**A Equipe Rumoaoita agradece ao Sistema Elite de Ensino – Unidade Vila dos Cabanos (PA) por disponibilizar essa coletânea de provas do ITA.**

## ITA - 1989

01) (ITA-89) Os valores de $\alpha$, $0 < \alpha < \pi$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, para os quais a função f: $\Re \to \Re$ dada por
$f(x) = 4x^2 - 4x - tg^2\alpha$, assume seu valor mínimo igual a -4, são:
a) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{2\pi}{5}$ c) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$
d) $\frac{\pi}{7}$ e $\frac{2\pi}{7}$ e) $\frac{2\pi}{5}$ e $\frac{3\pi}{5}$

02) (ITA-89) Sejam A, B e C subconjuntos de $\Re$, não vazios, e A-B = $\{p \in \Re;\ p \in A \text{ e } p \notin B\}$. Dadas as igualdades:
1-(A-B)xC = (AxC)-(BxC)
2-(A-B)xC = (AxB)-(BxC)
3-$(A \cap B)-A \neq (A \cap B) - B$
4-A - $(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$
5-$(A-B) \cap (B-C) = (A-B) \cap (A-B)$
podemos garantir que:
a) 2 e 4 são verdadeiras. b) 1 e 5 são verdadeiras.
c) 3 e 4 são verdadeiras. d) 1 e 4 são verdadeiras.
e)1 e 3 são verdadeiras.

03) (ITA-89) Sejam A e B subconjuntos de R, não vazios, possuindo B mais de um elemento. Dada uma função f: $A \to B$, definidos L: $A \to (AxB)$ por L(a) = (a,f(a)), para todo a $\in$ A. Podemos afirmar que :
a) A função L sempre será injetora
b) A função L sempre será sobrejetora.
c) Se f for sobrejetora, então L também o será.
d) Se f não for injetora , então L também não o será.
e) Se f for bijetora, então L será sobrejetora.

04) (ITA-89) O valor da expressão: $|1 - z|^2 + |1 + z|^2$, sendo z um número complexo, é:
a) 5, se $|z| \leq 1$ b) 4, se $|z| = 1$ c) 0, se Im (z) = 0
d) 2, para todo z. e) 3, se Re(z) = 0.

05) (ITA-89) A equação da parábola, cujo eixo é perpendicular ao eixo x e que passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2ax + 2y = 0$, com a > 1, e pelos pontos (-1, 0), (1, 0) é:
a) $(a^2 - 1)y = a^2(x^2 - 1)$ b) $(a^2 - 1)y = a^2(1- x^2)$
c) $(a^2 - 1)y = (x^2 - 1)$ d) $(a^2 - 1)y = a(x^2 - 1)$
e) $(a^2 - 1)y = -x^2 + 1$

06) (ITA-89) Considerando que a imagem da função arc sen é o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ e i = $\sqrt{-1}$, podemos garantir que arc sen $|(1+xi)/(1-xi)|$ está definida:
a) apenas para x =0 e vale $\pi/2$.
b) para todo x $\varepsilon$ R e vale $\pi/2$.
c) apenas para x $\varepsilon$ R tal que $|x| < 1$ e seu valor depende do valor de x.
d) apenas para x $\varepsilon$ R tal que $x \geq 1$ e seu valor é $\pi$.
e) apenas para x $\varepsilon$ R tal que $x \leq -1$ e seu valor depende do valor de x.

07) (ITA-89) O produto dos números complexos z = x + yi, que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e se encontram sobre a reta y = 2x - 1 contida no plano complexo, é igual a:
a) $\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$ b) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ c) $-\frac{8}{5} - \frac{8}{5}i$ d) $2 + 2i$
e) Não existe nenhuma número complexos que pertence à reta y = 2x - 1 e cujo módulo seja $\sqrt{2}$.

08) (ITA-89) Um cone e um cilindro , ambos retos, possuem o mesmo volume e bases idênticas. Sabendo-se que ambos são inscritíveis em uma esfera de raio R, então a altura H do cone será igual a:
a) $\frac{6}{5}R$ b) $\frac{3}{2}R$ c) $\frac{4}{3}R$ d) $\frac{2}{3}R$ e) $\frac{7}{5}R$

09) (ITA-89) Justapondo-se as bases de dois cones retos e idênticos de altura H, forma-se um sólido de volume v. Admitindo-se que a área da superfície deste sólido é igual a área da superfície de uma esfera de raio H e volume V, a razão v/V vale:
a) $\frac{\sqrt{11}-1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{13}-1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{15}-1}{4}$
d) $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ e) $\frac{\sqrt{19}-1}{4}$

10) (ITA-89) Os lados de um triângulo isósceles formam um ângulo de 30 graus e o lado oposto a este ângulo mede x cm. Este triângulo é a base de um pirâmide de altura H cm, que está inscrita em um cilindro de revolução. Deste modo, o volume V, em centímetros cúbicos, deste cilindro é igual a:
a) $2\pi x^2H$ b) $\frac{1}{3}\pi x^2H$ c) $\frac{2}{3}\pi x^2H$ d) $3\pi x^2H$ e) $\pi x^2H$

11) (ITA-89) As circunferências $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4y$ possuem um ponto comum P, distinto da origem. Obtenha a equação da reta tangente à primeira circunferência no ponto P.
a) 5x + 10y = 16 b) 5x + 15y = 20 c) 5x + 5y = 12
d) 3x + 4y = 8 e) 10x + 5y = 20

12) (ITA-89) A distância entre os pontos de intersecção da reta x/10 + y/20 = 1 com a circunferência $x^2 + y^2 = 400$ é:
a) $16\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{7}$

13) (ITA-89) Seja s a reta do plano cartesiano, que passa pelo ponto (1, 3) e é perpendicular à reta x + y + 1 = 0. Considere uma circunferência com centro na origem e raio R > 0. Nestas condições, se **s** for tangente à circunferência, então:
a) R é um número irracional e R < ½.
b) R é um número irracional e ½ < R < 1.
c) R é um número irracional e R > 1.
d) R é um número racional e R > 1.
e) R é um número racional e R < 1.

14) (ITA-89) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 28 = 0$ que tem ordenada máxima é:
a) $(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2, -\frac{9}{2})$ b) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}, -1)$ c) $(-\frac{3}{10}, -1)$

**Provas ITA**

d) $(\frac{\sqrt{2}}{2}-2, -2)$ e) (-2, -4)

15) (ITA-89) Se tg(2A) = 5 então tg($\pi$/4 + A) - tg($\pi$/4 - A) é igual a:
a) -40/21 b) -2 c) 5 d) 8 e) 10

16) (ITA-89) Sobre a expressão:
$M = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_5 x}$, onde $2 < x < 3$, qual das afirmações abaixo está correta ?
a) $1 \le M \le 2$ b) $2 < M < 4$ c) $4 \le M \le 5$
d) $5 < M < 7$ e) $7 \le M \le 10$

17) (ITA-89) Considere o desenvolvimento $(x + y)^{10} = A_1x^{10} + A_2x^9y + \ldots$, onde x e y são números reais. A oitava parcela do lado direito é igual a $\frac{405}{2}(\log_K 2)^3$, para algum K > 1, ($x = (2.\log_2 k)/(\sqrt{\log_K 2})$ e $y = (\sqrt{\log_K 2})/(2.\log_K 2)$. Neste caso:
a) $K^2 = 2$ b) $K^2 = 3$ c) $K^3 = 2$
d) $K^3 = 7$ e) $K^3 = 5$

18) (ITA-89) Numa progressão geométrica de razão q sabemos que $a_1 = \frac{1}{q}$ , $a_1a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ e o produto dos n primeiros termos é $q^{20}$ . Então a soma dos n primeiros termos é igual a :
a) $\frac{1}{2}\frac{3^8-2^8}{3^6}$ b) $\frac{1}{2}\frac{3^6-2^6}{3^6}$ c) $\frac{1}{4}\frac{3^8-2^8}{3^6}$
d) $\frac{1}{4}\frac{3^6-2^6}{3^6}$ e) $\frac{1}{4}\frac{3^6-2^6}{3^8}$

19) (ITA-89) Numa progressão aritmética com n termos, n > 1, sabemos que o primeiro é igual a (1+n)/n e a soma deles vale (1+3n)/2 . Então o produto da razão desta progressão pelo último termo é igual a :
a) 2n b) 2/n c) 3n d) 3/n e) 5n

20) (ITA 89) Escreva o desenvolvimento do binômio ( $tg^3$ x - $cosec^6$ x$)^m$, onde m é um número inteiro maior que zero, em termos de potências inteiras de sen x e cos x. Para determinados valores do expoente, este desenvolvimento possuirá uma parcela P, que não conterá a função sen x. Seja m o menor valor para o qual isto ocorre. Então P = -64/9 quando x for igual a:
a) x = $\pi$/3 + 2k$\pi$, k inteiro. b) x = $\pm\pi$/3 + k$\pi$, k inteiro.
c) x = $\pi$/4 + k$\pi$, k inteiro. d) x = $\pm\pi$/6 + 2k$\pi$, k inteiro.
e) Não existe x satisfazendo a igualdade desejada.

21) (ITA-89) O sistema de equações: $\begin{cases} x+3y-z=6 \\ 7x+3y+2z=6 \\ 5x-3y+4z=10 \end{cases}$
a) Tem somente uma solução.
b) Tem infinitas soluções com 9(x + y) = 14 e 9(2y - z) = 40.
c) Tem infinitas soluções com 9(x + y) = 34 e 9(2y - z) = 20.
d) Tem infinitas soluções com x dado em função de y e z.
e) Não possui solução.

22) (ITA-89) Sendo A, B, C matrizes nxn, considere as seguintes afirmações:
1. A(BC) = (AB)C
2. AB = BA
3.A + B = B + A
4. det (AB) = det (A) . det(B)
5. det( A + B) = det (A) + det (B)
Então podemos afirmar que:
a) 1 e 2 são corretas. b) 2 e 3 são corretas.
c) 3 e 4 são corretas. d) 4 e 5 são corretas.
e) 5 e 1 são corretas.

23) (ITA-89) Considere a equação:
$x\begin{bmatrix}4\\-16\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}5\\1\\2\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}7\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, onde x, y, e z são números reais. É verdade que:
a) A equação admite somente uma solução.
b) Em qualquer solução, $x^2 = z^2$.
c) Em qualquer solução, $16x^2 = 9z^2$.
d) Em qualquer solução, $25y^2 = 16z^2$.
e) Em qualquer solução, $9y^2 = 16z^2$.

24) (ITA-89) Sendo $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\0 & -3 & 2\\3 & -1 & -2\end{bmatrix}$ então o elemento da terceira linha e primeira coluna, de sua inversa, será igual a:
a) 5/8 b) 9/11 c) 6/11 d) -2/13 e) 1/13

25) (ITA-89) Dadas as afirmações:
I- Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares.
II- Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.
III- Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzarem em seu ponto médio, então este paralelogramo é um losango.
Podemos garantir que:
a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas I e II são verdadeiras.
c) Apenas II e III são verdadeiras.
d) Apenas II é verdadeira.
e) Apenas III é verdadeira.

26) (ITA-89) Considere um quadrilátero ABCD cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, 5 cm e 6 cm. Se R, S, T e U são os pontos médios dos lados do quadrilátero dado, então o perímetro do quadrilátero RSTU vale:
a) 22 cm b) 5,5 cm c) 8,5 cm d) 11 cm e) 13 cm

27) (ITA-89) Numa circunferência de centro O, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero. Seja D um quarto ponto da circunferência, não coincidente com os demais. Sobre a medida x do ângulo ADC podemos afirmar que:
a) $0^o < x < 30^o$ ou $60^o < x < 120^o$.
b) $x = 60^o$ ou $x = 120^o$.
c) $x = 45^o$ ou $x = 150^o$.
d) $x = 240^o$ para qualquer posição de D na circunferência.
e) $x = 30^o$ para qualquer posição de D na circunferência.

28) (ITA-89) Considere uma circunferência de centro em O e diâmetro AB. Tome um segmento BC tangente à circunferência, de modo que o ângulo $B\hat{C}A$ meça $30^o$. Seja D o ponto de encontro da circunferência com o segmento AC e DE o segmento paralelo a AB, com extremidades sobre a circunferência. A medida do segmento DE será igual:
a) À metade da medida de AB.
b) Um terço da medida de AB.
c) À metade da medida de DC.
d) Dois terços da medida de AB.
e) À metade da medida de AE.

29) (ITA-89) Se um quadrilátero convexo de área X, o ângulo agudo entre as diagonais mede $\pi/6$ radianos, então o produto do comprimento destas diagonais é igual a:
a) S b) 2S c) 3S d) 4S e) 5S

30) (ITA-89) Se o perímetro de um triângulo inscrito num círculo medir 20 cm e a soma dos senos de seus ângulos internos for igual a x, então a área do círculo, em $cm^2$, será igual a:
a) $50\pi$ b) $75\pi$ c) $100\pi$ d) $125\pi$ e) $150\pi$

QUESTÕES:

PROBLEMA I (ITA-89) Sabendo-se que x e y são reais, tais que $x + y = 3\pi/4$, verifique se a matriz $\begin{bmatrix} 2tgx & 1+tgx \\ 1+tgy & tgy \end{bmatrix}$ é ou não é inversível.

PROBLEMA II (ITA-89) Sejam f, g: $\Re \to \Re$ duas funções tais que:
a) gof: $\Re \to \Re$ é injetora. Verifique se f é injetora e justifique sua resposta.
b) gof: $\Re \to \Re$ é sobrejetora. Verifique se g é sobrejetora e justifique sua resposta.

PROBLEMA III (ITA-89) Determine a equação da reta suporte de um segmento que tem seu centro no ponto (5, 0) e extremidade em cada uma das retas $x - 2y - 3 = 0$ e $x + y + 1 = 0$. Dê a resposta na forma $Ax + By + C = 0$.

PROBLEMA IV (ITA-89) - Num triângulo ABC, D é um ponto médio do segmento AC e E é um ponto do segmento AB. Sabendo-se que $\overline{AB} = 3\overline{AE}$, determine a razão entre a área do quadrilátero BCDE e a do triângulo ADE.

PROBLEMA V (ITA-89) O lado da base maior de um tronco de pirâmide hexagonal regular, com bases paralelas, mede L cm. A altura do tronco é igual à metade da apótema desta mesma base. As faces laterais formam um ângulo de 30 graus com a base. Calcule a apótema (a), o lado ($\ell$), ambos da base menor, a altura (h) da face lateral e a área total (S) do tronco, todos em função de L.

## ITA - 1990

01) (ITA-90) Dadas as funções $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$, $X \in \Re - \{0\}$
$g(x) = x \operatorname{sen} x$, $x \in IR$, podemos afirmar que:
a) ambas são pares. b) f é par e g é ímpar.
c) f é ímpar e g é par. d) f não é par e nem ímpar e g é par.
e) ambas são ímpares.

02) (ITA-90) Seja f: $\Re \to \Re$ a função definida por
$$f(x)=\begin{cases} x+2, \text{se } x \le -1 \\ x^2, \text{se } -1 < x \le 1 \\ 4, \text{se } x > 1 \end{cases}$$
Lembrando que se $A \subset \Re$ então $f^{-1}(A) = \{x \in \Re : f(x) \in A\}$ considere as afirmações:
I- f não é injetora e $f^{-1}([3 , 5]) = \{4\}$
II- f não é sobrejetora e $f^{-1}([3 , 5]) = f^{-1}([2 , 6])$
III- f é injetora e $f^{-1}([0 , 4]) = [-2 , +\infty[$

Então podemos garantir que:
a) Apenas as afirmações II e III são falsas;
b) As afirmações I e III são verdadeiras;
c) Apenas a afirmação II é verdadeira;
d) Apenas a afirmação III é verdadeira;
e) Todas as afirmações são falsas.

03) (ITA-90) Seja a função f: $\Re - \{2\} \to \Re - \{3\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2} + 1$. Sobre sua inversa podemos garantir que:
a) não está definida pois f é não injetora.
b) não está definida pois f não é sobrejetora.
c) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{y-2}{y-3}, y \ne 3$.
d) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{y+5}{y-3} - 1, y \ne 3$.
e) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{2y-5}{y-3}, y \ne 3$.

04)(ITA-90) Considere as equações $z^3 = i$ e $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$, onde z é complexo. Seja $S_1$ o conjunto das raízes da primeira equação e $S_2$ o da segunda. Então
a) $S_1 \cap S_2$ é vazio;
b) $S_1 \cap S_2 \subset R$;
c) $S_1$ possui apenas dois elementos distintos;
d) $S_1 \cap S_2$ é unitário;
e) $S_1 \cap S_2$ possui dois elementos.

05) (ITA-90) A igualdade $1 + |z| = |1+z|$, onde $z \in C$, é satisfeita:
a) Para todo $z \in C$ tal que Rez = 0 e Imz<0;
b) Para todo $z \in C$ tal que Rez $\ge$ 0 e Imz = 0;
c) Para todo $z \in C$ tal que $|z| = 1$;
d) Para todo $z \in C$ tal que Imz = 0;
e) Para todo $z \in C$ tal que $|z| < 1$.

Nota : C denota o conjunto dos números complexos, Rez a parte real de z e Imz a parte imaginária de z.

06) (ITA-90) Seja $p(x) = 16x^5 - 78x^4 + ... + \alpha x - 5$ um polinômio de coeficientes reais tal que a equação p(x) = 0 admite mais do que uma raiz real e ainda, a + bi é uma raiz complexa desta equação com $ab \ne 0$. Sabendo-se que $\dfrac{1}{a}$ é a razão da progressão geométrica formada pelas

raízes reais de p(x) = 0 e que a soma destas raízes reais vale $\frac{7}{8}$ enquanto que o produto é $\frac{1}{6}$, o valor de $\alpha$ é:

a) 32 b) 56 c) 71 d) 11 e) 0

07) (ITA-90) O conjunto das soluções reais da equação $|\ln(\text{sen}^2 x)| = \ln(\text{sen}^2 x)$ é dado por:

a) $\{x \in \Re : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$ b) $\{x \in \Re : x = \pi + k\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$

c) $\{x \in \Re : x = 2k\pi, k \in Z\}$ d) $\{x \in \Re : -1 \le x \le 1\}$

e) $\{x \in \Re : x \ge 0\}$

08) (ITA-90) Sabendo-se que 3x - 1 é fator de $12x^3 - 19x^2 + 8x - 1$ então as soluções reais da equação $12(3^{3x}) - 19(3^{2x}) + 8(3^x) - 1 = 0$ somam:

a) $-\log_3 12$ b) 1 c) $-\frac{1}{3}\log_3 12$ d) - 1 e) $\log_3 7$

09) (ITA-90) Numa progressão geométrica de três termos a razão é $e^{-2a}$, a soma dos termos é 7 enquanto que a diferença do último termo com o primeiro é 3. Nestas condições o valor de a é:

a) $\ln\sqrt{2}$ b) $-\ln\frac{5}{2}$ c) $\ln\sqrt{3}$ d) $-\ln\sqrt{2}$

e) não existe número real a nestas condições

10) (ITA-90) Sejam as funções f e g dadas por:

f: $\Re \to \Re$, f(x) = $\begin{cases} 1 \text{ se } |x| < 1 \\ 0 \text{ se } |x| \ge 1 \end{cases}$

g: $\Re - \{1\} \to \Re$, g(x) = $\frac{2x-3}{x-1}$

Sobre a composta (fog)(x) = f(g(x)) podemos garantir que:

a) se $x \ge \frac{3}{2}$, f(g(x)) = 0 b) se $1 < x < \frac{3}{2}$, f(g(x)) = 1

c) se $\frac{4}{3} < x < 2$, f(g(x)) = 1 d) se $1 < x \le \frac{4}{3}$, f(g(x)) = 1

e) n.d.a

11) (ITA-90) Sejam os números reais $\alpha$ e x onde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $x \ne 0$. Se no desenvolvimento de $((\cos\alpha)x + (\text{sen}\,\alpha)\frac{1}{x})^8$ o termo independente de x vale $\frac{35}{8}$, então o valor de $\alpha$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{12}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) n.d.a.

12) (ITA-90) Sejam a e b constantes reais positivas. Considere $x = a^2 \text{ tg } t + 1$ e $y^2 = b^2 \sec^2 t - b^2$ onde $0 \le t < \frac{\pi}{2}$.

Então uma relação entre x e y é dada por:

a) $y = \frac{b}{a}(x-1)^2, x \ge a$ b) $y = \frac{b^2}{a^4}(x-1)^2, x \ge 1$

c) $y = \frac{b}{a^2}(x-1), \forall x \in \Re$ d) $y = \frac{-b}{a^2}(x-1), x \ge 1$

e) $y = \frac{a^2}{b^2}(x-1), x \le 1$

13) (ITA-90) Sabendo-se que $\theta$ é um ângulo tal que $2\,\text{sen}(\theta - 60^o) = \cos(\theta + 60^o)$, então tg $\theta$ é um número da forma $a + b\sqrt{3}$ onde

a) a e b são reais negativos; b) a e b são inteiros;
c) a + b = 1; d) a e b são pares;
e) $a^2 + b^2 = 1$.

14) (ITA-90) Considere a matriz A = $\begin{bmatrix} \text{sen}\,x & 2 \\ \log_3 10 & 2\text{sen}x \end{bmatrix}$

onde x é real. Então podemos afirmar que:
a) A é inversível apenas para x > 0;
b) A é inversível apenas para x = 0;
c) A é inversível para qualquer x;
d) A é inversível apenas para x da forma $(2k + 1)\pi$, k inteiro;
e) A é inversível apenas para x da forma $2k\pi$, k inteiro.

15) (ITA-90) Sejam A, B e C matrizes quadradas n x n tais que A e B são inversíveis e ABCA = $A^t$, onde $A^t$ é a transposta da matriz A. Então podemos afirmar que:
a) C é inversível e det C = $\det(AB)^{-1}$;
b) C não é inversível pois det C = 0;
c) C é inversível e det C = det B;
d) C é inversível e det C = $(\det A)^2$. det B;
e) C é inversível e det C = $\frac{\det A}{\det B}$.
Nota: det X denota o determinante da matriz quadrada X.

