo.

c) negativo.

d) inexistente.

Comentários

Somando em pares, para $k = 1,3,5,7,9$, temos:

$$\begin{vmatrix} \cos k° & \cos(k+1)° \\ \cos(k+1)° & \cos k° \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{sen } k° & \text{sen}(k+1)° \\ \text{sen}(k+1)° & \text{sen } k° \end{vmatrix}$$

$$= [\cos^2 k° - \cos^2(k+1)°] + [\text{sen}^2\, k° - \text{sen}^2(k+1)°]$$

$$= [\cos^2 k° + \text{sen}^2\, k°] - [\cos^2(k+1)° + \text{sen}^2(k+1)°] = 1 - 1 = 0$$

Logo, $S = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \Rightarrow S = 0 \Rightarrow \nexists \log S$

Gabarito: "d".

---

48. (EEAR/2007)

Dois ângulos medem $\frac{2\pi}{9}$ rad e $\frac{5\pi}{18}$ rad. O menor deles, em graus, mede

a) 30.

b) 40.

c) 50.

d) 60.

Comentários

$$\frac{2\pi}{9} = \frac{4\pi}{9} < \frac{5\pi}{9}$$

Como π rad $= 180°$, temos que

$$\frac{2}{9}\pi\, rad \ = \frac{2}{9} \cdot 180° = 40°$$

Gabarito: "b".

---

49. (EEAR/2007)

O conjunto imagem da função $f(x) = 3 + 5\,\mathrm{sen}\,x$ é

a) $[-2, 8]$.

b) $[3, 7]$.

c) $[-1, 5]$.

d) $[0, 4]$.

Comentários

O conjunto imagem da função $f_1(x) = \mathrm{sen}\,x$ é $Im(f_1) = [-1,1]$.

Multiplicando-se por 5, obtemos $f_2(x) = 5\,\mathrm{sen}\,x \Rightarrow Im(f_2) = [-5,5]$.

Somando 3, obtemos $f(x) = 3 + 5\,\mathrm{sen}\,x \Rightarrow Im(f) = [-2,8]$.

Gabarito: "a".

---

50. (EEAR/2007)

Seja x um arco do $1°$ quadrante. Se $\cos x = \frac{1}{8}$, então $\mathrm{tg}\frac{x}{2} =$

a) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Comentários

Existe uma fórmula muito boa para se decorar de $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\mathrm{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\mathrm{sen}\,2\cdot\frac{x}{2}}{1+\cos 2\cdot\frac{x}{2}} = \frac{\mathrm{sen}\,x}{1+\cos x}$$

Sabendo que o arco é do primeiro quadrante, o seu seno é positivo:

$$\mathrm{sen}\,x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

Logo,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{8}}{1+\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Gabarito: “a”.

---

51. (EEAR/2006)

Se $2 \cdot \operatorname{sen} x + 5 \cdot \cos x = 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então $\cos x =$

a) $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$

b) $\frac{2\sqrt{29}}{29}$

c) $-\frac{5\sqrt{29}}{29}$

d) $\frac{5\sqrt{29}}{29}$

Comentários

Essa é uma questão que possui erro no enunciado, pois como $x \in]0, \pi/2[$, temos que $sen\ x > 0$ e $\cos x > 0$, ou seja, é impossível que a soma dê zero. Logo, deve-se considerar que $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Fazendo isso:

$$2 \cdot \operatorname{sen} x + 5 \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \operatorname{sen} x = -5 \cdot \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{5}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{25}{4} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{4}{29} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{2\sqrt{29}}{29}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0$, temos obrigatoriamente $\cos x = \frac{2\sqrt{29}}{29}$.

Gabarito: “b”.

---

52. (EEAR/2006)

O domínio da função $f(x) = 3 \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Comentários

O argumento da função tangente nunca pode ser $\frac{\pi}{2}+k\pi$, para todo $k\in\mathbb{Z}$. Logo:

$$x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Gabarito: “b”.

---

53. (EEAR/2006)

O quadrante em que as funções seno, cosseno e tangente são, simultaneamente, crescentes é o

a) $1°$.

b) $2°$.

c) $3°$.

d) $4°$.

Comentários

A banca inovou ao perguntar sobre o crescimento das funções, em vez de perguntar sobre o sinal. Vamos analisar os dois aspectos, a fim de revisar.

$1°$ quadrante:

$\operatorname{sen} x>0$, crescente.

$\cos x>0$, decrescente (já atingiu o máximo em $x=0$).

$\operatorname{tg} x>0$, crescente.

$2°$ quadrante:

$\operatorname{sen} x>0$, decrescente (já atingiu o máximo em $x=\frac{\pi}{2}$).

$\cos x<0$, decrescente.

$\operatorname{tg} x<0$, crescente (após passar de $+\infty$ para $-\infty$).

$3°$ quadrante:

$\operatorname{sen} x<0$, decrescente.

