Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

ITA 2023

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

AULA 11

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

APRESENTAÇÃO 4

1. FUNÇÃO EXPONENCIAL 5

1.1. POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO 5
1.1.1. DEFINIÇÃO 5
1.1.2. PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO 5
1.1.3. PROPRIEDADES DA RADICIAÇÃO 6
1.1.4. TEOREMA 1 8
1.1.5. TEOREMA 2 11
1.1.6. TEOREMA 3 11
1.1.7. TEOREMA 4 12

1.2. EQUAÇÕES EXPONENCIAIS 12

1.3. INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS 15

1.4. FUNÇÕES EXPONENCIAIS 17
1.4.1. DEFINIÇÃO 17
1.4.2. CASO 1 18
1.4.3. CASO 2 19

2. FUNÇÃO LOGARÍTMICA 27

2.1. DEFINIÇÃO 27

2.2. PROPRIEDADES 31

2.3. FUNÇÕES LOGARÍTMICAS 36
2.3.1. DEFINIÇÃO 36
2.3.2. PROPRIEDADES 37
2.3.3. GRÁFICO 39

2.4. EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS 46

2.5. INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS 50

2.6. LOGARITMOS DECIMAIS 53
2.6.1. CARACTERÍSTICA E MANTISSA 53
2.6.2. TEOREMA DA MANTISSA 54

2.7. SISTEMAS DE LOGARITMOS USANDO SEQUÊNCIAS 54

2.8. CÁLCULO DE ÁREAS USANDO LOGARITMOS 54

3. FUNÇÃO PISO E FUNÇÃO TETO 57

3.1. DEFINIÇÃO 57
3.1.1. Propriedades 57

3.2. GRÁFICO 58

4. EQUAÇÕES FUNCIONAIS 60

4.1. EQUAÇÕES FUNCIONAIS BÁSICAS 60

4.1.1. EQUAÇÕES FUNCIONAIS DE CAUCHY 60
4.1.2. EQUAÇÃO FUNCIONAL DE JENSEN 60
4.1.3. EQUAÇÃO FUNCIONAL DE D`ALAMBERT 60
4.1.4. EQUAÇÕES FUNCIONAIS TRIGONOMÉTRICAS 61

4.2. COMO RESOLVER UMA EQUAÇÃO FUNCIONAL 61

5. QUESTÕES NÍVEL 1 64

GABARITO 74

RESOLUÇÃO 75

6. QUESTÕES NÍVEL 2 96

GABARITO 111

RESOLUÇÃO 112

7. QUESTÕES NÍVEL 3 140

GABARITO 159

RESOLUÇÃO 160

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA 236

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 236

APRESENTAÇÃO

Na aula de hoje, estudaremos as funções exponencial e logarítmicas, assuntos muito cobrados nas provas militares. Tente fazer todos os exercícios dessa aula, pois é bem provável que você encontre uma dessas questões no seu concurso. Também aprenderemos a resolver equações funcionais e outras funções que podem ser cobradas na prova.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

/profvictorso

1. FUNÇÃO EXPONENCIAL

1.1. POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

1.1.1. DEFINIÇÃO

Vamos relembrar alguns conceitos de potenciação. Vejamos alguns exemplos:

1) $2^{3} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\ vezes}$

2) $4^{5} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{5\ vezes}$

3) $3^{100} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{100\ vezes}$

Potenciação é usada para representar a multiplicação de um mesmo número várias vezes. Chamamos de expoente ou potência o número de vezes que esse número é multiplicado e base é o próprio número. No exemplo (1), o número 2 é a base e 3 é o expoente. No exemplo (2), 4 é a base e 5 é o expoente. No exemplo (3), 3 é a base e 100 é o expoente.

Vamos ver a definição de potenciação:

Para $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, temos:

$$a^{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ vezes}$$

a^n representa o produto de n fatores iguais a a, onde n é o expoente e a é a base.

Para $n = 1$, temos a^1. Como não temos um produto de mais fatores, consideramos $a^1 = a$. Disso, podemos extrair a definição indutiva de potenciação:

$$a^{n+1} = a \cdot a^n$$

Como consequência da definição, temos:

1.1.2. PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

P1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$

P3) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$

P4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$

P5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

P6) $a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < \cdots < a^n, n \in \mathbb{N}$

P7) $0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > \cdots > a^n, n \in \mathbb{N}$

A propriedade P1 nos diz que para multiplicação de potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.