16) (ITA-90) Dizemos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se, toda solução de um qualquer dos sistemas for também uma solução do outro. Considere as seguintes afirmações:
I- Dois sistemas de equações lineares 3x3, ambos homogêneos, são equivalentes.
II- Dois sistemas de equações lineares, 3x3, ambos indeterminados, não são equivalentes.
III- Os dois sistemas de equações lineares dados a seguir são equivalentes:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 8 \\ x + y + z = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + z = 4 \\ 4x - y + 2z = 14 \end{cases}$$

De acordo com a definição dada podemos dizer que:
a) As três afirmações são verdadeiras;
b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira;
c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
d) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
e) As três afirmações são falsas.

17) (ITA-90) Considere o sistema linear homogêneo nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ dado por

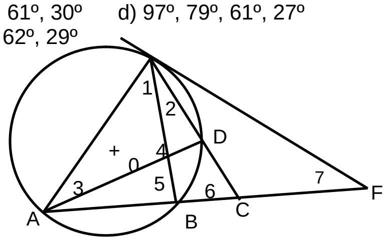
$$\begin{cases} a_1 x_1 + (a_1+1)x_2 + ... + (a_1+n-1)x_n = 0 \\ a_2 x_1 + (a_2+1)x_2 + ... + (a_2+n-1)x_n = 0 \\ ........................................................ \\ a_n x_1 + (a_n+1)x_2 + ... + (a_n+n-1)x_n = 0 \end{cases}$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais dados. Sobre a solução deste sistema podemos afirmar que:
a) Se $a_i > 0$, i = 1, 2, ..., n o sistema possui uma única solução;
b) Se $a_i < 0$, i = 1, 2, ..., n o sistema possui uma única solução;
c) Se $a_i > 0$, i = 1, 2, ..., n o sistema é impossível;
d) Se $a_i < 0$, i = 1, 2, ..., n o sistema é impossível;

e) O sistema possui infinitas soluções quaisquer que sejam os valores dos números $a_1$ , ..., $a_n$ dados.

18) (ITA-90) Há muito tempo atrás, quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio, colhido pelo tufão, foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem executado, anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú com moedas de ouro, tendo encarregado o seu imediato desta tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e, querendo evitar o constrangimento de uma partilha pública, um deles teve a idéia na madrugada de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, este marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para sua surpresa, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a ao mar para agradecer aos deuses a sua sobrevivência e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde o segundo marinheiro teve exatamente a mesma idéia. Indo ao baú, ele separou as moedas em dois montes iguais e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sua sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa. Pela manhã os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas em dois grupos e verificou que sobrava uma. Deu a cada marinheiro a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como paga pelos seus cálculos.
Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro e pelo segundo marinheiros foi de 29/17 então o número de moedas que havia originalmente no baú era:
a) 99 b) 95 c) 135 d) 87 e) n.d.a.

19- (ITA-90) Na figura abaixo 0 é o centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por E e F é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos 1, 2 e 3 são dadas, respectivamente, por 49º, 18º, 34º, determinar a medida dos ângulos 4, 5, 6 e 7. Nas alternativas abaixo considere os valores dados iguais às medidas de 4, 5, 6 e 7, respectivamente.
a) 97º, 78º , 61º, 26º b) 102º, 79º, 58º, 23º
c) 92º, 79º, 61º, 30º d) 97º, 79º, 61º, 27º
e) 97º, 80º, 62º, 29º




20) (ITA-90) Sejam as retas (r) e (s) dadas respectivamente pelas equações $3x - 4y + 12 = 0$ e $3x - 4y + 4 = 0$. Considere ($\ell$) o lugar geométrico dos centros das circunferências que tangenciam simultaneamente (r) e (s). Uma equação que descreve ($\ell$) é dada por:
a) $3x - 4y + 8 = 0$ b) $3x + 4y + 8 = 0$ c) $x - y + 1 = 0$
d) $x + y = 0$ e) $3x - 4y - 8 = 0$

21) (ITA-90) Seja C o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}\,y = 0$. Considere A e B os pontos de interseção desta circunferência com a reta $y = \sqrt{2}\,x$. Nestas condições o perímetro do triângulo de vértices A, B e C é:
a) $6\sqrt{2}+\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}+\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
d) $5\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e) n.d.a.

22) (ITA-90) Considere a reta (r) mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta $2x - 3y + 7 = 0$ intercepta os eixos coordenados. Então a distância do ponto $(\frac{1}{4},\frac{1}{6})$ à reta (r) é:
a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{4}{\sqrt{13}}$ c) $3\sqrt{13}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ e) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

23) (ITA-90) Considere um prisma triangular regular cuja aresta da base mede x cm. Sua altura é igual ao menor lado de um triângulo ABC inscritível num círculo de raio x cm. Sabendo-se que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm, o volume do prisma em $cm^3$ é:
a) $\frac{\sqrt{2}}{3}x^3$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{5}x^3$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{10}x^3$ d) $\frac{\sqrt{3}}{10}x^3$ e) n.d.a.

24) (ITA-90) Seja V o vértice de uma pirâmide com base triangular ABC. O segmento AV, de comprimento unitário, é perpendicular à base. Os ângulos das faces laterais, no vértice V, são todos de 45 graus. Deste modo, o volume da pirâmide será igual a:
a) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$ b) $\frac{1}{6}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
d) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ e) n.d.a.

25) (ITA-90) Considere a região do plano cartesiano xOy definida pelas desigualdades $x-y \leq 1$, $x+y \geq 1$ e $(x-1)^2+y^2 \leq 2$. O volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo x é igual a:
a) $\frac{4}{3}\pi$ b) $\frac{8}{3}\pi$ c) $\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})\pi$ d) $\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)\pi$ e) n.d.a.

## ITA - 1991

01) (ITA-91) Considere as afirmações:
I- Se f: $\Re \to \Re$ é uma função par e g:$\Re \to \Re$ uma função qualquer, então a composição gof é uma função par.
II- Se f: $\Re \to \Re$ é uma função par e g: $\Re \to \Re$ uma função ímpar, então a composição fog é uma função par.
III- Se f: $\Re \to \Re$ é uma função ímpar e inversível então $f^{-1}$: $\Re \to \Re$ é uma função ímpar.
Então:
a) Apenas a afirmação I é falsa;
b) Apenas as afirmações I e II são falsas;
c) Apenas a afirmação III é verdadeira;
d) Todas as afirmações são falsas;
e) n.d.a.

02) (ITA-91) Sejam $a \in \Re$, $a > 1$ e f: $\Re \to \Re$ definida por $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$. A função inversa de f é dada por:
a) $\log_a(x - \sqrt{x^2-1})$, para $x > 1$

b) $\log_a(-x + \sqrt{x^2+1})$, para $x \in \Re$

c) $\log_a(x + \sqrt{x^2+1})$, para $x \in \Re$

d) $\log_a(-x + \sqrt{x^2-1})$, para $x < -1$

e) nda

03) (ITA-91) Seja $\Re \to \Re$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ se } x \leq 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } 0 < x < 1 \\ \ln x, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Se D é um subconjunto não vazio de $\Re$ tal que f: $D \to \Re$ é injetora, então:
a) $D = \Re$ e $f(D) = [-1, +\infty[$
b) $D = ]-\infty, 1] \cup ]e, +\infty[$ e $f(D) = ]-1, +\infty[$
c) $D = [0, +\infty[$ e $f(D) = ]-1, +\infty[$
d) $D = [0, e]$ e $f(D) = [-1, 1]$
e) n.d.a.
**Notação:** $f(D) = \{y \in \Re: y = f(x), x \in D\}$ e ln x denota o logaritmo neperiano de x.
**Observação:** esta questão pode ser resolvida graficamente.

04) (ITA-91) Sejam w = a + bi com $b \neq 0$ e a, b, c $\in \Re$. O conjunto dos números complexos z que verificam a equação $wz + \overline{wz} + c = 0$, descreve:
a) Um par de retas paralelas.
b) Uma circunferência.
c) Uma elipse.
d) Uma reta com coeficiente angular $m = \frac{a}{b}$.
e) n.d.a.

05) (ITA-91) Se z = cos t + i sen t, onde $0 < t < 2\pi$, então podemos afirmar que $w = \frac{1+z}{1-z}$ é dado por:
a) $i \cot g \frac{t}{2}$ b) $i \, tg \frac{t}{2}$ c) i cotg t
d) i tg t e) n.d.a.

06) (ITA-91) Os valores de m de modo que a equação $x^3 - 6x^2 - m^2x + 30 = 0$ tenha duas de suas raízes somando um, são:
a) 0 b) $\sqrt{3}$ e 3 c) 1 e -1
d) 2 e -2 e) nda

07) (ITA-91) Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $12x^3 - 16x^2 - 3x + 4 = 0$ . Podemos afirmar que:
a) $S \subset ]-1, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]1, 2[$
b) $S \subset ]-2, -1[ \cup ]0, 1[ \cup ]3, 4[$
c) $S \subset [0, 4]$
d) $S \subset ]-2, -1[ \cup ]1, 2[ \cup ]3, 4[$
e) n.d.a.

08) (ITA-91) Considere as afirmações:
I- A equação $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$ só admite raízes reais.
II- Toda equação recíproca admite um número par de raízes.
III- As raízes da equação $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$. São exatamente o dobro das raízes de $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ .
Então:
a) Apenas I é verdadeira.
b) Apenas II é falsa.
c) Apenas III é verdadeira.
d) Todas são verdadeiras.
e) n.d.a.

09) (ITA-91) Se $A = \{x \in \Re: |x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 2x - 3|\}$, então temos:
a) $A = [-2, \frac{1}{2}] \cup [4, +\infty[$
b) $A = [\frac{1}{2}, 4]$
c) $A = [-3, 1]$
d) $A = ]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$
e) n.d.a.

10) (ITA-91) Na divisão de $P(x) = a_5x^5 + 2x^4 + a_4x^3 + 8x^2 - 32x + a_3$ por x - 1, obteve-se o quociente $Q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ e o resto -6. Sabe-se que $(b_4, b_3, b_2, b_1)$ é uma progressão geométrica de razão q > 0 e $q \neq 1$. Podemos afirmar:
a) $b_3 + a_3 = 10$ b) $b_4 + a_4 = 6$ c) $b_3 + b_0 = 12$
d) $b_4 + b_1 = 16$ e) n.d.a.

11) (ITA-91) Numa progressão geométrica de razão q, sabe-se que:
I- o produto do logaritmo natural do primeiro termo $a_1$ pelo logaritmo natural da razão é 24.
II- a soma do logaritmo natural do segundo termo com o logaritmo natural do terceiro termo é 26.
Se ln q é um número inteiro então o termo geral 2n vale:
a) $e^{6n-2}$ b) $e^{4+6n}$ c) $e^{24n}$ d) $e^{4+6n}$ e) nda
**Notação:** ln q denota o logaritmo natural (ou neperiano) de q

12) (ITA-91) O conjunto dos números reais que verificam a inequação $3\log x + \log(2x+3)^3 \leq 3 \log 2$, é dado por:
a) $\{x \in \Re: x > 0\}$ b) $\{x \in \Re: 1 \leq x \leq 3\}$
c) $\{x \in \Re: 0 < x \leq \frac{1}{2}\}$ d) $\{x \in \Re: \frac{1}{2} \leq x < 1\}$
e) n.d.a.
**Notação:** log***a*** denota o logarítimo de ***a*** na base 10

13)(ITA-91) Sejam $A = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} 3^k$ e $B = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} .11^k$ .

Se $\ln B - \ln A = \ln \frac{6561}{4}$ então n é igual a:
a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) n.d.a.

14) (ITA-91) Uma escola possui 18 professores sendo 7 de Matemática, 3 de Física e 4 de Química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores de modo que cada uma contenha exatamente 5 professores de Matemática, com no mínimo 2 de Física e no máximo 2 de Química ?
a) 875 b) 1877 c) 1995
d) 2877 e) n.d.a.

15) (ITA-91) Sejam m e n números reais com $m \neq n$ e as matrizes:

A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ , B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que a matriz mA + nB seja não inversível é necessário que:
a) m e n sejam positivos.
b) m e n sejam negativos.
c) m e n tenham sinais contrários.
d) $n^2 = 7m^2$ .
e) n.d.a.

16) (ITA-91) Sejam M e B matrizes quadradas de ordem n tais que M - $M^{-1}$ = B. Sabendo que $M^t = M^{-1}$ podemos afirmar que:
a) $B^2$ é a matriz nula. b) $B^2 = -2I$.
c) B é simétrica. d) B é anti-simétrica.
e) n.d.a.
**Notações:** $M^t$ e $M^{-1}$ denotam, respectivamente a matriz transposta de M e a matriz inversa de M. Por I denotamos a matriz identidade de ordem n.

17) (ITA-91) Considere o sistema:

$$(P)\ \begin{cases} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2w = 1 \\ x + (k+1)z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{cases}$$

Podemos afirmar que (P) é possível e determinado quando:
a) $k \neq 0$ b) $k \neq 1$ c) $k \neq -1$
d) $k \neq 0$ e $k \neq -1$ e) n.d.a.

18) (ITA-91) Se (x , y , z , t) é solução dos sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$$

Qual das alternativas abaixo é verdadeira ?
a) x + y + z + t e x tem o mesmo sinal.
b) x + y + z + t e t tem o mesmo sinal.
c) x + y + z + t e y tem o mesmo sinal.
d) x + y + z + t e z tem sinais contrários.
e) n.d.a.

19) (ITA-91) Um triângulo ABC está inscrito num círculo de raio $2\sqrt{3}$ . Sejam a, b e c os lados opostos aos ângulos A, B e C respectivamente. Sabendo que a = $2\sqrt{3}$ e (A,B,C) é uma progressão aritmética, podemos afirmar que:
a) C = $4\sqrt{3}$ e A = 30º b) C = $3\sqrt{3}$ e A = 30º
c) B = 6 e C = 85º d) B= 3 e C = 90º
e) n.d.a.

20) (ITA-91) Se $a \in \Re$ com a > 0 e arc sen $\frac{a-1}{a+1}$ está no primeiro quadrante, então o valor de tg [arc sen $\frac{a-1}{a+1}$ + arc tg $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ ] é:
a) $\frac{a+1}{2\sqrt{a}}$ b) $\frac{a\sqrt{a}}{3a+1}$ c) $\frac{2a\sqrt{a}}{3a+1}$ d) $\frac{2a}{3a+1}$ e) n.d.a.

21) (ITA-91) Sejam a e b constantes reais positivas. Para que a equação $\cos^3x + (a - 1)\cos^2x - (a + b)\cos x + b = 0$ tenhas duas raízes reais distintas no intervalo [0 , $\frac{\pi}{2}$] devemos ter:
a) $0 < b \leq a - 1$ b) $0 < b < a + 1$ c) $a < b < a + 2$
d) $a + 1 < b \leq a + 2$ e) n.d.a.

22) (ITA-91) Considere a região ao plano cartesiano xy definido pela desigualdade: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 \leq 0$. Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos em torno da reta y + x + 1 = 0, ela irá gerar um sólido cujo volume é igual a:
a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{4\pi}{9}$ e) n.d.a.

23) (ITA-91) As arestas da base de uma pirâmide triangular regular medem $\ell$ cm e as faces laterais são triângulos retângulos. O volume desta pirâmide é:
a) $\frac{\sqrt{3}}{6}\ell^3 cm^3$ b) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ell^3 cm^3$ c) $\frac{\sqrt{3}}{24}\ell^3 cm^3$
d) $\frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3 cm^3$ e) n.d.a.

24) (ITA-91) Seja r a mediatriz do segmento de reta de extremos M = (-4 , -6) e N = (8 , -2). Seja R o raio da circunferência com centro na origem e que tangencia a reta r. Então:
a) R = $\frac{\sqrt{7}}{3}$ b) R= $\frac{\sqrt{15}}{3}$ c) R= $\frac{\sqrt{10}}{3}$
d) R = $\frac{\sqrt{10}}{5}$ e) n.d.a.

25) (ITA-91) Seja C a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0$. Se P = (a , b) é o ponto em C mais próximo da origem, então:
a) a = $-\frac{3}{2}$ e $4b^2 + 24b + 15 = 0$
b) a = $-\frac{1}{2}$ e $4b^2 + 24b + 33 = 0$
c) a = $\frac{\sqrt{10}}{10} - 1$ e b = 3a
d) a = $-1 - \frac{\sqrt{10}}{10}$ e b = 3a
e) n.d.a.

## ITA - 1992

01) (ITA-92) Considere as funções $f:\Re^* \to \Re$, $g:\Re \to \Re$, e $h:\Re^* \to \Re$ definidas por: $f(x) = 3^{x + \frac{1}{x}}$ , $g(x) = x^2$, h(x) = 81/x. O conjunto dos valores de x em $\Re^*$ tais que (fog)(x) = (hof)(x), é subconjunto de:
a) [0, 3] b) [3, 7] c) [-6, 1] d) [-2, 2] e) n.d.a.

02) (ITA-92) O domínio da função: $f(x) = \log_{2x^2-3x+1}(3x^2 - 5x + 2)$ é:

a) $(-\infty, 0) \cup (0, 1/2) \cup (1, 3/2) \cup (3/2, +\infty)$
b) $(-\infty, 1/2) \cup (1, 5/2) \cup (5/2, +\infty)$
c) $(-\infty, 1/2) \cup (1/2, 2/3) \cup (1, 3/2) \cup (3/2, +\infty)$
d) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
e) n.d.a.

03) (ITA-92) Dadas as funções $f:\Re \to \Re$ e $g:\Re \to \Re$, ambas estritamente decrescentes e sobrejetoras, considere $h = f \circ g$. Então podemos afirmar que:
a) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
b) h é estritamente decrescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
c) h é estritamente crescente, mas não necessariamente inversível.
d) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente decrescente.
e) nda

04) (ITA-92) Considere o número complexo $z = a + 2i$ cujo argumento está no intervalo $(0, \pi/2)$. Sendo S o conjunto dos valores de a para os quais $z^6$ é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de S vale:
a) 4 b) $4/\sqrt{3}$ c) 8 d) $8/\sqrt{3}$ e) n.d.a.

05) (ITA-92) Sabe-se que $2(\cos \pi/20 + i \operatorname{sen} \pi/20)$ é uma raiz quíntupla de w. Seja S o conjunto de todas as raízes de $z^4 - 2z^2 + \dfrac{w - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 0$. Um subconjunto de S é:
a) $\{2^{1/2}(\cos 7\pi/8 + i \operatorname{sen} 7\pi/8), 2^{1/2}(\cos \pi/8 + i \operatorname{sen} \pi/8)\}$
b) $\{2^{1/2}(\cos 9\pi/8 + i \operatorname{sen} 9\pi/8), 2^{1/2}(\cos 5\pi/8 + i \operatorname{sen} 5\pi/8)\}$
c) $\{2^{1/4}(\cos 7\pi/8 + i \operatorname{sen} 7\pi/4), 2^{1/4}(\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)\}$
d) $\{2^{1/4}(\cos 7\pi/8 + i \operatorname{sen} 7\pi/8), 2^{1/4}(\cos \pi/8 + i \operatorname{sen} \pi/4)\}$
e) n.d.a.

06) (ITA-92) Considere a equação:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ G(x) & 2x & F(x) \\ [G(x)]^2 & 4x^2 & [F(x)]^2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{onde:}$$

$F(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - x + 1}{x^2}$ e $G(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, com $x \in R$, $x \neq 0$.
Sobre as raízes reais dessa equação, temos:
a) Duas delas são negativas.
b) Uma delas é um número irracional.
c) Uma delas é um número par.
d) Uma delas é positiva e outra negativa.
e) n.d.a.

07) (ITA-92) Sejam a e b constante reais. Sobre a equação: $x^4 - (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 - (a + b)x + 1 = 0$ podemos afirmar que:
a) Não possui raiz real se $a < b < -3$.
b) Não possui raiz real se $a > b > 3$.
c) Todas as raízes são reais se $|a| \geq 2$ e $|b| \geq 2$.
d) Possui pelo menos uma raiz real se $-1 < a \leq b < 1$.
e) n.d.a.

08) (ITA-92) Numa progressão geométrica de razão inteira $q > 1$. Sabe-se que $a_1 a_n = 243$, $\log_q P_n = 20$ e $\log_q a_n = 6$, onde $a_n$ é o enésimo termo da progressão geométrica e $P_n$ é o produto dos n primeiros termos. Então a soma dos n primeiros termos é igual a:
a) $\dfrac{3^9 - 1}{6}$ b) $\dfrac{3^{10} - 1}{6}$ c) $\dfrac{3^8 - 1}{6}$ d) $\dfrac{3^9 - 1}{3}$ e) n.d.a.

09) (ITA-92) Sejam a, b, c, d números reais não nulos que estão nesta ordem em progressão aritmética. Sabendo que o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 4.2^a.x + 2^c.y = \dfrac{2}{3}.2^b \\ 3^d.x + 9.3^b.y = 81 \end{cases}$$

é possível e indeterminado, podemos afirmar que a soma desta progressão aritmética é:
a) 13 b) 16 c) 28 d) 30 e) n.d.a.

10) (ITA-92) Seja $A \in M_{3x3}$ tal que $\det A = 0$. Considere as afirmações:
I- Existe $X \in M_{3x1}$ não nula tal que AX é identicamente nula.
II- Para todo $Y \in M_{3x1}$, existe $X \in M_{3x1}$ tal que $AX = Y$.
III- Sabendo que $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ então a primeira linha da transposta de A é $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
Temos que:
a) Todas são falsas.
b) Apenas II é falsa.
c) Todas são verdadeiras.
d) Apenas I e II são verdadeiras.
e) n.d.a.

11) (ITA-92) Seja $C = \{ X \in M_{2x2};\ X^2 + 2X = 0\}$. Dadas as afirmações:
I- Para todo $X \in C$, $(X + 2I)$ é inversível.
II- Se $X \in C$ e $\det(X + 2I) \neq 0$ então X não é inversível.
III- Se $X \in C$ e $\det X \neq 0$ então $\det X > 0$.
Podemos dizer que:
a) Todas são verdadeiras. b) Todas são falsas.
c) Apenas II e III são verdadeiras. d) Apenas I é verdadeira.
e) n.d.a.

