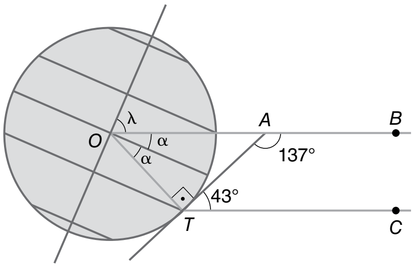
Capítulo 11
Geometria de posição

Para pensar

1. Resposta possível:
1º Em uma sala com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, a aresta comum a duas paredes representa uma reta perpendicular ao plano do piso.
2º Se um lustre é preso ao teto plano e horizontal por um único fio, então o fio representa uma reta perpendicular ao plano do teto.

2. No esquema apresentado no texto de abertura, repetido e detalhado abaixo, temos que $T\hat{A}B$ e $A\hat{T}C$ são ângulos colaterais internos formados por duas retas paralelas (raios solares) e a transversal $\overleftrightarrow{AT}$; logo, esses ângulos são suplementares, isto é, $m(T\hat{A}B) = 137°$.



O ângulo $T\hat{A}B$ é externo do triângulo OTA; logo:
$m(T\hat{A}B) = m(A\hat{O}T) + m(O\hat{T}A) \Rightarrow 137° = 2\alpha + 90°$
$\therefore \alpha = 23{,}5°$, ou, de maneira equivalente, $\alpha = 23°30'$

Exercícios propostos

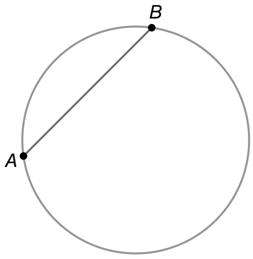
1. a) V, pois os conceitos de ponto, reta e plano são aceitos sem definição.
b) F, pois a reta não tem origem nem extremidade; ela é ilimitada em seus dois sentidos.
c) F, pois um plano não tem contorno; ele é ilimitado em todas as suas direções.
d) V, pois postulados ou axiomas são as verdades iniciais, aceitas sem demonstração.
e) V, pois é um postulado (P.2).
f) V, pois por dois pontos distintos passa uma única reta (P.4).
g) V, pois, se os pontos são distintos, por eles passa uma única reta (P.4); e, se são coincidentes, passam infinitas retas.
h) F, pois por P.2 existe reta e existem infinitos pontos que não pertencem à reta.
i) V, por P.3.
j) F, pois por P.3 existe ponto que não pertence ao plano; e, por T.2, por esse ponto passam infinitas retas.
k) V, pela mesma justificativa anterior.
l) V, por T.4 e pela mesma justificativa do item **j**.
m) F, pois, se A, B e C pertencem a uma mesma reta r, temos, por P.2, que existe M que não pertence a r. Como M, A e B não são colineares, eles determinam um plano α, logo, por P.3, existe um ponto P que não pertence a α. Como P, A e B não são colineares, eles determinam um plano β, com $\beta \not\equiv \alpha$. Logo, A, B e C pertencem simultaneamente a dois planos distintos α e β.
n) V, pois, por P.5, três pontos não colineares determinam um plano.
o) V, pois, se os pontos não são colineares, temos, por P.5, que eles determinam um plano; e, se são colineares, temos, por T.8, que existem infinitos planos que passam por eles.
p) F, pois três deles podem não ser colineares, determinando um plano α, e o quarto ponto pode não pertencer a α, conforme P.3.
q) V, pois é um postulado (P.9).
r) F, pois, por P.9, se uma reta r e um plano α têm dois pontos distintos em comum, então $r \subset \alpha$.
s) V, pois, por definição, circunferência é o conjunto dos pontos de um plano que distam r ($r > 0$) de um ponto O desse plano.
t) F, pois não existe plano ao qual pertençam todos os pontos de um cubo.

2. a) V, pois $P \in (\overline{AC} \cup \overline{CD}) \Leftrightarrow P \in \overline{AD}$
b) F, pois $P \in (\overline{AC} \cap \overline{BD}) \Leftrightarrow P \in \overline{BC}$
c) V, pois $\overline{AB}$ é definido como a união do conjunto $\{A, B\}$ com o conjunto dos pontos entre A e B.
d) F, pela mesma justificativa do item **c**.
e) V, pois $C \in \overline{AB}$, com $C \neq A$ e $C \neq B$.
f) F, pois B é um extremo do segmento $\overline{BD}$.
g) V, pois dois segmentos são consecutivos quando têm um extremo em comum.
h) F, pois esses segmentos não têm apenas um extremo em comum (eles têm infinitos pontos comuns).
i) V, pois os segmentos estão contidos em uma mesma reta.
j) F, pois $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares e, portanto, têm a mesma reta suporte.
k) V, pois todo ponto de $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BD}$ pertence a r e todo ponto de r pertence a $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BD}$.
l) V, pois todo ponto de $\overrightarrow{BD} \cup \overrightarrow{CA}$ pertence a $\overline{BC}$ e todo ponto de $\overline{BC}$ pertence a $\overrightarrow{BD} \cup \overrightarrow{CA}$.
m) F, pelo postulado P.6.

3. Respostas possíveis:
a) o ponto F e o plano pl(ABC)
b) a reta $\overleftrightarrow{FC}$ e o plano pl(ABC)
c) os planos pl(ABC) e pl(HGF)
d) os planos pl(HGB) e pl(HGF)
e) as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$
f) as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$
g) as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{FG}$
h) os planos pl(DAB), pl(DAH) e pl(DEC)
i) o plano pl(DCG)

4. a) A reta r é uma figura convexa, pois dois pontos quaisquer de r são extremos de um segmento de reta contido em r.
b) O plano α é uma figura convexa, pois dois pontos quaisquer de α são extremos de um segmento de reta contido em α.

c) A circunferência C não é uma figura convexa, pois existem dois pontos de C que são extremos de um segmento de reta que não está contido em C:

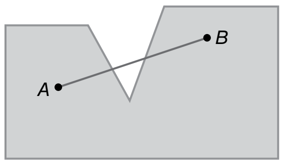


Observe que existem pontos do segmento $\overline{AB}$ que não pertencem à circunferência.

d) O círculo O é uma figura convexa, pois dois pontos quaisquer de O são extremos de um segmento de reta contido em O.

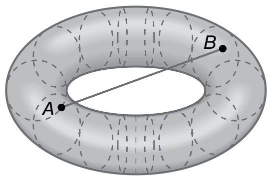
e) O polígono P é uma figura convexa, pois dois pontos quaisquer de P são extremos de um segmento de reta contido em P.

f) O polígono U não é uma figura convexa, pois existem dois pontos de U que são extremos de um segmento de reta que não está contido em U:



Observe que existem pontos do segmento $\overline{AB}$ que não pertencem ao polígono.

5. O toro T não é uma figura convexa, pois existem dois pontos de T que são extremos de um segmento de reta que não está contido em T:



Observe que existem pontos do segmento $\overline{AB}$ que não pertencem ao toro.

6. a) V, pois são retas coplanares que não têm ponto em comum.
b) V, pois são retas coplanares que não têm ponto em comum.
c) F, pois são retas concorrentes, isto é, têm um único ponto em comum.
d) V, pois são retas que têm um único ponto em comum.
e) F, pois são retas paralelas, portanto, são coplanares.
f) V, pois $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são retas paralelas distintas, portanto, determinam um plano.
g) V, pois são retas não coplanares.
h) V, pois essas retas contêm as diagonais do retângulo $ABCD$; logo, têm um único ponto em comum.
i) F, pois os pontos D, B e H determinam um plano ao qual F não pertence.
j) V, pois o plano pl(ABC) contém o retângulo $ABCD$.
k) F, pois o plano pl(HEG) contém o retângulo $EFGH$.
l) V, pois os pontos A, C e E determinam um plano ao qual G não pertence; logo, $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ não são coplanares.

7. a) F, pois as retas podem ser paralelas coincidentes.
b) V, por definição de retas paralelas.
c) V, por definição de retas concorrentes.
d) F, pois as retas podem ser coincidentes.
e) V, pois, por P.4, r e s são coincidentes e, portanto, são paralelas coincidentes.
f) F, pois retas coincidentes têm todos os seus infinitos pontos em comum.
g) V, pois elas têm infinitos pontos em comum e, portanto, têm um ponto comum.
h) V, por P.10.
i) F, pois se as retas são reversas, não existe plano que as contém.
j) V, por definição de retas reversas.
k) F, pois as retas podem ser concorrentes.
l) V, pois r e s são paralelas distintas ou reversas.
m) V, pois se r e t fossem concorrentes ou reversas, teríamos que s e t seriam concorrentes ou reversas, o que contraria a hipótese de s ser paralela a t.

8. a) F, pois $r // t$ e $s // t \Rightarrow r // s$, o que contraria a hipótese de r e s serem reversas.
b) F, pois r e t podem ser paralelas.
c) V, pois, supondo que b não concorra com c, teríamos duas retas concorrentes a e b, paralelas à reta c, o que contraria o postulado P.10.
d) V, pois supondo que r não concorra com s, teríamos $r // s$ e, consequentemente, as retas concorrentes a e b seriam paralelas a r, o que contraria o postulado P.10.
e) V, por P.10.
f) V, pois para qualquer ponto Q da reta s temos que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ concorre com s.
g) F, pois qualquer reta que passa por P e não é paralela nem concorrente com r é reversa a r.
h) F, pois s e t podem ser concorrentes.

9. a) F, pois se os três pontos pertencem a uma reta r temos, por T.8, que existem infinitos planos que passam por r.
b) V, por P.5.
c) F, pois se P pertence a r temos, por T.8, que existem infinitos planos que passam por r.
d) V, por T.5.
e) F, pois se as retas são coincidentes temos, por T.8, que existem infinitos planos que as contêm. E se as retas são reversas não existe plano que as contenha.
f) V, por T.6.
g) F, pois se as retas são paralelas coincidentes temos, por T.8, que existem infinitos planos que as contêm.
h) V, por T.7.
i) V, pois não há outra possibilidade para duas retas coplanares.
j) V, pois, por T.6 e T.7, quaisquer duas retas concorrentes ou paralelas distintas determinam um plano; e, por T.8, por duas retas coincidentes passam infinitos planos.

k) F, pois, por exemplo, as retas que contêm três arestas paralelas distintas de um cubo não são coplanares.

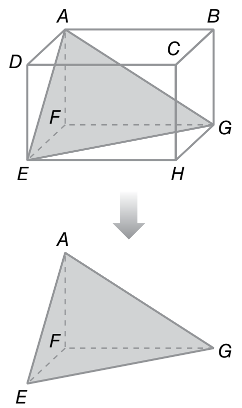
l) V, pois, por exemplo, em um trapézio, as três retas que contêm as bases e a base média são paralelas coplanares.

m) F, pois, por exemplo, em um cubo, as três retas que contêm as arestas que passam por um mesmo vértice não são coplanares.

n) F, pois, por exemplo, em um cubo, as retas que contêm duas arestas concorrentes de uma face e um vértice do cubo, que não pertença a essa face, não são coplanares.

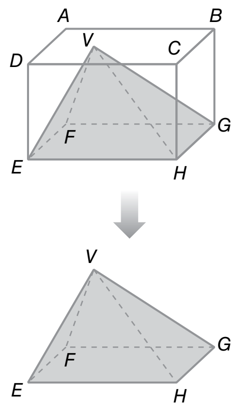
10. a) pl(ABC), pl(CBG), pl(DCF), pl(EFG), pl(ADH) e pl(ABG).

b) Para visualizar melhor a figura, vamos partir do paralelepípedo reto-retângulo $ABCDEFGH$, abaixo, ligando por segmentos de reta os pontos A, E e G. Assim, $AEFG$ é uma figura tridimensional limitada pelos quatro planos distintos: pl(AEG), pl(AEF), pl(AFG) e pl(EFG).



