DETERMINANTES

O determinante de uma matriz nada mais é do que um número real associado a esta matriz. O determinante é uma função da seguinte forma:

$$f: M \to \mathbb{R}$$

Em que M é o conjunto de todas as matrizes quadradas e $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.

Perceba pela definição acima que só é possível falarmos de determinantes em **matrizes quadradas**. No decorrer da apostila estaremos sempre falando de matrizes quadradas, salvo se dito explicitamente o contrário.

O determinante de uma matriz A é indicado por $detA$ e representado por um par de barras verticais.

Por exemplo, se considerarmos a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, o seu determinante será indicado da seguinte forma: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$.

A pergunta que surge agora é: se o determinante é um valor associado à uma matriz, como o encontramos? O processo de encontrar o determinante varia de acordo com a ordem da matriz, como veremos a seguir.

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE ORDEM 1 ($n = 1$)

Uma matriz quadrada de ordem 1 possui apenas um elemento, pois possui apenas uma linha e uma coluna:

$$A=[a_{11}]$$

Nesse caso, o determinante será o próprio número que a constitui, ou seja, seu determinante é: $detA=a_{11}$.

Exemplo: o determinante da matriz $A = [4]$, é $|4|= 4$.

Observação: é importante não confundir o determinante com o módulo!

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE ORDEM 2 ($n = 2$)

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é o número real obtido através do produto dos elementos da diagonal principal **menos** o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplos:

1. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$$detA = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = (5 \cdot 8) - (3 \cdot 6)$$

$(5{\cdot}8) \rightarrow$ produto da diagonal principal

$(3{\cdot}6) \rightarrow$ produto da diagonal secundária

Ou seja,

$$detA = 40 - 18 = 22$$

2. $B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$det\ B = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (0\ .3) - \left((-\ 4).5\right) = 0 - (-\ 20) = 0 + 20 = 20$$

Ou seja,

$$detB = 20.$$

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE ORDEM 3 ($n = 3$)

Dada uma matriz quadrada de ordem 3, seu determinante é calculado da seguinte forma:

Repetem-se as duas primeiras linhas (ou as duas primeiras colunas) ao lado da matriz (ou abaixo da matriz) e efetuam-se os produtos paralelos à diagonal principal menos os produtos paralelos à diagonal secundária. Essa forma de calcular o determinante é conhecida como **Regra de Sarrus**. Veja os exemplos a seguir.

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calculemos seu determinante:

Solução: Vamos calcular repetindo as duas primeiras colunas da matriz.

Passo 1: Copiamos as duas primeiras colunas ao lado direito da terceira coluna.

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & -4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Passo 2: Multiplicamos os elementos da diagonal principal da matriz A. Depois, seguindo a direção dessa diagonal, multiplicamos (separadamente) os elementos das outras duas diagonais.

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & -4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$1\times7\times1=7$$

$$(-1)\times(-4)\times1=4$$

$$2\times5\times0=0$$

Passo 3: Multiplicamos os elementos da diagonal secundária. Seguindo a direção dessa diagonal, também multiplicamos (separadamente) os elementos das outras duas diagonais.

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & -4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$2\times7\times1=14$$

$$1\times(-4)\times0=0$$

$$(-1)\times5\times1=-5$$

Passo 4: Somamos os valores encontrados no passo 2 e subtraímos a soma dos valores encontrados no passo 3.

$$detA=(7+4+0)-(14+0+(-5))=7+4-14+5=2$$

Ou seja, $detA=2$.

2. Calcule o determinante de $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: Vamos calcular repetindo as duas primeiras linhas da matriz.

Passo 1: Copiamos as duas primeiras linhas abaixo da terceira linha.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{matrix}$$

Passo 2: Multiplicamos os elementos da diagonal principal da matriz A. Depois, seguindo a direção dessa diagonal, multiplicamos (separadamente) os elementos das outras duas diagonais.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{matrix}$$

$$3\times2\times0=0$$

$$1\times(-1)\times1=-1$$

$$1\times2\times5=10$$

Passo 3: Multiplicamos os elementos da diagonal secundária. Seguindo a direção dessa diagonal, também multiplicamos (separadamente) os elementos das outras duas diagonais.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{matrix}$$

$$1\times2\times1=2$$

$$5\times(-1)\times3=-15$$

$$0\times2\times1=0$$

Passo 4: Somamos os valores encontrados no passo 2 e subtraímos a soma dos valores encontrados no passo 3.

$$detB=(0+(-1)+10)-(2+(-15)+0)=-1+10-2+15=22$$

Ou seja,

$$detB=22.$$

Ainda, existe mais uma forma de calcularmos o determinante de uma matriz de ordem 3, que será vista a seguir:

Exemplo: Calcule o determinante da matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

$$detC = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Passo1: Fazemos as seguintes multiplicações mostradas pelas setas abaixo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(1\times5\times7)+(4\times3\times0)+(2\times(-1)\times(-2))=35+0+4=39$$

Passo 2: Agora fazemos as seguintes multiplicações.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(0\times5\times(-2))+(2\times4\times7)+((-1)\times3\times1)=0+56-3=53$$

Passo 3: diminuímos do resultado do passo 1 o valor encontrado no passo 2 e concluímos que:

$$detC=39-53=-14$$

Observação: tente fazer o determinante dessa matriz pelos métodos anteriores e comprove que o resultado é o mesmo.