Um detalhe para essa propriedade é se $m = 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, usando a propriedade, obtemos:

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a^0 = 1}$$

Portanto, devemos considerar que um número elevado a 0 resulta no número 1.

As propriedades vistas até aqui são válidas para um expoente n natural. Vamos ver o que acontece quando estendemos o conceito para expoentes reais.

Começando pelos expoentes inteiros:

Para $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ e $m = -n$, usando a propriedade P1, temos:

$$a^m \cdot a^n = a^{-n} \cdot a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$$

$$a^{-n} \cdot a^n = 1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Usando esse resultado, podemos provar que todas as propriedades válidas para os expoentes naturais também são válidas para os inteiros.

Agora, vejamos para expoentes racionais:

Aqui, surge o conceito de radiciação. Além da potenciação, temos a operação chamada de radiciação. O que muda entre elas é a sua forma de representação. Tipicamente, a definição de radiciação é dada por:

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$

Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*$.

b é a raiz n-ésima de a.

n é o índice da radiciação.

a é o radicando.

$\sqrt{\ }$ é o radical.

Vejamos as propriedades para radiciação:

1.1.3. PROPRIEDADES DA RADICIAÇÃO

R1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

R2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

R3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)$

R4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

R5) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

Essas propriedades decorrem daquelas válidas para a potenciação.

Voltando ao conceito de potenciação de expoentes racionais, temos que se $n = \frac{p}{q}$, tal que $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{Q}$, temos:

$$a^n = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Para expoentes racionais juntamos os conceitos de potenciação e radiciação.

Usando a definição:

Sendo $a \in \mathbb{R}, n = \frac{p}{q}, m = \frac{r}{s}, q, s \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$a^m \cdot a^n = a^{\frac{r}{s}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[s]{a^r} \cdot \sqrt[q]{a^p}$$

Aqui, devemos igualar os índices para conseguir juntar os números em um mesmo radical. Para isso, basta fazer:

$$a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{qr}{qs}}$$
$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{ps}{qs}}$$

Desse modo:

$$a^{\frac{r}{s}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{qr}{qs}} \cdot a^{\frac{ps}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{qr}} \cdot \sqrt[qs]{a^{ps}} = \sqrt[qs]{a^{qr} \cdot a^{ps}} = \sqrt[qs]{a^{qr+ps}} = a^{\frac{qr+ps}{qs}} = a^{\frac{r}{s}+\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a^{\frac{r}{s}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{s}+\frac{p}{q}}}$$

Usando esse resultado podemos provar todas as propriedades da potenciação.

Portanto, as propriedades são válidas para expoentes racionais.

Não veremos o estudo dos expoentes irracionais, pois isso foge ao escopo do curso. Mas saiba que todas aquelas propriedades podem ser usadas para expoentes reais.

$$\frac{1}{a+\sqrt{b}}$$

Como eliminamos o radical do denominador do número acima?
Lembra da fatoração $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$? Vamos usá-la.
Para remover o radical, devemos multiplicar o numerador e denominador por $a - \sqrt{b}$. Com isso, obtemos:

$$\frac{1}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$$

Esse processo chama-se **racionalização**.

Vamos ver 2 teoremas que nos ajudarão a resolver as questões da prova:

1.1.4. TEOREMA 1

Para $n \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\boldsymbol{a > 1 \; e \; a^n > 1 \Leftrightarrow n > 0}}$$

Demonstração:

A prova desse teorema deve ser feita por etapas. Primeiro, provamos que é válido para os inteiros, depois os racionais e por último os irracionais.

Vamos iniciar para os inteiros:

Lema 1

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$a^n > 1 \Leftrightarrow n > 0$$

Usando PIF, vamos provar que $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$.

Para $n = 1$, temos $a^1 = a > 1$. Logo, ela é válida para $n = 1$.

Para $k \in \mathbb{Z}$, precisamos provar que $a^k > 1 \Rightarrow a^{k+1} > 1$.

Multiplicando a desigualdade $a^k > 1$ por $a > 1$, temos:

$$a^k \cdot a > a$$

$$a^{k+1} > a > 1$$

$$\Rightarrow a^{k+1} > 1$$

Portanto, é válida a implicação $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$.

Usando o que acabamos de provar, vamos mostrar que $a^n > 1 \Rightarrow n > 0$.