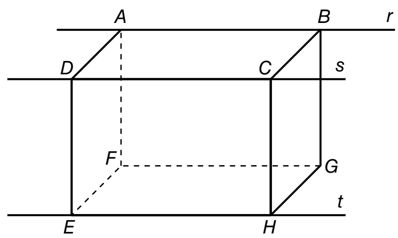
Indicando por r, s, t, u, v e w as retas $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{AG}$, $\overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FA}$, respectivamente, podemos representar os planos também por: pl(r, s), pl(v, w), pl(s, u) e pl(u, t).

c) Para visualizar melhor a figura, vamos partir do paralelepípedo reto-retângulo $ABCDEFGH$, abaixo, ligando por segmentos de reta um ponto V da face superior aos pontos E, F, G e H. Assim, $VEFGH$ é uma figura tridimensional limitada pelos cinco planos distintos: pl$(\overleftrightarrow{VE}, \overleftrightarrow{VH})$, pl$(\overleftrightarrow{VH}, \overleftrightarrow{VG})$, pl$(\overleftrightarrow{VG}, \overleftrightarrow{VF})$, pl$(\overleftrightarrow{VF}, \overleftrightarrow{VE})$ e pl$(\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{EH})$



11. Três pontos não colineares determinam um plano. Assim, os pontos de apoio do tripé no solo estão em um mesmo plano e, por isso, dão estabilidade ao tripé.

12. Vamos explicar a partir do paralelepípedo reto-retângulo $ABCDEFGH$, abaixo, em que r é a reta determinada pelos pontos A e B; s é a reta determinada pelos pontos D e C; e t é a reta determinada pelos pontos E e H.



Note que $r \cap s \neq \varnothing$, $r \cap t \neq \varnothing$ e $s \cap t \neq \varnothing$; entretanto, as retas r, s e t não são coplanares.

13. a) V, pois a reta não tem ponto em comum com o plano.

b) V, pois a reta não tem ponto em comum com o plano.

c) F, pois a reta tem um único ponto (C) em comum com o plano.

d) V, pois a reta não tem ponto em comum com o plano.

e) V, pois $A \in$ pl(HGB) e $B \in$ pl(HGB).

f) F, pois $E \notin$ pl(FGB).

g) V, pois a reta tem um único ponto (C) em comum com o plano.

h) F, pois a reta não tem ponto em comum com o plano.

i) V, pois a reta tem um único ponto (B) em comum com o plano.

j) V, pois a reta é secante ao plano em F.

k) F, pois a reta não tem ponto em comum com o plano.

l) V, pois a reta não tem ponto em comum com o plano.

14. a) V, pois é a definição de reta secante ao plano.

b) V, pelo postulado P.8.

c) F, pois r pode estar contida em α.

d) V, pelo teorema T.12.

e) F, pois ela é paralela a infinitas retas do plano α.

f) V, pois qualquer reta de α, não paralela a r, é reversa com r.

g) V, pelo postulado P.9.

h) V, pelo teorema T.13.

i) F, pois P pode pertencer ao plano α.

j) V, pelo teorema T.11.

k) F, pois t e s podem ser concorrentes.

l) F, pois t e s podem ser concorrentes.

15. a) infinitas

b) nenhuma

c) infinitas

d) A reta r pode ser paralela a α ou pode estar contida em α.
e) As retas r e s podem ser concorrentes ou reversas.
f) A reta s é secante ou paralela a α.
g) As retas r e s podem ser paralelas distintas ou reversas.

16. Faremos a demonstração por absurdo. Para isso, anexamos à hipótese a negação da tese, isto é, admitimos que A, B e C são pontos não colineares que pertencem a dois planos distintos α e β. Como A, B e C são pontos não colineares, temos, pelo postulado P.5, que existe um único plano que passa por esses três pontos e, portanto, $\alpha \equiv \beta$. Mas isso é absurdo, pois, por hipótese, $\alpha \not\equiv \beta$. Como a suposição de que A, B e C não são colineares nos conduziu a um absurdo, concluímos que A, B e C são colineares.

Outro modo:
Como os planos distintos α e β têm o ponto A em comum, temos pelo teorema T.10 que a intersecção de α e β é uma reta.
Logo, A, B e C pertencem a essa reta, ou seja, A, B e C são pontos colineares.

17. a) V, pois é a definição de planos secantes.
b) F, pois dois planos coincidentes possuem uma reta comum.
c) V, pois dois planos distintos que possuem uma reta comum possuem um ponto comum e, portanto, por T.10, possuem uma única reta comum.
d) V, por T.10.
e) V, pois, se r fosse reversa ou concorrente à reta comum, r seria secante a um desses planos.
f) F, pois r pode estar contida em um desses planos.
g) F, pois α e β podem ser secantes e $A \in \alpha \cap \beta$.
h) V, pois, com $B \in \alpha$ e $B \notin \beta$, temos que α e β são planos distintos que têm o ponto A em comum; logo, por T.10, esses planos são secantes.
i) F, pois a intersecção de dois planos ou é vazia ou é uma reta ou é um plano.
j) V, pois, por exemplo, cada vértice de um cubo é a intersecção dos três planos das faces.
k) V, por T.8.
l) F, pois α pode ser o plano determinado por r e s.
m) V, pois, considerando uma reta que passa por esse ponto, temos, por T.8, que existem infinitos planos que contêm essa reta.
n) F, pois qualquer reta de α é paralela a β.
o) V, pois qualquer reta de α é paralela a β.
p) F, pois se α é secante a β, em r, existe uma reta s em α paralela à reta r e, portanto, $s \,//\, \beta$.
q) V, pois r e s não têm ponto comum e, portanto, são paralelas distintas ou são reversas.
r) F, pois r e s podem estar em semiespaços opostos em relação a β.
s) V, por T.20.
t) V, pois, se α fosse secante a γ, concluiríamos, por T.17, que α seria secante a β, o que contraria a hipótese de que $\alpha \,//\, \beta$.
u) V, pelo teorema T.17.
v) V, pois:
- s não tem ponto em comum com r, pois, se tivesse, s coincidiria com r ou α coincidiria com β, e os dois casos contrariam a hipótese.
- s não é paralela a r, pois, se fosse, s estaria contida em um dos planos α ou β, ou seria paralela a ambas, e os dois casos contrariam a hipótese.

Resta, portanto, apenas uma possibilidade: s é reversa a r.

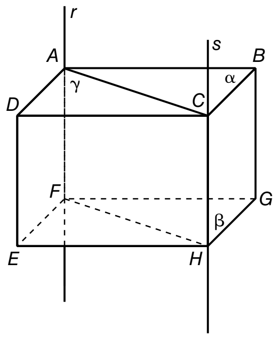
x) F, pois os planos podem ser coincidentes e, nesse caso, a reta estaria contida nos dois planos.

18. É a reta $\overleftrightarrow{AB}$.
Justificativa:
- $A \not\equiv B$, pois A e B pertencem a retas paralelas distintas.
- Pelo postulado P.9, temos que $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$ e $\overleftrightarrow{AB} \subset \text{pl}(r, s)$.
- $\text{pl}/(r, s) \not\equiv \alpha$

Logo, $\text{pl}(r, s) \cap \alpha = \overleftrightarrow{AB}$.

19. Não podemos afirmar que $\alpha \,//\, \beta$. Por exemplo, no paralelepípedo reto-retângulo $ABCDEFGH$, abaixo, sejam:

$\alpha = \text{pl}(ABG)$, $\beta = \text{pl}(CBG)$, $\gamma = \text{pl}(ACH)$, $r = \overleftrightarrow{AF}$ e $s = \overleftrightarrow{CH}$. Nessa figura temos que γ é secante aos planos, α e β, com $\alpha \cap \gamma = r$ e $\beta \cap \gamma = s$, sendo r e s retas paralelas distintas; entretanto, os planos α e β são secantes.



20. Como r tem um único ponto em comum com α e não tem ponto em comum com nenhum dos planos β e γ, temos que r é secante a α e paralela a β e γ.
Como os três planos são distintos entre si, para que r seja paralela a β e γ há apenas duas possibilidades: ou β e γ são secantes ou β e γ são paralelos distintos. Em qualquer uma dessas possibilidades, para que r tenha um único ponto em comum com o plano α, este deverá ser secante a β e γ.
Visualize essas situações no paralelepípedo reto-retângulo, abaixo.
Na figura 1, $r = \overleftrightarrow{DC}$, $\alpha = \text{pl}(BCH)$, $\beta = \text{pl}(EFG)$ e $\gamma = \text{pl}(ABG)$; na figura 2, $r = \overleftrightarrow{PQ}$, onde P e Q são pontos interiores às faces $ADEF$ e $BCHG$, respectivamente, $\alpha = \text{pl}(BCH)$, $\beta = \text{pl}(EFG)$ e $\gamma = \text{pl}(ACD)$.

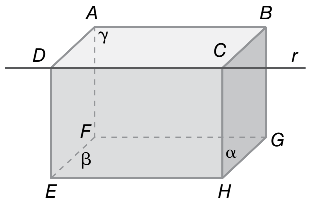


Figura 1

ou

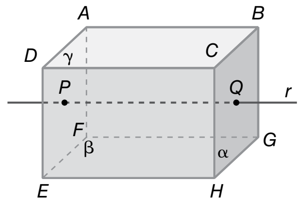
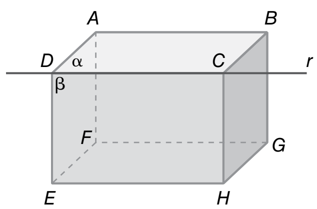


Figura 2

Alternativa **d**.

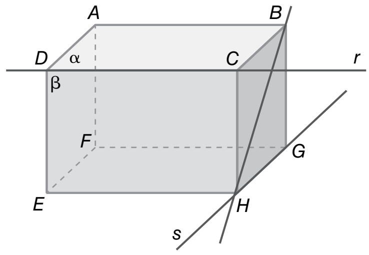
21. **a)** F, pois a reta pode ser comum aos dois planos ou ser paralela a um deles.
b) V, pois, considerando um plano γ paralelo à reta comum a α e β, temos que as retas determinadas pelas intersecções $\gamma \cap \alpha$ e $\gamma \cap \beta$ são paralelas.
c) V, pois basta considerar as retas r e s concorrendo em pontos distintos com a reta comum a α e β.
d) V, pois os planos podem ser secantes.
e) F, pois a intersecção de dois planos distintos é vazia ou uma reta.
f) F, pois a reta r pode ser paralela à reta comum de planos secantes α e β.
g) F, pois α e β podem ser secantes em t com r e s contidas em α e paralelas a t.
h) F, pois t e u podem ser reversas.
i) F, pois esses planos podem ter uma única reta s em comum, com $t \,//\, s$ e $t \not\equiv s$. Portanto, para qualquer reta r, haverá um desses planos paralelo a r ou contendo r.
j) F, pela mesma justificativa do item **i**.
k) F, pois:
- se $r \,//\, t$ e $r \not\equiv t$, essas retas determinam o plano $\text{pl}(r, t)$. Esse plano é um dos mencionados e contém t; logo, r não é paralela a $\text{pl}(r, t)$;
- se r e t são reversas, r é secante a infinitos desses planos.

22. **a)** A reta r pode ser paralela a α ou pode estar contida em α. Visualize essas possibilidades no paralelepípedo reto-retângulo abaixo.



- Sendo $\alpha = \text{pl}(ACD)$, $\beta = \text{pl}(CDE)$ e $s = \overleftrightarrow{FG}$, temos que α e β têm em comum a reta r, e s é paralela a r, com r paralela a α.
- Sendo $\alpha = \text{pl}(ACD)$, $\beta = \text{pl}(CDE)$ e $s = \overleftrightarrow{AB}$, temos que α e β têm em comum a reta r, e s é paralela a r, com r contida em α.

b) A reta s é paralela ou secante a α. Visualize essas situações no paralelepípedo reto-retângulo abaixo.



Sendo $\alpha = \text{pl}(ACD)$, $\beta = \text{pl}(CDE)$ e $r = \overleftrightarrow{DC}$, temos que α e β são secantes em r. Assim:

- considerando $s = \overleftrightarrow{HG}$, temos que s é reversa a r e $s \mathbin{/\!/} \alpha$;
- considerando $s = \overleftrightarrow{HB}$, temos que s é reversa a r e s é secante a α.

c) As retas r e s podem ser paralelas distintas ou reversas. Visualize essas possibilidades no paralelepípedo reto-retângulo abaixo. Na figura 1, $\alpha = \text{pl}(ADC)$, $\beta = \text{pl}(FEH)$, $r = \overleftrightarrow{DC}$ e $s = \overleftrightarrow{EH}$; com o que temos que α e β são paralelos distintos e contêm, respectivamente, as retas r e s, que são paralelas. Na figura 2, $\alpha = \text{pl}(ADC)$, $\beta = \text{pl}(FEH)$, $r = \overleftrightarrow{AC}$ e $s = \overleftrightarrow{EG}$; com o que temos que α e β são paralelos distintos e contêm, respectivamente, as retas r e s, que são reversas.