Até aqui, vimos como calcular determinante de matrizes de ordem 1, 2 e 3. É possível encontrar também o determinante de matrizes de ordens maiores, mas os processos para encontrá-lo são diferentes e é o que veremos a seguir.

Mas, antes de falarmos dos processos, foquemos nossa atenção em duas definições de extrema importância: menor complementar e cofator.

MENOR COMPLEMENTAR

O menor complementar de um elemento a_{ij} é o valor do determinante da matriz que sobra quando excluímos a linha i e a coluna j que ele ocupa. A notação para o menor complementar é D_{ij}.

Exemplo: dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, determine o menor complementar do elemento 15, ou seja, determine o menor complementar D_{12}.

Solução: Para encontrarmos o menor complementar, pela definição acima, excluiremos a 1ª linha e a 2ª coluna da matriz (pois essa é a posição que o elemento 15 ocupa), resultando então em uma matriz de ordem 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 15 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Agora, calculando o determinante da matriz de ordem 3 temos:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -312$$

Ou seja, $D_{12} = -312$.

Observação: cada elemento da matriz possui um menor complementar.

Vamos agora ao cofator.

COFATOR

O cofator de um elemento a_{ij} de uma matriz é o resultado da multiplicação de $(-1)^{i+j}$ pelo seu menor complementar (D_{ij}). O cofator é representado por C_{ij} e é calculado da seguinte maneira:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Observação: a notação para o cofator pode variar nas diferentes bibliografias.

Exemplos:

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, determine C_{13}.

Solução: Como i=1 e j=3, vamos começar encontrando o menor complementar D_{13}:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante temos:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 3$$

Portanto, D_{13}=3

Agora, só nos resta fazer a seguinte multiplicação:

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot D_{13}$$

$$C_{13} = (-1)^4 \cdot 3$$

$$C_{13} = 1 \cdot 3$$

$$C_{13} = 3$$

2. Data a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 9 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, determine o cofator do elemento 9.

Solução: O elemento 9 é o elemento b_{22} da matriz, sendo assim, para encontrarmos C_{22} fazemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 9 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 89$$

Portanto, D_{22}=89.

Para encontrarmos o cofator então:

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{22}$$

$$C_{22} = (-1)^4 \cdot 89$$

$$C_{22} = 1 \cdot 89$$

$$C_{22} = 89$$

Logo, o cofator do elemento é 89.

Observação: assim como o menor complementar, cada elemento da matriz possui um cofator.

Estudamos os conceitos de menor complementar e cofator pois os mesmos são utilizados no Teorema de Laplace, que é o que veremos a seguir.

TEOREMA DE LAPLACE

O Teorema de Laplace pode ser utilizado para encontrar o determinante de qualquer matriz, inclusive para as matrizes de ordem 2 e 3 vistas anteriormente.

Geralmente, aplica-se o Teorema de Laplace nas matrizes de ordem $n > 3$ e para isto iremos utilizar os conceitos de menor complementar e cofator que acabamos de aprender.

Neste Teorema iremos escolher **uma linha ou uma coluna** da matriz para excluir, de **preferência** a que contenha o maior número de zeros. Somamos os produtos dos elementos dessa linha ou coluna pelos seus respectivos cofatores. Dessa forma, encontramos o determinante da matriz. Veja abaixo a definição:

O determinante de uma matriz calculado através do Teorema de Laplace é dado por:

$$\sum a_{ij} \cdot D_{ij} \cdot (-1)^{i+j} = \sum a_{ij} \cdot C_{ij}$$

Ficou confuso? Veja o exemplo abaixo.

Exemplo: Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução: Primeiro escolhemos uma linha ou coluna para excluir de acordo com a quantidade de zeros. Neste exemplo, vamos excluir a 1ª coluna.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Essa coluna possui os elementos: a_{11}, a_{21}, a_{31} e a_{41}. Sendo assim, pelo exposto acima, o determinante desta matriz é dado por:

$$detA = a_{11} \cdot C_{11} + a_{21} \cdot C_{21} + a_{31} \cdot C_{31} + a_{41} \cdot C_{41}$$

Para o elemento $a_{11}=1$ temos: $C_{11}=-25$

Para o elemento $a_{21}=0$ temos $C_{21}= -11$

Para o elemento $a_{31}=-2$ temos $C_{31}= 34$

Para o elemento $a_{41}=0$ temos $C_{41}=13$

Com todas essas informações temos que:

$$detA = a_{11} \cdot C_{11} + a_{21} \cdot C_{21} + a_{31} \cdot C_{31} + a_{41} \cdot C_{41}$$

$$detA = 1 \cdot (-25) + 0 \cdot 11 + (-2) \cdot 34 + 0 \cdot (13)$$

$$detA = -25 + 0 - 68 + 0$$

$$detA = 93$$

Observação: as contas referentes aos cofatores foram deixadas para você praticar.

