Livro Eletrônico

Aula 11

Matemática III p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Italo Marinho Sá Barreto

Aula 11: Esferas.

Sumário

1 – Esferas **3**

1.1 –Definição e elementos básicos 3

1.2 –Áreas e volumes em uma esfera 6

1.3 –GABARITO 18

E aqui estamos, jovem. Finalizando o nosso extenso e completo curso de geometria! Foi, como a expressão inglesa diz, *quite a journey*, uma grande jornada! Mas eventualmente chegamos a um fim, e essa é a nossa última aula.

Antes de discursar um pouco sobre ela, gostaria de te informar o prazer que é estar escrevendo diretamente para você. desde o início, meu objetivo foi trazer conhecimento com pitadas lúdicas e, acima de tudo, com a didática que pudesse atravessar o seu intelecto de forma suave.

Em alguns momentos isso se mostrou impossível, dada a complexidade do tema, e é por isso que escolhi colocar tantos exercícios. Fazer e refazer os exercícios é chave para o seu contínuo processo de aprendizagem. Não se sinta mal ou inferior por não conseguir fazer exercícios. Mesmo que nesse andar ainda sejam a maioria. A gradação aqui não é linear, é exponencial, então, quando menos esperar, suas listas já serão bem entendidas muito além de uma mera metade. Você está no caminho certo, jovem, e eu te garanto a completude de nosso conteúdo!

Pois bem, finalizaremos com *nossa aula mais curta*. Esferas é um assunto rápido e sucinto, felizmente não lhe trará problemas maiores. Falaremos sobre a sua definição, volume, área e sobre secções não-equatoriais. E será, essencialmente isso que falaremos hoje. Como disse, um assunto bem curto.

Meu jovem querido, é, repito, um grande prazer ter estado aqui com você, e não se esqueça que nosso contato continua: use e abuse do nosso fórum de dúvidas, entre em contato direto se quiser, enfim. Estou à disposição. Um grande abraço para você e fique na paz! Bons estudos!

CRONOGRAMA DE AULAS

DISPONÍVEL	CONTEÚDO
Aula 00	*Fundamentos da Geometria Plana: elementos primitivos, axiomas e postulados. Ângulos: definição, elementos, notações, unidades de medida, classificação, ângulos consecutivos, ângulos adjacentes, bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas cortadas por transversais. Triângulos: definição, elementos, relações angulares, condição de existência, classificação, cevianas, pontos notáveis, base média, congruência.*
Aula 01	*Teorema de Tales, semelhança de triângulos e teorema das bissetrizes. Relações métricas no triângulo retângulo. Polígonos: definição, elementos, nomenclatura, polígonos côncavos, polígonos convexos, classificação, relações angulares e número de diagonais.*
Aula 02	*Quadriláteros notáveis: definição, elementos, relações angulares, classificação, base média e mediana de Euler.*
Aula 03	*Polígonos regulares: Polígonos regulares inscritos e polígonos regulares circunscritos. Circunferência: definição de circunferência e de círculo, elementos, posições relativas, ângulos na circunferência, quadriláteros inscritíveis, teorema de Pitot,e potência de ponto.*
Aula 04	*Trigonometria: razões trigonométricas no triângulo retângulo, trigonometria num triângulo qualquer (Lei dos senos e dos cossenos)*
Aula 05	*Circunferência trigonométrica, operações com arcos (adição, subtração e arco duplo) e funções trigonométricas.*
Aula 06	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 07	*Áreas de figuras planas.*
Aula 08	*Introdução à Geometria Espacial: poliedros.*
Aula 09	*Prismas: definição, elementos, classificação, planificação, áreas, volume e casos especiais: cubos e paralelepípedos. Cilindros: definição, elementos, classificação, planificação, áreas e volume.*
Aula 10	*Pirâmides: definição, elementos, classificação, relações métricas na pirâmide, áreas e volume. Cones: definição, elementos, classificação, relação métricas no cone, áreas e volume.*
Aula 11	*Esferas: definição, elementos, secção esférica, área da superfície esférica e volume. Troncos.*
Aula 12	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