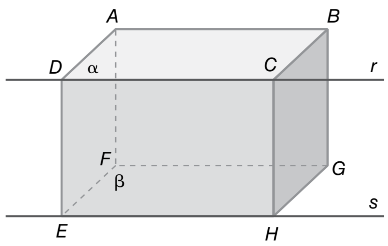


Figura 1

ou

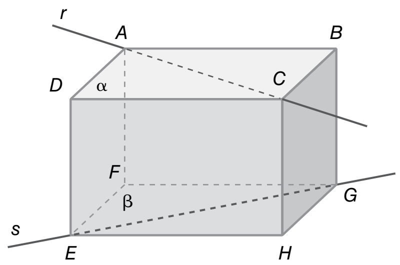


Figura 2

d) Dois quaisquer desses planos são secantes. Visualize essa situação a partir do interior de uma sala com forma de um paralelepípedo reto-retângulo, em que os planos considerados são o do teto e os de duas paredes com uma aresta em comum. Qualquer reta que você imaginar vai ter ponto em comum com pelo menos um dos três planos.

e) Possui um único ponto. Visualize essa situação a partir do interior de uma sala com forma de um paralelepípedo reto-retângulo, em que os planos considerados são o do teto e os de duas paredes com uma aresta em comum. O ponto comum ao teto e às paredes é o único ponto pertencente à intersecção dos três planos.

23. Os planos $\text{pl}(r, t)$ e $\text{pl}(s, t)$ são secantes, tendo em comum a reta t.
Justificativa:
As retas r e s são reversas, isto é, são retas não coplanares; logo, os planos $\text{pl}(r, t)$ e $\text{pl}(s, t)$ são distintos. Como esses planos distintos têm em comum uma reta (t), concluímos que eles são secantes.

24. Esse procedimento não basta para garantir que as lajes são paralelas, porque uma reta não determina um plano. Isto é, o fato de a reta $\overleftrightarrow{AB}$ ser horizontal não garante que o plano no qual ela está contida é horizontal.
Um procedimento correto seria, em cada laje, posicionar o nível de bolha em duas direções concorrentes constatando que as duas direções são horizontais. Como duas retas concorrentes determinam um plano, os planos das duas lajes seriam horizontais, portanto, as lajes seriam paralelas.

25. **a)** V, pois a face $BCFG$ é um retângulo.
b) F, pois $\overleftrightarrow{BC}$ não concorre com $\overleftrightarrow{AH}$.
c) V, pois $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AH} = \varnothing$, $\overleftrightarrow{BC} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AH}$.
d) V, pois $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BG}$.
e) V, pois $\overleftrightarrow{BC}$ é ortogonal a $\overleftrightarrow{AH}$.
f) F, pois $\overleftrightarrow{DC} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{HG}$.
g) F, pois o ângulo $E\widehat{C}F$ é agudo.
h) V, pois o ângulo $E\widehat{B}G$ é agudo.
i) V, pois $\overleftrightarrow{HF} \cap \overleftrightarrow{BG} = \varnothing$, $\overleftrightarrow{HF} \subset \text{pl}(HFG)$ e $\overleftrightarrow{BG} \perp \text{pl}(HFG)$.
j) V, pois $\overleftrightarrow{DC}$ é perpendicular às retas concorrentes $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CF}$ do plano $\text{pl}(BGF)$.
k) F, pois $\overleftrightarrow{AD} \perp \text{pl}(EFC)$ e $\overleftrightarrow{DG}$ concorre com $\overleftrightarrow{AD}$.
l) V, pois $\overleftrightarrow{DE}$ é perpendicular às retas concorrentes $\overleftrightarrow{DA}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ do plano $\text{pl}(ABC)$, e $\overleftrightarrow{DE}$ é perpendicular às retas concorrentes $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ do plano $\text{pl}(HGF)$.
m) V, pois cada uma dessas retas é perpendicular a duas retas concorrentes do plano $\text{pl}(ABC)$.

26. a) V, por definição de retas perpendiculares.

b) F, pois duas retas concorrentes são perpendiculares quando formam ângulos retos entre si.

c) V, por definição de retas ortogonais.

d) F, pois duas retas reversas são ortogonais quando formam ângulos retos entre si.

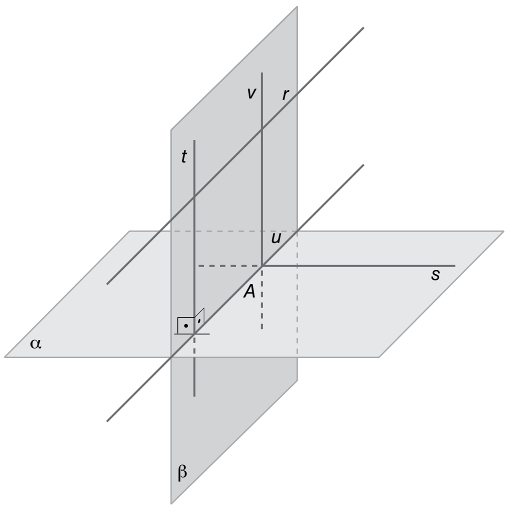
e) F, pois, por exemplo, considerando as retas r, s e t que contêm três arestas concorrentes de um cubo, elas são tais que $r \perp s$, $t \perp r$ e t não é paralela a s.

f) F, pois a reta perpendicular a uma delas pode ser reversa ou concorrente à outra.

g) V, pois, sendo as retas ortogonais r e s, consideremos:

- o plano α que contém s e é paralelo a r;
- uma reta t que passa por um ponto de r e é perpendicular a α;
- o plano $\beta = pl(r, t)$;
- a reta $u = \alpha \cap \beta$;
- o ponto A tal que $\{A\} = u \cap s$;
- a reta v que passa por A e é paralela a t.

Concluímos que v é a perpendicular comum às retas ortogonais r e s.



h) V, pelo teorema T.29.

i) F, pois, se essas duas retas distintas contidas em α forem paralelas, então r estará contida em α.

j) V, pelo T.30.

k) F, pois, se essas duas retas distintas contidas em α forem paralelas, então r será paralela a α.

l) F, pois r é perpendicular a infinitas retas contidas em α.

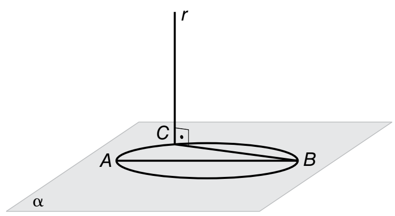
m) V, pela mesma justificativa do item l.

n) V, por definição de reta perpendicular a plano.

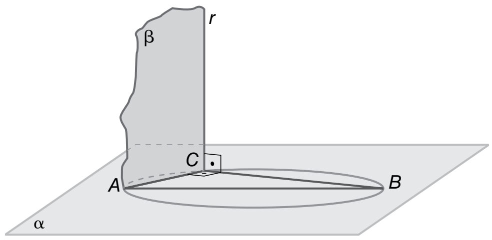
o) F, pois r é reversa a infinitas retas do plano α.

p) V, pois r sendo perpendicular a α em um ponto A, ela será perpendicular a todas as retas de α que passam por A e será ortogonal a todas as retas de α que não passam por A.

27. a)



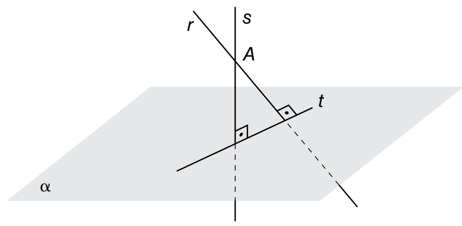
b) O triângulo ABC está inscrito em uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$; logo, esse triângulo é retângulo em C. Assim, a reta $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular às retas concorrentes r e $\overleftrightarrow{AC}$, com o que concluímos que $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular ao plano β determinado por r e A.



28. a) V, por T.31.

b) V, pois, admitindo, por absurdo, que r não é paralela a s, temos que ou r concorre com s ou r é reversa a s.

- Se r concorre com s, consideremos o plano $pl(r, s)$; a reta t comum a $pl(r, s)$ e α; e o ponto A, comum às retas r e s.



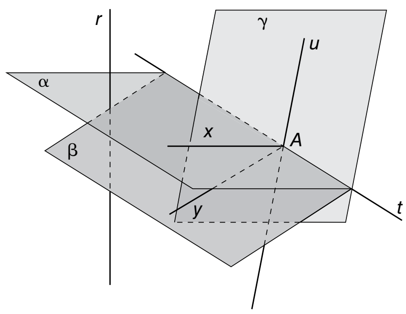
Como r e s são perpendiculares a α, teríamos r e s perpendiculares a t, ou seja, há duas retas distintas que passam por A e são perpendiculares a r, o que é um absurdo, por T.24.

- Se r e s são reversas e B é um ponto de r, então a reta u que passa por B e é paralela a s é perpendicular a α, por T.31.

Assim, sendo v a reta comum a $pl(u, r)$ e α, teríamos duas retas distintas passando por B e perpendiculares a v, o que é absurdo, por T.24.

Concluímos, então, que r não é concorrente com s nem reversa a s; logo, $r \mathbin{/\!/} s$.

c) V, pois supondo que α seja secante a β, com $\alpha \cap \beta = t$, consideremos que passe por um ponto A de t a reta u paralela a r. Assim, u é perpendicular a α, pelo teorema T.31. Seja γ um plano que contém u, com $\gamma \cap \alpha = x$ e $\gamma \cap \beta = y$.



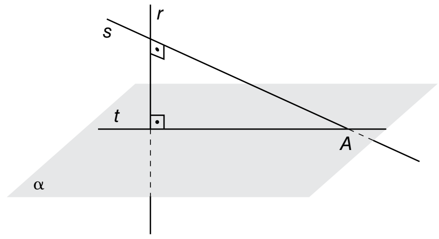
Assim, teríamos no plano γ duas retas distintas, x e y, passando pelo ponto A e perpendiculares a u, o que é absurdo.

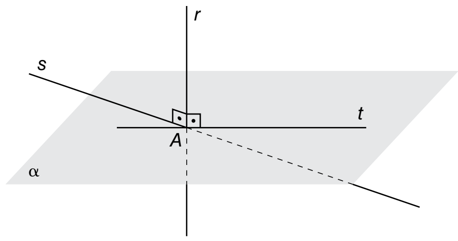
Logo, α não pode ser secante a β e, portanto, $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$.

d) F, pois basta considerar uma reta s perpendicular a r por um ponto A que não pertence a α.
A reta s será paralela a α.

e) F, pois a reta perpendicular a r pode estar contida em α.

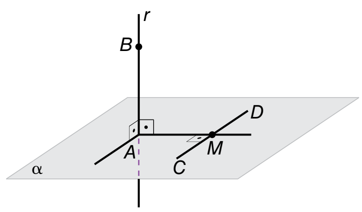
f) V, pois, se admitirmos, por absurdo, que s não está contida em α nem é paralela a α, temos que s é secante a α em um ponto A.
Sendo t a reta contida em α e concorrente com r, temos no plano pl(r, s) duas retas distintas, t e s, que passam por A e são perpendiculares a r, o que é absurdo.





Concluímos, então, que s não pode ser secante a α e, portanto, $s \subset \alpha$ ou $s \mathbin{/\!/} \alpha$.

29. **a)**



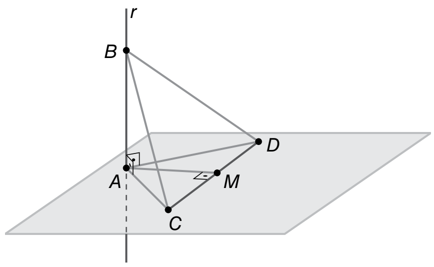
b) Temos:

I. $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, pois o segmento $\overline{AM}$ é altura e mediana do triângulo ACD; logo, o triângulo ACD é isósceles de base $\overline{CD}$.