$\cos x<0$, crescente (já atingiu o máximo em $x=\pi$).

$\operatorname{tg} x>0$, crescente.

$4°$ quadrante:

$\operatorname{sen} x<0$, crescente (já atingiu o máximo em $x=\frac{3\pi}{2}$).

$\cos x > 0$, crescente.

$\text{tg}\, x < 0$, crescente. (após passar de $+\infty$ para $-\infty$).

Pode-se perceber que todas as três funções são crescentes simultaneamente no $4°$ quadrante.

Gabarito: "d".

---

54. (EEAR/2006)

Sejam as medidas de arcos trigonométricos:

I- $\frac{17\pi}{8}$ rad e $\frac{41\pi}{8}$ rad;

II- $1490°$ e $-1030°$

É correto afirmar que as medidas

a) em I são de arcos côngruos.

b) em I são de arcos suplementares.

c) em II são de arcos côngruos.

d) em II são de arcos complementares.

Comentários

I- $\frac{17\pi}{8} = 2\pi + \frac{\pi}{8}$ e $\frac{41\pi}{8} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{8} + \pi \Rightarrow$ As marcações no círculo trigonométrico estarão defasadas de π, sendo diametralmente opostas! Não são arcos côngruos nem suplementares.

II- $1490° = 4 \cdot 360° + 50°$ e $-1030° = -3 \cdot 360° + 50° \Rightarrow$ Marcações no mesmo local! Arcos côngruos, não complementares.

Gabarito: "c".

---

55. (EEAR/2006)

Se $x \in 1°Q$ e $\cos x = \frac{3}{8}$, então $\cos\frac{x}{2} =$

a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{11}}{8}$

Comentários

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{3}{8}}{2}} = \pm\frac{\sqrt{11}}{4}$$

Como $x \in 1°\ Q \Rightarrow \frac{x}{2} \in 1°Q$, temos $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

Gabarito: "c".

---

56. (EEAR/2005)

Se $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, então $\operatorname{tg} 2\alpha$ é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{4}$

Comentários

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{3}{4}$$

Gabarito: "d".

---

57. (EEAR/2005)

Existirá $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade $\operatorname{sen} x = 2k - 5$ se, e somente se,

a) $1 < k \leq 3$.

b) $1 < k < 4$.

c) $2 \leq k < 4$.

d) $2 \leq k \leq 3$.

Comentários

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{sen} x \in [-1,1]$. Logo, devemos ter $-1 \leq 2k - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq k \leq 3$.

Gabarito: "d".

---

58. (EEAR/2005)

Seja $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \neq 0$. Simplificando-se a expressão $\frac{\operatorname{sen} a+\cos a}{\operatorname{sen} a} + \frac{\operatorname{sen} a-\cos a}{\cos a}$, obtém-se

a) $\frac{1}{\operatorname{sen} 2a}$

b) $\frac{1}{\cos 2a}$

c) $\frac{2}{\operatorname{sen} 2a}$

d) $\frac{2}{\cos 2a}$

Comentários

$$\frac{\operatorname{sen} a + \cos a}{\operatorname{sen} a} + \frac{\operatorname{sen} a - \cos a}{\cos a} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{2}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$$

Gabarito: “c”.

---

59. (EEAR/2005)

Sendo $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, o valor de $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ é

a) 1

b) 7

c) $\frac{1}{7}$

d) $\frac{7}{16}$

Comentários

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Assim,

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{4 + 3}{4 - 3} = 7$$

Gabarito: “b”.

---

60. (EEAR/2004)

Seja x um arco do 1° quadrante. Se $\operatorname{cossec} x = \frac{5}{2}$, então $\cos 2x$ é

a) $\frac{4}{25}$.

b) $\frac{33}{25}$.

c) $\frac{21}{25}$.

d) $\frac{17}{25}$.

Comentários

$$\operatorname{cossec} x = \frac{5}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2}{5}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{17}{25}$$

Gabarito: "d".

---

61. (EEAR/2003)

No círculo trigonométrico:

I. o arco $\frac{11\pi}{4}$ rad pertence ao $2°$ quadrante.

II. o arco $1510°$ pertence ao $3°$ quadrante.

III. o arco $-\frac{13\pi}{3}$ rad pertence ao $4°$ quadrante.

A(s) assertiva(s) correta(s) é(são):

a) II.

b) I e II.

c) I e III.