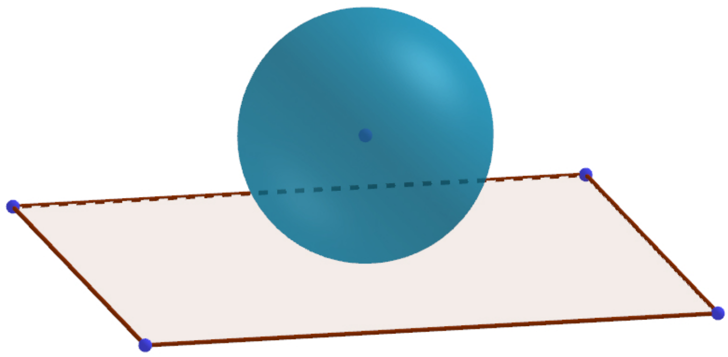
1.0– Esferas

1.1– Definição e elementos básicos

Definição

Tudo começa quando consideramos um ponto C qualquer, no espaço. Imagine esse ponto, como algo flutuando pelo espaço. Agora, considere uma distância qualquer, a qual chamarei de R. Por fim, considere todos os pontos que possuem uma distância R do ponto C. O conjunto de todos esses pontos do espaço é o que chamamos de ***esfera centrada em*** C.

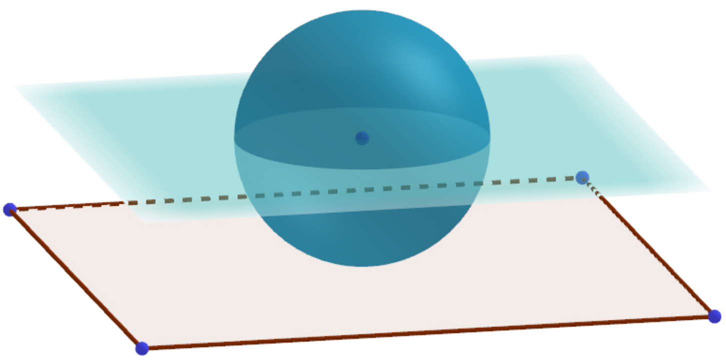
Vejamos uma imagem de uma esfera como tal:



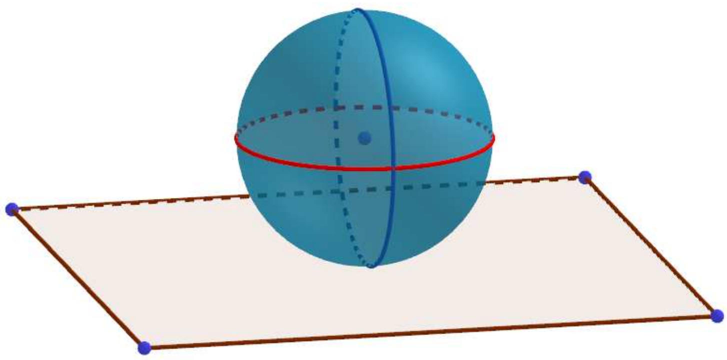
Os elementos mais importantes de uma esfera são, portanto: seu centro e o seu raio. Perceba que a distância de qualquer ponto da superfície esférica até o seu centro será sempre igual ao seu raio.

Secções meridionais e equatoriais

Considere uma secção plana que contenha o centro de uma esfera, como a seguir:



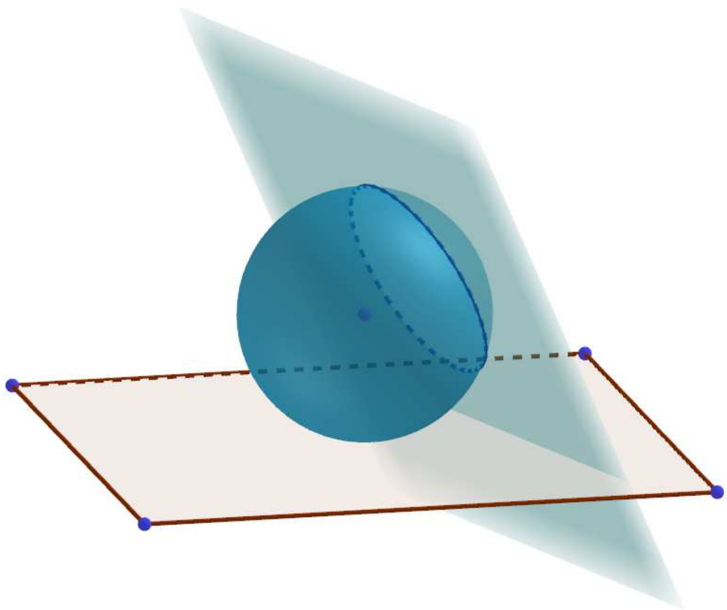
Dessa secção, podemos destacar dois círculos: o azul e o avermelhado. O círculo avermelhado, contido no plano, é, sob a perspectiva que enxergamos a esfera, o que chamamos de uma ***secção equatorial da esfera***. Alguns textos chamam esse círculo de ***equador*** da esfera.