II. $B\widehat{A}C \cong B\widehat{A}D$, pois ambos são retos, devido à perpendicularidade entre r e α.

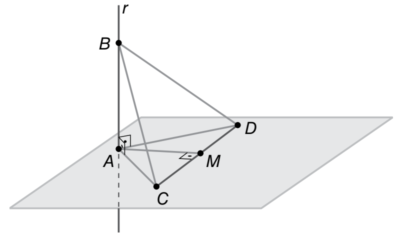
III. $\overline{BA}$ é lado comum aos triângulos ABC e ABD.

As condições I, II e III caracterizam o caso LAL de congruência de triângulos; logo, $ABC \cong ABD$. Dessa congruência, concluímos que $\overline{BC} \cong \overline{BD}$.

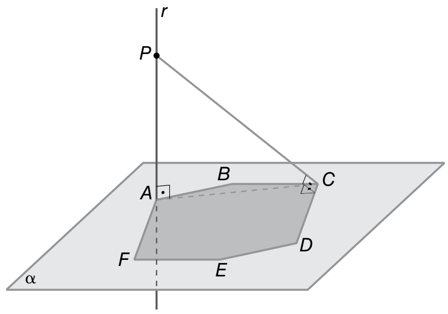


Outro modo

Pelo teorema das três perpendiculares, o segmento $\overline{BM}$ é perpendicular ao segmento $\overline{CD}$; logo, $\overline{BM}$, além de mediana, é altura do triângulo BCD. Temos, portanto, que o triângulo BCD é isósceles de base $\overline{CD}$, com o que concluímos que os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes.



30. Cada ângulo interno do hexágono regular mede 120°. Como $AB = CD$, temos que o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AC}$; logo, $m(B\widehat{A}C) = m(B\widehat{C}A) = 30°$, com o que deduzimos que $m(A\widehat{C}D) = 90°$. Temos, também, que $m(P\widehat{A}C) = 90°$, devido à perpendicularidade entre r e α. Assim, pelo teorema das três perpendiculares, concluímos que $m(P\widehat{C}D) = 90°$.



31. Se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano α, então r é perpendicular a α (T.29).

32. **a)** V, pois o plano pl(CBG) contém a reta $\overleftrightarrow{BG}$ perpendicular ao plano pl(ABC).

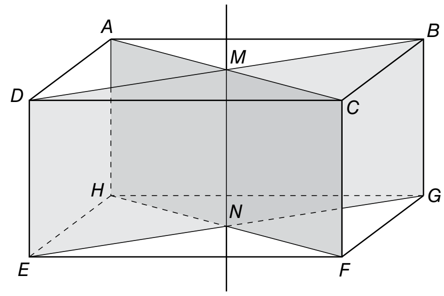
b) V, pois o plano pl(ABC) contém a reta $\overleftrightarrow{CB}$ perpendicular ao plano pl(ABG).

c) F, pois as faces opostas do paralelepípedo estão contidas em planos paralelos.

d) V, pois o plano pl(ACF) contém a reta $\overleftrightarrow{CF}$ perpendicular ao plano pl(EHF).

e) F, pois não existe reta contida no plano pl(DBG) e perpendicular ao plano pl(ABG).

f) V, sendo M e N os centros das faces $ABCD$ e $EFGH$, respectivamente, temos pl$(ACF) \cap$ pl$(DBG) = \overleftrightarrow{MN}$.



Os triângulos $\triangle ENM$, $\triangle GNM$ e $\triangle FNM$ são congruentes e, portanto, os ângulos $E\widehat{N}M$, $G\widehat{N}M$ e $F\widehat{N}M$ são congruentes. Como $E\widehat{N}M$ e $G\widehat{N}M$ são também suplementares, temos que cada um deles é reto. Assim, concluímos que $\overleftrightarrow{MN}$ é perpendicular ao plano pl(HGF).

g) V, pelo teorema T.36.

h) F, pois como $\overleftrightarrow{BG}$ é perpendicular ao plano pl(HGF), temos que qualquer plano que contém $\overleftrightarrow{BG}$ é perpendicular ao plano pl(HGF).

33. **a)** F, pois α é perpendicular a β se existe uma reta r contida em α e perpendicular a β; portanto, qualquer reta do plano α, paralela a r, será perpendicular a β.

b) V, pela mesma justificativa do item **a**.

c) V, pois, sendo t a reta comum a α e β, consideremos as retas distintas de t, r e s, contidas em α e β, respectivamente, com $r \perp \gamma$ e $s \perp \gamma$, e, portanto, $r // \beta$ e $s // \alpha$.

Supondo que haja um ponto comum a t e r, temos um absurdo, pois $r // \beta$ e $t \subset \beta$. Como t e r são coplanares e não têm ponto comum, temos que t e r são paralelas distintas. Além disso, $r \perp \gamma$ e, portanto, $t \perp \gamma$.

d) F, pois, por exemplo, os planos que contêm duas faces adjacentes, F_1 e F_2, de um cubo são perpendiculares aos planos das faces secantes a F_1 e F_2.

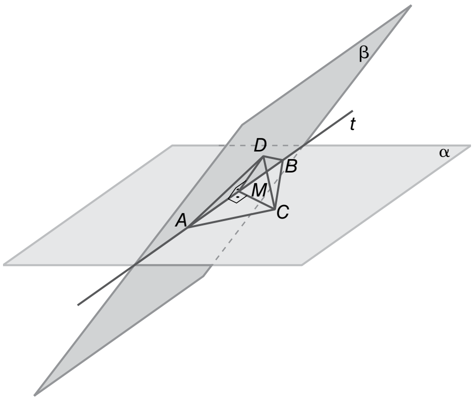
e) V, pois cada um dos planos α e β contém a reta t, que é perpendicular a γ.

f) V, pois qualquer plano que contém r é perpendicular a α.

g) V, pelo teorema T.36.

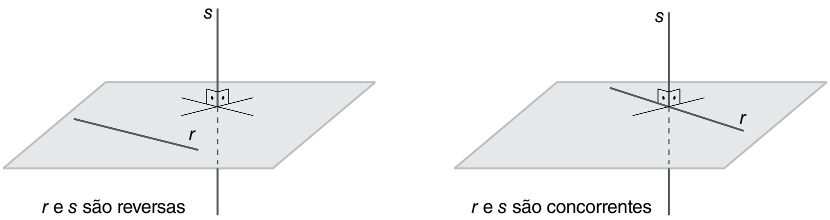
h) F, pois se $r \perp \alpha$ existem infinitos planos que contêm r e são perpendiculares a α.

34. Sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$, temos que os ângulos $D\widehat{M}A$ e $C\widehat{M}A$ são retos, pois os triângulos DAB e CAB são isósceles de base $\overline{BC}$. Logo, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular ao plano pl(DMC). Como a reta $\overleftrightarrow{CD}$ está contida no plano α e não tem ponto em comum com a reta $\overleftrightarrow{AB}$, concluímos pelo teorema T.28 que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são ortogonais.



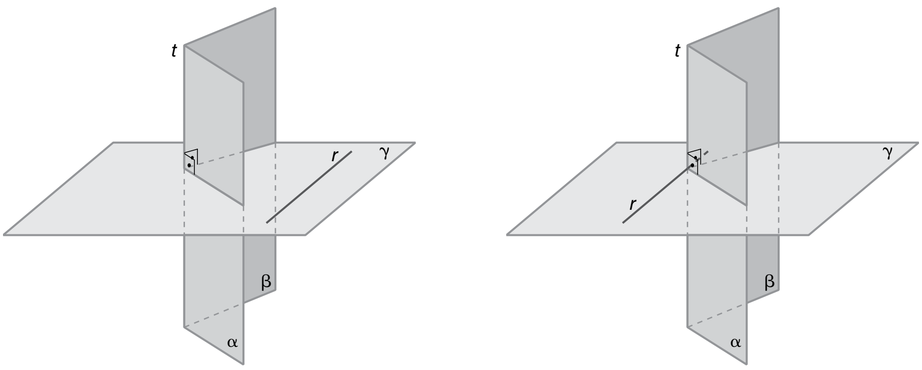
Alternativa **b**.

35. **a)** As retas r e s são reversas ou concorrentes, como se observa nas figuras abaixo:



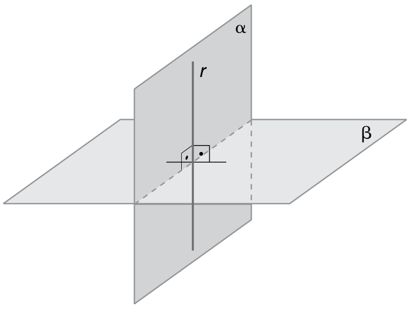
r e *s* são reversas | *r* e *s* são concorrentes

b) Existe o plano γ se a reta for ortogonal ou perpendicular à reta t comum aos planos α e β, como se observa nas figuras abaixo.



r é ortogonal a *t* | *r* é perpendicular a *t*

c) A reta r está contida em α, como se observa na figura abaixo.



36. Se $\gamma \perp \alpha$, então existe uma reta r contida em γ e perpendicular a α. Se α e β são planos paralelos e $r \perp \alpha$, então $r \perp \beta$. Logo, o plano γ contém a reta r perpendicular a β e, portanto, γ é perpendicular a β.

37. Sendo r e s duas retas reversas, existe um plano α que contém r e é paralelo a s. Assim, de acordo com o teorema T.36, existe um plano β que contém s e é perpendicular a α.
Alternativa **c**.

38. Se r é perpendicular a α, então qualquer plano que contém r é perpendicular a α. Se r não é perpendicular a α, então, pelo teorema T.36, existe um único plano que contém r e é perpendicular a α.
Alternativa **a**.

39. O triângulo ACD está inscrito em uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AD}$; logo, esse triângulo é retângulo em C. Temos, também, que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular ao plano pl(ACD). Assim, pelo teorema das três perpendiculares, deduzimos que o ângulo $B\widehat{C}D$ é reto. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ACD, concluímos:

$$(BD)^2 = 14^2 + 48^2 \Rightarrow BD = 50$$

Ou seja, a distância entre os pontos B e D é 50 m.
Alternativa **e**.

40. A projeção ortogonal de um ponto P sobre o plano α é o ponto P', com $P' \in \alpha$ e $\overleftrightarrow{PP'} \perp \alpha$.
A projeção ortogonal de uma figura qualquer sobre o plano α é o conjunto formado pelas projeções ortogonais de todos os pontos da figura sobre o plano α.
Assim, temos:

a) $\overline{HG}$;
b) $\overline{EG}$;
c) E;
d) E;
e) $\overline{FG}$;
f) $\overline{EF}$;
g) retângulo $EFGH$;
h) $\overline{FG}$;
i) $\overline{EG}$;
j) G;
k) retângulo $EFGH$.

41. Se o plano que contém uma circunferência C é perpendicular a um plano α, então a projeção ortogonal de C sobre α é um segmento de reta com a mesma medida do diâmetro de C.
Alternativa **e**.

42. Nos movimentos de subida e descida os pontos A e B descrevem arcos de uma circunferência contida em um plano perpendicular ao plano horizontal do chão. Logo, as projeções ortogonais desses arcos sobre o plano do chão são dois segmentos de reta horizontais e colineares.
Alternativa **b**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. a) V b) F c) V d) V e) F f) V g) F

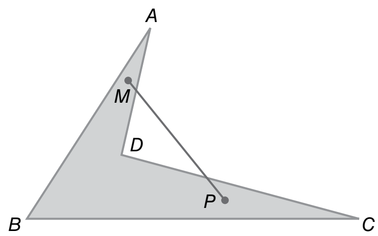
2. a) Pelo postulado P.4, dois pontos distintos determinam uma reta; e pelo postulado P.2, dada uma reta, existem infinitos pontos que não pertencem a ela. Logo, três pontos distintos podem não ser colineares.
b) Pelo postulado P.5, três pontos não colineares determinam um plano; e pelo postulado P.3, dado um plano, existem infinitos pontos que não pertencem a ele. Logo, quatro pontos distintos podem não ser coplanares.

3. $C_{6,\,2} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$
Logo, ficam determinadas 15 retas distintas.

4. $C_{6,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$
Logo, ficam determinados 20 planos distintos.

5. Duas figuras F e G são coincidentes se, e somente se, todo ponto de F pertence a G e todo ponto de G pertence a F. Logo, é impossível uma reta coincidir com um plano, pois é impossível que todos os pontos de um plano pertençam a uma reta.