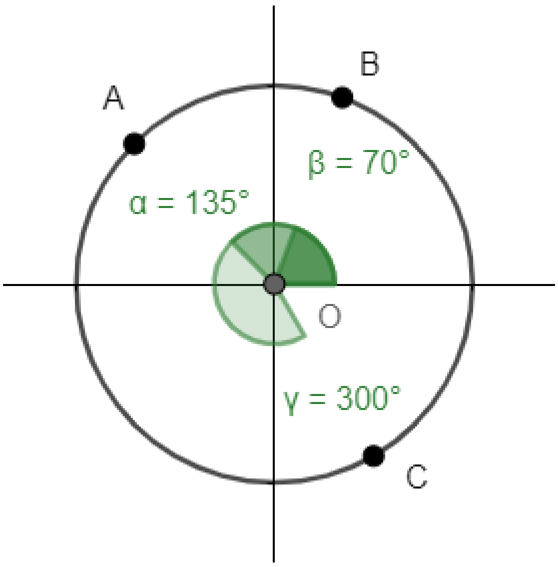
d) I, II e III.

Comentários

$\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$ Esse ângulo representa uma volta completa no círculo trigonométrico, no sentido horário, mais um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad. Como $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \pi$, esse ângulo pertence ao $2°$ quadrante (Ponto A).

$1510° = 4 \cdot 360° + 70° \Rightarrow$ Esse ângulo representa quatro voltas completas no círculo trigonométrico, no sentido horário, mais um ângulo de $70°$. Como $0 < 70° < 90°$, esse ângulo pertence ao $1°$ quadrante (Ponto B).

$-\frac{13\pi}{3} = -6\pi + \frac{5\pi}{3} \Rightarrow$ Esse ângulo representa três voltas completa no círculo trigonométrico, no sentido anti-horário, mais um ângulo de $\frac{5\pi}{3}$ rad no sentido horário. Como $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$, esse ângulo pertence ao $4°$ quadrante (Ponto C).



Gabarito: "c".

---

62. 66. (EEAR/2003)

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então a expressão $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ é equivalente a:

a) $2 \operatorname{sen} x$

b) $2 \sec x$

c) $2 \cos x$

d) $2 \operatorname{cossec} x$

Comentários

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{2}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{2}{\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)} = 2\operatorname{cossec} x.$$

Gabarito: "d".

---

63. (EEAR/2003)

A expressão $\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ é idêntica à (ao)

a) $\operatorname{tg}^2 x$

b) $\operatorname{sen}^2 x$

c) $\operatorname{cotg}^2 x$

d) $\cos^2 x$

Comentários

$$\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\operatorname{cotg}^2 x$$

Gabarito: "c".

---

64. (EEAR/2003)

Sendo $a-b=30°$, calculando $y=(\operatorname{sen} a+\cos b)^2+(\operatorname{sen} b-\cos a)^2$, obtemos

a) 1

b) $\frac{2}{3}$

c) 3

d) $2+\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comentários

$$y=(\operatorname{sen} a+\cos b)^2+(\operatorname{sen} b-\cos a)^2$$

$$=(\operatorname{sen}^2 a+2\operatorname{sen} a\cos b+\cos^2 b)+(\operatorname{sen}^2 b-2\operatorname{sen} b\cos a+\cos^2 a)$$

$$=(\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a)+(\operatorname{sen}^2 b+\cos^2 b)+2\cdot(\operatorname{sen} a\cos b-\operatorname{sen} b\cos a)$$

$$=1+1+2\cdot\operatorname{sen}(a-b)=2+2\cdot\operatorname{sen} 30°=2+2\cdot\frac{1}{2}=3$$

Gabarito: "c".

---

65. (EEAR/2003)

A expressão trigonométrica $\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$ é igual a

a) 1 para todo número real x.

b) -1 para todo número real x.

c) $2\cos^2 x-1$, para todo número real x.

d) $\frac{4}{3}$ para alguns números reais de x.

Comentários

Usando que $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, temos:

$$\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x-1\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Gabarito: "c".

---

66. (EEAR/2003)

O produto $(\text{tg } x) \cdot (\text{sen } 2x)$ é igual a

a) $\text{sen}^2 x$

b) $\cos^2 x$

c) $2 \text{ sen}^2 x$

d) $2 \cos^2 x$

Comentários

$$(\text{tg } x) \cdot (\text{sen } 2x) = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot 2 \text{ sen } x \cos x = 2 \text{ sen}^2 x$$

Gabarito: "c".

---

67. (EEAR/2002)

Sejam a e b dois números reais tais que $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$. Assinale a alternativa incorreta:

a) $2^{\text{tg } b} < 2^{\text{tg } a}$

b) $\cos b < \cos a$

c) $\text{sen } a > \text{sen } b$

d) $2^{\text{cotg } b} > 2^{\text{cotg } a}$

Comentários

Alternativa a) $2^{\text{tg } b} < 2^{\text{tg } a} \Leftrightarrow \text{tg } b < \text{tg } a$ (pois a função $f(x) = 2^x$ é crescente).

$\Leftrightarrow b < a$ (pois a função $f(x) = \text{tg } x$ é crescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$) $\Rightarrow$ a) correta.

Alternativa b) incorreta. Exemplo: tome $b = \frac{\pi}{6}, a = \frac{\pi}{3}$. Então $\cos b = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} = \cos a$.