Já o círculo azulado é o que chamamos de uma ***secção meridional da esfera***.

Secções não-meridionais

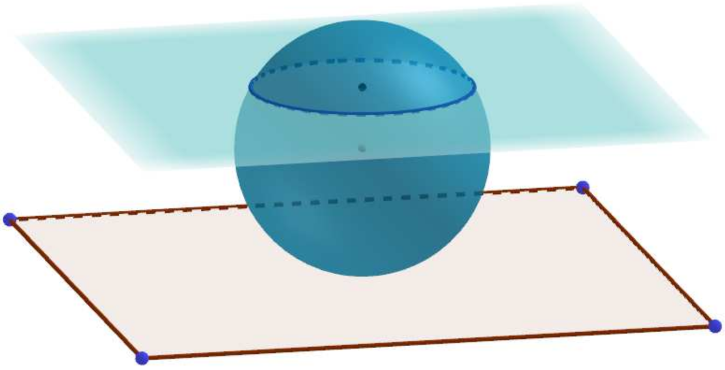
Uma secção será dita não-meridional quando não contiver o centro da esfera. Veja abaixo um exemplo de secção plana não-meridional:



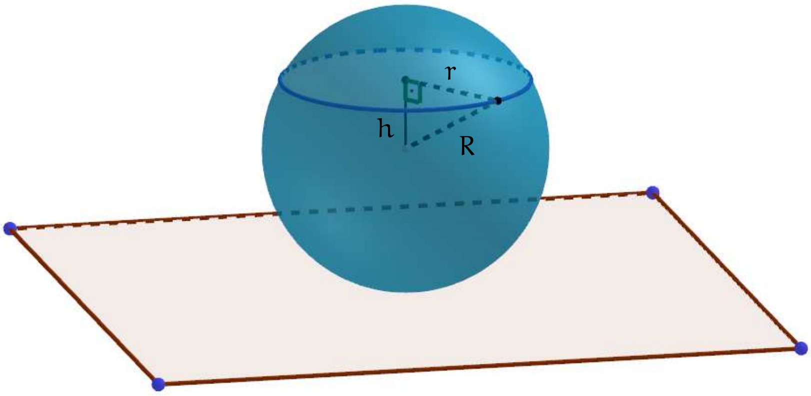
Segue um fato importante sobre secções quaisquer em esferas:

Toda e qualquer secção esférica plana será circular.

Isso significa que sempre que cortarmos uma esfera o formato do corte será circular, isto é, a interseção do plano de corte com a esfera. Veja abaixo mais um exemplo de corte circular:



Suponha que esse corte tenha sido feito a uma distância h do centro dessa esfera de raio R. Suponha também que o círculo da secção tenha raio r, da seguinte forma:



Pelo teorema de Pitágoras, podemos concluir que:

$$\boxed{R^2 = h^2 + r^2.}$$

Sim, coruja, e acredita que já estamos praticamente acabando o conteúdo de esferas? Pois é, como eu disse, é um conteúdo rápido e sucinto. Mas tome cuidado. Há um certo aspecto de esferas que pode trazer grandes dificuldades: inscrição e circunscrição. Veremos mais sobre esses conceitos no decorrer dos exercícios. Agora, vamos aos conceitos de volume e superfície. Sigamos, então?