6. Lembrando que um polígono é a reunião dos lados com seu interior, temos:
a) V, pois dois pontos distintos quaisquer do triângulo são extremos de um segmento de reta contido no triângulo.
b) F, pois o quadrilátero $ABCD$, abaixo, não é convexo, visto que os pontos M e P pertencem ao quadrilátero e o segmento $\overline{AB}$ não está contido no quadrilátero.



c) V, pois pelo menos uma das diagonais do quadrilátero, mesmo que ele não seja convexo, separa-o em dois triângulos, que são figuras convexas.
d) V, pela justificativa a seguir.
Sendo X e Y os polígonos convexos cuja intersecção não vazia é uma superfície, tomemos pontos quaisquer A e B tais que:

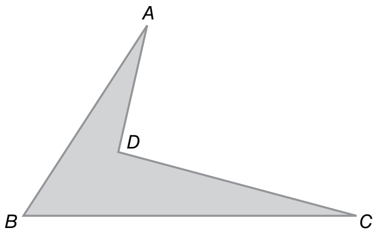
$$\begin{cases} A \in X \cap Y \Rightarrow A \in X \text{ e } A \in Y \\ B \in X \cap Y \Rightarrow B \in X \text{ e } B \in Y \end{cases}$$

I. Como X é convexo, $A \in X$ e $B \in X$, temos que $\overline{AB} \subset X$.

II. Como Y é convexo, $A \in Y$ e $B \in Y$, temos que $\overline{AB} \subset Y$.

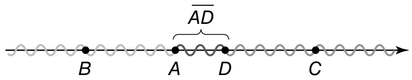
Por I e II, temos que $\overline{AB} \subset (X \cap Y)$, com o que concluímos que $X \cap Y$ é convexo.

e) F, pois a superfície $ABCD$, abaixo, não é convexa, embora seja a reunião dos triângulos ABD e CBD, que são polígonos convexos.



7. a) F, pois a disposição dos pontos na figura abaixo obedece a hipótese, mas contradiz a tese.

b) V, como se observa na figura abaixo:



c) F, pois a disposição dos pontos na figura abaixo obedece a hipótese, no entanto, $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{DB} = \varnothing$.

d) F, pois A (ou B) pode coincidir com um dos extremos de $\overline{CB}$; por exemplo:

8. a) F, pois os pontos do plano α localizados entre t e u não pertencem à união de spl(t, A) com spl(u, B).

b) V, pois $P \in \alpha \Leftrightarrow (P \in \text{spl}(t, A)$ ou $P \in \text{spl}(t, B))$.

c) F, pois $P \in \alpha \Leftrightarrow (P \in \text{spl}(t, B)$ ou $P \in \text{spl}(u, A))$.

d) V, pois os únicos pontos comuns a spl(t, A) e spl(t, B) são os pontos da reta t.

e) F, pois, por exemplo, os pontos da reta t pertencem a $(\text{spl}(u, A) \cap \text{spl}(t, B))$.

f) V, os pontos dessa intersecção são os pontos da reta t, da reta u e os pontos entre t e u.

g) V, pois A e B pertencem a semiplanos opostos em relação a t.

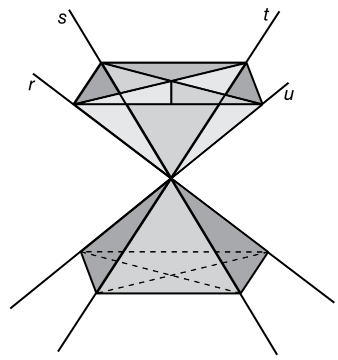
h) V, pois $x \in t \Leftrightarrow x \in \text{spl}(u, A)$.

9. Dentre os cinco pontos citados da circunferência, o número de pares de pontos distintos que podemos escolher é dado por $C_{5,\,2} = 10$. Cada par de pontos distintos da circunferência, juntamente com o ponto citado que não pertence a α, determinam um plano. Logo, podemos formar 10 planos, nessas condições. Além desses 10 planos, devemos contar, ainda, o plano α ao qual pertencem os cinco pontos citados da circunferência. Concluímos, então, que o número de planos determinados pelos seis pontos é $10 + 1 = 11$.

Alternativa **b**.

10. a) O número máximo de planos determinados por quatro retas distintas que têm um único ponto em comum ocorre quando não há, dentre elas, três retas coplanares. Cada par dessas retas determina um plano; logo, o número máximo de planos distintos que elas podem determinar é dado por: $C_{4,\,2} = 6$.

b)

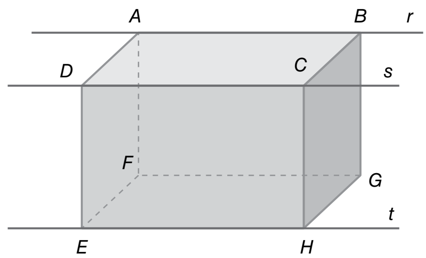


Os seis planos são: pl(r, s), pl(r, t), pl(r, u), pl(s, t), pl(s, u), pl(t, u)

11. (V), pois se r e s forem coincidentes, então existem infinitos planos que as contêm; se r e s forem distintas, então elas determinam um plano.

(F), pois r e s podem ser reversas.

(F), pois as retas que contêm três arestas paralelas distintas de um paralelepípedo reto-retângulo não são coplanares, observe:



r, s e t são paralelas duas a duas e não são coplanares.

(V), pois a intersecção de duas retas do espaço é vazia se, e somente se, as retas forem paralelas distintas ou reversas.

Alternativa **c**.

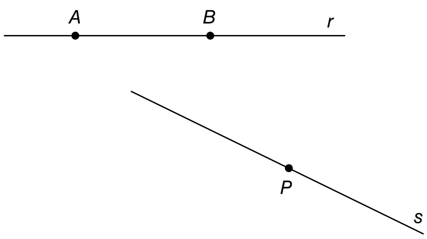
12. Dentre as retas determinadas pelos pares de vértices (A, D), (C, G) e (E, F), duas quaisquer não são coplanares, ou seja, duas quaisquer são reversas.

Alternativa **e**.

13. Três pontos determinam um plano se, e somente se, eles não forem colineares. Portanto, a afirmação da alternativa **e** é falsa.

Alternativa **e**.

14



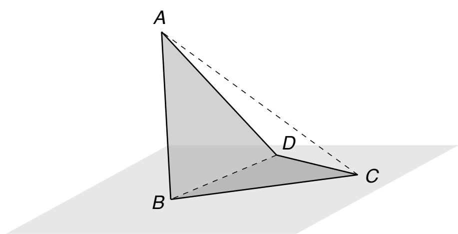
Os pontos A, B e P não são colineares, pois se fossem teríamos $r \equiv s$, o que contraria a hipótese de que r e s são reversas.

Assim, o postulado P.5 garante que A, B e P determinam um plano.

15. Os pontos A, B e C não são colineares, pois, se fossem, teríamos $r \equiv s \equiv t$, o que contraria a hipótese segundo a qual as retas r, s e t são distintas entre si.
Sendo não colineares, os pontos A, B e C determinam o plano $\alpha = \text{pl}(ABC)$.
Os pontos distintos A e B da reta r pertencem ao plano α e, portanto, pelo postulado P.9, a reta r está contida em α.
Os pontos distintos A e C da reta s pertencem ao plano α e, portanto, pelo postulado P.9, a reta s está contida em α.
Os pontos distintos B e C da reta t pertencem ao plano α e, portanto, pelo postulado P.9, a reta t está contida em α.
Provamos, assim, que as retas r, s e t são coplanares, pois todas estão contidas em α.

16. Se r e s forem paralelas coincidentes, teremos que t, r e s serão representadas por duas retas concorrentes e, portanto, pelo teorema T.6, são coplanares.
Se r e s forem paralelas distintas teremos, pelo teorema T.7, que elas determinam o plano $\alpha = \text{pl}(r, s)$. Sendo A e B os pontos de intersecção de t com r e s, respectivamente, temos $A \not\equiv B$, pois r e s são paralelas distintas. Assim, os pontos distintos A e B de t pertencem a α e, portanto, pelo postulado P.9, $t \subset \alpha$.
Provamos, assim, que as retas r, s e t são coplanares, pois todas estão contidas em α.

17. Sejam $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ as diagonais de um quadrilátero reverso:



Por absurdo, vamos supor que as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ estejam em um mesmo plano α. Assim, teríamos que os pontos A, B, C e D pertenceriam a α, o que é absurdo, pois o quadrilátero é reverso.
Logo, as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ não são coplanares, isto é, são reversas.

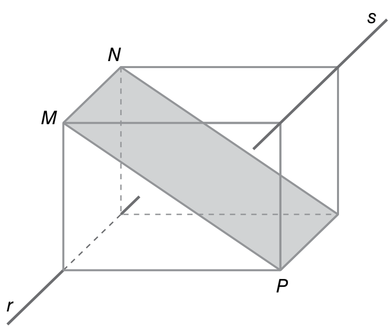
18. Em um plano, se duas retas r e m são paralelas, e uma reta s concorre com r, então s concorre com m. Logo, a alternativa **e** é a correta.
Alternativa **e**.

19. Sendo $\{A\} = r \cap s$, temos que $A \in \alpha$ e $A \in \beta$.
Assim, α e β são planos distintos que têm o ponto A em comum; logo, pelo teorema T.10, concluímos que esses planos são secantes.

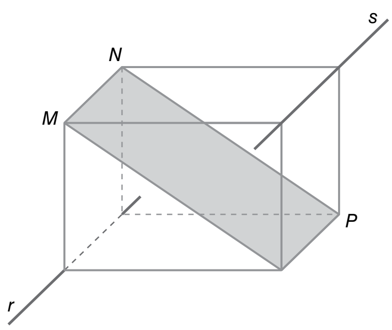
20. Se duas retas concorrentes r e s são tais que r é paralela a um plano α, então s é paralela a α ou s é secante a α. Em ambos os casos, s não está contida em α.
Alternativa **e**.

21. Para que duas retas r e s sejam paralelas a um plano, basta que nenhuma delas tenha ponto em comum com o plano. Assim, nada do que se afirmou nas alternativas **a**, **b**, **c** e **d** se pode concluir.
Alternativa **e**.

22. Há apenas duas situações possíveis: $\overline{MP}$ é diagonal de uma face do paralelepípedo ou $\overline{NP}$ é diagonal de uma face do paralelepípedo. Observe:



ou



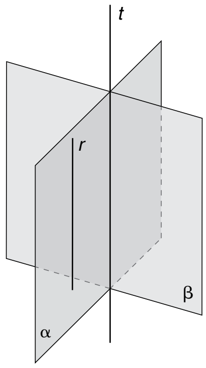
Em ambos os casos, as retas r e s, destacadas nas figuras, contêm arestas do paralelepípedo e são paralelas ao plano pl(MNP).
Alternativa **e**.

23. Temos que $P \notin \alpha$, pois os pontos em que r e s interceptam α são distintos. Assim, se uma reta passa por P e está contida no mesmo semiespaço de origem α, então, pelo postulado P.8, podemos concluir que a reta é paralela a α.
Alternativa **e**.

24. Como $r \mathbin{/\!/} \alpha$ e $s \mathbin{/\!/} r$, temos que ocorre apenas uma das duas possibilidades: $s \mathbin{/\!/} \alpha$ ou $s \subset \alpha$. Para cada uma dessas possibilidades, consideremos um ponto P qualquer pertencente a α. Assim, pelo teorema T.13, concluímos que a reta t que passa por P e é paralela a s está contida em α.
Alternativa **c**.

25. Se α fosse paralelo a β, teríamos pelo teorema T.16 que r seria secante a β, o que contraria a hipótese de r ser paralela a β. Logo, α e β não são paralelos, portanto são secantes.
Alternativa **c**.

26.



Como $r \mathbin{/\!/} \beta$, temos que $r \cap \beta = \varnothing$ e, portanto, $r \cap t = \varnothing$, pois $t \subset \beta$.
Como r e t são coplanares e não têm ponto em comum, concluímos que r e t são retas paralelas distintas.

27. Seja s uma reta concorrente com r e paralela a α. Pelo teorema T.20, concluímos que o plano β determinado por r e s é paralelo a α. O plano β é único, pois pelo teorema T.18 temos que por um ponto P qualquer passa um único plano paralelo a α.
Alternativa **e**.