12) (ITA-92) A igualdade $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 7^n + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} 2^m = 64$ é válida para:
a) Quaisquer que sejam n e m naturais positivos.
b) Qualquer que seja n natural positivo e m = 3.
c) n = 13 e m = 6. d) n ímpar e m par.
e) n.d.a.

13) (ITA-92) No desenvolvimento $(x + y)^6$, ordenado segundo as potências decrescentes de x, a soma do 2º termo com 1/10 do termo de maior coeficiente é igual a oito vezes a soma de todos os coeficientes. Se $x = (2)^{z+1}$ e $y = (1/4)^{z-1/2}$, então:
a) $z \in [0, 1]$ b) $z \in (20, 50)$ c) $z \in (-\infty, 0]$
d) $z \in [1, 15]$ e) n.d.a.

14) (ITA-92) Seja $\alpha = \dfrac{1}{2}\dfrac{\log 2}{\log 2 - \log 3}$. O conjunto solução da desigualdade $2^{\operatorname{sen} x} \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\alpha}$ no intervalo $[0, 2\pi)$ é:

a) $]0, \pi/3] \cup [2\pi/3, 2\pi)$ b) $[0, 7\pi/6] \cup [11\pi/6, 2\pi)$
c) $[0, 4\pi/3] \cup [5\pi/3, 2\pi)$ d) $[0, \pi/6] \cup [5\pi/6, 2\pi)$
e) n.d.a.

15) (ITA-92) Sabendo-se que x e y são ângulos do primeiro quadrante tais que cos x = 5/6 e cos y = 4/5, então se $\alpha = x - y$ e $T = \sqrt{\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + sen^2\,\alpha}$, temos que:
a) $\alpha$ está no 4º quadrante e T = 2/3.
b) $\alpha$ está no 1º quadrante e T = 2/3.
c) $\alpha$ está no 1º quadrante e $T = 2/3 + \sqrt{11}/10$.
d) $\alpha$ está no 4º quadrante e $T = 2/3 - \sqrt{11}/10$.
e) n.d.a.

16) (ITA-92) Num triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, temos $\hat{B} = 60^o$. As bissetrizes destes ângulos se encontram num ponto D. Se o segmento de reta BD mede 1 cm, então a hipotenusa mede:
a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ cm b) $1+\sqrt{3}$ cm c) $2+\sqrt{3}$ cm
d) $1 + 2\sqrt{2}$ cm e) n.d.a.

17) (ITA-92) A equação da reta bissetriz do ângulo agudo que a reta y = mx, m > 0, forma com o eixo dos x é:
a) $y = \frac{1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$ b) $y = \frac{1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$
c) $y = \frac{-1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$ d) $y = \frac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$
e) n.d.a.

18) (ITA-92) A razão entre as áreas de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência e de um hexágono regular, cuja apótema mede 10 cm, circunscrito a esta mesma circunferência é:
a) ½ b) 1 c) 1/3 d) 3/8 e) n.d.a.

19) (ITA-92) Considere o triângulo PQR ao lado, circunscrito a uma circunferência de centro O, cujos pontos de tangência são A, B e C. Sabe-se que os ângulos $\hat{P}, \hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética de razão 20º. Os ângulos 1, 2, 3, 4 conforme mostrado na figura abaixo medem, nesta ordem:
a) 40º, 120º, 60º e 50º.
b) 40º, 100º, 50º e 40º.
c) 60º, 140º, 60º e 40º.
d) 60º, 120º, 40º e 50º.
e) n.d.a.

20) (ITA-92) Num cone de revolução, o perímetro da seção meridiana mede 18 cm e o ângulo do setor circular mede 288º. Considerando-se o tronco de cone cuja razão entre as áreas das bases é 4/9, então sua área total mede:
a) $16\pi$ cm² b) $\frac{308\pi}{9}$ cm² c) $\frac{160\pi}{3}$ cm²
d) $\frac{100\pi}{9}$ cm² e) n.d.a.

21) (ITA-92) Uma seção plana que contém o eixo de um tronco de cilindro é um trapézio cujas bases menor e maior medem, respectivamente, h cm e H cm. Duplicando-se a base menor, o volume sofre um acréscimo de 1/3 em relação ao seu volume original. Deste modo:
a) 2H = 3h b) H = 2h c) H = 3h
d) 2H = 5h e) n.d.a.

22) (ITA-92) Um cone de revolução está circunscrito a uma esfera de raio R cm. Se a altura do cone for igual ao dobro do raio da base, então a área de sua superfície lateral mede:
a) $\pi(1+\sqrt{5})^2R^2/4$ cm². b) $\pi\sqrt{5}(1+\sqrt{5})^2R^2/4$ cm².
c) $\pi\sqrt{5}(1+\sqrt{5})R^2/4$ cm². d) $\pi\sqrt{5}(1+\sqrt{5})^2R^2$ cm².
e) n.d.a.

23)(ITA-92) Seja C a circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$. Considere em C a corda AB cujo ponto médio é: M: (2, 2). O comprimento de AB( em unidade de comprimento) é igual a:
a) $2\sqrt{6}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $2\sqrt{3}$ e) n.d.a.

24) (ITA-92) Dados os pontos A: (0, 8), B: (-4, 0) e C: (4, 0), sejam r e s as retas tais que A, B $\in$ r, B, C $\in$ S. Considere $P_1$ e $P_2$ os pés das retas perpendiculares traçadas de P: (5, 3) às retas r e s, respectivamente. Então a equação da reta que passa por $P_1$ e $P_2$ é:
a) y + x = 5 b) y + 2x = 5 c) 3y - x = 5
d) y + x = 2 e) n.d.a.

25) (ITA-92) Considere as afirmações:
I- Uma elipse tem como focos os pontos $F_1$: (-2, 0), $F_2$: (2, 0) e o eixo maior 12. Sua equação é $x^2/36 + y^2/32 = 1$.
II- Os focos de uma hipérbole são $F_1$: $(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2$: $(\sqrt{5}, 0)$ e sua excentricidade $\sqrt{10}/2$. Sua Equação é $3x^2 - 2y^2 = 6$.
III- A parábola $2y = x^2 - 10x - 100$ tem como vértice o ponto P: (5, 125/2).
Então:
a) Todas as afirmações são falsas.
b) Apenas as afirmações II e III são falsas.
c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
d) Apenas a afirmação III é verdadeira.
e) n.d.a.

## ITA - 1993

01. (ITA-93) Seja a o módulo de número complexo $(2-2\sqrt{3}\,i)^{10}$. Então o valor de x que verifica a igualdade $(4a)^x = a$ é:
a) $\frac{10}{11}$ b) –2 c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{1}{5}$

02. (ITA-93) Resolvendo a equação $z^2 = \overline{2+z}$ no conjunto dos números complexos, conclui-se sobre as suas soluções que:
a) Nenhuma delas é um número inteiro.
b) A soma delas é 2.
c) Estas são em número de 2 e são distintas.
d) Estas são em número de 4 e são 2 a 2 distintas.
e) Uma delas é da forma z = bi com b real não nulo.

**Provas ITA**

**Nota**: por $\bar{a}$ denotamos o conjugado do número complexo a.

03. (ITA-93) O conjunto solução da inequação **$\log_x[(1 - x)x] < \log_x[(1 + x)x^2]$** é dado por:

a) $1 < x < 3/2$  b) $0 < x < 1$  c) $0 < x < \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

d) $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$  e) $0 < x < \sqrt{2} - 1$

04. (ITA-93) A diagonal menor de um paralelogramo divide um dos ângulos internos em dois outros, um $\alpha$ e o outro $2\alpha$. A razão entre o lado menor e o maior do paralelogramo, é:

a) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$  b) $\frac{1}{\text{sen}\, 2\alpha}$  c) $\frac{1}{2\,\text{sen}\,\alpha}$

d) $\frac{1}{2\cos\alpha}$  e) $tg\alpha$

05. (ITA-93) O conjunto das soluções da equação sen 5x = cos 3x contém o seguinte conjunto:
a) $\{\pi/16 + k\pi/5,\ k \in Z\}$  b) $\{\pi/16 + k\pi/3,\ k \in Z\}$
c) $\{\pi/4 + k\pi/3,\ k \in Z\}$  d) $\{\pi/4 + k\pi/2,\ k \in Z\}$
e) $\{\pi/4 + 2k\pi,\ k \in Z\}$

06. (ITA-93) Num triângulo ABC retângulo em A, seja a projeção D a projeção de A sobre CB. Sabendo-se que o segmento BC mede $\ell$ cm e que o ângulo $D\hat{A}C$ mede $\theta$ graus, então a área do triângulo ABC vale:

a) $\frac{\ell^2}{2}(\sec\theta)(\text{tg}\,\theta)$  b) $\frac{\ell^2}{2}(\sec^2\theta)(\text{tg}\,\theta)$

c) $\frac{\ell^2}{2}(\sec\theta)(\text{tg}^2\,\theta)$  d) $\frac{\ell^2}{2}(\text{cossec}\,\theta)(\text{cotg}\,\theta)$

e) $\frac{\ell^2}{2}(\text{cossec}^2\,\theta)(\text{cotg}\,\theta)$

07. (ITA-93) Seja $f:\Re\to\Re$ uma função não nula, ímpar e periódica de período p. Considere as seguintes informações:
I . $f(p) \neq 0$
II . $f(-x) = -f(x-p),\ \forall x\in\Re$
III . $f(-x) = f(x-p),\ \forall x\in\Re$
IV . $f(x) = -f(-x),\ \forall x\in\Re$
Podemos concluir que:
a) I e II são falsas  d) I e IV são falsas
b) I e III são falsas  e) II e IV são falsas
c) II e III são falsas

08. (ITA-93) Analisando o sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = -1 \end{cases}$

concluímos que este é:
a) Possível e determinado com xyz = 7.
b) Possível e determinado com xyz = -8.
c) Possível e determinado com xyz = 6.
d) Possível e indeterminado.
e) Impossível.

09. (ITA-93) Dadas as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 2 & x & 0 \\ y & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e

$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & y \\ 0 & 8 & 2 \\ x & 3 & x-2 \end{bmatrix}$. Analise as afirmações:

I . A = B $\leftrightarrow$ x = 3 e y = 0

II . A + B = $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 16 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ $\leftrightarrow$ x = 2 e y = 1

III . A $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\leftrightarrow$ x = 1

e conclua:
a) Apenas a afirmação II é verdadeira.
b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
c) As afirmações I e II são verdadeiras.
d) Todas as afirmações são falsas.
e) Apenas a afirmação I é falsa.

10. (ITA-93) Seja A a matriz 3x3 dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Sabendo-se que B é a inversa de A, então a soma dos elementos de B vale:
a) 1  b) 2  c) 5  d) 0  e) -2

11. (ITA-93) Sabendo-se que a soma das raízes da equação $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & b & x & x \\ b & x & 2 & b \end{vmatrix} = 0$ é -8/3 e que S é o conjunto destas raízes, podemos afirmar que:
a) $S \subset [-17, -1]$  b) $S \subset [1, 5]$
c) $S \subset [-1, 3]$  d) $S \subset [-10, 0]$
e) $S \subset [0, 3]$

12. (ITA-93) Um acidente de carro foi presenciado por 1/65 da população de Votuporanga (SP). O número de pessoas que soube do acontecimento t horas após é dado por: $f(t) = \frac{B}{1 + Ce^{-kt}}$ onde B é a população da cidade. Sabendo-se que 1/9 da população soube do acidente 3 horas após, então o tempo passou até que 1/5 da população soubesse da notícia foi de:
a) 4 horas.  b) 5 horas.  c) 6 horas.
d) 5 horas e 24 min.  e) 5 horas e 30 min.

13. (ITA-93) Numa progressão aritmética com 2n +1 termos, a soma dos n primeiros é igual a 50 e a soma dos n últimos é 140. Sabendo-se que a razão desta progressão é um inteiro entre 2 e 13, então seu último termo será igual a:
a) 34  b) 40  c) 42  d) 48  e) 56

14. (ITA-93) A soma dos 5 primeiros termos de uma progressão aritmética de razão r é 50 e a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão q é 12. Se ambas as progressões tiverem o mesmo termo inicial menor do que 10 e sabendo-se que $q = r^2$, podemos afirmar que a soma dos 4 primeiros termos da progressão geométrica será:

a) 623/11 b) 129/32 c) 35/2 d) 765/64 e) 13

15. (ITA-93) Possuo 3 vasos idênticos e desejo ornamentá-los com 18 rosas, sendo 10 vermelhas e 8 amarelas. Desejo que um dos vasos tenha 7 rosas e os outros dois no mínimo 5. Cada um deverá ter 2 rosas vermelhas e 1 amarela, pelo menos. Quantos arranjos distintos poderei fazer usando as 18 rosas?
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

16. (ITA-93) Analise as afirmações classificando-as em verdadeiras ou falsas:
I- O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que cada pessoa premiada receba no máximo um prêmio é 21.
II- O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que 4 apenas sejam premiadas é 140.
III- Para todo natural n, n $\geq$ 5 $\binom{n}{5} = \binom{n}{n-5}$.
Você concluiu que:
a) Apenas I é verdadeira. b) Apenas II e III são verdadeiras
c) Apenas III é verdadeira. d) Todas são verdadeiras.
e) Todas são falsas.

17. (ITA-93) Sabendo-se que a equação de coeficientes reais, $x^6 - (a + b + c)x^5 + 6x^4 + (a - 2b)x^3 - 3cx^2 + 6x - 1 = 0$ é uma equação recíproca de segunda classe, então o número de raízes reais desta equação é:
a) 0 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

18. (ITA-93) Considere a equação de coeficiente reais $x^5 + mx^4 + 2px^3/m - 316x^2 + 688x + p = 0$, $m \neq 0$ para a qual $1 + 3i$ é raiz. Sabendo-se que a equação admite mais de uma raiz real e que suas raízes reais formam uma progressão geométrica de razão inteira q cujo produto é igual a 64, podemos afirmar que p/m é igual a
a) 20 b) 30 c) 40 d) 120 e) 160

19. (ITA-93) Calculando-se a área da região limitada por $y \leq \frac{3}{2}(x+2)$ e $x^2 + (y-3)^2 \leq 13$, obtém-se:
a) $2\sqrt{13}\,\pi$ b) $13\pi$ c) $13\pi/2$
d) $3\sqrt{13}\,\pi/2$ e) $\sqrt{13}\,\pi$

20. (ITA-93) Dadas as retas $(r_1)$: $x + 2y - 5 = 0$, $(r_2)$: $x - y - 2 = 0$ e $r_3)$: $x - 2y - 1 = 0$, podemos afirmar que:
a) São 2 a 2 paralelas.
b) $(r_1)$ e $(r_3)$ são paralelas.
c) $(r_1)$ é perpendicular a $(r_3)$.
d) $(r_2)$ é perpendicular a $(r_3)$.
e) As três são concorrentes num mesmo ponto.

21. (ITA-93) Sendo (r) uma reta dada pela equação $x - 2y + 2 = 0$, então, a equação da reta (s) simétrica à reta (r) em relação ao eixo das abcissas é descrita por:
a) $x + 2y = 0$ b) $3x - y + 3 = 0$
c) $2x + 3y + 1 = 0$ d) $x + 2y + 2 = 0$
e) $x - 2y - 2 = 0$

22. (ITA-93) Uma das circunferências que passa pelo ponto P: (0, 0) e tangencia as retas $(r_1)$: $x - y = 0$ e $(r_2)$: $x + y - 2 = 0$ tem sua equação dada por:
a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{2}$ b) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$
c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ d) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}$
e) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

23. (ITA-93) A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 m e de área da base 64 $m^2$ vale:
a) 128 $m^2$ b) $64\sqrt{2}$ $m^2$ c) 135 $m^2$
d) $60\sqrt{5}$ $m^2$ e) $32(\sqrt{2}+1)$ $m^2$

24. (ITA-93) São dados dois cubos I e II de áreas totais $S_1$ e $S_2$ e de diagonais $d_1$ e $d_2$, respectivamente. Sabendo-se que $S_1 - S_2 = 54$ $m^2$ e que $d_2 = 3$ m, então o valor da razão $d_1/d_2$ é:
a) 3/2 b) 5/2 c) 2 d) 7/3 e) 3

25. (ITA-93) Sabendo-se que um cone circular reto tem 3 dm de raio e $15\pi$ $dm^2$ de área lateral, o valor de seu volume em $dm^3$ é:
a) $9\pi$ b) $15\pi$ c) $36\pi$ d) $20\pi$ e) $12\pi$

## ITA - 1994

01) (ITA-94) Sejam x e y números reais, com $x \neq 0$, satisfazendo
$(x + iy)^2 = (x + y)i$, então:
a) x e y são números irracionais.
b) $x > 0$ e $y < 0$.
c) x é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$
d) $x < 0$ e $y = z$.
e) $x^2 + xy + y^2 = 1/2$

02) (ITA-94) Considere as afirmações:
I- $(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)^{10} = \cos(10\theta) + i.\text{sen}(10\theta)$, para todo $\theta \in$ R.
II- $(5i)/(2 + i) = 1 + 2i$
III- $(1 - i)^4 = -4$
IV- Se $x^2 = (\bar{z})^2$ então z é real ou imaginário puro.
V- O polinômio $x^4 + x^3 - x - 1$ possui apenas raízes reais.
Podemos concluir:
a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas quatro são verdadeiras.
c) Apenas três são verdadeiras.
d) Apenas duas são verdadeiras.
e) Apenas uma é verdadeira.

03) (ITA-94) Dadas as funções reais de variável real $f(x) = mx + 1$ e $g(x) = x + m$, onde m é uma constante real com $0 < m < 1$, considere as afirmações:
I- $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x)$, para algum $x \in$ R.
II- $f(m) = g(m)$
III- Existe $a \in$ R tal que $(f\circ g)(a) = f(a)$.
IV- Existe $b \in$ R tal que $(f\circ g)(b) = mb$.
V- $0 < (g\circ g)(m) < 3$
Podemos concluir
a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas quatro são verdadeiras.
c) Apenas três são verdadeiras.

d) Apenas duas são verdadeiras.
e) Apenas uma é verdadeira.

04) (ITA-94) A identidade: $\frac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ é válida para todo real $x \neq -1$. Então $a + b + c$ é igual a:
a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

05) (ITA-94) As raízes da equação de coeficientes reais $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a:
a) 190 b) 191 c) 192 d) 193 e) 194

06) (ITA-94) Seja P(x) um polinômio de grau 5, com coeficientes reais, admitindo 2 e i como raízes. Se P(1)P(-1) < 0, então o número de raízes reais de P(x) pertencentes ao intervalo ]-1, 1[ é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

07) (ITA-94) Quantas anagramas com 6 caracteres distintos podemos formar usando as letras da palavra QUEIMADO, anagramas estes que contenham duas consoantes e que, entre as consoantes, haja pelo menos uma vogal?
a) 7200 b) 7000 c) 4800
d) 3600 e) 2400

08) (ITA-94) No desenvolvimento de $A = (\frac{3a^2}{2} + \frac{2m}{3})^{10}$, a razão entre a parcela contendo o fator $a^{16}m^2$ e a parcela contendo o fator $a^{14}m^3$ é igual a 9/16. Se a e m são números reais positivos tais que $A = (m^2+4)^5$ então:
a) a .m = 2/3 b) a .m = 1/3
c) a + m = 5/2 d) a + m = 5
e) a - m = 5/2

09) (ITA-94) Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma progressão geométrica com um número ímpar de termos e razão q > 0. O produto de seus termos é igual a $2^{25}$ e o termo do meio é $2^5$. Se a soma dos (n - 1) primeiros termos é igual a $2(1 + q)(1 + q^2)$, então:
a) $a_1 + q = 16$ b) $a_1 + q = 12$ c) $a_1 + q = 10$
d) $a_1 + q + n = 20$ e) $a_1 + q + n = 11$

10) (ITA-94) Sejam A e I matrizes reais quadradas de ordem 2, sendo I a matriz identidade. Por T denotamos o traço de A, ou seja T é a soma dos elementos da diagonal principal de A. Se $T \neq 0$ e $\lambda_1$, $\lambda_2$ são raízes da equação:
det(A - $\lambda$I) = det(A) - det($\lambda$I), então:
a) $\lambda_1$ e $\lambda_2$ independem de T. b) $\lambda_1 . \lambda_2 = T$ c) $\lambda_1 . \lambda_2 = 1$
d) $\lambda_1 + \lambda_2 = T/2$ e) $\lambda_1 + \lambda_2 = T$

11) (ITA-94) Sejam A e P matrizes reais quadradas de ordem n tais que A é simétrica(isto é, $A = A^t$) e P é ortogonal(isto é, $PP^t = I = P^tP$), P diferente da matriz identidade. Se $B = P^tAP$ então:
a) AB é simétrica. b) BA é simétrica. c) det A = det B
d) BA = AB e) B é orgonal.

12) (ITA-94) Seja a uma matriz real quadrada de ordem n e B = I - A, onde I denota a matriz identidade de ordem n. supondo que A é inversível e idempotente(isto é, $A^2 = A$) considere as afirmações:
I- B é idempotente.
II- AB = BA
III- B é inversível.
IV- $A^2 + B^2 = I$
V- AB é simétrica.
Com respeito a estas afirmações temos:
a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas uma é verdadeira.
c) Apenas duas são verdadeiras.
d) Apenas três são verdadeiras.
e) Apenas quatro são verdadeiras.