1.2– Áreas e volumes em uma esfera

Superfície esférica

Superfície esférica é a "casca" que cobre a esfera. Trata-se de sua fronteira, é aquilo que delimita a esfera em si. Podemos calcular a área da superfície S de uma esfera de raio R a partir da expressão abaixo:

$$\boxed{S = 4\pi R^2.}$$

Não demonstrarei essa expressão, por fugir os propósitos dessa aula, assim como também não demonstrarei a expressão que calcula o volume.

Volume de uma esfera

Dada uma esfera de raio R, podemos calcular o seu volume V a partir da seguinte expressão:

$$\boxed{V = \frac{4\pi R^3}{3}.}$$

QUESTÕES PARA MEMORIZAÇÃO

(EEAR-2001) QUESTÃO 1

Um plano secciona uma esfera, determinando um círculo de raio igual à distância do plano ao centro da esfera. Sendo $36\pi \text{cm}^2$ a área do círculo, o volume da esfera, em cm^3, é:

(a) $228\sqrt{2}\pi$
(b) $576\sqrt{2}\pi$
(c) 288π
(d) 576π

(EEAR-2001) QUESTÃO 2

Ao seccionar uma esfera, um plano determina um círculo de raio 16cm. Se a distância do plano ao centro da esfera é de 12cm, então o raio da esfera, em cm, vale

(a) 20
(b) 28
(c) 30
(d) 38

(EEAR-2002) QUESTÃO 3

Se um cilindro reto está circunscrito a uma esfera de raio R, então a razão entre a área da superfície esférica e a área total do cilindro é

(a) 1
(b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{2}{3}$

(d) $\frac{4}{5}$

(EEAR-2003) QUESTÃO 4

Se um cubo está inscrito em uma esfera de $\sqrt{3}$m de raio, então o volume do cubo, em m^3, é igual a

(a) 8
(b) 27
(c) $12\sqrt{3}$
(d) $24\sqrt{3}$

(EEAR-2005) QUESTÃO 5

Considere as afirmações:

I- A esfera é um sólido gerado pela rotação de uma semicircunferência em torno de seu diâmetro.

II- A esfera é um sólido gerado pela rotação de um semicírculo em torno de seu diâmetro.

III- Nem toda secção plana de uma esfera é um círculo.

IV- Toda secção plana de uma esfera é um círculo.

São FALSAS as afirmações

(a) I e IV.
(b) I e III.
(c) II e III.
(d) II e IV

(EEAR-2006) QUESTÃO 6

Uma esfera tem 36πm^3 de volume. A medida de sua superfície, em m^2, e

(a) 72π
(b) 56π
(c) 48π
(d) 36π

(EEAR-2007) QUESTÃO 7

Um reservatório, com volume igual a $144\pi\,m^3$, tem a forma de uma semi-esfera. Para aumentar seu volume em $342\pi\,m^3$, é preciso aumentar o raio do reservatório em

(a) 12 m.
(b) 9 m.
(c) 6 m.
(d) 3 m.

(EEAR-2008) QUESTÃO 8

Uma esfera tem $9\pi\,cm^2$ de área. Para que a área passe a $100\pi\,cm^2$, o raio deve ter sua medida aumentada em

(a) $\frac{70}{9}\%$
(b) $\frac{70}{3}\%$
(c) $\frac{700}{9}\%$
(d) $\frac{700}{3}\%$

(EEAR-2008) QUESTÃO 9

Considere duas esferas: a primeira com $16\pi\,cm^2$ de área, e a segunda com raio igual a $\frac{5}{2}$ do raio da primeira. A área da segunda esfera, em cm^2, é

(a) 100π.
(b) 50π.
(c) 40π.
(d) 20π.

(EEAR-2008) QUESTÃO 10

Uma esfera tem $100\pi\,cm^2$ de área. Se diminuirmos o raio dessa esfera em t cm, sua área passa a ser $64\pi\,cm^2$. Logo, o valor de t é

(a) 4.
(b) 3.

(c) 2.
(d) 1.

(EEAR-2011) QUESTÃO 11

A cuba de uma pia tem a forma de uma semi-esfera de $3\,\text{dm}$ de raio. A capacidade dessa cuba é ____ π litros.

(a) 12.
(b) 14.
(c) 16.
(d) 18.