28. 1º caso: r é secante a α.
Se r é secante a α em um ponto A, então qualquer plano β que contém r obedece às condições: $\beta \not\equiv \alpha$ e A é ponto comum a α e β. Logo, pelo teorema T.10, os planos α e β são secantes.
2º caso: r é paralela a α.
Se r é paralela a α, então qualquer plano β determinado por r e um ponto A pertencente a α obedece às condições: $\beta \not\equiv \alpha$ e A é ponto comum a α e β. Logo, pelo teorema T.10, os planos α e β são secantes.
3º caso: r está contida em α.
Se r está contida em α, então qualquer plano β determinado por r e um ponto que não pertença a α obedece às condições: $\beta \not\equiv \alpha$ e qualquer ponto de r é comum a α e β. Logo, pelo teorema T.10, os planos α e β são secantes.

29. **I.** F, pois se uma reta r é paralela a um plano α, então qualquer reta contida em α é paralela ou reversa a r.

II. F, pela justificativa a seguir.
Sejam α e β dois planos secantes e t a reta comum a eles. Por um ponto P pertencente a α, com $P \notin \beta$, passa uma reta r paralela a t, de acordo com o postulado P.10; logo, pelo teorema T.12, $r \mathbin{/\!/} \beta$.

III. V, pela justificativa a seguir.
Sejam α e β dois planos secantes, t a reta comum a eles, A um ponto pertencente a t e B um ponto pertencente a α, com $B \notin t$. De acordo com o postulado P.4, temos que A e B determinam uma reta s. A reta s está contida em α e é concorrente com t.

IV. F, pois duas retas do espaço que não têm ponto em comum são paralelas distintas ou reversas.

Alternativa **b**.

30. **I.** F, pois duas retas reversas são não coplanares; logo, não determinam um plano.

II. F, pois para que duas retas sejam paralelas a um plano, basta que nenhuma delas tenha ponto em comum com o plano; assim, podemos ter duas retas que concorrem entre si e sejam paralelas a um plano.

III. V, pois um plano secante aos dois planos paralelos intercepta-os segundo retas paralelas.

Alternativa **b**.

31. **I.** F, pela justificativa a seguir.

Sejam α e β dois planos secantes e t a reta comum a eles. Por um ponto P pertencente a α, com $P \notin \beta$, passa uma reta r paralela a t, de acordo com o postulado P.10; logo, pelo teorema T.12, $r \,//\, \beta$.

II. F, pela justificativa a seguir.

Sejam α e β dois planos secantes e t a reta comum a eles. Por um ponto P pertencente a α, com $P \notin \beta$, passa uma reta r paralela a t, de acordo com o postulado P.10; logo, pelo teorema T.12, $r \,//\, \beta$. Seja Q um ponto pertencente a α, com $Q \notin \beta$ e $Q \notin r$. Pelo ponto Q passa uma reta s paralela a r, portanto, s é paralela a t e s é paralela a β. Assim temos que, embora α seja secante a β, existem duas retas distintas contidas em α e paralelas a β.

III. V, pois se uma reta r está contida em um dos planos, então r não tem ponto em comum com o outro plano, visto que os planos são paralelos distintos. Logo, r é paralela ao outro plano.

IV. V, pela justificativa a seguir.

Seja r uma reta paralela a um plano α. Qualquer plano β que contenha r e seja secante a α é tal que a reta comum a α e β é paralela a r. Como existem infinitos planos β contendo r e secantes a α, concluímos que existem infinitas retas contidas em α e paralelas a r.

V. F, pois se uma reta r é paralela a um plano, então existem retas no plano reversas a r.

Alternativa **b**.

32. Observe no paralelepípedo reto-retângulo das figuras 1 e 2, abaixo, duas situações que nos permitem responder a esse teste:

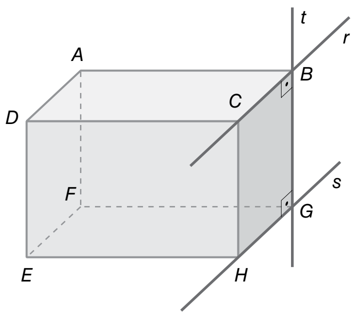


Figura 1

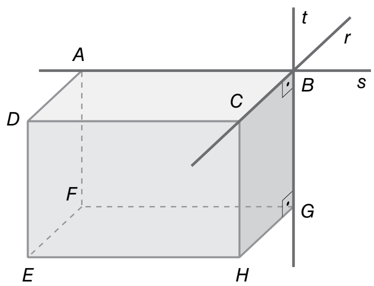


Figura 2

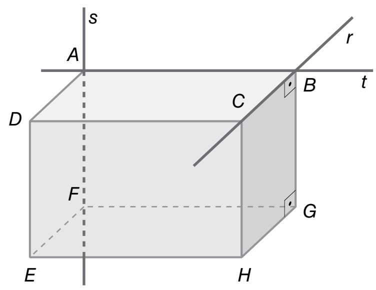


Figura 3

Na figura 1, as retas r, s e t que contêm as arestas $\overline{CB}$, $\overline{HG}$ e $\overline{BG}$, respectivamente, são tais que r é perpendicular a t e s é perpendicular a t. Note que r, s e t são coplanares e r é paralela a s.

Na figura 2, as retas r, s e t que contêm as arestas $\overline{CB}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BG}$, respectivamente, são tais que r é perpendicular a t e s é perpendicular a t. Note que r é perpendicular a s.

Na figura 3, as retas r, s e t, que contêm as arestas $\overline{BC}$, $\overline{AF}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, são tais que r é perpendicular a t, e s é perpendicular a t. Note que r e s são reversas.

Assim, nenhuma das conclusões apresentadas nas alternativas **a**, **b**, **c** e **d** pode ser deduzida.

Alternativa **e**.

33. **a)** A reta $\overleftrightarrow{ED}$ é perpendicular ao plano pl(ABC) no ponto D. Assim, qualquer reta contida nesse plano e que passe pelo ponto D é perpendicular a $\overleftrightarrow{ED}$. Logo, existem infinitas retas do plano pl(ABC) que são perpendiculares a $\overleftrightarrow{ED}$.

b) Seja α um plano perpendicular a r no ponto P. Qualquer reta contida nesse plano e que passe pelo ponto P é perpendicular a r; logo, existem infinitas retas distintas que são perpendiculares a r no ponto P.

c) Sendo Q um ponto não pertencente a uma reta s, existe uma única reta r perpendicular a s no ponto Q, de acordo com o teorema T.24.

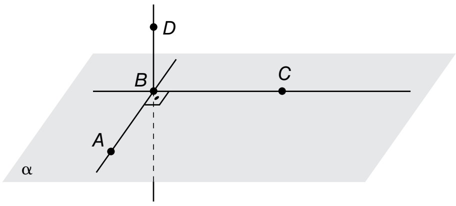
34. A reta r é ortogonal a s; portanto, pelo teorema T.27, qualquer reta t paralela a r forma ângulo reto com s.

Alternativa **d**.

35. Pelo teorema das três perpendiculares (T.33), concluímos que a reta u é perpendicular a r.

Alternativa **d**.

36.



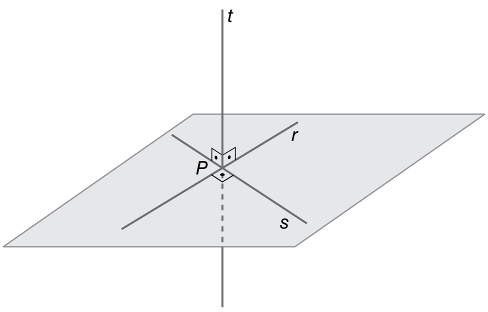
Como $\overleftrightarrow{DB}$ é perpendicular a α, temos que $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

Como $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular às retas concorrentes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DB}$, temos, pelo teorema T.29, que $\overleftrightarrow{DB} \perp \text{pl}(ADB)$.

37. Sejam as retas r' e s' contidas em α e paralelas às retas r e s, respectivamente. Como a reta t forma ângulo reto com r e s, temos que t forma ângulo reto com r' e s'; logo, pelo teorema T.30, concluímos que t é perpendicular a α.
Alternativa **d**.

38. Seja β o plano determinado por r e s e seja s' a reta comum a α e β. Como s e s' são retas coplanares, pois estão contidas em β e são perpendiculares a r, passando ambas pelo ponto A, temos que $s' \equiv s$; portanto, s está contida em α.
Alternativa **a**.

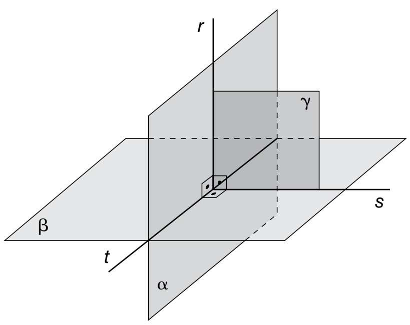
39. Sejam r, s e t retas distintas perpendiculares entre si em um ponto P. Assim, a reta t é perpendicular ao plano pl(r, s), conforme mostra a figura:



Vamos admitir a existência de uma quarta reta u, distinta de r, s e t, que passe por P e seja perpendicular a r, s e t. Assim, teríamos que u seria perpendicular ao plano pl(r, s); logo, teríamos duas retas distintas, t e u, passando por P e perpendiculares ao plano pl(r, s). Essa situação é impossível, pois, de acordo com o teorema T.32, dados um ponto P e um plano α, existe uma única reta que passa por P e é perpendicular a α. Portanto, é impossível a existência de quatro retas distintas passando por um ponto, tais que sejam perpendiculares duas a duas.
Alternativa **b**.

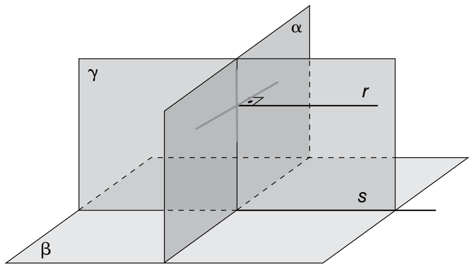
40. Como r é perpendicular a s, temos que r e s são concorrentes. Logo, r e s determinam um plano, de acordo com o teorema T.6. Ou seja, r e s são coplanares.
Alternativa **b**.

41. Sendo t a reta comum a α e β, temos, pelo teorema T.29, que $t \perp r$ e $t \perp s$.
Como $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = t$, $r \subset \alpha$ e $r \perp t$, temos, pelo teorema T.37, que $r \perp \beta$. Logo, r é perpendicular a s.



Alternativa **c**.

42. Pelo teorema T.36, temos que existe um único plano γ que contém r e é perpendicular a β. A reta s, comum a γ e β, é paralela à reta r.
Assim, pelo teorema T.31, concluímos que $s \perp \alpha$ e, portanto, $\beta \perp \alpha$.



43. Se dois planos são paralelos distintos e r é um reta qualquer de um deles, então uma reta s do outro plano é paralela ou reversa a r. Visualize essa situação no paralelepípedo reto-retângulo representado nas figuras baixo, em que $\alpha = \text{pl}(ADE)$, $\beta = \text{pl}(BCH)$ e $\lambda = \text{pl}(EFG)$.

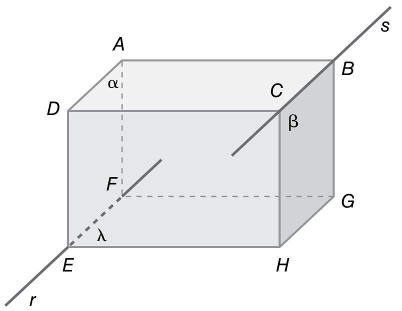


Figura 1

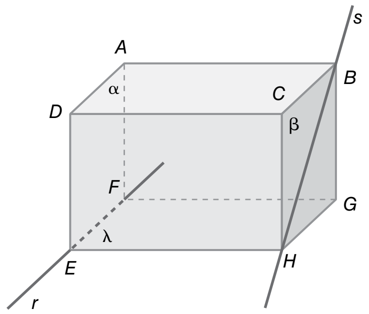


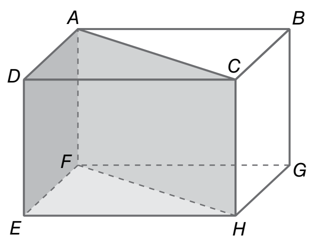
Figura 2

Como $\alpha \parallel \beta$, $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então $r \parallel s$ (figura 1) ou r é reversa a s (figura 2).
Alternativa **c**.