Alternativa c) correta pois a função seno é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Alternativa d) $2^{\text{cotg } b} > 2^{\text{cotg } a} \Leftrightarrow \text{cotg } b > \text{cotg } a \Leftrightarrow \text{tg } b > \text{tg } a \Rightarrow$ d) correta pelo mesmo motivo que em a).

Gabarito: "b".

---

68. (EEAR/2002)

Das afirmações:

I. $\cos x = \sqrt{1 - \text{sen } x}$

II. $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$

III. $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Sendo x um arco no círculo trigonométrico compreendido entre $\frac{\pi}{2}$ e π, conclui-se que:

a) a única falsa é I

b) a única falsa é II

c) a única falsa é III

d) as três são verdadeiras

Comentários

A raiz de qualquer número real positivo é positiva. Assim, se $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$, conclui-se que $\cos x \geq 0$. Entretanto, o enunciado afirma que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, o que implica que $\cos x < 0$. Dessa forma, conclui-se por absurdo que a afirmativa I é falsa.

As afirmativas II e III são simplesmente as fórmulas de arco duplo, que podem ser deduzidas das fórmulas de adição de arcos da seguinte maneira:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a\ \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(x+x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\ \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Gabarito: "a".

---

69. (EEAR/2002)

Se a $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então o valor de $\cos x - \operatorname{sen} x$ é igual a:

a) $\frac{7}{5}$

b) $-\frac{7}{5}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $-\frac{1}{5}$

Comentários

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{9}{16} \Rightarrow 16 - 16\cos^2 x = 9\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x$$

$$= 1 - \cos^2 x = \frac{9}{25}$$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos que $\cos x < 0$ e $\operatorname{sen} x < 0$. Logo, $\cos x = -\frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$. Portanto,

$$\cos x - \operatorname{sen} x = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$

Gabarito: "d".

---

70. (EEAR/2002)

O $\operatorname{sen}\frac{122\pi}{9}$ é igual ao

a) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{9}$

b) $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{9}$

c) $-\operatorname{sen}\frac{5\pi}{9}$

d) $-\operatorname{sen}\frac{4\pi}{9}$

Comentários

$$\frac{122\pi}{9} = 12\pi + \frac{14\pi}{9} = 12\pi + 2\pi - \frac{4\pi}{9}$$

Logo,

$$\operatorname{sen}\frac{122\pi}{9} = \operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{9}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

Como $\frac{4\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} = \pi$, temos $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{9} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{9}$. Portanto, existem duas alternativas corretas!

Gabarito: "c" ou "d".

---

71. (EEAR/2002)

Se θ é um ângulo tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e o dobro do seu seno é igual ao triplo do quadrado de sua tangente, então o valor do seu cosseno é

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2}{3}$

Comentários

No intervalo aberto dado, $\cos\theta \neq 0 \neq \operatorname{sen}\theta$. Logo:

$$2\operatorname{sen}\theta = 3\operatorname{tg}^2\theta \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}\theta = 3\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 2\cos^2\theta = 3\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2\theta + 3\operatorname{sen}\theta - 2 = 0$$

Resolvendo por Bháskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 25$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{-3-5}{4} \text{ ou } \operatorname{sen}\theta = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

Como devemos ter $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$, ficamos apenas com a segunda opção. Dessa forma, como θ está no primeiro quadrante, temos que $\theta = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = 30° = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gabarito: “b”.

---

72. (EEAR/2001)

Numere a segunda coluna de acordo com a primeira, sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(1) $\operatorname{sen}^2 2x$	**( )**	$2\cos^2 x$
(2) $1 + \cos 2x$	**( )**	$2\operatorname{sen} x \cos x$
(3) $\operatorname{sen} 2x$	**( )**	$1 - \cos^2 2x$
(4) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	**( )**	$-\operatorname{sen} x$
(5) $\operatorname{sen}(-x)$	**( )**	$\cos x$

Lendo-se a segunda coluna de cima para baixo, a sequência correta é:

a) $1, 3, 4, 5, 2$

b) $2, 3, 1, 5, 4$

c) $3, 1, 2, 4, 5$

d) $2, 3, 5, 1, 4$

Comentários

(1) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\ \forall\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ (terceiro vazio).

(2) $cos\ 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ (primeiro vazio).

(3) $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a\ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(x + x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$ (segundo vazio).

(4) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + (-x)\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x)\cos\frac{\pi}{2} = \cos(-x) = \cos(x)$ (pois a função cosseno é par; quinto vazio).

(5) A função seno é ímpar (quarto vazio).

Sequência: $2, 3, 1, 5, 4$

Gabarito: “b”.