(EEAR-2012) QUESTÃO 12

Uma Escola de Samba carregou, em um de seus carros alegóricos, uma imensa esfera de $5\,\text{m}$ de raio. O pintor da Escola disse que gastou 10 litros de tinta para pintar cada $157\,\text{m}^2$ da superfície da esfera. Considerando $\pi = 3,14$, o número de litros de tinta que foram gastos para pintar toda a superfície da esfera foi

(a) 16.
(b) 18.
(c) 20.
(d) 22.

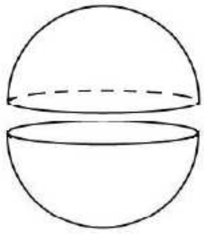
(EEAR-2014) QUESTÃO 13

Considerando $\pi = 3$, utilizando $108\,\text{cm}^3$ de chumbo pode-se construir uma esfera de ____ cm de diâmetro.

(a) 7
(b) 6
(c) 5
(d) 4

(EEAR-2015) QUESTÃO 14

Uma esfera de raio $R = 3$cm foi cortada ao meio, gerando duas semi-esferas.

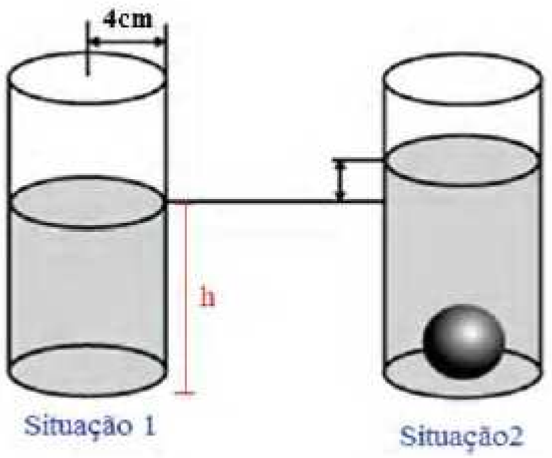


A área da superfície de cada semi-esfera é ____ πcm^2.

(a) 20
(b) 22
(c) 25
(d) 27

(EEAR-2016) QUESTÃO 15

Na ilustração a seguir, são apresentadas duas situações.



Na primeira, o cilindro contém um líquido que atinge uma altura h. Inserindo-se uma esfera de 3cm de raio nesse mesmo cilindro, o nível do líquido aumenta, conforme situação 2. O novo volume, determinado pelo líquido somado à esfera, totaliza 588cm^3. Considerando $\pi = 3$ e o raio da base do cilindro igual a 4cm, a medida da altura h corresponde a ____ cm.

(a) $h = 8$
(b) $h = 10$
(c) $h = 16$

(d) $h = 32$

(EEAR-2016) QUESTÃO 16

Uma esfera inscrita em um cubo de diagonal $2\sqrt{3}$ m tem o volume igual a

(a) $\frac{\pi}{3}\text{m}^3$
(b) $\frac{2\pi}{3}\text{m}^3$
(c) $\frac{4\pi}{3}\text{m}^3$
(d) $\frac{32\pi}{3}\text{m}^3$

(EEAR-2017) QUESTÃO 17

Considere um recipiente em forma de cubo, completamente cheio de água. Se três esferas metálicas de 1 cm de raio forem colocadas dentro do recipiente, o volume de água que será derramado será de ____ πcm^3.

(a) 3
(b) 4
(c) 5
(d) 6

(EEAR-2017) QUESTÃO 18

Um escultor irá pintar completamente a superfície de uma esfera de 6 m de diâmetro, utilizando uma tinta que, para essa superfície, rende $3\,\text{m}^2$ por litro. Para essa tarefa, o escultor gastará, no mínimo, ____ litros de tinta. (Considere $\pi = 3$)

(a) 18
(b) 24
(c) 36
(d) 48

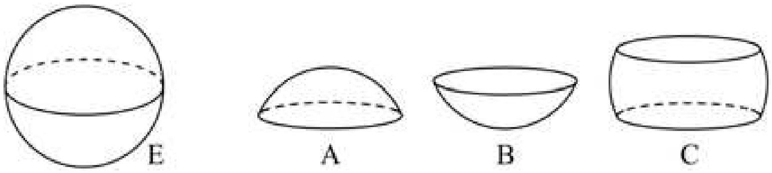
(EEAR-2017) QUESTÃO 19

Uma esfera está inscrita num cilindro equilátero cuja área lateral mede $16\pi\text{cm}^2$. O volume da esfera inscrita é

(a) 8π
(b) 16π
(c) $\frac{32}{3}\pi$
(d) $\frac{256}{3}\pi$

(EEAR-2018) QUESTÃO 20

Uma esfera E foi dividida em 3 partes: A, B e C, como mostra o desenho.