Supondo $n \leq 0$, temos:

$$-n > 0$$

Vimos que $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$, então:

$$-n > 0 \Rightarrow a^{-n} > 1$$

$$\frac{1}{a^n} > 1$$

$$\Rightarrow a^n < 1$$

Absurdo! Pois contraria a hipótese $a^n > 1$!

Portanto, $a^n > 1 \Rightarrow n > 0$.

Agora, vamos mostrar a prova para $n \in \mathbb{Q}$:

Lema 2

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $n \in \mathbb{Q}$, temos:

$$a^n > 1 \Leftrightarrow n > 0$$

Vamos iniciar por $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$.

Fazendo $n = p/q$, com $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$a^n = a^{\frac{p}{q}}$$

Escrevendo $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q > 1$ e usando o lema 1:

Se $q > 0$:

$$\Rightarrow a^{\frac{1}{q}} > 1$$

Mas, se $a^{\frac{1}{q}} > 1$ e $p > 0$, temos:

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1$$

$$\Rightarrow a^n > 1$$

Portanto: $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$.

Agora, para a segunda parte: $a^n > 1 \Rightarrow n > 0$

Fazendo $n = p/q$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, temos:

$$a^n = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Supondo $q > 0$ e usando o resultado $a^{\frac{1}{q}} > 1$:

Da hipótese $a^{\frac{p}{q}} > 1$, usando o lema 1, podemos escrever:

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1 \Rightarrow p > 0$$

Dessa forma:

$$q > 0 \; e \; p > 0 \Rightarrow n = \frac{p}{q} > 0$$

Supondo $q < 0$, temos $-q > 0$. Se $a^{-\frac{1}{q}} > 1$ e $\left(a^{\left(\frac{1}{q}\right)^p}\right) = \left(a^{-\frac{1}{q}}\right)^{-p} > 1$:

$$\Rightarrow -p > 0$$

$$\Rightarrow p < 0$$

Portanto, concluímos:

$$q < 0 \; e \; p < 0 \Rightarrow n = \frac{p}{q} > 0$$

Uma consequência que decorre do lema 2 é:

Se $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} > \mathbf{1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Q}$, temos:

$$\boldsymbol{a^x > a^y \Leftrightarrow x > y}$$

Demonstração:

Supondo $a^x > a^y$ e multiplicando a desigualdade por a^{-y}, obtemos:

$$a^x a^{-y} > a^y a^{-y}$$

$$a^{x-y} > a^0 = 1$$
$$a^{x-y} > 1$$

Pelo lema 2, podemos concluir:

$$x - y > 0 \Rightarrow x > y$$

Lema 3

Vamos terminar a demonstração do teorema, provando que n pode ser irracional.

Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1$ e $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, temos:

$$a^\beta > 1 \Leftrightarrow \beta > 0$$

Parte 1) $\beta > 0 \Rightarrow a^\beta > 1$

Supondo $x, y \in \mathbb{Q}$ e $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, se $0 < x < \beta < y$:

Pelo lema 2, como $a > 1$ e $x, y > 0$, podemos escrever:

$$a^x > 1 \ e \ a^y > 1$$

Pela consequência do lema 2:

Como $a > 1$ e $x < y$, temos:

$$1 < a^x < a^y$$

Sendo a função exponencial contínua em $\mathbb{R}$, podemos escrever:

$$1 < a^x < a^\beta < a^y$$

Portanto:

$$a^\beta > 1$$

Parte 2) $a^\beta > 1 \Rightarrow \beta > 0$

Supondo $\beta < 0$, com $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, temos $-\beta > 0$.

Então, usando o que acabamos de provar, podemos escrever:

$$a^{-\beta} > 1$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $a^\beta > 0$, temos:

$$a^{-\beta} a^\beta > a^\beta$$
$$a^0 > a^\beta$$
$$1 > a^\beta$$
$$\Rightarrow a^\beta < 1$$

Absurdo! Pois, contraria a hipótese $a^\beta > 1$.

Portanto, $\beta > 0$.

Assim, provamos que $\boldsymbol{a > 1 \ e \ a^n > 1 \Leftrightarrow n > 0}$ é válido para $n \in \mathbb{R}$.