13) (ITA-94) Sejam x e y números reais, positivos e ambos diferentes de 1, satisfazendo o sistema:
$$\begin{cases} x^y = \frac{1}{y^2} \\ \log x + \log y = \log \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$
. Então o conjunto (x, y) está contido no intervalo:
a) [2, 5] b) ]0, 4[ c) [-1, 2]
d) [4, 8[ e) [5, $\infty$ [

14) (ITA-94) A expressão trigonométrica
$$\frac{1}{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)} - \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}$$
Para $x \in$ ]0, x/2[ , $x \neq \pi/4$, é igual a:
a) sen(2x) b) cos(2x) c) 1 d) 0 e) sec(2x)

15) (ITA-94) Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e A, B e C os ângulos internos opostos, respectivamente, a cada um destes lados. Sabe-se que a, b, c, neta ordem, formam uma progressão aritmética. Se o perímetro do triângulo mede 15 cm e
$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{77}{240}$$
Então sua área, em $cm^2$, mede:
a) $(15\sqrt{7})/4$ b) $(4\sqrt{5})/3$ c) $(4\sqrt{5})/5$
d) $(4\sqrt{7})/7$ e) $(3\sqrt{5})/4$

16) (ITA-94) Seja (a, b, c, d, e) uma progressão geométrica de razão a, com $a \neq 0$ e $a \neq 1$. Se a soma de seus termos é igual a (13a + 12) e x é um número real positivo diferente de 1 tal que:
$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} + \frac{1}{\log_d x} + \frac{1}{\log_e x} = \frac{5}{2}$$
então x é igual a:
a) $3^3$ b) $2^3$ c) $(5/2)^2$ d) $(5/2)^{3/2}$ e) $(2/5)^2$

17) (ITA-94) O sistema indicado abaixo, nas incógnitas x, y e z,
$$\begin{cases} 3^a x - 9^a y + 3z = 2^a \\ 3^{a+1} x - 5^a y + 9z = 2^{a+1} \\ x + 3^{a-1} y - 3^{a+1} z = 1 \end{cases}$$
É possível e determinado quando o número a é diferente de:
a) $\log_3 2$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 5)$. b) $\log_2 3$ e $\frac{1}{2}(\log_2 5)$.

c) $\log_2 1$ e $\frac{1}{2}(\log_2 3)$. d) $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 1)$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 3)$.

e) $\log_3 1$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_3 5)$.

18) (ITA-94) Numa circunferência inscreve-se um quadrilátero convexo ABCD tal que $A\hat{B}C = 70^o$. Se $x = A\hat{C}B + B\hat{D}C$, então:
a) $x = 120^o$ b) $x = 110^o$ c) $x = 100^o$
d) $x = 90^o$ e) $x = 80^o$

19) (ITA-94) Um triângulo ABC, retângulo em A, possui área S. Se $x = A\hat{B}C$ e r é o raio da circunferência circunscrita a este triângulo, então:
a) $S = r^2\cos(2x)$ b) $S = 2r^2 sen(2x)$
c) $S = \frac{1}{2}r^2 sen(2x)$ d) $S = \frac{1}{2}r^2\cos^2 x$ e) $S = \frac{1}{2}r^2 sen^2 x$

20) (ITA-94) Duas retas r e s são dadas, respectivamente, pelas equações $3x - 4y = 3$ e $2x + y = 2$. Um ponto P pertencente à reta s tem abcissa positiva e dista 22 unidades de medida da reta r. Se $ax + by + c = 0$ é a equação da reta que contém P e é paralela a r, então a + b + c é igual a :
a) –132 b) –126 c) –118 d) –114 e) -112

21) (ITA-94) Um triângulo equilátero é tal que A: (0, 3), B: $(3\sqrt{3}, 0)$ e a abcissa do ponto C é maior que 2. A circunferência circunscrita a este triângulo tem raio r e centro em O: (a, b). Então $a^2 + b^2 + r^2$ é igual a:
a) 31 b) 32 c) 33 d) 34 e) 35

22)(ITA-94) Um prisma regular hexagonal tem como altura o dobro da aresta da base. A razão entre o volume deste prisma e o volume do cone reto, nele inscrito, é igual a:
a) $(6\sqrt{2})/\pi$ b) $(9\sqrt{2})/\pi$ c) $(3\sqrt{6})/\pi$
d) $(6\sqrt{3})/\pi$ e) $(9\sqrt{3})/\pi$

23) (ITA-94) Um tetraedro regular tem área total igual a $6\sqrt{3}$ cm$^2$. Então sua altura, em cm, é igual a:
a) 2 b) 3 c) $2\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

24) (ITA-94) Num cilindro circular reto sabe-se que a altura h e o raio da base r são tais que os números $\pi$, h, r formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de soma $6\pi$. O valor da área total deste cilindro é:
a) $\pi^3$ b) $2\pi^3$ c) $15\pi^3$ d) $20\pi^3$ e) $30\pi^3$

25) (ITA-94) Um tronco de pirâmide regular tem como bases triângulos equiláteros, cujos lados medem, respectivamente, 2 cm e 4 cm. Se a aresta lateral do tronco mede 3 cm, então o valor de sua altura h, em cm, é tal que:
a) $\sqrt{7} < h < \sqrt{8}$ b) $\sqrt{6} < h < \sqrt{7}$ c) $2\sqrt{3} < h < 3\sqrt{3}$
d) $1 < h < \sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2} < h < 3\sqrt{2}$

## ITA - 1995

01) (ITA-95) Seja A = $\left\{\frac{(-1)^n}{n!} + sen\frac{n!\,\pi}{6}; n \in \aleph\right\}$
Qual conjunto abaixo é tal que sua intersecção com A dá o próprio A?
a) $(-\infty, -2) \cup [2, \infty)$ b) $(-\infty, -2)$ c) $[-2, 2]$
d) $[-2, 0]$ e) $[0, 2]$

02) (ITA-95) Seja a função f: $\Re \to \Re$ definida por:
$$f(x) = \begin{cases} a(x + \pi/2) & se, x < \pi/2 \\ (\pi/2) - (a/x)senx & se, x \geq \pi/2 \end{cases}$$
onde a > 0 é uma constante. Considere K = {y $\in$ R; $f(y) = 0$}. Qual o valor de a, sabendo-se que $f(\pi/2) \in K$?
a) $\pi^2/4$ b) $\pi/2$ c) $\pi$ d) $\pi^2/2$ e) $\pi^2$

03) (ITA-95) Uma vez, para todo $x \geq 1$ e $n \in N$, vale a desigualdade $x^n > n(x - 1)$. Temos como conseqüência que, para $0 < x < 1$ e $n \in N$, tem-se:
a) $x^{n-1} < [n(1 + x)]^{-1}$ b) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 + x)]^{-1}$
c) $x^{n-1} < [n^2(1 - x)]^{-1}$ d) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 - x)]^{-1}$
e) $x^{n-1} < [n(1 - x)]^{-1}$

04) (ITA-95) Considere todos os números de cinco algarismos formados pela justaposição de 1, 3, 5, 7 e 9 em qualquer ordem, sem repetição. A soma de todos esses números está entre:
a) $5.10^6$ e $6.10^6$. b) $6.10^6$ e $7.10^6$. c) $7.10^6$ e $8.10^6$.
d) $9.10^6$ e $10.10^6$. e) $10.10^6$ e $11.10^6$.

05) (ITA-95) Para cada $n \in N$, temos que:
$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \dots - \binom{4n}{4n-2} + 1$ é igual a:
a) $(-1)^n 2^{2n}$. b) $2^{2n}$. c) $(-1)^n 2^n$.
d) $(-1)^{n+1} 2^{2n}$. e) $(-1)^{n+1} 2^n$.

06) (ITA-95) Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por 0,3 : 0,03 : 0,003 : ... é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale:
a) 1/3 b) 2/3 c) 1 d) 2 e) 1/2

07) (ITA-95) Os dados experimentais da tabela abaixo correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração (em moles) após 2,5 segundo é:

| Tempo(s) | Concentração(moles) |
|---|---|
| 1 | 3,00 |
| 2 | 5,00 |
| 3 | 1,00 |

a) 3,60 b) 3,65 c) 3,70 d) 3,75 e) 3,80

08) (ITA-95) A divisão de um polinômio P(x) por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de P(x) por $2x + 1$ é igual a:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

09) (ITA-95) Sabendo que $4 + i\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são raízes do polinômio $2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540$, então a soma dos quadrados de todas as raízes reais é:

a) 17 b) 19 c) 21 d) 23 e) 25

10) (ITA-95) Seja z um número complexo satisfazendo $Re(z) > 0$ e $(z + i)^2 + |\bar{z} + i|^2 = 6$. Se n é o menor natural para o qual $z^n$ é um número imaginário puro, então n é igual a:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

11) (ITA-95) Sejam $z_1$ e $z_2$ números complexos com $|z_1| = |z_2| = 4$. Se 1 é uma raiz da equação $z_1 z^6 + z_2 z^3 - 8 = 0$ então a soma das raízes reais é igual a:
a) $-1$ b) $-1 + 2^{1/2}$ c) $1 - 2^{1/3}$
d) $1 + 3^{1/2}$ e) $-1 + 3^{1/2}$

12) (ITA-95) Se S é o conjunto dos valores de a para os quais o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + (\log_3 a)^2 . y + z = 0 \\ 2x + 2y + (\log_3 \frac{27}{a}) z = 0 \end{cases}$$

em que há indeterminação, então:
a) $S \subset [-3, 3]$. b) S é vazio. c) $S \subset [2, 4]$.
d) $S \subset [1, 3]$. e) $S \subset [0, 1]$.

13) (ITA-95) Se x é um número real positivo com $x \neq 1$ e $x \neq 1/3$, satisfazendo $\frac{2 + \log_3 x}{\log_{(x+2)} x} - \frac{\log_x (x+2)}{1 + \log_3 x} = \log_x (x+2)$ então x pertence ao intervalo I, onde:
a) I = (0, 1/9) b) I = (0, 1/3) c) I = (1/2, 1)
d) I = (1, 3/2) e) I = (3/2, 2)

14) (ITA-95) Dizemos que duas matrizes **nxn** A e B são semelhantes se existe uma matriz **nxn** inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Se A e B são matrizes semelhantes quaisquer, então:
a) B é sempre inversível.
b) Se A é simétrica, então B também é simétrica.
c) $B^2$ é semelhante a A.
d) Se C é semelhante a A, então BC é semelhante a $A^2$.
e) $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$, onde $\lambda$ é um real qualquer.

15) (ITA-95) Sejam A e B matrizes reais 3x3. Se tr(A) denota a soma dos elementos da diagonal principal de A, considere as afirmações:
I- $tr(A^t) = tr(A)$
II- Se A é inversível, então $tr(A) \neq 0$.
III- $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$, para todo $\lambda \in R$.
Temos que:
a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Todas as afirmações são falsas.
c) Apenas a afirmação I é verdadeira.
d) Apenas a afirmação II é falsa.
e) Apenas a afirmação III é falsa.

16) (ITA-95) Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:
a) (-b, -b) b) (-2b, -b) c) (4b, -2b)
d) (3b, -2b) e) (-2b, -2b)

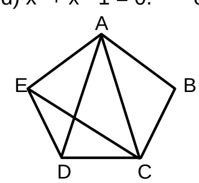
17) (ITA-95) Uma reta t do plano cartesiano xOy tem coeficiente angular 2a e tangência a parábola $y = x^2 - 1$ no ponto de coordenadas (a, b). Se (c, 0) e (0, d) são as coordenadas de dois pontos de t tais que c > 0 e c = -2d, então a/b é igual a :
a) -4/15 b) -5/16 c) -3/16 d) -6/15 e) -7/15

18) (ITA-95) Considere C uma circunferência centrada em O e raio 2r, e t a reta tangente a C num ponto T. Considere também A um ponto de C tal que $A\hat{O}T = \theta$ é um ângulo agudo. Sendo B o ponto de t tal que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{OT}$, então a área do trapézio OABT é igual a:
a) $r^2(2 \cos \theta - \cos 2\theta)$ b) $2r^2(4 \cos \theta - \text{sen } 2\theta)$
c) $r^2(4 \text{ sen } \theta - \text{sen } 2\theta)$ d) $r^2(2 \text{ sen } \theta + \cos \theta)$
e) $2r^2(2 \text{ sen } 2\theta - \cos 2\theta)$

19) (ITA-95) A expressão $\frac{\text{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$, $0 < \theta < \pi$, idêntica a:
a) $\sec\theta/2$ b) $\text{cosec}\theta/2$ c) $\text{cotg}\theta/2$ d) $\text{tg}\theta/2$ e) $\cos\theta/2$

20) (ITA-95) Um dispositivo colocado no solo a uma distância d de uma torre dispara dois projéteis em trajetórias retilíneas. O primeiro, lançado sob um ângulo $\theta \in (0, \pi/4)$, atinge a torre a uma altura h. Se o segundo, disparado sob um ângulo $2\theta$, a atinge a uma altura H, a relação entre as duas alturas será:
a) $H = 2hd^2/(d^2 - h^2)$ b) $H = 2hd^2/(d^2 + h)$
c) $H = 2hd^2/(d^2 - h)$ d) $H = 2hd^2/(d^2 + h^2)$
e) $H = hd^2/(d^2 + h^2)$

21) (ITA-95) O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:
a) $x^2 + x - 2 = 0$. b) $x^2 - x - 2 = 0$ . c) $x^2 - 2x + 1 = 0$.
d) $x^2 + x - 1 = 0$. e) $x^2 - x - 1 = 0$.




22)(ITA-95) Um cone reto tem altura 12 cm e raio da base 5 cm. O raio da esfera inscrita neste cone mede, em cm:
a) 10/3 b) 4/4 c) 12/5 d) 3 e) 2

23) (ITA-95) O raio de um cilindro de revolução mede 1,5m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da secção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em $m^2$, vale:
a) $\frac{3\pi^2}{4}$ b) $\frac{9\pi(\pi + 2)}{4}$ c) $\pi(\pi + 2)$
d) $\frac{\pi^2}{2}$ e) $\frac{3\pi(\pi + 1)}{2}$

24) (ITA-95) Dado o prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em $cm^3$, é:
a) $27\sqrt{3}$ b) $13\sqrt{2}$ c) $12\sqrt{3}$ d) $54\sqrt{3}$ e) $17\sqrt{5}$

25) (ITA-95) Dada uma pirâmide triangular, sabe-se que sua altura mede 3a cm, onde a é a medida da aresta de sua base. Então, a área total desta pirâmide, em $cm^2$, vale:

a) $\frac{a^2\sqrt{327}}{4}$ b) $\frac{a^2\sqrt{109}}{2}$ c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{a^2\sqrt{3}(2+\sqrt{33})}{2}$ e) $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{109})}{4}$

## ITA - 1996

01) (ITA-96) Seja $a \in \Re$, $a > 0$ e $a \neq 1$ e considere a matriz A:
$A = \begin{bmatrix} \log_a 3a & \log_{10}(3a)^2 \\ \log_a 1/a & -\log_a a \\ \log_a 1 & \log_{10} 1 \end{bmatrix}$. Para que a característica de A seja máxima, o valor de a deve ser tal que:
a) $a \neq 10$ e $a \neq 1/3$ b) $a \neq \sqrt{10}$ e $a \neq 1/3$
c) $a \neq 2$ e $a \neq 10$ d) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{3}$ e) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{10}$

02) (ITA-96) Sejam A e B subconjuntos não vazios de R, e considere as seguintes afirmações:
I- $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \varnothing$
II- $(A - B^C)^C = B - A^C$
III- $[(A^C - B)\cap(B - A)]^C = A$
Sobre essas afirmações podemos garantir que:
a) Apenas a afirmação I é verdadeira.
b) Apenas a afirmação II é verdadeira.
c) Apenas a afirmação III é verdadeira.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

03) (ITA-96) Numa pirâmide triangular regular, a área da base é igual ao quadrado da altura H. Seja R o raio da esfera inscrita nesta pirâmide. Deste modo, a razão H/R é igual a:
a) $\sqrt{\sqrt{3}+1}$ b) $\sqrt{\sqrt{3}-1}$ c) $1+\sqrt{3\sqrt{3}+1}$
d) $1+\sqrt{3\sqrt{3}-1}$ e) $\sqrt{3}+1$

04) (ITA-96) Dadas as afirmações:
I- $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+.......+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} = 2^n, n \in N$
II- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. n \in N, k = 1,2,3.....,n$
III- Existem mais possibilidades de escolher 44 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50 do que escolher 6 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50. Conclui-se que:
a) Todas são verdadeiras
b) Apenas a afirmação I e II são verdadeiras.
c) Apenas I é verdadeira.
d) Apenas II é verdadeira.
e) Apenas II e III são verdadeiras.

05) (ITA-96) Considere o polinômio:
$P(z) = z^6 + 2z^5 + 6z^4 + 12z^3 + 8z^2 + 16z$
a) Apenas uma é real.
b) Apenas duas raízes são reais e distintas.
c) Apenas duas raízes são reais e iguais.
d) Quatro raízes são reais, sendo duas a duas distintas.
e) Quatro raízes são reais, sendo apenas duas iguais.

06) (ITA-96) Seja $a \in R$ $[-\pi/4, \pi/4]$ um número real dado. A solução $(x_0, y_0)$ do sistema de equações:
$\begin{cases} (\text{sen}\,a)y - (\cos a)x = -\text{tg}\,a \\ (\cos a)y + (\text{sen}\,a)x = -1 \end{cases}$ é tal que:
a) $x_0. y_0 = \text{tg } a$ b) $x_0. y_0 = - \sec a$ c) $x_0. y_0 = 0$
d) $x_0. y_0 = \text{sen}^2 a$ e) $x_0. y_0 = \text{sen } a$

07) (ITA-96) Seja $f : \Re_+^* \to \Re$ uma função injetora tal que $f(1) = 0$ e $f(x.y) = f(x) + f(y)$ pra todo $x > 0$ e $y > 0$. Se $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ e $x_5$ formam nessa ordem uma progressão geométrica, onde $x_i > 0$ para i = 1, 2, 3, 4, 5 e sabendo que
$\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 13f(2) + 2f(x_1)$ e $\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = -2f(2x_1)$,
então o valor de $x_1$ é:
a) -2 b) 2 c) 3 d) 4 e) 1

08) (ITA-96) Um hexágono regular e um quadrado estão inscritos no mesmo círculo de raio R e o hexágono possui uma aresta paralela a uma aresta do quadrado. A distância entre estas arestas paralelas será:
a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}R$ b) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}R$ c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}R$
d) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}R$ e) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}R$

09) (ITA-96) Tangenciando externamente a elipse $\varepsilon_1$, tal que $\varepsilon_1$: $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ considere uma elipse $\varepsilon_2$, de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de $\varepsilon_1$ e cujos eixos têm mesma medida que os eixos de $\varepsilon_1$. Sabendo que $\varepsilon_2$ está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de $\varepsilon_2$ é:
a) (7,3) b) (8,2) c) (8,3) d) (9,3) e) ( 9,2)

10) (ITA-96) São dadas as parábolas $p_1$: $y = - x^2 - 4x - 1$ e $p_2$: $y = x^2 - 3x + 11/4$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por $V_1$ e $V_2$. Sabendo que r é a reta que contém $V_1$ e $V_2$, então a distância de r até à origem é:
a) $5/\sqrt{26}$ b) $7/\sqrt{26}$ c) $7/\sqrt{50}$
d) $17/\sqrt{50}$ e) $11/\sqrt{74}$

11) (ITA-96) Seja $a \in \Re$, $a > 1$. Para que:
$]4, 5[ = \{x \in \Re_+^* ; \log_{1/a}[\log_a(x^2 - 15)] > 0\}$. O valor de a é:
a) 2 b) 3 c) 5 d) 9 e) 10

12) (ITA-96) Se $(x_0, y_0)$ é uma solução real do sistema
$\begin{cases} \log_2(x+2y) - \log_3(x+2y) = 2 \\ x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$ então $x_0 + y_0$ é igual a:
a) $7/4$ b) $9/4$ c) $11/4$ d) $13/4$ e) $17/4$

13) (ITA-96) Considere A e B matrizes reais 2x2, arbitrárias. Das afirmações abaixo assinale a verdadeira. No seu caderno de respostas, justifique a afirmação verdadeira e dê exemplo para mostrar que cada uma das demais é falsa.
a) Se A é não nula então A possui inversa
b) $(AB)^t = A^tB^t$

c) det (AB) = det (BA)
d) det $A^2$ = 2 det A
e) (A + B)(A - B) = $A^2 - B^2$

14) (ITA-96) Seja a $\in \Re$ e considere as matrizes reais 2x2.

$A = \begin{bmatrix} 3^a & -1 \\ -1 & 3^a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7^{a-1} & 8^{a-3} \\ 7 & 2^{-3} \end{bmatrix}$

O produto AB será inversível se e somente se:
a) $a^2 - 5a + 6 \neq 0$ b) $a^2 - 5a \neq 0$ c) $a^2 - 3a \neq 0$
d) $a^2 - 2a + 1 \neq 0$ e) $a^2 - 2a \neq 0$

15) (ITA-96) Seja $\alpha$ um número real tal que $\alpha > 2(1+\sqrt{2})$ e considere a equação $x^2 - \alpha x + \alpha + 1 = 0$. Sabendo que as raízes dessa equação são cotangentes de dois dos ângulos internos de um triângulo, então o terceiro ângulo interno desse triângulo vale:
a) $30^o$ b) $45^o$ c) $60^o$ d) $135^o$ e) $120^o$

16) (ITA-96) Seja $\alpha \in [0, \pi/2]$, tal que: (sen x + cos x) = m.
Então, o valor de $y = \dfrac{\text{sen } 2\alpha}{\text{sen}^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$ será:

a) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(4-m^2)}$ b) $\dfrac{2(m^2+1)}{m(4+m^2)}$ c) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(3-m^2)}$
d) $\dfrac{2(m^2-1)}{m(3+m^2)}$ e) $\dfrac{2(m^2+1)}{m(3-m^2)}$

17) (ITA-96) A aresta de um cubo mede x cm. A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são centros das faces do cubo será:
a) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ x cm b) $\dfrac{\sqrt{3}}{18}$ x cm c) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ x cm
d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ x cm e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ x cm

18) (ITA-96) As dimensões x, y e z de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma dessas medidas é igual a 33 cm e que a área total do paralelepípedo é igual a 694 $cm^2$, então o volume deste paralelepípedo, em $cm^3$, é igual a:
a) 1200 b) 936 c) 1155 d) 728 e) 834

19) (ITA-96) Três pessoas A, B e C, chegam no mesmo dia a uma cidade onde há cinco hotéis $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ e $H_5$. Sabendo que cada hotel tem pelo menos três vagas, qual/quais das seguintes afirmações, referentes à distribuição das três pessoas nos cinco hotéis, é/são correta(s)?
I- Existe um total de 120 combinações
II- Existe um total de 60 combinações se cada pessoa pernoitar num hotel diferente
III- Existe um total de 60 combinações se duas e apenas duas pessoas pernoitarem no mesmo hotel
a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
c) Apenas a afirmação II é verdadeira.
d) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
e) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

20) (ITA-96) O valor da potência $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$ é:

a) $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$ d) $(\sqrt{2})^{93} i$ e) $(\sqrt{2})^{93} + i$

21) (ITA-96) Sejam $a_1$, $a_2$, $a_3$ e $a_4$ quatro números reais (com $a_1 \neq 0$), formando nessa ordem uma progressão geométrica.
Então, o sistema em x e y $\begin{cases} a_1 x + a_3 x = 1 \\ a_1 a_2 x + a_1 a_4 x = a_2 \end{cases}$ é um sistema:
a) Impossível.
b) Possível e determinado.
c) Possível e indeterminado.
d) Possível determinado para $a_1 > 1$.
e) Possível determinado para $a_1 < -1$.