---

73. (EEAR/2001) [Adaptada]

Em $0 \leq x \leq 2\pi$, a expressão $y = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}$ é tal que:

a) $y > 0$ somente se $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b) $y < 0$ se $x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

c) $y > 0$ se $x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

d) $y < 0$ somente se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Comentários

Para $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$y = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x} = \frac{\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\cos x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x \operatorname{sen} x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x\,(1 + \cos x)}{\cos^2 x\,(1 + \operatorname{sen} x)}$$

$$= \operatorname{tg}^2 x \cdot \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}\right)$$

Como $\operatorname{sen} x$, $\cos x < 1$ (pois $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$), temos que $(1 + \cos x), (1 + \operatorname{sen} x) > 0$. Além disso, $\operatorname{tg}^2 x > 0$. Portanto, y é sempre positivo.

Gabarito: "c".

---

74. (EEAR/2001)

Se $\operatorname{tg} x = -3$, então $\operatorname{tg} 4x$ é igual a:

a) $-\frac{3}{4}$

b) $-\frac{24}{7}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{24}{7}$

Comentários

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot (-3)}{1 - (-3)^2} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2(2x)} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

Gabarito: "d".

---

75. (EEAR/2001)

A expressão $\frac{1+\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$ é identicamente igual a:

a) $\operatorname{cotg} x$

b) $\sec x$

c) $\operatorname{sen} x$

d) $\operatorname{tg} x$

Comentários

Parta de $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, além de $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$. Temos:

$$E = \frac{1+\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{2\cos^2 x}{2\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x$$

Gabarito: "a".

---

76. (EEAR/2000)

O valor de $(\operatorname{sen} 112°30' + \cos 112°30')^2$ é:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Comentários

Seja $\alpha = 112°30'$. Queremos $E = (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$.

Mas $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(2 \cdot 112°30') = \operatorname{sen}(225°) = \operatorname{sen}(180° + 45°) = -\operatorname{sen}(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, $E = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Gabarito: "c".

---

77. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Sabe-se que a medida de um ângulo é $\frac{7\pi}{5}$ rad. Pode-se afirmar que esse ângulo é igual a

a) $108°$

b) $126°$

c) $252°$

d) $210°$

Comentários

Sabendo que π rad equivale a $180°$, temos:

$$\frac{7\pi}{5}=\frac{7}{5}\cdot 180°=7\cdot 36°=252°$$

Gabarito: C

---

78. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Se α e β são ângulos de um triângulo retângulo tal que $sen\alpha=\frac{3}{5}$, então $sen\beta$ é igual a

a) $1/3$

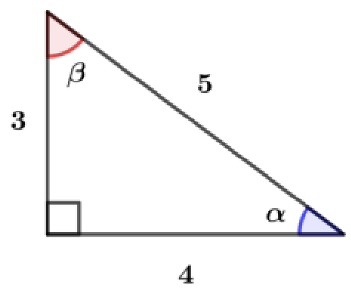
b) $1/2$

c) $3/5$

d) $4/5$

Comentários

Temos o triângulo retângulo 3, 4 e 5 conforme a figura abaixo:



Note que

$$sen\alpha=\frac{3}{5}=\cos\beta$$

$$\cos\alpha=\frac{4}{5}=sen\beta$$

Gabarito: D

---

79. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

O valor de $\cos 2080°$ é igual a

a) $\cos 10°$

b) $\text{sen}\, 10°$

c) $\text{sen}\, 80°$

d) $\cos 20°$

Comentários

Vamos encontrar o arco congruente a $2080°$. Para isso, faremos a divisão por $360°$ e tomaremos o resto, este será o arco côngruo.

$$2080° = 360° \cdot 5 + 280°$$

O resto é $280°$. Podemos escrever:

$$\cos 2080° = \cos 280° = \cos(360° - 80°) = \cos 80°$$

Temos da relação de ângulo complementar:

$$\cos 80° = \text{sen}\, 10°$$

Gabarito: B

---

80. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Seja $M = \frac{\csc x \cdot \text{tg}\, x}{\sec^2 x}$, com $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Podemos afirmar que M é igual a

a) $\cos x \cdot \text{tg}^2\, x$

b) $\text{tg}\, x$

c) $\sec x$

d) $\cos x$

Comentários

Lembrando que

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen}\, x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

Temos:

$$M = \frac{\csc x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)^2} = \cos x$$

Gabarito: D

---

81. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Se $\cos x = a$ e x é um arco do quarto quadrante, com $0 < |a| < 1$, então $\csc x$ é igual a

a) $-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

c) $\frac{1}{a}$

d) $-\frac{1}{a}$

Comentários

Da relação fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1 - a^2}$$

Como x é do quarto quadrante, temos $\operatorname{sen} x < 0$, logo:

$$\operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - a^2}$$

Como $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, temos:

$$\csc x = -\frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Gabarito: A

---

82. (Estratégia Militares 2020)

Determine o valor de S na expressão a seguir:

$$S = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} - \operatorname{sen}\frac{6\pi}{7}}{\cos\frac{5\pi}{7}}$$

a) -1

b) 0

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

Comentários

Perceba que $sen(\theta) = sen(180° - \theta)$.