1.1.5. TEOREMA 2

Para $a, x, y \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{a > 1}$, temos:

$$\boxed{\boldsymbol{a^x > a^y \Leftrightarrow x > y}}$$

Demonstração:

$$a^x > a^y$$

Dividindo a inequação por $a^y > 0$:

$$\frac{a^x}{a^y} > 1$$

$$a^{x-y} > 1$$

Usando o teorema 1:

$$x - y > 0$$

$$x > y$$

1.1.6. TEOREMA 3

Para $n \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\boldsymbol{0 < a < 1 \ e \ a^n > 1 \Leftrightarrow n < 0}}$$

Demonstração:

Se $0 < a < 1$, temos:

$$\frac{1}{a} > 1$$

Escrevendo $b = 1/a$ e usando o teorema 1:

$$b^{-\beta} > 1 \Leftrightarrow -\beta > 0$$

Substituindo $b = 1/a$ na implicação acima, obtemos:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-\beta} > 1$$

$$a^{\beta} > 1 \Leftrightarrow \beta < 0$$

1.1.7. TEOREMA 4

Para $a, x, y \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{0 < a < 1}$, temos:

$$\boxed{\boldsymbol{a^x > a^y \Leftrightarrow x < y}}$$

Demonstração:

$$a^x > a^y$$

Dividindo a inequação por $a^y > 0$:

$$\frac{a^x}{a^y} > 1$$
$$a^{x-y} > 1$$

Usando o teorema 3, temos:

$$x - y < 0$$
$$x < y$$

1.2. EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Aprendemos as operações básicas de potenciação e radiciação. Agora, somos capazes de resolver equações exponenciais.

Vamos ver algumas equações e aprender a resolvê-las:

1) $\mathbf{2^x = 1024}$

Como encontramos o valor de x que satisfaz a equação acima?

A técnica, nesse caso, é escrever os números de modo a obter uma base em comum. Vamos fatorar o número 1024:

$$1024 = 2^{10}$$

Assim, fazendo a substituição, obtemos:

$$2^x = 2^{10}$$

Sabendo que a função 2^x é injetora, para a igualdade ser verdadeira devemos ter:

$$x = 10$$

2) $\mathbf{9^x + 3^{x+1} = 4}$

Para essa equação, devemos ver que $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$ e $3^{x+1} = 3^x \cdot 3$

Assim, fazendo as substituições na equação, temos:

$$(3^x)^2 + 3 \cdot 3^x = 4$$

Vamos chamar $y = 3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$y^2 + 3y = 4$$
$$y^2 + 3y - 4 = 0$$
$$(y + 4)(y - 1) = 0$$

Com isso, vemos que $y = -4$ u $y = 1$ são soluções da equação acima. Vamos encontrar x para cada uma delas:

Para $y = -4$:

$$3^x = -4$$

Sabemos que $3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Então, $\nexists x$ que satisfaz a equação.

Para $y = 1$:

$$3^x = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

Portanto, a equação possui apenas uma solução:

$$S = \{0\}$$

3) $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$

Vamos reescrever a equação:

$$(2^2)^x + (2 \cdot 3)^x = 2 \cdot (3^2)^x$$
$$(2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2$$

O bizu aqui é dividir a equação por $(2^x)^2$ (poderia ser também $(3^x)^2$), já que esse número é diferente de zero para todo x real:

$$\frac{(2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x}{(2^x)^2} = 2 \cdot \frac{(3^x)^2}{(2^x)^2}$$
$$1 + \frac{3^x}{2^x} = 2 \cdot \left(\frac{3^x}{2^x}\right)^2$$
$$1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$$

Agora, chamamos $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$:

$$1 + y = 2y^2$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$

Encontrando a solução:

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=1\ ou-\frac{1}{2}$$

Para encontrar a solução em x, basta testar os valores de y:

Para $y=1$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=1$$

$$\Rightarrow x=0$$

Para $y=-\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R} \text{ que satisfaz a igualdade}$$

$$\therefore S=\{0\}$$

4) $\mathbf{3^{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{81}{3^{x+\frac{1}{x}}}}$

Nessa equação, perceba os fatores $x+\frac{1}{x}$. Se elevarmos esse número ao quadrado, obtemos:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

Temos que fazer surgir o fator 2 no expoente do número à esquerda. Vamos multiplicar a equação por 3^2:

$$3^{x^2+\frac{1}{x^2}}\cdot 3^2=\frac{81}{3^{x+\frac{1}{x}}}\cdot 3^2$$

$$3^{x^2+\frac{1}{x^2}+2}=\frac{729}{3^{x+\frac{1}{x}}}$$

$$3^{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{729}{3^{x+\frac{1}{x}}}$$