22) (ITA-96) Considere as funções reais f e g definidas por:
$f(x) = \dfrac{1+2x}{1-x^2}$, $x \in$ R - { -1, 1} e $g(x) = \dfrac{x}{1+2x}$, $x \in$ R - { -1/2}. O maior subconjunto de R onde pode ser definida a composta fog, tal que (fog)(x) < 0, é:
a) ]-1, -1/2[ $\cup$ ]-1/3, -1/4[ b) ]- $\infty$, -1[ $\cup$ ]-1/3, -1/4[
c) ]- $\infty$, -1[ $\cup$ ]-1/2, 1[ d) ]1, $\infty$ [
e) ]-1/2, -1/3[

23) (ITA-96) Seja $f: R \to R$ definida por:
$f(x) = \begin{cases} 3x+3, x \leq 0 \\ x^2+4x+3, x > 0 \end{cases}$

a) f é bijetora e $(fof)(-2/3) = f^{-1}(21)$.
b) f é bijetora e $(fof)(-2/3) = f^{-1}(99)$.
c) f é sobrejetora mas não é injetora.
d) f é injetora mas não é sobrejetora.
e) f é bijetora e $(fof)(-2/3) = f^{-1}(3)$.

24) (ITA-96) Sabendo que o ponto (2,1) é ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, então a equação da reta que contém A e B é dada por:
a) y = 2x - 3 b) y = x-1 c) y = -x + 3
d) y = 3x/2 - 2 e) y = -x/2 + 2

25) (ITA-96) São dadas as retas r: x - y + 1 + raiz2 = 0 e s: raiz3 x + y - 2 raiz3 = 0 e a circunferência C: $x^2 + 2x + y^2$ = 0. Sobre a posição relativa desses três elementos, podemos afirmar que:
a) r e s são paralelas entre si e ambas são tangentes à C.
b) r e s são perpendiculares entre si e nenhuma delas é tangente a C.
c) r e s são concorrentes, r é tangente à C e s não é tangente à C.
d) r e s são concorrentes, s é tangente à C e r não é tangente à C.
e) r e s são concorrentes e ambas são tangentes à C.

## ITA - 1997

01) (ITA-97) Se **Q** e **I** representam, respectivamente, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, considere as funções $f: \Re \to \Re$ definidas por

$f(x) = \begin{cases} 0, \text{se } x \in Q \\ 1, \text{se } x \in I \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x \in Q \\ 0, \text{se } x \in I \end{cases}$

Seja J a imagem da função composta $f\circ g : \Re \to \Re$. Podemos afirmar que:
a) J = $\Re$ b) J = Q c) J = {0}
d) J = {1} e) J = {0,1}

02) (ITA-97) Seja n $\in$N com n > 1 fixado. Considere o conjunto: $A = \left\{ \frac{p}{q} : p,q \in Z.\text{sendo}, 0 < q < n \right\}$. Definimos $f$: $\Re \to \Re$ por $f(x) = [\cos(n!\pi x)]^{2n}$. Se $f$(A) denota a imagem do conjunto A pela função f, então
a) $f$(A) = ]-1, 1[ b) $f$(A) = [0, 1] c) $f$(A) = {1}
d) $f$(A) = {0} e) $f$(A) = {0, 1}

03) (ITA-97) O domínio D da função
$f(x) = \ln\left[\frac{\sqrt{\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi}}{-2x^2 + 3\pi x}\right]$ é o conjunto
a) D = { x $\in \Re$: 0 < x < 3$\pi$ / 2}
b) D = { x $\in \Re$: x < 1/ $\pi$ ou x > $\pi$}
c) D = { x $\in \Re$: 0 < x $\le$ 1/$\pi$ ou x $\ge$ $\pi$ }
d) D = { x $\in \Re$: x > 0}
e) D = { x $\in \Re$: 0 < x < 1/$\pi$ ou $\pi$ < x < 3$\pi$/2 }

04) (ITA-97) Considere os números complexos
$z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w = 1 + i\sqrt{3}$.
$m = \left| \frac{w^6 + 3z^4 + 4i}{z^2 + w^3 + 6 - 2i} \right|^2$, então **m** vale
a) 34 b) 26 c) 16 d) 4 e) 1

05) (ITA-97) Seja m $\in \Re_+^*$, tal que a reta x - 3y - m = 0 determina, na circunferência $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$, uma corda de comprimento 6. O valor de m é:
a) $10 + 4\sqrt{10}$ b) $2 + \sqrt{3}$ c) $5 - \sqrt{2}$
d) $6 + \sqrt{10}$ e) 3

06) (ITA-97) Sejam m $\in$ N e n $\in \Re_+^*$ com m $\ge$ 10 e x $\in \Re_+^*$. Seja D $\theta$ desenvolvimento do binômio $(a + b)^m$, ordenado segundo as potências crescentes de b. Quando $a = x^n$ e $b = x^{-n^2}$, o sexto termo de D fica independente de x. Quando $a = x$ e $b = x^{1/n}$, o oitavo termo de D se torna independente de x. Então m é igual a
a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

07) (ITA-97) Seja a, b, c $\in \Re_+^*$ com $a^2 = b^2 + c^2$. Se x, y e z satisfazem o sistema
$\begin{cases} c\cos y + b\cos z = a \\ c\cos x + a\cos z = b \\ b\cos x + a\cos y = c \end{cases}$, então cos x + cos y + cos z é igual a:
a) (a - b)/c b) (a + b)/c c) (b + c)/a
d) (c + a)/b e) $(b^2 + c^2)/a$

08) (ITA-97) Sejam A, B e C matrizes reais quadradas de ordem n e não nulas. Por O denotamos a matriz nula de ordem n. se AB = AC considere as afirmações:
I- $A^2 \neq 0$
II- B = C
III- det B $\neq$ 0
IV- det(B - C) = 0
Então:
a) Todas são falsas.
b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
c) Apenas a afirmação II é verdadeira.
d) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
e) Apenas a afirmação III é verdadeira.

09) (ITA-97) Seja $\theta$ um valor fixado no intervalo ]0, $\pi$/2[. Sabe-se que $a_1$ = cotg$\theta$ é o primeiro termo de uma progressão geométrica infinita de razão q = $\text{sen}^2\theta$. A soma de todos os termos dessa progressão é:
a) cosec $\theta$. tg $\theta$ b) sec $\theta$. tg $\theta$ c) sec $\theta$. cosec $\theta$
d) $\sec^2\theta$ e) $\text{cosec}^2\theta$

10) (ITA-97) Seja A o ponto de intersecção das retas r e s dadas, respectivamente pelas equações x + y = 3 e x + y = -3. Sejam B e C pontos situados no primeiro quadrante com B $\in$ r e C $\in$ s. sabendo que d(A,B) = d(A,C) = $\sqrt{2}$, então a reta passando por B e C é dada pela equação:
a) 2x + 3y = 1 b) y = 1 c) y = 2
d) x = 1 e) x = 2

11) (ITA-97) Sejam f ,g : $\Re \to \Re$ funções tais que:
g(x) = 1- x e $f(x) + 2f(2 - x) = (x - 1)^3$
para todo x $\in \Re$. Então $f$ [g(x)] é igual a:
a) $(x - 1)^3$ b) $(1 - x)^3$ c) $x^3$ d) x e) 2 - x

12) (ITA-97) Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $2x^6 - 4x^5 + 4x - 2 = 0$. Sobre os elementos de S podemos afirmar que:
a) Todos são números reais.
b) 4 são números reais positivos.
c) 4 são números reais.
d) 3 são números reais positivos e 2 não são reais.
e) 3 são números reais negativos.

13) (ITA-97) Sejam $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ polinômios na variável real x de graus $n_1$, $n_2$ e $n_3$, respectivamente, com $n_1 > n_2 > n_3$. Sabe-se que $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são divisíveis por $p_3(x)$. Seja r(x) o resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$. Considere as afirmações:
I - r(x) é divisível por $p_3(x)$.
II - $p_1(x)$ – ½ $p_2(x)$ é divisível por $p_3(x)$.
III - $p_1(x)$ r(x) é divisível por $\{p_3(x)\}^2$.
Então,
a) Apenas I e II são verdadeiras
b) Apenas II é verdadeira.
c) Apenas I e III são verdadeiras.
d) Todas as afirmações são verdadeiras
e) Todas as afirmações são falsas

14) (ITA-97) Em um triângulo ABC, sabe-se que o segmento AC mede 2 cm. Sejam $\alpha$ e $\beta$, respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos BC e AC. A área do triângulo é (em $cm^2$) igual a:

a) $2\,\text{sen}^2\alpha.\text{cotg}\,\beta + \text{sen}\,2\alpha$ b) $2\,\text{sen}^2\alpha.\text{tg}\,\beta - \text{sen}\,2\alpha$
c) $2\cos^2\alpha.\text{cotg}\,\beta + \text{sen}\,2\alpha$ d) $2\cos^2\alpha.\text{tg}\,\beta + \text{sen}\,2\alpha$
e) $2\,\text{sen}^2\alpha.\text{tg}\,\beta - \cos 2\alpha$

15) (ITA-97) Considere no plano complexo, um hexágono regular centrado em $z_0 = i$. Represente $z_1, z_2, \ldots z_6$ seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se $z_1 = 1$ então $2z_3$ é igual a:
a) $2 + 4i$ b) $(\sqrt{3} - 1)+(\sqrt{3} + 3)i$
c) $\sqrt{6} + (\sqrt{2} + 2)i$ d) $(2\sqrt{3} - 1)+(2\sqrt{3} + 3)i$
e) $\sqrt{2} + (\sqrt{6} + 2)i$

16) (ITA-97) Seja S o conjunto dos números complexos que satisfazem simultaneamente, às equações:
$$|z - 3i| = 3 \text{ e } |z + 1| = |z - 2 - i|$$
O produto de todos os elementos de S é igual a:
a) $-2 + i\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2} + 3i\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$
d) $-3 + 3i$ e) $-2 + 2i$

17) (ITA-97) Sejam $a_1$, $a_2$, $a_3$ e $a_4$ números reais formando, nesta ordem, uma progressão geométrica crescente com $a_1 \neq 0$. Sejam $x_1$, $x_2$ e $x_3$ as raízes da equação $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$. Se $x_1 = 2i$, então:
a) $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ b) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ d) $x_1 . x_2 . x_3 = 8$
e) $x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = 5$

18) (ITA-97) Os números reais x, y e z formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão r. Seja $\alpha$ um número real com $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$ satisfazendo $3a^x + 2a^y - a^z = 0$. Então r é igual a
a) $a^2$ b) $(½)^a$ c) $\log_{2a}4$ d) $\log_a(3/2)$ e) $\log_a 3$

19) (ITA-97) A seqüência ($a_1$, $a_2$, $a_3$ e $a_4$) é uma progressão geométrica de razão $q \in \Re^*$ com $q \neq 1$ e $a_1 \neq 0$. Com relação ao sistema:
$$\begin{cases} a_1x + a_2y = c \\ a_3x + a_4y = d \end{cases}$$ , podemos afirmar que:
a) É impossível para c, $d \in [-1, 1]$
b) É possível e determinado somente se c = d.
c) É indeterminado quaisquer que sejam c, $d \in \Re$.
d) É impossível quaisquer que sejam c, $d \in \Re^*$.
e) É indeterminado somente se $d = cq^2$.

20) (ITA-97) Considere as matrizes
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Sejam $\lambda_0$, $\lambda_1$ e $\lambda_3$ as raízes da equação $\det(A - \lambda I_3) = 0$ com $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Considere as afirmações:
I- $B = A - \lambda_0 I_3$
II- $B = (A - \lambda_1 I_3)A$
III- $B = A(A - \lambda_2 I_3)$
Então:
a) Todas as afirmações são falsas.
b) Todas as afirmações são verdadeiras.
c) Apenas I é falsa.
d) Apenas II é falsa.
e) Apenas III é verdadeira.

21) (ITA-97) Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação
$$\sec\left[\text{arctg}\frac{1}{1+e^x} - \text{arctg}(1-e^x)\right] = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
Então:
a) $S = \varnothing$ b) $S = \mathbb{R}$ c) $S \subset [1, 2]$
d) $S \subset [-1, 1]$ e) $S \subset [-1, 2[$

22) (ITA-97) Dado um número real a com $a > 1$, seja S o conjunto solução da inequação
$$\log_{1/a}\log_a\left(\frac{1}{a}\right)^{x-7} \leq \log_{1/a}(x - 1)$$
Então S é o intervalo:
a) $[4, +\infty[$ b) $[4, 7[$ c) $]1, 5]$
d) $]1, 4]$ e) $[1, 4[$

23) (ITA-97) Considere os pontos A: (0, 0) e B: (2, 0) e C: (0, 3). Seja P: (x, y) o ponto da intersecção das bissetrizes internas do triângulos ABC. Então x + y é igual a:
a) $12/(5 + \sqrt{13})$ b) $8/(2 + \sqrt{11})$ c) $10/(6 + \sqrt{13})$
d) 5 e) 2

24) (ITA-97) A altura e o raio da base de um cone de revolução medem 1 cm e 5 cm respectivamente. Por um ponto do eixo do cone situado a d cm de distância do vértice, traçamos um plano paralelo à base, obtendo um tronco de cone. O volume deste tronco é a média geométrica entre os volumes do cone dado e do cone menor formado. Então d é igual a:
a) $\sqrt[3]{\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$
d) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}$ e) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$

25) (ITA-97) Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, considera-se uma pirâmide regular cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor do tronco. As arestas das bases medem a cm e 2a cm. As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. A altura (em cm) do tronco mede:
a) $a\sqrt{3}/\sqrt{5}$ b) $a\sqrt{35}/10$ c) $a\sqrt{3}/2\sqrt{5}$
d) $a\sqrt{35}/\sqrt{10}$ e) $a\sqrt{7}/\sqrt{5}$

## ITA - 1998

***Principais notações***
$[a, b] = \{x \in \Re: a \leq x \leq b\}$
$[a, b[ = \{x \in \Re: a \leq x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \Re: a < x \leq b\}$
$]a, b[ = \{x \in \Re: a < x < b\}$
(a , b) - par ordenado
$A^t$ - matriz transposta da matriz A

$]-\infty, b] = \{x \in \Re: x \leq b\}$
$]-\infty, b[ = \{x \in \Re: x < b\}$
$[a, +\infty[ = \{x \in \Re: a \leq x\}$

$]a, +\infty[ = \{x \in \Re : a < x\}$
I - matriz identidade de ordem 2
$A^{-1}$ - matriz inversa da matriz A

1) (ITA-98) Seja f: $\Re \to \Re$ a função definida por:
$f(x) = 2sen\,2x - \cos 2x$
Então:
a) f é impar e periódica de período $\pi$.
b) f é par e periódica de período $\pi/2$.
c) f não é par nem ímpar e é periódica de período $\pi$.
d) f não é par e é periódica de período $\pi/4$.
e) f não é ímpar e não é periódica.

2) (ITA-98) O valor de:
$tg^{10}x - 5tg^8x\ sec^2x + 10tg^6x\ sec^4x - 10tg^4x\ sec^6x + 5tg^2x\ sec^8x - sec^{10}x$, para todo $x \in [0, \pi/2[$, é:

a) 1 b) $\frac{-\sec^2 x}{1+sen^2 x}$ c) $-\sec x + tg\,x$ d) –1 e) zero

3) (ITA-98) Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem 2 que satisfazem a seguinte propriedade: existe uma matriz M inversível tal que: $A = M^{-1}BM$.
Então:
a) $\det(-A^t) = \det B$ b) $\det A = -\det B$
c) $\det(2A) = 2 \det B$ d) Se $\det B \neq 0$ então $\det(-AB) < 0$
e) $\det(A - I) = -\det(I - B)$

4) (ITA-98) Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área deste polígono, em unidades de área, é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) 5 c) $\pi$ d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e) $2\pi$

5) (ITA-98) Sejam x e y números reais tais que:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Então, o números complexo $z = x + iy$ é tal que $z^3$ e $|z|$, valem respectivamente:

a) $1 - i$ e $\sqrt[6]{2}$ b) $1 + i$ e $\sqrt[6]{2}$ c) $i$ e 1
d) $-i$ e 1 e) $1 + i$ e $\sqrt[3]{2}$

6) (ITA-98) Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:
a) $23^o$ b) $32^o$ c) $36^o$ d) $40^o$ e) $45^o$

7) (ITA-98) Seja $(a_1, a_2, a_3, ...)$ uma progressão geométrica infinita de razão $a_1$, $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

a) $\frac{8}{27}$ b) $\frac{20}{27}$ c) $\frac{26}{27}$ d) $\frac{30}{27}$ e) $\frac{38}{27}$

8) (ITA-98) O valor de $y \in \Re$ que satisfaz a igualdade:
$\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7$, é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) $\frac{1}{8}$ e) 7

9) (ITA-98) O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:
a) 12! b) (8!)(5!) c) 12! - (8!)(5!)
d) 12! - 8! e) 12! - (7!)(5!)

10) (ITA-98) Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de $45^o$. Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

*Nota: resolva as questões numeradas de 11 a 25 no caderno de respostas. Na folha de leitura óptica assinale as alternativas das 25 questões. Ao terminar a prova, entregue ao fiscal o caderno de respostas e a folha de leitura óptica.*

11) (ITA-98) Seja f: $\Re \to \Re$ a função definida por: $f(x) = -3a^x$, onde **a** é um número real, $0 < a < 1$. Sobre as afirmações:
(I) $f(x + y) = f(x).f(y)$, para todo $x, y \in \Re$.
(II) f é bijetora.
(III) f é crescente e $f(\,]0, +\infty[\,) = ]-3, 0[$.
Podemos concluir que:
a) Todas as afirmações são falsas.
b) Todas as afirmações são verdadeiras.
c) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
d) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
e) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

12) (ITA-98) Sejam as funções f: $\Re \to \Re$ e $g: A \subset \Re \to \Re$, tais que
$f(x) = x^2 - 9$ e $(fog)(x) = x - 6$,
em seus respectivos domínios. Então, o domínio **A** da função **g** é:
a) $[-3, +\infty[$ b) $\Re$ c) $[-5, +\infty[$
d) $]-\infty, -1[\cup[3, +\infty[$ e) $]-\infty, \sqrt{6}\,[$

13) (ITA-98) Considere $a, b \in \Re$ e a equação:
$2e^{3x} + ae^{2x} + 7e^x + b = 0$.
Sabendo que as três raízes reais $x_1, x_2, x_3$ desta equação formam, nesta ordem, uma progressão aritmética cuja soma é igual a zero, então **a - b** vale:
a) 5 b) -7 c) -9 d) -5 e)

14) (ITA-98) Seja **a** um número real tal que o polinômio
$p(x) = x^6 + 2x^5 + ax^4 - ax^2 - 2x - 1$
admite apenas raízes reais. Então:
a) $a \in [2, \infty[$ b) $a \in [-1, 1]$ c) $a \in ]-\infty, -7]$
d) $a \in [-2, -1[$ e) $a \in ]1, 2[$

15) (ITA-98) Seja p(x) um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de p(x) por x - 2 obtém-se um quociente q(x) e resto igual a 26. Na divisão de p(x) por $x^2 + x - 1$ obtém-se um quociente h(x) e resto 8x - 5. Sabe-se que q(0) = 13 e q(1) = 26. Então, h(2) + h(3) é igual a:
a) 16 b) zero c) -47 d) -28 e) 1

16) (ITA-98) Sejam $a, b \in \Re$. Considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-3y+z=1 \\ -2y+z=a \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x-y=0 \\ x+2y-z=0 \\ 2x-by+3z=0 \end{cases}$$

Se ambos admitem infinitas soluções reais, então:

a) $\frac{a}{b}=11$ b) $\frac{b}{a}=22$ c) $ab = \frac{1}{4}$
d) ab = 22 e) ab = 0

17) (ITA-98) Sejam as matrizes de ordem 2,

$$A=\begin{bmatrix} 2+a & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2+a \end{bmatrix}$$

Então, a soma dos elementos da diagonal principal de $(AB)^{-1}$ é igual a:

a) a + 1 b) 4(a + 1) c) $\frac{1}{4}(5 + 2a + a^2)$

d) $\frac{1}{4}(1 + 2a + a^2)$ e) $\frac{1}{2}(5 + 2a + a^2)$

18) (ITA-98) A inequação: $4x \log_5(x + 3) \geq (x^2 + 3) \log_{\frac{1}{5}}(x + 3)$

é satisfeita para todo $x \in S$. Então:
a) S = ]-3 , -2]∪[-1 , +∞[ b) S = ]-∞ ,-3[∪[-1 , +∞[
c) S = ]-3 , -1] d) S = ]-2 , +∞]
e) S = ]-∞ , -3[∪]-3 , +∞[

19) (ITA-98) A soma das raízes da equação

$$\sqrt{3}\,\text{tg}x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,2x + \cos 2x = 0$$

que pertencem ao intervalo [0 , 2π], é:

a) $\frac{17\pi}{4}$ b) $\frac{16\pi}{3}$ c) $\frac{15\pi}{4}$ d) $\frac{14\pi}{3}$ e) $\frac{13\pi}{4}$

20) (ITA-98) Considere as afirmações sobre polígonos convexos:
(I) Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.
(II) Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.
(III) Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.
Então:
a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
c) Apenas (I) é verdadeira.
d) Apenas (III) é verdadeira.
e) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

21) (ITA-98) As retas y = 0 e 4x + 3y + 7 = 0 são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem 4 cm e 6 cm, então, a área deste paralelogramo, em cm², vale:

a) $\frac{36}{5}$ b) $\frac{27}{4}$ c) $\frac{44}{3}$ d) $\frac{48}{3}$ e) $\frac{48}{5}$

22) (ITA-98) Um poliedro convexo de 16 arestas é formado por faces triangulares e quadrangulares. Seccionando-o por um plano convenientemente escolhido , dele se destaca um novo poliedro convexo, que possui apenas faces quadrangulares. Este novo poliedro possui um vértice a menos que o original e uma face a mais que o número de faces quadrangulares do original. Sendo **m** e **n**, respectivamente, o número de faces e o número de vértices do poliedro original, então:
a) m = 9, n = 7 b) m = n = 9 c) m = 8, n = 10
d) m = 10 , n = 8 e) m = 7 , n = 9

23) (ITA-98) Considere um cone circular reto cuja geratriz mede $\sqrt{5}$ cm e o diâmetro da base mede 2 cm. Traçam-se **n** planos paralelos à base do cone, que o seccionam determinando **n + 1** cones, incluindo o original, de modo que a razão entre os volumes do cone maior e do cone menor é 2. Os volumes destes cones formam uma progressão aritmética crescente cuja soma é igual a 2π. então, o volume, em cm³, do tronco de cone determinado por dois planos consecutivos é igual a:

a) $\frac{\pi}{33}$ b) $\frac{2\pi}{33}$ c) $\frac{\pi}{9}$ d) $\frac{2\pi}{15}$ e) π

24) (ITA-98) Considere a hipérbole **H** e a parábola **T**, cujas equações são, respectivamente,

$$5(x + 3)^2 - 4(y - 2)^2 = -20 \quad \text{e} \quad (y - 3)^2 = 4(x - 1).$$

Então, o lugar geométrico dos pontos **P**, cuja soma dos quadrados das distâncias de **P** a cada um dos focos da hipérbole **H** é igual ao triplo do quadrado da distância de **P** ao vértice da parábola **T**, é:

a) a elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$.

b) a hipérbole de equação $\frac{(y+1)^2}{5}+\frac{(x-3)^2}{4}=1$.

c) O par de retas dadas por y = ±(3x - 1).
d) A parábola de equação $y^2 = 4x + 4$.
e) A circunferência centrada em (9 , 5) e raio $\sqrt{120}$ .