Perceba que escolhemos preferencialmente a coluna que possuía mais zeros por questões de facilitar os cálculos. Se tivéssemos escolhido qualquer outro elemento, chegaríamos à mesma resposta, só teríamos feito mais contas.

Existe um outro método para encontrar o determinante da matriz, o chamado Teorema de Chió, que é o assunto que veremos a seguir.

REGRA DE CHIÓ

A Regra de Chió basicamente consiste em montarmos uma matriz com ordem menor do que a matriz de interesse, porém com o mesmo determinante da matriz dada.

Diz-se que a Regra de Chió permite calcular o determinante da matriz de ordem n, através de uma matriz de ordem $(n-1)$.

Antes de começarmos a resolver, é necessário observar que para aplicarmos essa regra, a matriz **deve possuir algum elemento $\boldsymbol{a_{ij}=1}$**. Nesse caso, encontramos o determinante da matriz seguindo os seguintes passos:

- Retiramos a linha e a coluna desse elemento a_{ij} da matriz dada;
- Dos elementos que restaram da matriz, vamos subtrair o produto dos dois elementos retirados (um da linha e um da coluna) correspondente a este elemento restante;
- A partir dos resultados obtidos no passo anterior, conseguiremos escrever uma nova matriz, de ordem menor que a matriz original. Calculamos o determinante dessa nova matriz e multiplicamos esse determinante por $(-1)^{i+j}$.
- O resultado obtido no passo anterior é o determinante da matriz original.

Exemplo: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \\ -9 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, encontre o determinante utilizando a

Regra de Chió:

Solução: Escolhemos excluir a linha e a coluna do elemento a_{11}=1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \\ -9 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos criar a nova matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \\ -9 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2-(0.3) & 1-(10.3) & -1-(0.3) \\ 0-(0.5) & -3-(10.5) & -2-(0.5) \\ 0-(0.(-9)) & 4-(10.(-9)) & 7-(0.(-9)) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -29 & -1 \\ 0 & -53 & -2 \\ 0 & 94 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -29 & -1 \\ 0 & -53 & -2 \\ 0 & 94 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow det = 366$$

Para encontrarmos o determinante de A, fazemos então:

$$detA = 366 \cdot (-1)^{1+1} \Rightarrow detA = 366 \cdot (-1)^2 \Rightarrow detA = 366$$

Além da regra de Chió, também vamos tratar do determinante de Vandermonde, que será visto a seguir.

MATRIZ DE VANDERMONDE OU MATRIZ DE POTÊNCIAS

Antes de calcularmos o determinante, será necessário saber o que é a matriz de Vandermonde, pois essa regra só será aplicada a este tipo de matriz.

A matriz de Vandermonde terá sempre a segunda linha ou coluna como base. Esta linha ou coluna será chamada de base, pois as outras linhas ou colunas serão potências desta base.

Matriz de Vandermonde é aquela em que cada linha i preserva os mesmos termos, sempre elevado a $i-1$.

Como temos a segunda linha como base, então a primeira linha deverá ser composta pelos elementos da segunda linha elevados ao expoente 0 (zero), a terceira linha será composta pelos elementos da segunda linha elevados ao expoente 2 e assim por diante. Se for a segunda coluna como base, vale a mesma regra, porém trocando a palavra linha por coluna.

Exemplos:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 25 & 9 \end{bmatrix}$ é uma matriz de Vandermonde.

A segunda linha é a nossa linha base, assim se elevarmos os elementos desta linha ao expoente zero, todos resultarão em 1, formando a primeira linha. Na terceira linha, são todos os elementos da linha base elevados ao quadrado.

Agora que já sabemos o que é uma matriz de Vandermonde, podemos calcular o seu determinante.

Para seu cálculo faremos o seguinte: vamos pegar apenas a linha base, ou coluna base, dependendo de como for a matriz. No caso da matriz do exemplo acima, pegaremos a linha base. Feito isso, basta pegar o produto das diferenças entre os elementos da linha base, como segue abaixo:

$$detA=(5-2)\cdot(3-2)\cdot(3-5)$$

$$detA=3\cdot1\cdot(-2)$$

$$detA=-6$$

2. Calcule o determinante de $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: Perceba que B é uma matriz de Vandermonde, pois as colunas são potências da 2ª coluna.

Pegando a 2ª coluna com base, o determinante dessa matriz é:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$detB=(3-2)\cdot(4-2)\cdot(4-3)\cdot(1-2)\cdot(1-3)\cdot(1-4)$$

$$detB=1\cdot2\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)$$

$$detB=-12$$

Observações:

- Perceba pelos exemplos acima que quando for linha, a diferença será sempre da direita para a esquerda e quando for coluna será de baixo para cima.
- É comum aparecerem potência de logaritmos em exercícios envolvendo matrizes de Vandermonde.