44. Pelo teorema T.32, existem as retas r e s que passam por P e são perpendiculares a α e β. Como r e s são concorrentes em P, concluímos que o plano γ determinado por elas passa por P e é perpendicular a cada um dos planos α e β.
Alternativa **a**.

45. Como $s \perp \beta$ e $\gamma \perp \beta$, temos, pelo teorema T.35, que $s \subset \gamma$ ou $s \parallel \gamma$. Mas, como $s \cap \gamma \neq \varnothing$, pois s concorre com r e $r \subset \gamma$, temos que $s \subset \gamma$.
Alternativa **d**.

46. (F), pela justificativa a seguir.
Seja P um ponto pertencente a uma reta t.
Vamos admitir que existam dois planos distintos α e β que passam por P e sejam perpendiculares a t. Assim, um plano λ que contém t tem em comum com α e β as retas distintas r e s, respectivamente. Como t é perpendicular a α e a β, temos que r e s são, ambas, perpendiculares a t. Essa situação é impossível, pois teríamos três retas coplanares distintas, r, s e t, concorrendo em um mesmo ponto e perpendiculares entre si.
(F), pois como se observa no paralelepípedo reto-retângulo abaixo, o plano pl(ADE) é perpendicular ao plano pl(EFH) e o plano pl(ACH) é perpendicular ao plano pl(EFH); entretanto, pl(ACH) é secante a pl(ADE).



(F), pois como se observa no paralelepípedo reto-retângulo mostrado no item anterior, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são paralelas ao plano pl(EFH); entretanto, $\overleftrightarrow{AB}$ é concorrente com $\overleftrightarrow{AC}$.
(F), pois como se observa no paralelepípedo reto-retângulo mostrado no segundo item, os planos pl(ADE) e pl(EFH) são perpendiculares e a reta $\overleftrightarrow{AC}$ é paralela a pl(EFH); entretanto, $\overleftrightarrow{AC}$ é oblíqua ao plano pl(ADE).
(V), pelo teorema T.29.

47. Pelo teorema das três perpendiculares (T.33), concluímos que a reta s é perpendicular à reta *d*.
Alternativa **d**.

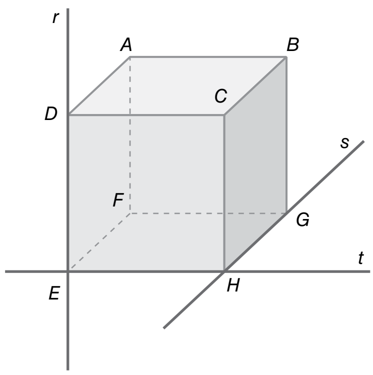
48. Pelo teorema T.31, concluímos que cada uma das retas *r* e *s* é perpendicular aos dois planos α e β. Logo, $\alpha // \beta$.
Alternativa **b**.

49. Sendo os planos paralelos distintos α e β tais que o plano λ é perpendicular a β, temos que existe uma reta *r* em λ que é perpendicular a β. Assim, *r* é perpendicular a α e, portanto, $\lambda \perp \alpha$.
Além disso, as retas determinadas pelas intersecções $\alpha \cap \lambda$ e $\beta \cap \lambda$ são coplanares, pois estão no plano λ, e não têm ponto comum, pois estão nos planos paralelos distintos α e β; logo, essas retas são paralelas distintas.
Alternativa **b**.

50. Se os planos α e β são paralelos, então todo plano λ perpendicular a α é perpendicular a β.
Se os planos α e β são secantes em *r*, então todo plano λ perpendicular à reta *r* é perpendicular a α e a β.
Concluímos então que, quaisquer que sejam os planos α e β, existe um plano perpendicular a α e β.
Alternativa **e**.

51. Duas retas distintas *r* e *s* podem ser paralelas, concorrentes ou reversas. Em qualquer um desses casos existe uma reta perpendicular a *r* e *s*.
Alternativa **a**.

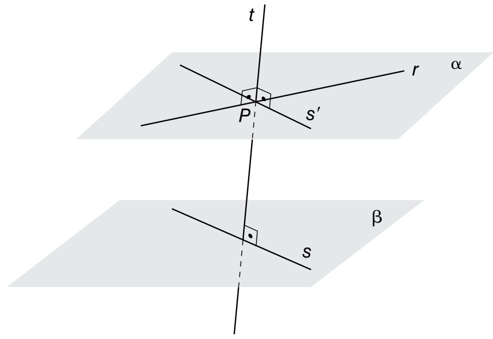
52. Destacando as retas *r* e *s* em um cubo *ABCDEFGH*, temos:



Note, portanto, que a perpendicular comum a *r* e *s* é a reta *t*, suporte da aresta $\overline{EH}$ do cubo.
Alternativa **c**.

53. I. V, pelo exercício resolvido 20.
II. F, pois uma reta paralela a um plano é paralela a infinitas retas desse plano e é reversa a outras infinitas retas desse plano.
III. F, pois uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a infinitas retas desse plano e é ortogonal (portanto reversa) a outras infinitas retas desse plano.
Alternativa **e**.

54. Seja *s'* a reta que concorre com *r* e *t* no ponto *P* e é paralela a *s*. Temos que $s' \subset \alpha$, pois, pelo teorema T.20, os planos pl(*s'*, *r*) e β são paralelos e, pelo teorema T.18, existe um único plano que passa por *P* e é paralelo a β.
As retas paralelas *s* e *s'* formam com a transversal *t* ângulos correspondentes congruentes e, portanto, $t \perp s'$.
Como *t* é perpendicular às retas concorrentes *s* e *s'* do plano α, concluímos que $t \perp \alpha$.



55. As projeções ortogonais de todos os pontos de C sobre β determinam um segmento de reta. Logo, a projeção ortogonal de C sobre β é esse segmento de reta.

56. Para que a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α seja:
a) dois pontos, é necessário e suficiente que *r* e *s* sejam distintas e perpendiculares a α.
b) uma única reta, é necessário e suficiente que *r* e *s* estejam em um plano β perpendicular a α e que pelo menos uma dessas retas não seja perpendicular a α.
c) duas retas paralelas, é necessário e suficiente que $r \subset \beta$ e $s \subset \gamma$, onde β e γ são planos distintos e perpendiculares a α, e *r* e *s* não sejam perpendiculares a α.

57.
- Se uma das retas, *r* ou *s*, for perpendicular a α, então a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α é formada por uma reta *t* e um ponto *P*, com $P \notin t$.
- Se *r* e *s* forem paralelas a α, então a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α é formada por duas retas concorrentes.
- Se cada uma das retas *r* e *s* estiver em um plano perpendicular a α, tal que nenhuma delas seja perpendicular a α, então a projeção ortogonal de $r \cup s$ sobre α é formada por duas retas paralelas distintas.

58. Se dois planos γ e λ são perpendiculares e *r* é uma reta contida em γ e não perpendicular a λ, então a projeção ortogonal de *r* sobre λ é a reta comum a γ e λ.
Assim, as retas do conjunto citado estão contidas em planos perpendiculares a α. Como esses planos interceptam α segundo retas paralelas, concluímos que esses planos são paralelos.
Alternativa **d**.

59. I. V, pois o triângulo pode estar contido em um plano perpendicular ao plano de projeção.
II. F, pois qualquer que seja a posição do plano da circunferência em relação ao plano α de projeção, haverá um diâmetro da circunferência paralelo ao plano α. Assim, a projeção conterá os extremos desse diâmetro.

III. F, pois se $\overline{AB}$ for paralelo a α, então a medida da projeção $\overline{A'B'}$ será a mesma do segmento $\overline{AB}$.

IV. V, pois qualquer que seja a posição da esfera em relação ao plano de projeção, haverá um círculo máximo da esfera paralelo a esse plano. Assim, a projeção da esfera sobre o plano será a mesma desse círculo máximo.

V. V, pois os três pontos podem pertencer a um plano perpendicular ao plano de projeção.

Alternativa **b**.

60. **I.** F, pois se um lado do ângulo α for perpendicular ao plano π, então a projeção ortogonal de α sobre π será um ângulo nulo.

II. F, pois se o outro lado do ângulo α for perpendicular ao plano π, então a projeção ortogonal de α sobre π será um ângulo nulo.

III. V, pela justificativa a seguir.

Sejam: V o vértice do ângulo α; A um ponto de um lado do ângulo, com $A \not\equiv V$; e B um ponto do outro lado do ângulo, com $B \not\equiv V$; e V', A' e B' as projeções ortogonais de V, A e B sobre π, respectivamente. Assim, se α estiver contido em um plano perpendicular a π tal que V' esteja entre A' e B', então as projeções ortogonais dos lados do ângulo sobre π serão semirretas opostas, com o que concluímos que essa projeção é um ângulo raso.

IV. V, pela mesma justificativa dos itens I e II.

Alternativa **c**.

Exercícios contextualizados

61. Os pontos distintos representados pelos orifícios da bala na porta e na parede determinam uma reta. A intersecção dessa reta com o prédio cenográfico é o ponto de onde partiu a bala.

62. Nenhuma das alternativas, **a** ou **b**, pode ser a correta, porque, se uma delas fosse, a outra também seria.

Nenhuma das alternativas, **b** ou **c**, pode ser a correta, porque, se uma delas fosse, a outra também seria.

Nenhuma das alternativas, **c** ou **e**, pode ser a correta, porque, se uma delas fosse, a outra também seria.

Assim, resta apenas a alternativa **d**, que por exclusão é a correta.

Alternativa **d**.

63. Observando que, em cada posição, todos os pontos da régua tocam o piso, conclui-se que eles são colineares e, portanto, também coplanares. Além disso, a régua foi colocada em direções distintas, isto é, segundo retas concorrentes. Como retas concorrentes determinam um plano, o engenheiro pôde concluir que o contrapiso é plano.

64. **a)** Com o auxílio de uma régua, um estudante desenhou com a ponta do lápis uma linha reta em uma folha plana de papel. A trajetória da ponta do lápis durante esse desenho representa uma reta <u>contida no</u> plano da folha de papel.

b) Para capturar um peixe, um índio lançou de cima de um barco uma flecha em linha reta, obliquamente à superfície plana do rio. A trajetória da flecha representa uma reta <u>secante ao</u> plano da superfície do rio.

c) Um avião sobrevoou, em linha reta, uma região plana, mantendo a altitude constante durante certo tempo. A trajetória do avião durante esse tempo representa uma reta <u>paralela ao</u> plano da região.

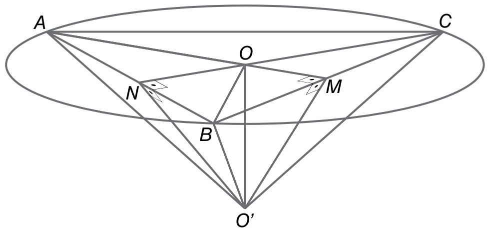
65. Indicando por A o ponto marcado na primeira estaca e por B o ponto marcado na segunda, falta determinar um terceiro ponto C, não colinear com A e B, que esteja no mesmo plano horizontal desses pontos. Por exemplo, mantendo-se o nível da água de um extremo da mangueira no ponto A, o ponto C pode ser determinado na terceira estaca pelo nível da água do outro extremo da mangueira.

66. Sendo O o centro da circunferência que passa por A, B e C; O' o centro do campo; M o ponto médio do segmento $\overline{BC}$; e N o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, vamos provar que a reta $\overleftrightarrow{OO'}$ é perpendicular ao plano pl(ABC).

De fato:

O ponto O é o baricentro do triângulo equilátero ABC; logo, $O \in \overline{AM}$, $O \in \overline{CN}$ e os ângulos $O\widehat{M}B$ e $O\widehat{N}B$ são retos.

Como os triângulos $O'BC$ e $O'BA$ são isósceles de bases $\overline{BC}$ e $\overline{BA}$, respectivamente, temos que as medianas $\overline{O'M}$ e $\overline{O'N}$ também são alturas desses triângulos; logo, os ângulos $O'\widehat{M}B$ e $O'\widehat{N}B$ são retos.