Logo,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} = \operatorname{sen}\frac{6\pi}{7}$$

De modo que S = 0.

Gabarito: B

---

83. (Estratégia Militares 2020)

Sabendo que $tgx = t$, calcule $tg(3x)$.

a) $3t$

b) $3t - t^3$

c) $(2t - t^3)/(1 - 3t^2)$

d) $(3t - t^3)/(1 - 3t^2)$

Comentários

Sabe-se que:

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}$$

Logo:

$$tg(2x) = \frac{2tgx}{1 - tg^2x}$$

Então, temos que:

$$tg(x+2x) = \frac{tgx + tg2x}{1 - tgx.tg2x}$$

$$tg3x = \frac{\left(tgx + \frac{2tgx}{1 - tg^2x}\right)}{1 - tgx.\frac{2tgx}{1 - tg^2x}}$$

$$tg3x = \frac{3tgx - tg^3x}{1 - 3tg^2x}$$

$$tg3x = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

Gabarito: D

---

84. (Estratégia Militares 2020)

Considere x um arco do 2º quadrante e que a cotangente de x é $cotg\ x$ e a cossecante de x é $cossec\ x$. Se $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, então o valor de $cotg^2x - cossec^2x + 2\operatorname{sen} 2x$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

Comentários

O enunciado fala que x pertence ao segundo quadrante. Isso significa que suas coordenadas no círculo trigonométrico $(\cos x\,, \text{sem}\, x)$ são de abcissa (cos x) negativa e ordenada (sen x) positiva. Calculando o valor de $\cos x$:

$$sen^2x + cos^2x = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 + cos^2x = 1$$

$$\Rightarrow cos^2x = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \left(\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow cos^2x = 1 - \frac{6}{16} - \frac{2}{16} + \frac{4\sqrt{3}}{16} = \frac{8}{16} + \frac{4\sqrt{3}}{16} \Rightarrow cos^2x = \frac{4+2\sqrt{3}}{8} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{8}$$

$$\Rightarrow cos^2x = \frac{1^2 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{8} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Entretanto, como x pertence ao segundo quadrante, então $\cos x < 0$:

$$\cos x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Queremos agora calcular a expressão $E = cotg^2x - cossec^2x + 2\operatorname{sen} 2x$. Sabemos que os dois primeiros termos fazem parte de uma das equações principais da trigonometria:

$$cotg^2x + 1 = cossec^2x \Rightarrow \boxed{cotg^2x - cossec^2x = 1\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

Portanto, a expressão fica:

$$E = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,2x$$

Sabemos que $\mathrm{sen}\,2x = 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$, portanto:

$$E = 1 + 4\,\mathrm{sen}\,x\cos x$$

Substituindo os valores de $\mathrm{sen}\,x\ e \cos x$:

$$E = 1 + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot -\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$

Observe que a multiplicação dos termos em parênteses é do tipo $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Logo:

$$E = 1 - \frac{4\left(\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2\right)}{16} = 1 - \frac{4(6-2)}{16} = 1 - \frac{4 \cdot 4}{16} = 1 - 1 = 0$$

Gabarito: "a".

---

85. (Estratégia Militares 2020)

Ao somar $\mathrm{sen}\,315°$ com $\cos 780°$, obtém-se:

a) $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

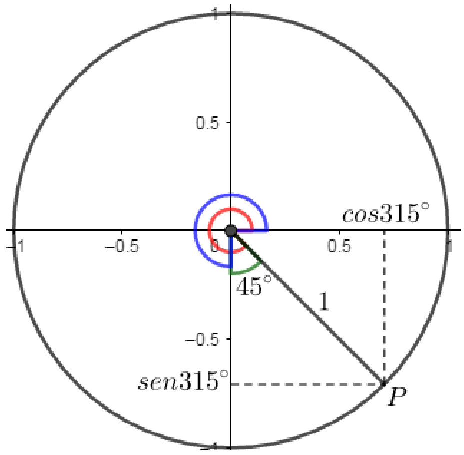
d) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Comentários

Veja que o arco de 315° não passou de 360° (1 volta completa). Assim, veja:

$$315° = 270° + 45°$$

Portanto, esse arco pertence ao quarto quadrante. Vejamos ele no círculo trigonométrico:



Portanto, vemos que 315° é o ângulo em vermelho. Queremos trabalhar com o sen 315° que, é a ordenada do ponto P no círculo trigonométrico. Assim, pela imagem vemos que:

$$sen\ 315° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Agora, analisando o arco de 780°, vemos que ele é maior que duas voltas completas de 360°:

$$780° = 360° + 360° + 60°$$

Assim, sua representação no círculo trigonométrico seria, obviamente no arco de 60°. Portanto:

$$\cos 780° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

Assim, a expressão pedida é:

$$sen\ 315° + \cos 780° = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

Gabarito: “b”.

