

## Média Aritmética

Também denominada *média aritmética*, a média corresponde à *razão entre o somatório dos valores observados e a quantidade de observações*.

Seja uma distribuição  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ , tal que  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  correspondam aos valores da variável de interesse  $X$ , podemos definir a média  $\bar{x}$  como sendo

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Tomemos como exemplo a variável altura, em cm, e três amigos, todos com 190 cm (baixos para a estatura padrão de professores de matemática, por exemplo). Nesse caso, temos  $X = \{190, 190, 190\}$  e é fácil notar que a média será igual a 190 cm, uma vez que

$$\bar{x} = \frac{190 + 190 + 190}{3} = \frac{3 \times 190}{3} = 190.$$

Suponha agora outro grupo de três amigos com alturas, em cm, iguais a 180, 190 e 200. Você consegue ver rapidamente qual é a média das alturas?

Calculando da maneira tradicional, teríamos:

$$\bar{x} = \frac{180 + 190 + 200}{3} = \frac{570}{3} = 190.$$

Coincidência? Na verdade, não. Pense da seguinte forma: se o amigo de 200 cm *emprestasse* 10 cm para o de 180 cm, então todos ficariam com 190 cm e essa seria a média das alturas. Matematicamente, podemos visualizar o processo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{180 + 190 + 200}{3} = \frac{\overbrace{(180 + 10)}^{10 \text{ cm recebidos}} + 190 + \overbrace{(200 - 10)}^{10 \text{ cm doados}}}{3} \\ &\Rightarrow \bar{x} = \frac{190 + 190 + 190}{3} = 190. \end{aligned}$$

Essa é a *ideia da média*: é como se você *emprestasse quantidades* de algumas observações para outras até que elas entrassem em *equilíbrio*! Tal valor de equilíbrio é o que conhecemos como média.

Vejamos como utilizar essa ideia no **Item 1**.

Apesar de útil no contexto do item acima, esse método pode ser muito demorado em alguns casos. Felizmente, podemos aperfeiçoá-lo com o que denominarei *método do palpite*.

### Item 1 (FUVEST 2014)

Cada uma das cinco listas dadas é a relação de notas obtidas por seis alunos de uma turma em uma certa prova. Assinale a única lista na qual a média das notas é maior do que a mediana.

- 5, 5, 7, 8, 9, 10
- 4, 5, 6, 7, 8, 8
- 4, 5, 6, 7, 8, 9
- 5, 5, 5, 7, 7, 9
- 5, 5, 10, 10, 10, 10

## Método do Palpite (e Aplicações no ENEM)

Tomemos outro grupo de três amigos, agora com alturas, em cm, iguais a 171, 190 e 200. Caso o amigo mais alto *empreste* 10 cm para o mais baixo, as alturas consideradas ficam iguais a 181, 190, 190. Note que, apenas com este passo, ainda não houve um equilíbrio.

Tal equilíbrio só seria atingido após um novo empréstimo de 3 cm por parte dos dois amigos que agora (supostamente) tem 190 cm para aquele com 181 cm, de forma a todos atingirem a média, igual a 187 cm. De fato, temos que:

$$\bar{x} = \frac{171 + 190 + 200}{3} = \frac{561}{3} = 187.$$

Voltemos ao mesmo problema, com outro olhar. Se você tivesse 3 segundos para chutar um valor para a média da altura do grupo de amigos que tem 171, 190 e 200 cm, qual seria o seu palpite?

Provavelmente, você olharia para a menor altura e para a maior altura e chutaria algo no meio desses valores. Algo como 185 cm, talvez. O que faremos agora é calcular a média, reescrevendo as alturas em função desse palpite de 185 cm. Vejamos:

$$\bar{x} = \frac{\overbrace{(185 - 14)}^{171} + \overbrace{(185 + 5)}^{190} + \overbrace{(185 + 15)}^{200}}{3}.$$

Notou que o 185 apareceu 3 vezes e que o denominador também é 3? Então podemos quebrar a fração acima da seguinte maneira:

$$\bar{x} = \frac{(3 \times 185) + (-14 + 5 + 15)}{3} = \frac{3 \times 185}{3} + \frac{-14 + 5 + 15}{3},$$

que pode ser reescrita, de maneira simplificada, como:

$$\bar{x} = 185 + \frac{\overbrace{-14 + 5 + 15}^{\text{Média dos Ajustes}}}{\underset{\text{Palpite}}{3}}.$$

Calculando o valor da média, teríamos:

$$\bar{x} = 185 + \frac{-14 + 5 + 15}{3} = 185 + \frac{6}{3} = 187.$$

“Fredão, e se eu utilizasse como palpite o 190 cm?”

Ora, jovem mamífero, **a média não pode ser alterada pelo seu palpite. O resultado tem que ser o mesmo!** A única diferença seriam os ajustes que seriam feitos com relação ao seu palpite: 171 está 19 unidades abaixo do palpite (ajuste igual a -19), 190 é exatamente o palpite (ajuste igual a 0) e 200 está 10 unidades acima do seu palpite (ajuste igual a +10). Vamos aos cálculos, agora de maneira mais direta:

$$\bar{x} = 190 + \frac{\overbrace{-19 + 0 + 10}^{\text{Média dos Ajustes}}}{\underset{\text{Palpite}}{3}} = 190 - \frac{9}{3} = 187.$$

Viu como é simples? **Quanto mais próximo da média for o palpite, mais a média dos ajustes se aproximará de zero e mais simples serão os cálculos envolvidos!** A grande vantagem do método é trabalhar com ajustes positivos e negativos, que acabam se anulando e reduzindo os cálculos.

De maneira geral, o método funciona assim:

1º Passo: dê um palpite para a média, com base nos valores da distribuição. Para facilitar o cálculo dos ajustes, o ideal é que seu palpite seja um número múltiplo de 10, 100, ou alguma potência de base 10.

2º Passo: calcule a média dos ajustes e adicione ao seu palpite.

Tente calcular, usando o método aprendido, os valores das médias das distribuições  $X = \{18, 17, 14, 19, 16\}$  e  $X = \{643, 595, 574\}$ . Beem mais tranquilo, não?

Vejamos agora como podemos utilizar este método para resolver os **Itens de 2 a 5**, todos eles de ENEMs recentes.

### Item 2 (ENEM 2016)

Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses. Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

- I.
- II.
- IV.
- V.
- VII.

### Item 3 (ENEM 2016)

A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maior
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

- 26.
- 29.
- 30.
- 31.
- 35.

### Item 4 (ENEM 2016)

Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade.

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:

I. 10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.

II. 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.

Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

- a) 59
- b) 65
- c) 68
- d) 71
- e) 80

### Item 5 (ENEM 2017)

A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas ( $M$ )
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação "Bom" ou "Excelente" conseguirá matrícula nas disciplinas que deseje. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é

- a) 7,00.
- b) 7,38.
- c) 7,50.
- d) 8,25.
- e) 9,00.