25) Considere o paralelogramo ABCD onde A = (0 , 0), B = (-1 , 2) e C = (-3 , -4). Os ângulos internos distintos e o vértice D deste paralelogramo são, respectivamente:

a) $\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ e D = (-2 , -5) b) $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$ e D = (-1 , -5)

c) $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$ e D = (-2 , -6) d) $\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ e D = (-2 , -6)

e) $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$ e D = (-2 , -5)

## ITA - 1999

***Principais notações***
***Z*** - o conjunto de todos os números inteiros.
***R*** - o conjunto de todos os números reais.
***C*** - o conjunto de todos os números complexos.

[a, b] = {x ∈ ***R***: a ≤ x ≤ b} ] - ∞, b] = {x ∈ ***R***: x ≤ b}
[a, b[ = {x ∈ ***R***: a ≤ x < b} ] - ∞, b[ = {x ∈ ***R***: x < b}
]a, b] = {x ∈ ***R***: a < x ≤ b} [a, + ∞[ = {x ∈ ***R***: a ≤ x}
]a, b[ = {x ∈ ***R***: a < x < b} ]a, + ∞[ = {x ∈ ***R***: a < x}
(a, b) - par ordenado g o *f* - função composta de *g* e *f*
$A^{-1}$ = matriz inversa da matriz A $A^t$ - matriz transposta da matriz A

***Questões***

1) (ITA-99) Sejam $E, F, G$ e $H$ subconjuntos não vazios de $\boldsymbol{R}$. Considere as afirmações:

I - Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $E \subset F$ e $G \subset H$.
II - Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$.
III - Se $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$, então $(E \times G) \subset (F \times H)$.

Então:
a) ( ) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
b) ( ) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
c) ( ) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
d) ( ) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
e) ( ) Todas as afirmações são verdadeiras.

2) (ITA-99) Listando-se em ordem crescente todos os números de cinco algarismos distintos formados com os elementos do conjunto {1, 2, 4, 6, 7}, o número 62417 ocupa o $n$-ésimo lugar. Então $n$ é igual a:
a) ( ) 74 b) ( ) 75 c) ( ) 79
d) ( ) 81 e) ( ) 92

3) (ITA-99) Sejam $f, g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ funções definidas por $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Considere as afirmações:

I - Os gráficos de $f$ e $g$ não se interceptam.
II- As funções $f$ e $g$ são crescentes.
III- $f(-2)\, g(-1) = f(-1)\, g(-2)$.

Então:
a) ( ) Apenas a afirmação (I) é falsa.
b) ( ) Apenas a afirmação (III) é falsa.
c) ( ) Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.
d) ( ) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.
e) ( ) Todas as afirmações são falsas.

4) (ITA-99) Seja $a \in \boldsymbol{R}$ com $a > 1$. O conjunto de todas as soluções reais da inequação $\boldsymbol{a^{2x(1-x)} > a^{x-1}}$, é:
a) ( ) $]-1, 1[$ b) ( ) $]1, +\infty[$ c) $]-\frac{1}{2}, 1[$
d) ( ) $]-\infty, 1[$ e) ( ) vazio

5) (ITA-99) Seja $S$ o conjunto de todas as soluções reais da equação

$$\log_{\frac{1}{4}}(x + 1) = \log_4(x - 1)$$

Então:
a) ( ) $S$ é um conjunto unitário e $S \subset ]2, +\infty[$.
b) ( ) $S$ é um conjunto unitário e $S \subset ]1, 2[$.
c) ( ) $S$ possui dois elementos distintos e $S \subset ]-2, 2[$.
d) ( ) $S$ possui dois elementos distintos e $S \subset ]1, +\infty[$.
e) ( ) $S$ é o conjunto vazio.

6) (ITA-99) Sejam $f, g, h$: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ funções tais que a função composta $h \circ g \circ f$: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ é a função identidade. Considere as afirmações:

I - A função $h$ é sobrejetora.
II- Se $x_0 \in \boldsymbol{R}$ é tal que $f(x_0) = 0$, então $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \boldsymbol{R}$ com $x \neq x_0$.
III- A equação $h(x) = 0$ tem solução em $\boldsymbol{R}$.

Então:
a) ( ) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
b) ( ) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
c) ( ) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
d) ( ) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) ( ) Todas as afirmações são falsas.

7) (ITA-99) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se $x$ e $y$ são soluções do sistema $(AA' - 3I)X = B$, então x + y é igual a:
a) ( ) 2 b) ( ) 1 c) ( ) 0 d) ( ) -1 e) ( ) -2

8) (ITA-99) Sejam x, y e z números reais com $y \neq 0$. Considere a matriz inversível

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ z & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então:
a) ( ) A soma dos termos da primeira linha de $A^{-1}$ é igual a $x + 1$.
b) ( ) A soma dos termos da primeira linha de $A^{-1}$ é igual a 0.
c) ( ) A soma dos termos da primeira coluna de $A^{-1}$ é igual a 1.
d) ( ) O produto dos termos da segunda linha de $A^{-1}$ é igual a y.
e) ( ) O produto dos termos da terceira coluna de $A^{-1}$ é igual a 1.

9) (ITA-99) Se $x \in [0, \pi/2[$ é tal que $4\,\mathrm{tg}^4 x = \frac{1}{\cos^4 x} + 4$, então o valor de
sen 2x + sen 4x
a) ( ) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ b) ( ) $\frac{\sqrt{15}}{8}$ c) ( ) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$
d) ( ) $\frac{1}{2}$ e) ( ) 1

10) (ITA-99) O conjunto de todos os números reais q > 1, para os quais $a_1$, $a_2$ e $a_3$, formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão q e representam as medidas dos lados de um triângulo, é:
a) ( ) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ b) ( ) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$
c) ( ) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}]$ d) ( ) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}[$
e) ( ) $]1, 1+\sqrt{5}[$

11) (ITA-99) Sejam $a_k$ e $b_k$ números reais com k = 1, 2, ..., 6. Os números complexos $z_k = a_k + ib_k$ são tais que $|z_k| = 2$ e $b_k \geq 0$, para todo k = 1, 2, ..., 6. Se $(a_1, a_2, ..., a_6)$ é uma progressão aritmética de razão -1/5 e soma 9, então $z_3$ é igual a:
a) ( ) 2i b) ( ) $\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$ c) ( ) $\sqrt{3} + i$
d) ( ) $\frac{-3\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{73}}{5}i$ e) ( ) $\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{17}}{5}i$

12) (ITA-99) Considere a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ e a elipse E de equação $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$. Então:
a) ( ) C e E interceptam-se em dois pontos distintos.
b) ( ) C e E interceptam-se em quatro pontos distintos.
c) ( ) C e E são tangentes exteriormente.
d) ( ) C e E são tangentes interiormente.

e) ( ) C e E têm o mesmo centro e não se interceptam.

13) (ITA-99) Num cone circular reto, a altura é a média geométrica entre o raio da base e a geratriz. A razão entre a altura e o raio da base é:

a) ( ) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) ( ) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ c) ( ) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}$

d) ( ) $\frac{\sqrt[3]{5}-1}{3}$ e) ( ) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

14) (ITA-99) Duas circunferências $C_1$ e $C_2$, ambas com 1 m de raio, são tangentes. Seja $C_3$ outra circunferência cujo raio mede $(\sqrt{2}-1)$m e que tangência $C_1$ e $C_2$. A área, $m^2$, da região limitada e exterior às três circunferências dadas, é:

a) ( ) $1 - \pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) ( ) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{6}$ c) ( ) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

d) ( ) $\frac{\pi}{16}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$ e) ( ) $\pi\left(\sqrt{2}-1\right)-1$

15) (ITA-99) Um poliedro convexo de 10 vértices apresenta faces triangulares e quadrangulares. O número de faces quadrangulares, o número de faces triangulares e o número total de faces formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. O número de arestas é:

a) ( ) 10 b) ( ) 17 c) ( ) 20 d) ( ) 22 e) ( ) 23

***Nota**: resolva as questões numeradas de 16 a 25 no caderno de respostas. Na folha de leitura óptica assinale a alternativa escolhida em cada uma das 25 questões. Ao terminar a prova, entregue ao fiscal o caderno de respostas e a folha de leitura óptica.*

16) (ITA-99) Considere as funções *f* e *g* definidas por $f(x) = x - 2/x$, para $x \neq 0$ e

$g(x) = \frac{x}{x+1}$, para $x \neq -1$. O conjunto de todas a s soluções da inequação

$$(g \circ f)(x) < g(x)$$

é:

a) ( ) $[1, +\infty[$ b) ( ) $]-\infty, -2[$ c) ( ) $[-2, -1[$

d) ( ) $]-1, 1[$ e) ( ) $]-2, -1[ \cup ]1, +\infty[$

17) (ITA-99) Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 1$. Se $b = \log_2 a$, então o valor de

$$\log_4 a^3 + \log_2 4a + \log_2 \frac{a}{a+1} + (\log_8 a)^2 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{a^2-1}{a-1}$$

é:

a) ( ) $2b - 3$ b) ( ) $\frac{65}{18}b+2$ c) ( ) $\frac{2b^2-3b+1}{2}$

d) ( ) $\frac{2b^2+63b+36}{18}$ e) ( ) $\frac{b^2+9b+7}{9}$

18) (ITA-99) Seja p(x) um polinômio de grau 3 tal que $p(x) = p(x+2) - x^2 - 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se -2 é uma raiz de p(x), então o produto de todas as raízes de p(x) é:

a) ( ) 36 b) ( ) 18 c) ( ) -36 d) ( ) -18 e) ( ) 1

19) (ITA-99) A equação polinomial p(x) = 0 de coeficientes reais e grau 6 é recíproca de $2^a$ espécie e admite i como raiz. Se $p(2) = -\frac{105}{8}$ e $p(-2) = \frac{255}{8}$, então a soma de todas as raízes de p(x) é igual a:

a) ( ) 10 b) ( ) 8 c) ( ) 6 d) ( ) 2 e) ( ) 1

20) (ITA-99) O conjunto de todos os números complexos z, $z \neq 0$, que satisfazem à igualdade $|z+1+i| = \big||z| - |1+i|\big|$ é:

a) ( ) $\{z \in C: \arg z = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\}$

b) ( ) $\{z \in C: \arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\}$

c) ( ) $\{z \in C: |z| = 1 \text{ e } \arg z = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z\}$

d) ( ) $\{z \in C: |z| = \sqrt{2} \text{ e } \arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z\}$

e) ( ) $\{z \in C: \arg z = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\}$

21) (ITA-99) Seja $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a < \frac{\pi}{2}$. A expressão

$$\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}+a\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}-a\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$$

é idêntica a:

a) ( ) $\frac{\sqrt{2}\operatorname{cotg}^2 a}{1+\operatorname{cotg}^2 a}$ b) ( ) $\frac{\sqrt{2}\operatorname{cotg} a}{1+\operatorname{cotg}^2 a}$ c) ( ) $\frac{\sqrt{2}}{1+\operatorname{cotg}^2 a}$

d) ( ) $\frac{1+3\operatorname{cotg} a}{2}$ e) ( ) $\frac{1+2\operatorname{cotg} a}{1+\operatorname{cotg} a}$

22) (ITA-99) A soma de todos os valores de $a \in [0, 2\pi[$ que tornam o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x \operatorname{sen} a + y \cos a + z(2\operatorname{sen} a + \cos a) = 0 \\ x \operatorname{sen}^2 a + y \cos^2 a + z(1 + 3\operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} 2a) = 0 \end{cases}$$

possível e indeterminado é:

a) $5\pi$ b) $4\pi$ c) $3\pi$ d) $2\pi$ e) $\pi$

23) (ITA-99) Pelo ponto C: (4, -4) são traçadas duas retas que tangenciam a parábola $y = (x-4)^2 + 2$ nos pontos A e B. A distância do ponto C à reta determinada por A e B é:

a) $6\sqrt{12}$ b) $\sqrt{12}$ c) 12 d) 8 e) 6

24) (ITA-99) Duas circunferências de raios iguais a 9 m e 3m são tangentes externamente num ponto C. Uma reta tangencia estas duas circunferências nos pontos distintos A e B. A área, em $m^2$, do triângulo ABC é:

a) ( ) $27\sqrt{3}$ b) ( ) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ c) ( ) $9\sqrt{3}$

d) ( ) $27\sqrt{2}$ e) ( ) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

25) (ITA-99) Um triedro tri-retângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com

lados medindo 8m, 10m, e 12m. O volume, em m$^3$, do sólido formado é:
a) ( ) $15\sqrt{6}$ b) ( ) $5\sqrt{30}$ c) ( ) $6\sqrt{15}$
d) ( ) $30\sqrt{6}$ e) ( ) $45\sqrt{6}$

## ITA - 2000

**01** (ITA–00) Sejam $f, g: R \to R$ definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = 10^{3\cos 5x}$. Podemos afirmar que:
**(A)** $f$ é injetora e par e $g$ é ímpar.
**(B)** $g$ é sobrejetora e $g \circ f$ é par.
**(C)** $f$ é bijetora e $g \circ f$ é ímpar.
**(D)** $g$ é par e $g \circ f$ é impar.
**(E)** $f$ é ímpar e $g \circ f$ é par.

**02** (ITA–00) Denotemos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito $X$. Sejam $A, B$ e $C$ conjuntos tais que $n(A \cup B)$=8, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$. Então $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a :

**(A)** 11 **(B)** 14 **(C)** 15 **(D)** 18 **(D)** 25

**03** (ITA–00) Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{20} \frac{20!}{n!(20-n)!} x^n$ uma função real de variável real em que $n!$ indica o fatorial de $n$. Considere as afirmações:
**(I)** $f(1) = 2$. **(II)** $f(-1) = 0$. **(III)** $f(-2) = 1$.
Podemos concluir que :
**(A)** Somente as afirmações I e II são verdadeiras.
**(B)** Somente as afirmações I e III são verdadeiras.
**(C)** Apenas a afirmação I é verdadeira.
**(D)** Apenas a afirmação II é verdadeira.
**(E)** Apenas a afirmação III é verdadeira.

**04** (ITA–00) Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos $1,2,3,4,5$ e $6$, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?
**(A)** 144 **(B)** 180 **(C)** 240 **(D)** 288 **(E)**360

**05** (ITA–00) Sendo 1 e $1+2i$ raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, em que $a, b$ e $c$ são números reais, então:
**(A)** $b + c = 4$ **(B)** $b + c = 3$ **(C)** $b + c = 2$
**(D)** $b + c = 1$ **(E)** $b + c = 0$

**06** (ITA–00) A soma das raízes reais e positivas da equação $4^{x^2} - 5 \cdot 2^{x^2} + 4 = 0$ vale:

**(A)** 2 **(B)** 5 **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 1 **(E)** $\sqrt{3}$

**07** (ITA–00) Sendo $I$ um intervalo de números reais com extremidades em $a$ e $b$ m com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de $I$.
Considere a inequação:
$$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$$
A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a:
**(A)** $\frac{3}{4}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{7}{3}$ **(D)** $\frac{11}{6}$ **(E)** $\frac{7}{6}$

**08** (ITA–00) Seja $S = [-2, 2]$ e considere as afirmações:
**(I)** $\frac{1}{4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^x < 6$, para todo $x \in S$.
**(II)** $\frac{1}{\sqrt{32 - 2^x}} < \frac{1}{\sqrt{32}}$, para todo $x \in S$.
**(III)** $2^{2x} - 2^x \le 0$, para todo $x \in S$.

Então, podemos afirmar que:
**(A)** Apenas I é verdadeira.
**(B)** Apenas III é verdadeira.
**(C)** Somente I e II são verdadeiras.
**(D)** Apenas II é falsa.
**(E)** Todas as afirmações são falsas.

**09** (ITA–00) Seja $z_0$ o número complexo $1+i$. Sendo $S$ o conjunto solução no plano complexo de $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$, então o produto dos elementos de $S$ é igual a :
**(A)** $4(1-i)$ **(B)** $2(1+i)$ **(C)** $2(i-1)$
**(D)** $-2i$ **(E)** $2i$

**10** (ITA–00) Considere $f: R \to R$ definida por $f(x) = 2\,\text{sen}\,3x - \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$. Sobre $f$ podemos afirmar que:
**(A)** É uma função par.
**(B)** É uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi$.
**(C)** É uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.
**(D)** É uma função periódica de período fundamental $2\pi$.
**(E)** Não é par, não é ímpar e não é periódica.

**11** (ITA–00) O valor de n que torna a seqüência
(2+3n, -5n, 1-4n)
uma progressão aritmética pertence ao intervalo:
**(A)** $[-2, -1]$ **(B)** $[-1, 0]$ **(C)** $[0, 1]$

**(D)** $[1, 2]$ **(E)** $[2, 3]$

**12** (ITA–00) Considere um triângulo isósceles $ABC$, retângulo em $A$. Seja $D$ a intersecção da bissetriz do ângulo $\hat{A}$ com o lado $\overline{BC}$ e $E$ um ponto da reta suporte do cateto $\overline{AC}$ de tal modo que os segmentos de reta $\overline{BE}$ e $\overline{AD}$ sejam paralelos. Sabendo que $\overline{AD}$ mede $\sqrt{2}\,cm$, então a área do círculo inscrito no triângulo $EBC$ é:

**(A)** $\pi(4-2\sqrt{3})\,cm^2$ **(B)** $2\pi(3-2\sqrt{2})\,cm^2$
**(C)** $3\pi(4-2\sqrt{3})\,cm^2$ **(D)** $4\pi(3-2\sqrt{2})\,cm^2$
**(E)** $\pi(4-2\sqrt{2})\,cm^2$

**13** (ITA–00) A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos $A:(2,1)$ e $B:(3,-2)$. Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abcissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são:

**(A)** $(-1/2,0)$ ou $(5,0)$. **(B)** $(-1/2,0)$ ou $(4,0)$.
**(C)** $(-1/3,0)$ ou $(5,0)$. **(D)** $(-1/3,0)$ ou $(4,0)$.
**(E)** $(-1/5,0)$ ou $(3,0)$.