---

86. (Estratégia Militares 2020)

O ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14h35min é igual a:

a) $\mathbf{132°30'}$

b) $\mathbf{122°30'}$

c) $\mathbf{92°60'}$

d) $\mathbf{157°30'}$

Comentários

Vamos definir o 0° na posição 12 do relógio. Se pensarmos, às 14h o ponteiro das horas estará na posição 60° e o ponteiro dos minutos estará na posição 0°. Entretanto, às 14h35, terá se passado 35/60 = 7/12 de uma hora. Assim, como em uma hora o ponteiro das horas gira:

$$\frac{360°}{12} = 30°$$

Então, passados 7/12 de uma hora, o ponteiro das horas terá girado de:

$$\frac{7}{12} \cdot 30° = \frac{35°}{2}$$

Então sua nova posição será $60° + 35°/2 = 77{,}5°$.

Agora, pensando no ponteiro dos minutos, sabemos que em uma hora ele gira $360°$. Portanto, em 7/12 de uma hora, ele terá girado:

$$\frac{7}{12} \cdot 360° = 210°$$

E essa é sua posição final (14h25).

Portanto, o ângulo convexo entre estes (menor que 180°) é:

$$210° - 77{,}5° = 132{,}5° = 132°30'$$

Gabarito: "a".

---

87. (Estratégia Militares 2020)

O valor do $sen\ 1570°$ é igual a:

a) $sen\ 135°$

b) $\cos 70°$

c) $\cos 40°$

d) $-\cos 130°$

Comentários

Vamos primeiro colocar 1570° na forma:

$$1570° = 360° \cdot n + \theta$$

Onde $0 \leq \theta \leq 360°$ e $n \in \mathbb{N}$ é único.

Veja que para $n = 5$ com certeza o valor de $360° \cdot 5 > 1570°$, o que resultaria num $\theta < 0$, o que não desejamos. Portanto, o valor que procuramos é muito provavelmente $n = 4$. Vejamos:

$$1570° = 360° \cdot 4 + \theta \Rightarrow \theta = 1570° - 1440° = 130° \Rightarrow \boxed{\theta = 130°}$$

Portanto, achamos um θ que está entre 0 e 360°, o que nos satisfaz. Portanto, o ângulo de que se pergunta o seno é igual a 4 voltas completas no círculo trigonométrico ($360° \cdot 4$) mais um ângulo de 130°. Portanto:

$$sen\ 1570° = sen(360° \cdot 4 + 130°) = sen130°$$

Porém, sabemos que $sen\ 130° = sen\ (180° - 130°) = sen(50°)$. E que, por sua vez:

$$sen\ 50° = \cos(90° - 50°) = \cos\ (40°)$$

Portanto:

$$\boxed{sen\ 1570° = \cos\ (40°)}$$

Gabarito: "c"

---

88. (Estratégia Militares 2020)

Seja $P = \frac{1+\frac{1}{tg\ x}}{1+tg\ x} + \frac{cossec\ x}{\sec x}$ uma expressão tal que $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Dessa maneira, a solução em x para a equação $P = 2$ é:

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{8}$

e) $\frac{\pi}{2}$

Comentários

Vamos primeiramente reescrever a expressão de P:

$$P = \frac{1+\frac{1}{tg\ x}}{1+tg\ x} + \frac{cossec\ x}{\sec x} = \frac{\frac{1+tg\ x}{tg\ x}}{1+tg\ x} + \frac{cossec\ x}{\sec x} = \frac{1+tg\ x}{tg\ x \cdot (1+tg\ x)} + \frac{cossec\ x}{\sec x}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{tg\ x} + \frac{cossec\ x}{\sec x} = \frac{1}{tg\ x} + \frac{\frac{1}{sen\ x}}{\frac{1}{\cos x}} = cotg\ x + \frac{cosx}{senx} = 2 \cdot cotgx$$

$$P = 2 \cdot cotg\ x$$

Assim, queremos a solução da equação $P = 2$:

$$P = 2 \Rightarrow 2 = 2 \cdot cotg\ x \Rightarrow cotg\ x = 1 \Rightarrow tgx = 1$$

Sabemos que o valor de x entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ tal que sua tangente é 1 é o ângulo notável de 45°, ou em radianos: $\frac{\pi}{4}$. Logo:

$$x = \frac{\pi}{4}$$

Gabarito: "c"

---

89. (Estratégia Militares 2020)

Se $senx + \cos x = \frac{8}{13}$ e se $tgx = -\frac{3}{4}$, então, no ciclo trigonométrico, x pertence ao ______ quadrante:

a) 1º

b) 2º

c) 3º

d) 4º

e) Não há solução real.