Se os volumes dessas partes são tais que: $V(A) = V(B) = \frac{V(C)}{2}$ e $V(C) = 486\pi \text{cm}^3$, então o raio da esfera é ____ cm.

(a) 8
(b) 9
(c) 10
(d) 12

(ESPCEX-2001) QUESTÃO 21

Denomina-se rolamento a um dispositivo mecânico constituído por dois anéis em forma de casca cilíndrica e um conjunto de esferas.

Desejando obter o volume de uma das esferas de aço que compõe o rolamento dado na figura 1, sem desmontá-lo, e não dispondo de todos os instrumentos necessários para executar as medições, um estudante executou os seguintes procedimentos:

a. Com os instrumentos de que dispunha, mediu o anel interno, em forma de casca cilíndrica, obtendo $3,46\,\text{cm}$ para o diâmetro interno, $4\,\text{cm}$ para o diâmetro externo e $1\,\text{cm}$ para altura;

b. Repetiu as operações para o anel externo, anotou as medidas e calculou o volume, obtendo $3,8\,\text{cm}^3$;

c. Lembrando o princípio de Arquimedes, que afirma que o volume de um objeto imerso num recipiente com líquido corresponde à variação do volume do líquido, colocou água numa proveta graduada em cm^3, conforme a figura 2, mergulhou o rolamento na água e obteve a leitura indicada na figura 3.

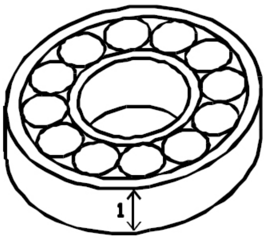


FIGURA 1

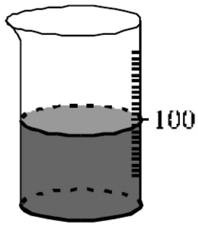


FIGURA 2

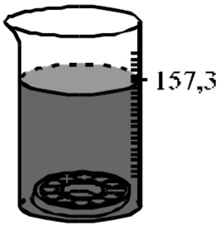


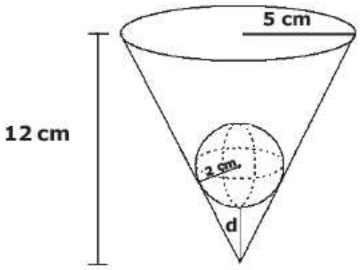
FIGURA 3

Nessas condições pode-se afirmar que o valor que mais se aproxima do volume de cada esfera, em cm^3, é (aproximações aceitas: $1,73^2 \approx 3$, $3,46^2 \approx 12$, $\pi \approx 3,1$):

(a) $3,4$
(b) $4,6$
(c) $3,8$
(d) $4,2$
(e) $5,0$

(ESPCEX-2008) QUESTÃO 22

Uma esfera de 2cm de raio é colocada no interior de um vaso cônico, conforme a figura a seguir.

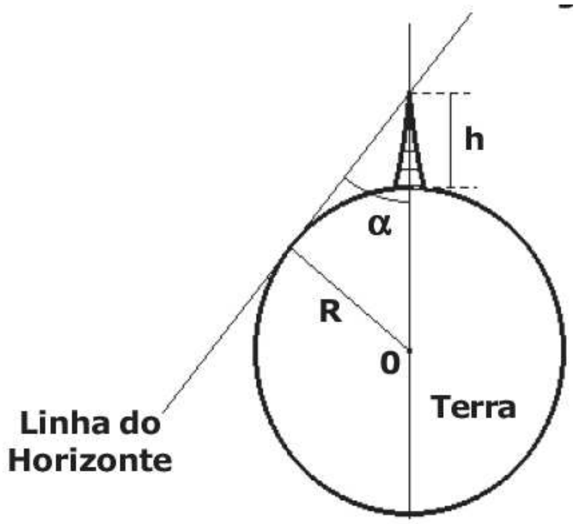


O vaso tem 12cm de altura e sua abertura é uma circunferência com 5cm de raio. Nessas condições, a menor distância (d) entre a esfera e o vértice do cone é