**14** (ITA–00) Um cilindro circular reto é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo. A secção fica a $5cm$ do eixo e separa na base um arco de 120º. Sendo de $30\sqrt{3}\,cm^2$ a área da secção plana regular, então o volume da parte menor do cilindro seccionado mede, em $cm^3$:

**(A)** $30\pi-10\sqrt{3}$ **(B)** $30\pi-20\sqrt{3}$
**(C)** $20\pi-10\sqrt{3}$ **(D)** $50\pi-25\sqrt{3}$
**(E)** $100\pi-75\sqrt{3}$

**15** (ITA–00) Um cone circular reto com altura de $\sqrt{8}\,cm$ cm e raio da base de $2\,cm$ está inscrito numa esfera que, por sua vez, está inscrita num cilindro. A razão entre as áreas das superfícies totais do cilindro e do cone é igual a :

**(A)** $\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)$ **(B)** $\frac{9}{4}(\sqrt{2}-1)$ **(C)** $\frac{9}{4}(\sqrt{6}-1)$
**(D)** $\frac{27}{8}(\sqrt{3}-1)$ **(E)** $\frac{27}{16}(\sqrt{3}-1)$

**16** (ITA–00) Duas retas $r_1$ e $r_2$ são paralelas à reta $3x-y=37$ e tangentes à circunferência $x^2-y^2-2x-y=0$. Se $d_1$ é a distância de $r_1$ até a origem e $d_2$ a distância de $r_2$ até a origem, então $d_1+d_2$ é igual a :

**(A)** $\sqrt{12}$ **(B)** $\sqrt{15}$ **(C)** $\sqrt{7}$
**(D)** $\sqrt{10}$ **(E)** $\sqrt{5}$

**17** (ITA–00) Sabe-se que $x$ é um número real pertencente a ao intervalo $]0, 2\pi[$ e que o triplo da sua secante, somado ao dobro da sua tangente, é igual a 3. Então, cosseno de $x$ é igual a :

**(A)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{2}{7}$ **(C)** $\frac{5}{13}$ **(D)** $\frac{15}{26}$ **(E)** $\frac{13}{49}$

**18** (ITA–00) Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x-1$. Dividindo-o por $x^2+x$, obtêm-se o quociente $Q(x)=x^2-3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4)=10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é igual a :

**(A)** –5 **(B)** –3 **(C)** –1 **(D)** 1 **(E)** 3

**19** (ITA–00) Considere as matrizes

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Se $X$ é solução de $M^{-1}NX=P$, então $x^2+y^2+z^2$ é igual a:

**(A)** 35 **(B)** 17 **(C)** 38 **(D)** 14 **(E)** 29

**20** (ITA–00) Sendo $x$ um número real positivo, considere as matrizes

$$A=\begin{pmatrix}\log_{1/3}x & \log_{1/3}x^2 & 1\\ 0 & -\log_3 x & 1\end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & \log_{1/3}x^2\\ 1 & 0\\ -3\log_{1/3}x & -4\end{pmatrix}$$

A soma de todos os valores de $x$ para os quais $(AB)=(AB)^T$ é igual a :

**(A)** $\frac{25}{3}$ **(B)** $\frac{28}{3}$ **(C)** $\frac{32}{3}$ **(D)** $\frac{27}{2}$ **(E)** $\frac{25}{2}$

**21** (ITA–00) Considere as matrizes

$$M=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 1\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

em que $a \neq 0$ e $a, b$ e $c$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2$ e $\lambda_3$ as raízes da equação $\det(M - \lambda I) = 0$. Se

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 7a$,

então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a :

**(A)** $\frac{21}{8}$ **(B)** $\frac{91}{9}$ **(C)** $\frac{36}{9}$ **(D)** $\frac{21}{16}$ **(E)** $\frac{91}{36}$

**22** (ITA–00) Num triângulo acutângulo $ABC$, o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ mede $5cm$. Sabendo:

$\hat{A} = \arccos\frac{3}{5}$ e $\hat{C} = \text{arcsen}\frac{2}{\sqrt{5}}$,

então a área do triângulo ABC é igual a :

**(A)** $\frac{5}{2}cm^2$ **(B)** $12\,cm^2$ **(C)** $15\,cm^2$

**(D)** $2\sqrt{5}\,cm^2$ **(E)** $\frac{25}{2}cm^2$

**23** (ITA–00) Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base $6cm$ e altura de $4cm$. Seja $t$ a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de $t$ compreendido entre os lados do triângulo mede :

**(A)** $1cm$ **(B)** $1{,}5cm$ **(C)** $2cm$

**(D)** $2{,}5cm$ **(E)** $3cm$

**24** (ITA–00) Considere uma pirâmide regular com altura de $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}cm$. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a :

**(A)** $2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6})\,cm$ **(B)** $2(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2})\,cm$

**(C)** $2(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3})\,cm$ **(D)** $2(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})\,cm$

**(E)** $2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3})\,cm$

**25** (ITA–00) Para x no intervalo $[0, \pi/2]$, o conjunto de todas as soluções da inequação

$$\text{sen}(2x) - \text{sen}(3x + \frac{\pi}{2}) > 0$$

é o intervalo definido por

**(A)** $\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$ **(B)** $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$

**(C)** $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ **(D)** $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ **(E)** $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

## ITA – 2001

1. (ITA – 01) Se a $\in$ R é tal que $3y^2 - y + a = 0$ tem raiz dupla, então a solução da equação $3^{2x+1} - 3^x + a = 0$
a) $\log_2 6$ b) $-\log_2 6$ c) $\log_3 6$ d) $-\log_3 6$ e) $1 - \log_3$

2. (ITA – 01) O valor da soma a + b para que as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$ estejam em progressão aritmética de razão 1/2 é.
a) 36 b) 41 c) 26 d) –27 e) –20

3. (ITA – 01) Se $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z.\overline{w} = 1$ e $\alpha \in [0, 2\pi]$ é um argumento de z, w, então $\alpha$ é igual a:
a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\pi$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{3}$ e) $\frac{3\pi}{2}$

4. (ITA – 01) O número complexo
$z = \frac{1+\cos\alpha}{sen\alpha.\cos\alpha} + i.\frac{1-2.\cos\alpha+2sen\alpha}{sen\alpha}$; $\alpha \in\ ]0, \pi/2[$ tem argumento $\pi/4$. Neste caso, $\alpha$ é igual a:
a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{5}$ e) $\frac{\pi}{9}$

5. (ITA – 01) Um triângulo tem lados medindo 3, 4 e 5 centímetros. A partir dele, constrói-se uma seqüência de triângulos dos seguinte modo: os pontos médios dos lados de um triângulo são os vértices do seguinte. Dentre as alternativas abaixo, o valor em centímetros quadrados que está mais próximo da soma das áreas dos 78 primeiros triângulos assim construídos, incluindo o triângulo inicial, é:
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

6. (ITA – 01) Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x + y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de *m* elementos, tomados 2 a 2, é:
a) 80 b) 90 c) 70 d) 100 e) 60

7. (ITA – 01) A respeito das combinações $a_n = \binom{2n}{n}$ e $b_n = \binom{2n}{n-1}$ temos que, para cada n = 1, 2, 3, ... , a diferença $a_n - b_n$ é igual a:
a) $\frac{n!}{n+1}a_n$ b) $\frac{2n}{n+1}a_n$ c) $\frac{n}{n+1}a_n$
b) d) $\frac{2}{n+1}a_n$ e) $\frac{1}{n+1}a_n$

8. (ITA – 01) Sejam A e B matrizes n x n , e B uma matriz simétrica. Dadas as afirmações:
I. $AB + BA^T$ é simétrica.
II. $(A + A^T + B)$ é simétrica.
III. $ABA^T$ é simétrica.

*temos que:*
a) apenas I é verdadeira

**Provas ITA**

b) apenas II é verdadeira
c) apenas III é verdadeira
d) apenas I e III são verdadeiras
e) todas as afirmações são verdadeiras

9. (ITA – 01) Considere a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$

*A soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de A é:*
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10. (ITA – 01) Sendo $\alpha$ e $\beta$ os ângulos agudos de um triângulo retângulo, e sabendo que $sen^2 2\beta - 2\cos 2\beta = 0$, então sen $\alpha$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$ d) $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$ e) zero

11. (ITA – 01) O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone. Sabendo-se que o volume do cone é $128m^3$, temos que o raio da base e altura do cone medem, respectivamente, em metros:
a) 9 e 8 b) 8 e 6 c) 8 e 7 d) 9 e 6 e) 10 e 8

12. (ITA – 01) De dois polígonos convexos, um tem a mais que outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:
a) 53 b) 65 c) 66 d) 70 e) 77

13. (ITA – 01) Seja o ponto A = (r , 0) , r > 0. O lugar geométrico dos pontos P = (x ,y) tais que é de $3r^2$ a diferença entre o quadrado da distância de P e A e o dobro do quadrado da distância de P à rota y = – r é:
a) uma circunferência centrada em (r, –2r) com raio r.
b) uma elipse centrada em (r, –2r) com semi-eixos valendo re 2r.
c) uma parábola com vértice em (r, –r)
d) duas retas paralelas distando r $\sqrt{3}$ uma da outra.
e) uma hipérbole centrada em (r, –2r) com semi-eixos valendo r.

14. (ITA – 01) Sejam X, Y e Z subconjuntos próprios de R, não-vazios. Com respeito às afirmações:
I. $x \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup Y^C)^C\}$
II. Se $Z \subset X$ então $(Z \cup Y) \cup (X \cup (Z^C \cap Y)\} = X \cup Y$.
III. Se $(X \cup Y)^C \subset Z$ então $Z^C \subset X$.
temos que:
a) apenas I é verdadeira
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) apenas I e III são verdadeiras.
d) apenas II e III são verdadeiras
e) todas são verdadeiras.

15. (ITA – 01) Se f : ]0, 1[ $\rightarrow$ R é tal que, $\forall x \in$ ]0,1[,...

$|f(x)| < \frac{1}{2}$ e f(x) = $\frac{1}{4} + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$

então a desigualdade válida para qualquer n = 1, 2, 3, ...e 0 < x < 1 é:

a) $|f(x)| + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$ d) $|f(x)| > \frac{1}{2^n}$

b) $\frac{1}{2^n} \le |f(x)| \le \frac{1}{2}$ e) $|f(x)| < \frac{1}{2^n}$

c) $\frac{1}{2^{n+1}} < |f(x)| < \frac{1}{2}$

16. (ITA – 01) Considere as funções f(x) = $\frac{5+7^x}{4}$, g(x) = $\frac{5\ \ 7^x}{4}$ e h(x) = arctg a:
Se $\alpha$ é tal que h (f(a)) + h(g(a) = $\pi$ /4, então f(a) – g(a) vale:
a) 0 b) 1 c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{7}{2}$ e) 7

17. (ITA – 01) O conjunto de todos os valores de *m* para os quais a função

f(x) = $\frac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+1)x + (m^2+2)}}$

está definida e é não negativa para todo x real é:

a) [ $\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$ [ b) ]1/4,$\infty$[ c) ] 0,$\frac{7}{4}$ [ d) ]-$\infty$, 1/4 ] e) ]1/4,7/4[

18. (ITA – 01) A parte imaginária de
$((1 + \cos 2x) + i\ sen\ 2x)^k$, k inteiro positivo, x real é
a) 2 $sen^k$ x. $\cos^k$ x b) $sen^k$x. $\cos^k$x
c) $2^k$sen kx. $\cos^k$x d) $2^k$ $sen^k$x. $\cos^k$x
e) sen kx . $\cos^k$x

19. (ITA – 01) O polinômio com coeficientes reais
$P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e i. Então, a soma dos coeficientes é igual a:
a) –4 b) –6 c) –1 d) 1 e) 4

20. (ITA – 01) Seja m $\in$ R, m > 0. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x - (\log_4 m)y + 5z = 0 \\ (\log_2 m)x + y - 2z = 0 \\ x + y - (\log_2 m^2)z = 0 \end{cases}$$

O produto dos valores de m para os quais o sistema admite solução não-trivial é:
a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 2 $\log_2 5$

21. (ITA – 01) Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?
a) 375 b) 465 c) 545 d) 585 e) 625

22. (ITA – 01) Sendo dado
$\ln\left(2\sqrt{4}\sqrt[3]{6}\sqrt[4]{8}\ldots\sqrt[n]{2n}\right) = a_n$ e $\ln\left(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\ldots\sqrt[2n]{2n}\right) = b_n$
então,
$\frac{\ln 2}{2}\ \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4}\ \frac{\ln 5}{5} + \ldots + \frac{\ln 2n}{2n}$
é igual a:
a) $na - 2b_n$ b) $2^a{}_n - b_n$ c) $na - b_n$
d) $b_n - na$ e) $na + b_n$

23. (ITA – 01) A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de 12 $m^3$, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

24. (ITA – 01) Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se r é o raio da circunferência inscrita e *a* é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma *a* + *r* (em cm) é igual a:
a) 12 b) 11 c) 10 d) 9 e) 8

25. (ITA – 01) coeficiente angular da reta tangente à elipse
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$
no primeiro quadrante e que corta o eixo das abscissas no ponto P = (8, 0) é:
a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

## ITA – 2002

**1.** Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:
I. Se x > 4 e y < 2, então $x^2 - 2y > 12$.
II. Se x > 4 ou y < 2, então $x^2 - 2y > 12$.
III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.
Então, destas é(são) verdadeira(s)
a) apenas I. b) apenas I e II. c) apenas I e III.
d) apenas I e III. e) todas.

**2.** Sejam ***a, b, c*** reais não-nulos e distintos, c > 0. Sendo par a função dada por: $f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$, $-c < x < c$, então ***f(x)***, para $-c < x < c$, , é constante e igual a
a) ***a + b*** b) ***a + c*** c) ***c*** d) ***b*** e) ***a***

**3.** Os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a função real dada por $f(x)=\sqrt{5-\left||2x-1|-6\right|}$ está definida, formam o conjunto
a) [0, 1] b) [-5, 6] c) $[-5, 0] \cup [1, \infty)$
d) $(-\infty, 0] \cup [1, 6]$ e) $[-5, 0] \cup [1, 6]$

**4.** Sejam a equação em $\mathbb{C}$ : $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Qual dentre as alternativas abaixo é igual à soma de duas das raízes dessa equação?
a) $2\sqrt{3}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) –i e) i/2

**5.** Sejam ***A*** um conjunto com 8 elementos e ***B*** um conjunto tal que ***A*** ∪ ***B*** contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de P***(B \ A)*** ∪ ***P (∅)*** é igual a
a) 8 b) 16 c) 20 d) 17 e) 9

**6.** Sejam *f* e *g* duas funções definidas por: $f(x) = (\sqrt{2})^{3\text{sen } x - 1}$ e $g(x) = (½)^{3.\text{sen}^2 x - 1}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$. A soma do valor mínimo de ***f*** com o valor mínimo de ***g*** é igual a:
a) 0 b) – ¼ c) ¼ d) ½ e) 1

**7.** Seja $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ dada por: $f(x) = \{y \in \mathbb{R};\ \text{sen } y < x\}$
Se A é tal que $f(x) = \mathbb{R}$, $\forall\, x \in A$, então
a) $A = [-1, 1]$ b) $A = [a, \infty)$, $\forall$ a > 1
c) $A = [a, \infty)$, $\forall$ a ≥ 1 d) $A = (-\infty, a]$, $\forall$ a < – 1
e) $A = (-\infty, a]$, $\forall$ a ≤ – 1

**8.** A divisão de um polinômio f(x) *por (x – 1)(x – 2)* tem resto *x + 1*. Se os restos das divisões de *f(x)* por *x – 1* e *x – 2* são, respectivamente, os números *a* e *b*, então $a^2 + b^2$ vale
a) 13 b) 5 c) 2 d) 1 e) 0

**9.** Sabendo que a equação $x^3 - px^2 = q^m$, p,q > 0, q ≠ 1, m ∈ ℵ, possui três raízes reais positivas a,b e c, então $\log_q\left[abc\left(a^2+b^2+c^2\right)^{a+b+c}\right]$ é igual a
a) $2m+p\log_q p$ b) $m+2p\log_q p$ c) $m+p\log_q p$
d) $m-p\log_q p$ e) $m-2p\log_q p$

**10.** Dada a função quadrática $f(x)=x^2\ln\frac{2}{3}+x\ln 6-\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$ temos que
a) a equação f(x)=0 não possui raízes reais
b) a equação f(x) =0 possui duas raízes reais distintas e o gráfico de f possui concavidade para cima
c) a equação f(x) =0 possui duas raízes reais iguais e o gráfico de f possui concavidade para baixo
d) o valor máximo de f é $\frac{\ln 2.\ln 3}{\ln 3-\ln 2}$
e) o valor máximo de f é $2\frac{\ln 2.\ln 3}{\ln 3-\ln 2}$

**11.** Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras *a, b* e *c*?
a) 1692 b) 1572 c) 1520 d) 1512 e) 1392

**12.** O seguinte trecho de artigo de um jornal local relata uma corrida beneficente de bicicletas: "Alguns segundos após a largada, Ralf tomou a liderança, seguido de perto por David e Rubinho, nesta ordem. Daí em diante, eles não mais deixaram as primeiras três posições e, em nenhum momento da corrida, estiveram lado a lado mais do que dois competidores. A liderança, no entanto, mudou de mãos nove vezes entre os três, enquanto que em mais oito ocasiões diferentes aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si. Após o término da corrida, Rubinho reclamou para nossos repórteres que David havia conduzido sua bicicleta de forma imprudente pouco antes da bandeirada de chegada. Desse modo, logo atrás de David, Rubinho não pôde ultrapassa-lo no final da corrida."
Com base no trecho acima, você conclui que
a) David ganhou a corrida.
b) Ralf ganhou a corrida.
c) Rubinho chegou em terceiro lugar.
d) Ralf chegou em terceiro lugar.

e) não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

**13.** Seja a matriz: $\begin{bmatrix} \cos 25^o & sen\, 65^o \\ sen\, 120^o & \cos 390^o \end{bmatrix}$ O valor de seu determinante é

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1 e) 0

**14.** Sejam ***A*** e ***B*** matrizes quadradas de ordem ***n*** tais que ***AB = A*** e ***BA = B***. Então, $\left[(A+B)^t\right]^2$ é igual a

a) $(A + B)^2$ b) $2(A^t + B^t)$ c) $2(A^t + B^t)$
d) $A^t + B^t$ e) $A^t B^t$

15. Seja ***A*** uma matriz real ***2 x 2***. Suponha que $\alpha$ e $\beta$ sejam dois números distintos, e ***V*** e ***W*** duas matrizes reais ***2 x 1*** não-nulas, tais que: $AV = \alpha V$ e $AW = \beta W$. Se a, b $\in \mathbb{R}$ são tais que ***aV + bW*** é igual à matriz nula ***2 x 1***, então ***a + b*** vale

a) 0 b) 1 c) –1 d) ½ e) – ½

**16.** O triângulo ABC, inscrito numa circunferência, tem um lado medindo $(20/\pi)$cm, cujo ângulo oposto é de 15º. O comprimento da circunferência, em cm, é

a) $20\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$ b) $400(2+\sqrt{3})$ c) $80(1+\sqrt{3})$
d) $10(2+\sqrt{3}+5)$ e) $20(1+\sqrt{3})$

**17.** Num sistema de coordenadas cartesianas, duas retas ***r*** e ***s***, com coeficientes angulares 2 e 1/2, respectivamente, se interceptam na origem O. Se B $\in$ r e C $\in$ s são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular a r e a área do triângulo OBC é igual a 12 x $10^{-1}$, então a distância de B ao eixo das ordenadas vale

a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{5}$ e) 1

**18.** Seja k > 0 tal que a equação $(x^2 - x) + k(y^2 - y) = 0$ define uma elipse com distância focal igual a 2. Se (p, q) são as coordenadas de um ponto da elipse, com $q^2 - q \neq 0$, então $\frac{p-p^2}{q^2-q}$ é igual a

a) $2 + \sqrt{5}$ b) $2 - \sqrt{5}$ c) $2 + \sqrt{3}$
d) $2 - \sqrt{3}$ e) 2

**19.** Considere a região do plano cartesiano ***xy*** definida pela desigualdade: $x^2 + 4x + y^2 - 4y - 8 \leq 0$. Quando esta região rodar um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos em torno da reta x + y = 0, ela irá gerar um sólido de superfície externa total com área igual a

a) $\frac{128}{3}\pi$ b) $\frac{128}{4}\pi$ c) $\frac{128}{5}\pi$ d) $\frac{128}{6}\pi$ e) $\frac{128}{7}\pi$

**20.** Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja 1/8 do volume da pirâmide original?

a) 2 m b) 4 m c) 5 m d) 6 m e) 8 m

**21.** Seja a função f dada por

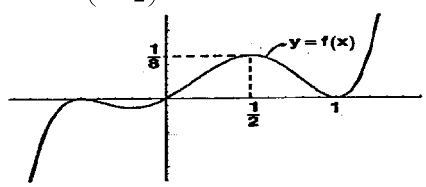
$f(x) = (\log_3 5) \cdot \log_5 8^{x-1} + \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}$.

Determine todos os valores de x que tornam f não-negativa.

**22.** Mostre que: $\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4}$, para quaisquer x e y reais positivos.

Obs.: $C_{n,p}$ denota a combinação de n elementos tomados p a p.

**23.** Com base no gráfico da função polinomial y = f(x) esboçado abaixo, responda qual é o resto da divisão de f(x) por $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$.




**24.** Sejam a e b dois números complexos não-nulos, tais que $a^2 + b^2 = 0$. Se z, w $\in$ C satisfazem

$$\begin{cases} \bar{z}w + z\bar{w} = 6a \\ \bar{z}w - z\bar{w} = 8b \end{cases}$$

determine o valor de |a| de forma que |z w| = 1.

**25.** 1. Mostre que se uma matriz quadrada não-nula A satisfaz a equação $A^3 + 3A^2 + 2A = 0$ (1) então $(A + I)^3 = (A+I)$, em que I é a matriz identidade.

2. Sendo dado que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

satisfaz à equação (1) acima, encontre duas matrizes não-nulas B e C tais que $B^3 + C^3 = B + C = A$. Para essas matrizes você garante que o sistema de equações

$$(B-C)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem solução (x, y) $\neq$ (0, 0)? Justifique.

**26.** Sejam n $\geq$ 2 números reais positivos $a_1, a_2, \ldots a_n$ que formam uma progressão aritmética de razão positiva. Considere $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e responda, justificando: Para todo n $\geq$ 2, qual é o maior entre os números $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$ e $\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^{\ 2}$?

**27.** Considere n pontos distintos $A_1, A_2, \ldots A_n$ sobre uma circunferência de raio unitário, de forma que os comprimentos dos arcos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ formam uma progressão geométrica de termo inicial $\pi$ e razão $\frac{1}{2}$. Para que os valores de $n \in N$ teremos o comprimento do arco $A_nA_1$ menor que $\frac{1}{512}$ do comprimento da circunferência?
Obs.: Para todo arco $A_kA_l$, o comprimento considerado é o do arco que une o ponto $A_k$ ao ponto $A_l$ no sentido anti-horário.

**28.** Seja S a área total da superfície de um cone circular reto de altura h, e seja m a razão entre as áreas lateral e da base desse cone. Obtenha uma expressão que forneça h em função apenas de S e m.

**29.** Considere o seguinte raciocínio de cunho cartesiano: "Se a circunferência de centro C = (h, 0) e raio r intercepta a curva $y = +\sqrt{x}$, x > 0, no ponto $A = (a, \sqrt{a})$ de forma que o segmento $\overline{AC}$ seja perpendicular à reta tangente à curva em A, então x = a é raiz dupla da equação em x que se obtém da intersecção da curva com a circunferência."
Use este raciocínio para mostrar que o coeficiente angular dessa reta tangente em A é $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

**30.** Se x, y e z são os ângulos ABC e $\text{sen } x = \frac{\text{sen } y + \text{sen } z}{\cos y + \cos z}$, prove que o triângulo ABC é retângulo.