Comentários

É dado que:

$$senx + \cos x = \frac{8}{13}$$

Dividindo ambos os lados por $\cos x$:

$$\frac{senx}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{8}{13\cos x} \Rightarrow tg\, x + 1 = \frac{8}{13\cos x}$$

Substituindo o valor de $tgx = -\frac{3}{4}$:

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} + 1 = \frac{8}{13\cos x} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{8}{13\cos x} \Rightarrow \cos x = \frac{32}{13} > 1$$

É impossível que haja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x > 1$. Portanto, não há solução real para x.

Gabarito: "e".

---

90. (Estratégia Militares 2020)

Se $senx = \frac{3}{5}$, então $cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ é igual a:

a) $\frac{3}{5}$

b) $-\frac{3}{5}$

c) $\frac{4}{5}$

d) $-\frac{4}{5}$

e) 1

Comentários

Vamos abrir a expressão $cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = cosx \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - senx \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - senx \cdot 1 = -senx = -\frac{3}{5}$$

Gabarito: "b".

---

91. (Estratégia Militares 2020)

Sabendo que x pertence ao $2°$ quadrante no círculo trigonométrico e que $sen\ x = 0,8$, pode-se afirmar que o valor de $\cos 3x$ é igual a:

a) $\mathbf{0,936}$

b) $\mathbf{-1}$

c) $\mathbf{0,956}$

d) $\mathbf{-0,846}$

e) $\mathbf{0,7090}$

Comentários

Utilizando primeiramente a relação fundamental da trigonometria:

$$\boldsymbol{sen^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow 0,8^2 + cos^2 x = 1 \Rightarrow cos^2 x = 1 - 0,64 = 0,36}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow cos^2 x = 0,36}$$

Como $\boldsymbol{x}$ pertence ao segundo quadrante, implica que o $\boldsymbol{\cos x < 0}$. Portanto:

$$\boldsymbol{\cos x = -\sqrt{0,36} = -0,6}$$

Queremos calcular o $\boldsymbol{\cos 3x = \cos(2x + x)}$. Pela forma do cosseno da soma de arcos:

$$\boldsymbol{\cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - sen\ 2x\ sen\ x}$$

Entretanto, sabemos que:

$$\boldsymbol{\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - sen\ x\ sen\ x = cos^2 x - sen^2 x}$$

$$\boldsymbol{sen\ 2x = sen\ (x + x) = sen\ x \cos x + sen\ x \cos x = 2\ sen\ x \cos x}$$

Portanto, substituindo os valores de $\boldsymbol{\cos x\ \ e\ sen\ x}$:

$$\boldsymbol{\cos 2x = 0,36 - 0,64 = -0,28}$$

$$\boldsymbol{sen\ 2x = 2 \cdot 0,8 \cdot (-0,6) = -0,96}$$

Portanto:

$$\boldsymbol{\cos 3x = \cos 2x \cos x - sen\ 2x\ sen\ x = (-0,28) \cdot (-0,6) - (-0,96) \cdot (0,8) = 0,936}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \cos 3x = 0,936}$$

Gabarito: “a”

---

92. (Estratégia Militares 2020)

A soma dos valores de n que satisfazem às igualdades $\cos x = \frac{n-1}{n}$ e $sen\ x = \frac{n+3}{n}$ é igual a:

a) 5

b) 6

c) 4

d) -4

e) -6

Comentários

Sabemos que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a relação seguinte é válida:

$$\cos^2 x + sen^2 x = 1$$

Substituindo os valores de $\cos x\ \ e\ senx$ pelos dados no enunciado:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+3}{n}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(n-1)^2 + (n+3)^2}{n^2} = 1 \Rightarrow (n-1)^2 + (n+3)^2 = n^2$$

$$\Rightarrow n^2 - 2n + 1 + n^2 + 6n + 9 = n^2$$

$$\Rightarrow n^2 + 4n + 10 = 0$$

Sabemos, pelas relações de soma e produto (Girard), que a soma das raízes da equação acima é igual a:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$$

Gabarito: “d”.

---

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da nossa aula de trigonometria. Tente resolver todos os exercícios dessa aula, pois o melhor jeito de estudar trigonometria é resolver uma grande quantidade de exercícios e pegar todos os bizus da aula. Na hora da prova, não teremos surpresas pois já saberemos resolver cada tipo de problema que possa cair.

Lembre-se! A prática leva à perfeição! Conte comigo na sua preparação!

Se ficar com dúvidas ou tiver alguma sugestão e/ou crítica, nos procure no fórum de dúvidas ou fale diretamente comigo:

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria. 9. ed. Atual, 2013. 311p.

[2] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Perdigão do Carmo, Manfredo. Trigonometria Números Complexos. 3 ed. SBM, 2005. 164p.Olá, aluno(a)! Seja bem-vindo(a) ao nosso curso!

11. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.