(a) $3,0$cm
(b) $3,2$cm
(c) $3,4$cm
(d) $3,6$cm
(e) $3,8$cm

(ESPCEX-2012) QUESTÃO 23

Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura.



Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por:

(a) $R = \dfrac{\text{sen}(\alpha h)}{1 - \text{sen}\,\alpha}$

(b) $R = \dfrac{h\,\text{sen}\,\alpha}{1 - \text{sen}\,\alpha}$

(c) $R = \dfrac{h\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha - 1}$

(d) $R = \dfrac{1 - \text{sen}\,\alpha}{h\,\text{sen}\,\alpha}$

(e) $R = \dfrac{1 + \text{sen}\,\alpha}{h\,\text{sen}\,\alpha}$

(ESPCEX-2013) QUESTÃO 24

Considere que uma laranja tem a forma de uma esfera de raio $4\,$cm, composta de 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:

(a) $\dfrac{4^3\pi}{3}\,\text{cm}^2$

(b) $\dfrac{4^3\pi}{9}\,\text{cm}^2$

(c) $\dfrac{4^2\pi}{3}\,\text{cm}^2$

(d) $\dfrac{4^2\pi}{9}\,\text{cm}^2$

(e) $4^3\pi\,\text{cm}^2$

(ESPCEX-2014) QUESTÃO 25

Um cone de revolução tem altura $4\,\text{cm}$ e está circunscrito a uma esfera de raio $1\,\text{cm}$. O volume desse cone (em cm^3) é igual a

(a) $\frac{1}{3}\pi$
(b) $\frac{2}{3}\pi$
(c) $\frac{4}{3}\pi$
(d) $\frac{8}{3}\pi$
(e) 3π

(ESPCEX-2015) QUESTÃO 26

Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base tem medida R, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é mergulhada nesse recipiente ficando totalmente submersa, sem haver transbordamento de água. Se a altura da água subiu $\frac{9}{16}R$, então o raio da esfera mede

(a) $\frac{2}{3}R$
(b) $\frac{3}{4}R$
(c) $\frac{4}{9}R$
(d) $\frac{1}{3}R$
(e) $\frac{9}{16}R$

(ESPCEX-2017) QUESTÃO 27

A angioplastia é um procedimento médico caracterizado pela inserção de um cateter em uma veia ou artéria com o enchimento de um pequeno balão esférico localizado na ponta desse cateter. Considerando que, num procedimento de angioplastia, o raio inicial do balão seja desprezível e aumente a uma taxa constante de $0,5\,\text{mm/s}$ até que o volume seja igual a $500\,\text{mm}^3$, então o tempo, em segundos, que o balão leva para atingir esse volume é

(a) 10

(b) $10\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$
(c) $10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$
(d) $10\sqrt[3]{\pi}$
(e) $10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$

(ESPCEX-2018) QUESTÃO 28

O volume de uma esfera inscrita em um cubo com volume 216cm^3 é igual a

(a) $38\pi\text{cm}^3$
(b) $36\pi\text{cm}^3$
(c) $34\pi\text{cm}^3$
(d) $32\pi\text{cm}^3$
(e) $30\pi\text{cm}^3$

1.3– GABARITO

Q. 1: B
Q. 2: A
Q. 3: C
Q. 4: A
Q. 5: B
Q. 6: D
Q. 7: D
Q. 8: D
Q. 9: A
Q. 10: D
Q. 11: D
Q. 12: C
Q. 13: B
Q. 14: D
Q. 15: B
Q. 16: C
Q. 17: B
Q. 18: C
Q. 19: C
Q. 20: B
Q. 21: D
Q. 22: B
Q. 23: B
Q. 24: A
Q. 25: D
Q. 26: B
Q. 27: E
Q. 28: B