## ITA – 2003

**NOTAÇÕES**

C: conjunto dos números complexos.
R: conjunto dos números reais.
Z: conjunto dos números inteiros.
N = {0, 1, 2, 3,...}.
N* = {1, 2, 3,...}.
$\bar{z}$ : conjunto do número $z \in C$.
i : unidade imaginária; $i^2 = -1$.
arg z : um argumento de $z \in C \setminus \{0\}$.
$[a, b] = \{x \in R \,;\, a \le x \le b\}$.
$]a, b[ = \{x \in R \,;\, a < x < b\}$.
$\varnothing$ : conjunto vazio.
$A \setminus B = \{x \in A \,;\, x \notin B\}$.
$X^C = U \setminus X$, para $X \subset U$, $U \neq \varnothing$.
I : matriz identidade n x n.
$A^{-1}$ : inversa da matriz inversível A.
$A^T$ : transposta da matriz A.
$\overline{AB}$ : segmento de reta unindo os pontos A e B.
m ($\overline{AB}$) : medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

**01.** Seja $z \in C$. Das seguintes afirmações independentes:

I. Se $\omega = \frac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$, então $\bar{\omega} = \frac{-2i\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|}$.

II. Se $z \neq 0$ e $\omega = \frac{2iz + 3i + 3}{(1+2i)z}$, então $|\omega| \le \frac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,|z|}$.

III. Se $\omega = \frac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i}$, então 2 arg z + $\frac{\pi}{12}$ é um argumento de $\omega$.

é (são) verdadeira(s):
a) todas. b) apenas I e II. c) apenas II e III.
d) apenas I e III. e) apenas II.

**02.** O valor de $y^2 - xz$ para o qual os números $\text{sen}\frac{\pi}{12}$, x , y, z e sen 75°, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, é:

a) $3^{-4}$ b) $2^{-6}$ c) $6^{-2}$ d) $2^{-5}$ e) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

**03.** Considere a função
$$f : Z \setminus \{0\} \to R,\ f(x) = \sqrt{3^{x-2}}\left(9^{2x+1}\right)^{1/(2x)} - \left(3^{2x+5}\right)^{1/x} + 1$$
A soma de todos os valores de x para os quais a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tem raiz dupla é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 6

**04.** Considere uma função $f : R \to R$ não-constante e tal que $f(x + y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in R$.
Das afirmações:
I. $f(x) > 0$, $\forall x \in R$.
II. $f(nx) = [f(x)]^n$, $\forall x \in R$, $\forall n \in N^*$.
III. f é par.
é (são) verdadeira(s):
a) apenas I e II. b) apenas II e III.
c) apenas I e III. d) todas. e) nenhuma.

**05.** Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, cujos coeficientes 2, $a_2, \ldots, a_n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão q > 0. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que P(2) = 5460, tem-se que o valor de $\frac{n^2 - q^3}{q^4}$ é igual a:

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{11}{6}$ e) $\frac{15}{8}$

**06.** Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por (x - 1), obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se P(x) por (x+1), obtém-se resto igual a 3. Sabendo que P(x) é divisível por (x - 2), tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

a) -6 b) -4 c) 4 d) 7 e) 9

**07.** Das afirmações abaixo sobre a equação
$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e suas soluções no plano complexo:
I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais.
II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.

III. Se $n \in N^*$ e $r$ é uma raiz qualquer desta equação, então $\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{3}\right|^k < \frac{1}{2}$. É (São) verdadeiras(s):

a) nenhuma. b) apenas I. c) apenas II.
d) apenas III. e) apenas I e III.

**08.** Seja $k \in R$ tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira $x_1$ e uma raiz $x_2$, distinta de $x_1$. Então, $(k + x_1)\, x_2$ é igual a:

a) -6 b) -3 c) 1 d) 2 e) 8

**09.** Considere o conjunto $S = \{(a, b) \in N \times N : a + b = 18\}$. A soma de todos os números da forma $\frac{18!}{a!b!}$, $\forall$ (a, b) $\in$ S, é:

a) $8^6$ b) 9! c) $9^6$ d) $12^6$ e) 12!

**10.** O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

a) 24 b) 36 c) 48 d) 54 e) 72

**11.** Sejam A e P matrizes n x n inversíveis e $B = P^{-1}AP$. Das afirmações:

I. $B^T$ é inversível e $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.
II. Se A é simétrica, então B também o é.
III. $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$, $\forall \lambda \in R$.

é (são) verdadeira(s):

a) todas. b) apenas I. c) apenas I e II.
d) apenas I e III. e) apenas II e III.

**12.** O número de todos os valores de $a \in [0,2\pi]$, distintos, para os quais o sistema nas incógnitas x, y e z, dado por

$$\begin{cases} -4x + y - 6z = \cos 3a \\ x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases}$$

, é possível e não-homogêneo, é igual a:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

**13.** Para todo $x \in R$, a expressão $[\cos(2x)]^2\,[\operatorname{sen}(2x)]^2 \operatorname{sen} x$ é igual a:

a) $2^{-4}[\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(7x)]$.
b) $2^{-4}[2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(7x) - \operatorname{sen}(9x)]$.
c) $2^{-4}[-\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(7x)]$.
d) $2^{-4}[-\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(5x) - \operatorname{sen}(9x)]$.
e) $2^{-4}[\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x)]$.

**14.** Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0,\pi]$, respectivamente. Com respeito à função $f : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$, temos que:

a) f é não-crescente e ímpar.
b) f não é par nem ímpar. c) f é sobrejetora.
d) f é injetora. e) f é constante.

**15.** Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:

a) de uma elipse. b) de uma parábola.
c) de uma hipérbole. d) de duas retas concorrentes.
e) da reta y = - x.

**16.** A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\{(x, y) \in IR^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$, é igual a:

a) $\sqrt{6}$ b) 5/2 c) $2\sqrt{2}$ d) 3 e) 10/3

**17.** Sejam r e s duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de r. A área do triângulo equilátero PQR, cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, é igual, em $cm^2$, a :

a) $3\sqrt{15}$ b) $7\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{6}$ d) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ e) $\frac{7}{2}\sqrt{15}$

**18.** Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3780°. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a :

a) 63 b) 69 c) 90 d) 97 e) 106

**19.** Considere o triângulo isósceles *OAB*, com lados *OA e* $\overline{OB}$ de comprimento $\sqrt{2}$ R e lado $\overline{AB}$ de comprimento 2R. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por *O* e é paralela ao lado $\overline{AB}$, é igual a :

a) $\pi R^3/2$ b) $\pi R^3$ c) $4\pi R^3/3$ d) $\sqrt{2}\,\pi R^3$ e) $\sqrt{3}\,\pi R^3$

**20.** Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual a 8 $cm^2$. A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a:

a) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ b) $\frac{5\sqrt{6}}{9}$ c) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{7}{5}$ e) $\sqrt{3}$

**21.** Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U$, $B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I - Se $A \cap B = \phi$, então $B \subset A^c$.
II - $B \setminus A^c = B \cap A$.

**22.** Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número

$$\omega = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}}$$

pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

**23**. Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eléia, filósofo grego do século V A.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes $v_A$ e $v_T$, com $0 < v_T < v_A$. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante t = 0 a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos $t_1, t_2, t_3, \ldots$ que Aquiles precisa para percorrer as distâncias $d_1, d_2, d_3, \ldots$, respectivamente, sendo que, para todo $n \geq 2$, $d_n$ denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante $\sum_{k=1}^{n-1} t_k$ da corrida. Verifique que os termos $t_k$, k = 1, 2, 3, ..., formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

**24**. Mostre que toda função f: IR \ {0} $\rightarrow$ IR, satisfazendo f(xy) = f(x) + f(y) em seu domínio é par.

**25.** Sejam a, b, c e d constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$ por $P_4(x) = x^2 - x + 2$ tem resto igual a –5, determine o valor de a + b + c + d.

**26.** Sejam a, b, c e d números reais não–nulos. Exprima o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$

na forma de um produto de números reais.

**27.** Encontre todos os valores de $a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ para os quais a equação na variação real x,

$$\text{arctg}\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right) + \text{arctg}\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right) = a,$$ admite solução.

**28.** Sabe–se que uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e que a reta de equação $3x + 2y = 6$ é tangente à elipse no ponto P. Determine as coordenadas de P.

**29.** Considere um quadrado ABCD. Sejam E o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e F um ponto sobre o segmento $\overline{CE}$ tal que $m(\overline{BC}) + m(\overline{CF}) = m(\overline{AF})$. Prove que $\cos \alpha = \cos 2\beta$, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

**30.** Quatro esferas de mesmo raio R > 0 são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento 2R. Determine, em função de R, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

## ITA – 2004

**1.** Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto *U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}:*

I. $\varnothing \in U \quad e \quad n(U) = 10$.

II. $\varnothing \subset U \quad e \quad n(U) = 10$.

III. $5 \in U \quad e \quad \{5\} \subset U$.

IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)
a) apenas I e III. b) apenas II e IV.
c) apenas II e III. d) apenas IV. e) todas as afirmações.

**2.** Seja o conjunto $S=\{r \in Q: r \geq 0 \text{ e } r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I. $\frac{5}{4} \in S \quad e \quad \frac{7}{5} \in S$.

II. $\{x \in R: 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \varnothing$.

III. $\sqrt{2} \in S$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas
a) I e II. b) I e III. c) II e III. d) I. e) II.

**3.** Seja $\alpha$ um número real, com $0 < \alpha < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de *x* tais que $\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$.

a) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ b) $]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$
c) $]0, 2[$ d) $]-\infty, 0[$ e) $]2, +\infty[$

**4.** Considere a função *f:R→C, f(x)=2cosx+2isenx*. Então, $\forall$ *x, y* $\in$ *R*, o valor do produto *f(x)f(y)* é igual a
a) *f(x+y)* b) *2 f(x+y)* c) *4 f(x+y)*
d) *f(xy)* e) *2f(x)+2 i f(y)*

**5.** Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?
a) 210 b) 315 c) 410
d) 415 e) 521

**6.** Seja $x \in R$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$. Assinale a opção correta.
a) $\forall$ x $\in$ R, A possui inversa.
b) Apenas para x > 0, A possui inversa.
c) São apenas dois valores de x para o qual a possui inversa.
d) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.
e) Para $x = \log_2 5$, A não possui inversa.

**7.** Considerando as funções
$\text{arcsen}: [-1, +1] \rightarrow \left[-\pi/2, \pi/2\right]$ e
$\text{arccos}: [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$,
assinale o valor de $\cos\left(\text{arcsen}\frac{3}{5} + \text{arccos}\frac{4}{5}\right)$.

a) $\frac{6}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{5}{12}$

**8.** Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a 5º. Então, seu maior ângulo mede, em graus,
a) 120 b) 130 c) 140 d) 150 e) 160

**9.** O termo independente de *x* no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}}-\sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é

a) $729\sqrt[3]{45}$ b) $972\sqrt[3]{15}$ c) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ d) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ e) $165\sqrt[3]{75}$

**10.** Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada *nxn* , n ≥ 2:
I. O determinante de A é nulo se e somente se A possui uma linha ou uma coluna nula.
II. Se A = ($a_{ij}$) é tal que $a_{ij}$ = 0 para i > j, com i,j = 1,2,…, n, então det A = $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.
III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2}+1$ e a segunda por $\sqrt{2}-1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então det B = det A.
Então podemos afirmar que é (são) verdadeira(s):
a) apenas I b) apenas III
c) apenas I e II d) apenas II e III e) todas

**11.** Considere um cilindro circular reto, de volume igual a 360 π cm³, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3}$ cm², então, a área lateral da pirâmide mede, em cm²,
a) $18\sqrt{427}$ b) $27\sqrt{427}$ c) $36\sqrt{427}$
d) $108\sqrt{3}$ e) $45\sqrt{427}$

**12.** O conjunto de todos os valores de α, αγ∈ $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ , tais que as soluções da equação (em *x*) $x^4-\sqrt[4]{48}x^2+tg\alpha=0$ são todas reais, é

a) $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ b) $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ c) $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ d) $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ e) $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$

**13.** Sejam as funções *f* e *g* definidas em R por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$, em que α e β são números reais.
Considere que estas funções são tais que

| *f* | | *g* | |
|---|---|---|---|
| *Valor mínimo* | *Ponto de mínimo* | *Valor máximo* | *Ponto de máximo* |
| -1 | < 0 | $\frac{9}{4}$ | > 0 |

Então, a soma de todos os valores de *x* para os quais (*fog*)(*x*)=0 é igual a
a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

**14.** Considere todos os números z = x + iy que têm módulo $\sqrt{7}/2$ e estão na elipse x² + 4y² = 4. Então, o produto deles é igual a

a) $\frac{25}{9}$ b) $\frac{49}{16}$ c) $\frac{81}{25}$ d ) $\frac{25}{7}$ e) 4

**15.** Para algum número real r, o polinômio $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$. Qual dos números abaixo mais está próximo de r?
a) 1,62 b) 1,52 c) 1,42 d) 1,32 e) 1,22

**16.** Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano que satisfazem a equação

$$\det\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288 .$$

a) Uma elipse. b) Uma parábola.
c) Uma circunferência. d) Uma hipérbole. e) Uma reta.

**17.** A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0$, z ∈ C, é igual a
a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

**18.** Dada a equação $x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$, em que *m* é uma constante real, considere as seguintes informações:
I. Se *m ∈ ]– 6, 6[*, então existe apenas uma raiz real.
II. Se *m = – 6* ou *m = + 6*, então existe raiz com multiplicidade 2.
III. ∀*m ∈ R*, todas as raízes são reais.
Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas
a) I b) II c) III
d) II e III e) I e II

**19.** Duas circunferências concêntricas $C_1$ e $C_2$ têm raios de *6 cm* e $6\sqrt{2}$ *cm*, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de $C_2$, tangente à $C_1$. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco mede, em cm²,
a) 9(π – 3) b) 18(π + 3) c) 18(π – 2)
d) 18(π + 2) e) 16(π + 3)

**20.** A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um circulo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm³, é igual a: a) π R³ b) $\pi\sqrt{2}$ R³ c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ R³ d) $\pi\sqrt{3}$ R³ e) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ R³

**21.** Seja *A* um conjunto não-vazio.
a) Se *n(A) = m*, calcule *n(P(A))* em termos de *m*.
b) Denotando $P^1(A) = P(A)$ e $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$, para todo número natural *k* ≥ *1*, determine o menor *k*, tal que $n(P^k(A)) \geq 65000$, sabendo que *n(A) = 2*.

**22.** Uma caixa branca contém 5 bolas verdes e 3 azuis, e uma caixa preta contém 3 bolas verdes e 2 azuis. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que 4, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais casos, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

**23.** Determine os valores reais do parâmetro $a$ para os quais existe um número real $x$ satisfazendo $\sqrt{1-x^2} \geq a - x$.

**24.** Sendo $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule $\left|\sum_{n=1}^{60} z^n\right| = \left|z + z^2 + z^3 + ... + z^{60}\right|$.

**25.** Para $b > 1$ e $x > 0$, resolva a equação em $x$: $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$.

**26.** Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que $d$ é uma constante real. Para qual valor de d a equação admite uma raiz dupla no intervalo ]0,1[ ?

**27.** Prove que, se os ângulos internos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ de um triângulo satisfazem a equação $sen(3\alpha) + sen(3\beta) + sen(3\gamma) = 0$, então, pelo menos, um dos três ângulos $\alpha$, $\beta$ ou $\gamma$ é igual a 60º.

**28.** Se A é uma matriz real, considere as definições:
I. Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1} = A^T$.
II. Uma matriz quadrada A é diagonal se e só se $a_{ij} = 0$, para todo i, j = 1, ..., n, com $i \neq j$.
Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

**29.** Sejam $r$ e $s$ duas retas que se interceptam segundo um ângulo de 60º. Seja $C_1$ uma circunferência de 3 cm de raio, cujo centro $O$ se situa em $s$, a 5 cm de $r$. Determine o raio da menor circunferência tangente à $C_1$ e à reta $r$, cujo centro também se situa na reta $s$.

**30**. Sejam os pontos A: (2, 0), B: (4, 0) e P: $(3, 5 + 2\sqrt{2})$.
a) Determine a equação da circunferência C, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos A e B e é tangente ao eixo y.
b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência C que passam pelo ponto P.

## ITA – 2005

### NOTAÇÕES

C : conjunto dos números complexos.
Q : conjunto dos números racionais.
R : conjunto dos números reais.
Z : conjunto dos números inteiros.
N = {0, 1, 2, 3, ...}.
N* = {1, 2, 3, ...}.
$\varnothing$ : conjunto vazio.
A \ B = {$x \in A$ ; $x \notin B$}.
[a, b] = {$x \in R$, $a \leq x \leq b$}.
]a, b[ = {$x \in R$, $a < x < b$}.
i : unidade imaginária ; $i^2 = -1$.
z = x + iy , x, y $\in$ R.
$\bar{z}$ : conjugado do número complexo $z \in C$.
|z| : módulo do número complexo $z \in C$.
$\overline{AB}$ : segmento de reta unindo os pontos A e B.
$m(\overline{AB})$ : medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

**1.** Considere os conjuntos S = {0, 2, 4, 6}, T = {1, 3, 5} e U = {0, 1} e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \varnothing$.
II. $\{2\} \subset S \setminus U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.
III. Existe uma função f: $S \rightarrow T$ injetiva.
IV. Nenhuma função g: $T \rightarrow S$ é sobrejetiva.

Então, é(são) verdadeira(s):
a) apenas I. b) apenas IV. c) apenas I e IV.
d) apenas II e III. e) apenas III e IV.

**2.** Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de
a) R$ 17,50. b) R$ 16,50. c) R$ 12,50.
d) R$ 10,50. e) R$ 9,50.

**3.** Uma circunferência passa pelos pontos A = (0, 2), B = (0, 8) e C = (8, 8). Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são
a) (0, 5) e 6. b) (5, 4) e 5. c) (4, 8) e 5,5.
d) (4, 5) e 5. e) (4, 6) e 5.

**4.** Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:
a) $x \in ]0, 2[$. b) x é racional. c) $\sqrt{2x}$ é irracional.
d) $x^2$ é irracional. e) $x \in ]2, 3[$.

**5.** Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ e E um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $m(\overline{AB}) = 8$ cm, $m(\overline{AC}) = 10$ cm, $m(\overline{AD}) = 4$ cm e $m(\overline{AE}) = 6$ cm, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é:

a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{3}{5}$. c) $\frac{3}{8}$. d) $\frac{3}{10}$. e) $\frac{3}{4}$.

**6.** Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a
a) $\frac{4}{5}$. b) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$. c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
d) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$. e) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

**7.** A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

a) $3\sqrt{3}$. b) 6. c) 5. d) 4. e) $2\sqrt{5}$.

**8.** Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então n é igual a
a) 4. b) 3. c) 6. d) 5. e) 7.

**9.** Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é 7200º. O número de vértices deste prisma é igual a
a) 11. b) 32. c) 10. d) 20. e) 22.

**10.** Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por
A = (0, 0), B = (2, 2) e $C = (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. O volume do tetraedro é
a) $\frac{8}{3}$. b) 3. c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. e) 8.

**11.** No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio p(x) cujos coeficientes somam 32. Se 0 e –1 são raízes de p(x), então a soma a + b + c é igual a
a) $-\frac{1}{2}$. b) $-\frac{1}{4}$. c) $\frac{1}{2}$. d) 1. e) $\frac{3}{2}$.

**12.** O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é
a) 2499. b) 2501. c) 2500. d) 3600. e) 4900.

**13.** Seja D = R \ {1} e f : D → D uma função dada por
$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$
Considere as afirmações:
I. f é injetiva e sobrejetiva.
II. f é injetiva, mas não sobrejetiva.
III. $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, para todo $x \in D$, $x \neq 0$.
IV. f(x) · f(–x) = 1, para todo x ∈ D.
Então, são verdadeiras
a) apenas I e III. b) apenas I e IV. c) apenas II e III.
d) apenas I, III e IV. e) apenas II, III e IV.

**14.** O número complexo 2 + i é raiz do polinômio
$$f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q,$$
com p, q ∈ R. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de f é
a) 4. b) –4. c) 6. d) 5. e) –5.

**15.** Considere a equação em x
$$a^{x+1} = b^{1/x},$$
onde a e b são números reais positivos, tais que ln b = 2 ln a > 0. A soma das soluções da equação é
a) 0. b) –1. c) 1. d) ln 2. e) 2.

**16.** O intervalo I ⊂ R que contém todas as soluções da inequação
$$\arctan\frac{1+x}{2} + \arctan\frac{1-x}{2} \geq \frac{\pi}{6} \quad \text{é}$$
a) [–1, 4]. b) [–3, 1]. c) [–2, 3]. d) [0, 5]. e) [4, 6].

**17.** Seja z ∈ C com |z| = 1. Então, a expressão $\left|\frac{1-\bar{z}w}{z-w}\right|$ assume valor:
a) maior que 1, para todo w com |w| > 1.
b) menor que 1, para todo w com |w| < 1.
c) maior que 1, para todo w com w ≠ z.
d) igual a 1, independente de w com w ≠ z..
e) crescente para |w| crescente, com |w| < |z|.

**18.** O sistema linear
$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$
não admite solução se e somente se o número real b for igual a
a) –1. b) 0. c) 1. d) 2. e) –2.

**19.** Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se $P_1$ é a probabilidade de não sair bola azul e $P_2$ é a probabilidade de todas as bolas saírem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de $P_1+P_2$ é
a) 0,21. b) 0,25. c) 0,28. d) 0,35. e) 0,40.

**20.** A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, –2) são, respectivamente,
a) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$. c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$.
d) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$. e) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**DISSERTATIVAS**

**As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.**

**21)** Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que $\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

**22)** Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto $P = (3, 4)$. e t é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo x e tangente simultaneamente à reta t e à circunferência C.

**23)** Sejam A e B matrizes $2 \times 2$ tais que $AB = BA$ e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que:
(a) $AB^{-1} = B^{-1}A$ e que (b) A é inversível.

**24)** Seja n o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de $n-1$ ângulos (internos) do polígono é 2004º, determine o número n de lados do polígono.

**25)** (a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.
(b) Conclua de (a) que $\alpha$ é um número racional.

**26)** Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-ms}$, sendo m um parâmetro real.
(a) Resolva a equação em função do parâmetro m.
(b) Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

**27)** Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é $\pi$ cm$^3$. Determine os ângulos deste triângulo.

**28)** São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, calcule a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.

**29)** Obtenha todos os pares $(x, y)$, com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que:
$$sen(x+y) + sen(x-y) = \frac{1}{2}$$
$$senx + \cos y = 1$$

**30)** Determine todos os valores reais de a para os quais a equação $(x-1)^2 = |x-a|$ admita exatamente três soluções distintas.