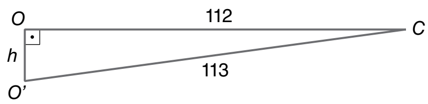


Assim, a reta $\overleftrightarrow{BM}$ é perpendicular ao plano pl($O'OM$) e a reta $\overleftrightarrow{BN}$ é perpendicular ao plano pl($O'ON$), com o que deduzimos que a reta $\overleftrightarrow{O'O}$ é ortogonal às retas concorrentes $\overleftrightarrow{BM}$ e $\overleftrightarrow{BN}$ e, portanto, $\overleftrightarrow{O'O}$ é perpendicular ao plano pl(ABC).

Como $\overleftrightarrow{O'O}$ é perpendicular ao plano pl(ABC) em O, temos que $\overleftrightarrow{O'O}$ é perpendicular a qualquer reta r desse plano, com $O \in r$.

Com o fato acima demonstrado, podemos responder aos itens:

a) Indicando por h a altura pedida, em metro, aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo COO':



$h^2 + 112^2 = 113^2 \Rightarrow h = 15$

Ou seja, cada câmara foi colocada a 15 m de altura em relação ao campo.

b) A distância entre os centros é a mesma altura h calculada no item **a**, ou seja, 15 m.

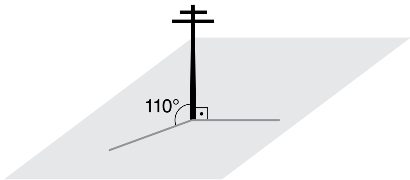
c) A razão entre CO e ON é $\frac{2}{1}$; logo, $ON = 56$ m, portanto, a altura $\overline{CO}$ do triângulo ABC mede 168 m.

Assim, considerando d a distância entre duas câmaras, ou seja, a medida do lado do triângulo equilátero ABC, temos:

$168 = \frac{d\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = 112\sqrt{3}$

Logo, a distância entre duas quaisquer das câmaras é $112\sqrt{3}$ m.

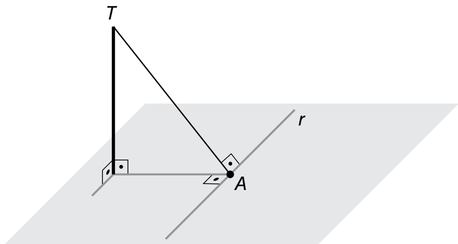
67. Apenas com essa informação não é possível concluir que o poste é perpendicular ao terreno, pois o poste poderia estar em uma rampa, sendo perpendicular à sua sombra em dado instante e ser oblíquo à sua sombra em outro instante, como sugere a figura:



Para que o poste seja perpendicular ao terreno, ele deve ser perpendicular à sua sombra quando ela ocupa posições em direções concorrentes.

68. O cabo terá o menor comprimento possível se ele for perpendicular à linha *r*.

Traçando, a partir da base do mastro, uma linha perpendicular à linha *r*, obtemos na linha *r* o ponto A, cuja distância ao topo *T* do mastro é a menor possível.



A perpendicularidade entre a reta $\overleftrightarrow{AT}$ e a linha *r* é garantida pelo teorema das três perpendiculares.

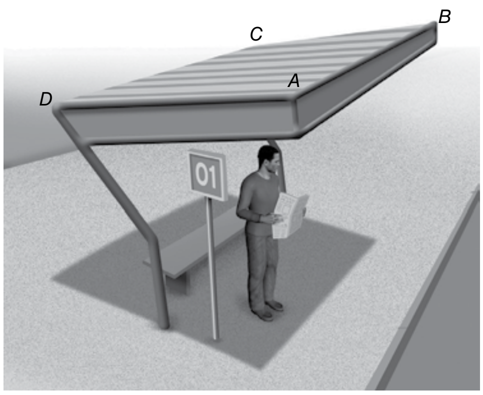
69. O fio de prumo representa a reta *r*; a parede representa o plano α, paralelo a *r*; e um plano horizontal qualquer representa o plano β, que poderá ser o plano do piso, se este for horizontal.

70. **a)** Qualquer que seja a posição de *C*, *r* e *s*, o plano pl(*r*, *s*) contém a reta *s*, que é perpendicular ao plano da órbita. Logo, pl(*r*, *s*) é perpendicular ao plano da órbita para qualquer posição de *C*, *r* e *s*.

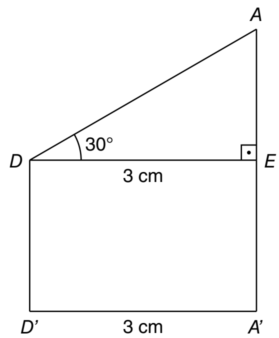
b) Para que o plano pl(*r*, *C*) seja perpendicular ao plano da órbita, devemos ter $s \subset$ pl(*r*, *C*).

c) Qualquer que seja a posição de *C*, *r* e *s*, o plano pl(*s*, *C*) contém a reta *s*, que é perpendicular ao plano da órbita. Logo, pl(*s*, *C*) é perpendicular ao plano da órbita para qualquer posição de *C*, *r* e *s*.

71. Indicamos por *A*, *B*, *C* e *D* os vértices da cobertura retangular, conforme a figura abaixo.



Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm a mesma medida de suas projeções ortogonais sobre o piso, ou seja, $AB = CD = 3$ m. Para o cálculo das medidas *AD* e *BC*, que são iguais, tracemos por *D* o segmento $\overline{DE}$, paralelo à projeção ortogonal de $\overline{AD}$ sobre o piso, conforme o esquema:



Assim, temos:

$$\cos 30° = \frac{3}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{AD}$$

$\therefore$ AD $= 2\sqrt{3}$

Logo, a área A da cobertura é dada por:

$A = 3 \cdot 2\sqrt{3}\ \text{m}^2 \Rightarrow A = 6\sqrt{3}\ \text{m}^2$

Pré-requisitos para o capítulo 12

1. **a)** As retas $\overleftrightarrow{BH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ contêm as diagonais do quadrado *BCHG*; logo, elas são perpendiculares entre si. Assim, a medida de um ângulo formado por essas retas é 90°.

b) A reta $\overleftrightarrow{AE}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{BH}$; logo, os ângulos formados pelas retas reversas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ são, por definição, os ângulos formados por $\overleftrightarrow{BH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$. Concluímos, então que a medida de um ângulo formado pelas retas reversas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ é 90°.

2. **a)** A área A_r do retângulo é o produto das medidas do comprimento e da largura; logo:

$$A_r = 120 \cdot 70\ \text{m}^2 = 8.400\ \text{m}^2$$

b) A área A_q do quadrado é o produto das medidas do comprimento e da largura, que é igual ao quadrado da medida do lado; logo:

$A_q = 10^2\ \text{cm}^2 = 100\ \text{cm}^2$

c) A área A_t do triângulo é o semiproduto da medida de uma base pela medida da altura relativa. No caso do triângulo equilátero de lado *a* chega-se ao resultado: $A_t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Assim, para $a = 6$ dm, temos:

$$A_t = \frac{6^2\sqrt{3}}{4}\ \text{dm}^2 = 9\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

d) A área A_h do hexágono regular de lado *a* é seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado *a*, ou seja, $A_h = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ou, ainda, $A_h = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Assim, para $a = 4$ cm, temos:

$$A_h = \frac{3 \cdot 4^2\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

3. **a)** Nomeando os vértices do trapézio conforme a figura 1, abaixo, tracemos por A e B os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$, perpendiculares às bases, em que os pontos E e F pertencem à base maior $\overline{CD}$. O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo, logo, $EF = AB = 6$ cm; e os triângulos AED e BFC são congruentes, logo, $DE = CF = 3$ cm, conforme mostra a figura 2, em que indicamos por h a medida do segmento $\overline{BF}$.

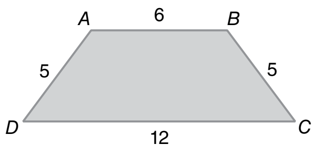


Figura 1

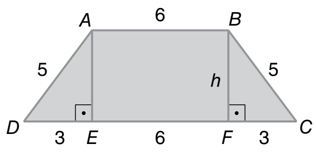


Figura 2

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BFC, temos:

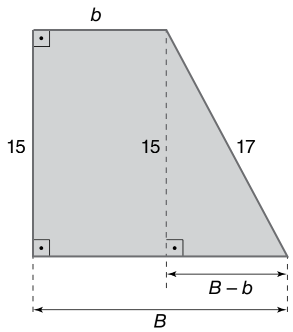
$$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$$

Logo, a altura do trapézio é 4 cm.

b) A área A do trapézio é dada pelo semiproduto da altura pela soma das medidas das bases, ou seja:

$$A = \frac{(6 + 12) \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 = 36 \text{ cm}^2$$

4. Indicando por B e b as medidas, em centímetro, das bases maior e menor, respectivamente, esquematizamos:

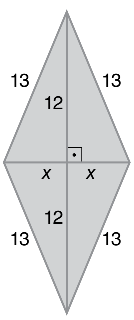


Pela medida da área e pelo teorema de Pitágoras temos:

$$\begin{cases} \dfrac{(B + b) \cdot 15}{2} = 300 \\ (B - b)^2 + 15^2 = 17^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + b = 40 \\ B - b = 8 \end{cases}$$

Logo, $B = 24$ e $b = 16$. Assim, a base menor do trapézio mede 16 cm.

5. As diagonais do losango são perpendiculares entre si pelo ponto médio de cada uma. Assim, indicando por x a metade da medida, em centímetro, da diagonal menor, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow x = 5$$

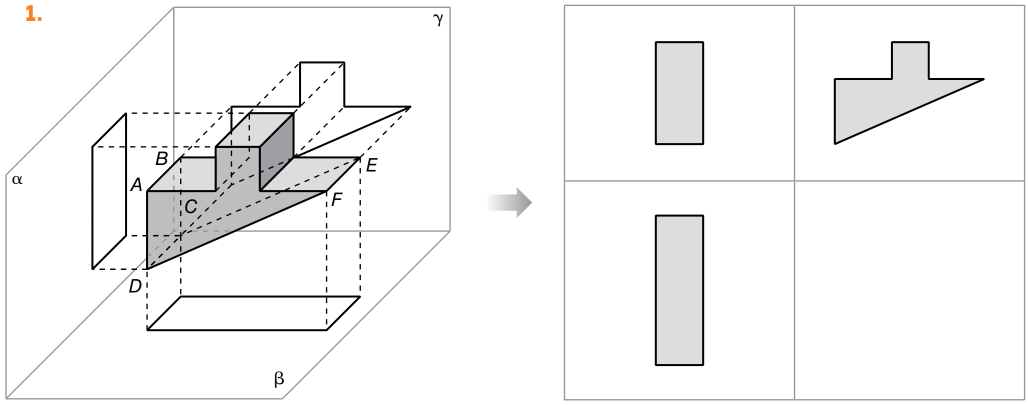
Logo, a diagonal menor do trapézio mede 10 cm.
A área A do losango é o semiproduto das medidas das diagonais. Assim, concluímos:

$$A = \frac{24 \cdot 10}{2} \text{ cm}^2 = 120 \text{ cm}^2$$

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1.



2. A figura F é um segmento de reta.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno esqueceu-se de considerar algumas retas, por exemplo, a reta que contém a diagonal $\overline{AG}$ da face $ABGH$.

Resolução correta:

O número de retas distintas determinadas pelos 8 vértices do paralelepípedo pode ser calculado por $C_{8,\,2} = 28$. Desse total devemos subtrair:

- O número de retas distintas concorrentes com $\overleftrightarrow{DE}$ no ponto D, que são as 6 retas que passam por D e por um dos pontos A, B, C, F, G, H.
- O número de retas distintas concorrentes com $\overleftrightarrow{DE}$ no ponto E, que são as 6 retas que passam por E e por um dos pontos A, B, C, F, G, H.
- O número de retas paralelas a $\overleftrightarrow{DE}$, que é igual a 4 (uma dessas retas é a própria reta $\overleftrightarrow{DE}$).

Assim, o número n de retas que passam por dois vértices distintos desse paralelepípedo e são reversas à reta $\overleftrightarrow{DE}$ é dado por:

$n = 28 - 6 - 6 - 4 = 12$

Essas retas são: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AG}$, $\overleftrightarrow{AF}$, $\overleftrightarrow{HB}$, $\overleftrightarrow{HC}$, $\overleftrightarrow{HG}$, $\overleftrightarrow{HF}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{GC}$ e $\overleftrightarrow{GF}$, como mostra o esquema abaixo.