Substituindo $y=x+\frac{1}{x}$ na equação:

$$3^{y^2}=\frac{729}{3^y}$$

$$3^{y^2}\cdot 3^y=729$$

$$3^{y^2+y}=3^6$$

Dividindo por 3^6:

$$\frac{3^{y^2+y}}{3^6}=1$$

$$3^{y^2+y-6} = 3^0$$

As potências possuem a mesma base. Desse modo, podemos igualar os expoentes:

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y+3)(y-2) = 0$$

$$\Rightarrow y = -3 \; ou \; y = 2$$

Testando os valores:

Para $y = -3$:

$$x + \frac{1}{x} = -3$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Para $y = 2$:

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Portanto, a equação possui 3 soluções distintas:

$$S = \left\{1, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

1.3. INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Vamos aprender a resolver inequações exponenciais. O método de resolução deve seguir a seguinte ideia:

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{x, y \in \mathbb{R}} \\ \boldsymbol{Se\ a > 1\ e\ a^x > a^y \Rightarrow x > y} \\ \boldsymbol{Se\ 0 < a < 1\ e\ a^x > a^y \Rightarrow x < y} \end{array}}$$

1) $2^x - 1 > 2^{1-x}$

Inicialmente, devemos organizar os números da inequação:

$$2^x - 1 > \frac{2}{2^x}$$

$$2^x - 1 - \frac{2}{2^x} > 0$$

$$\frac{2^x \cdot 2^x - 2^x - 2}{2^x} > 0$$

$$\frac{(2^x)^2 - 2^x - 2}{2^x} > 0$$

O denominador da inequação acima é sempre maior que 0, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Então, devemos ter:

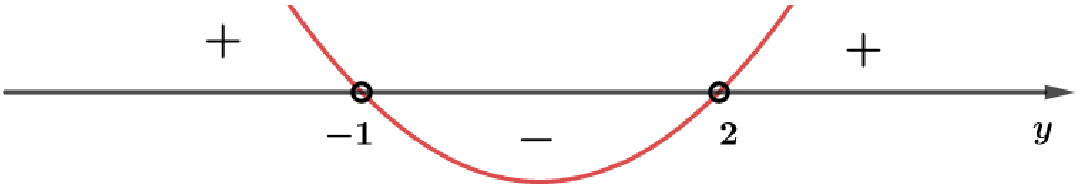
$$(2^x)^2 - 2^x - 2 > 0$$

Fazendo a substituição $2^x = y$, encontramos a seguinte inequação do segundo grau:

$$y^2 - y - 2 > 0$$

$$(y-2)(y+1) > 0$$

Analisando o sinal:



Assim, y deve pertencer ao intervalo:

$$y < -1 \; ou \; y > 2$$

Agora, devemos retornar à variável x:

$$2^x < -1 \; ou \; 2^x > 2$$

Sabemos que $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então, a única solução é $2^x > 2$:

$$2^x > 2 \Rightarrow 2^x > 2^1$$

Como as bases da inequação acima são iguais e maiores do que 1, podemos comparar usar a mesma desigualdade e escrever:

$$x > 1$$

Portanto, a solução da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$$

1. (ITA/1988) Para $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, resolva a inequação:

$$a^{2x} - (a + a^2)a^x + a^3 < 0$$

Resolução:

Perceba que a inequação dada é difícil de ser analisada nesse formato. Vamos substituir $a^x = y > 0, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$y^2 - (a + a^2)y + a^3 < 0$$

Encontramos uma função do segundo grau na variável y. Vamos calcular Δ para verificar a forma dessa função:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a + a^2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a^3$$
$$\Delta = a^2 + 2a^3 + a^4 - 4a^3$$
$$\Delta = a^2 - 2a^3 + a^4$$
$$\Delta = (a - a^2)^2$$

O enunciado afirma que $0 < a < 1$, então $a \neq 1$ e $a \neq 0$. Disso, temos:

$$\Delta = (a - a^2)^2 > 0$$

A função na variável y sempre possui 2 raízes reais distintas. Vamos encontrá-las:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(a+a^2) \pm \sqrt{(a-a^2)^2}}{2} = \frac{(a+a^2) \pm |a-a^2|}{2}$$

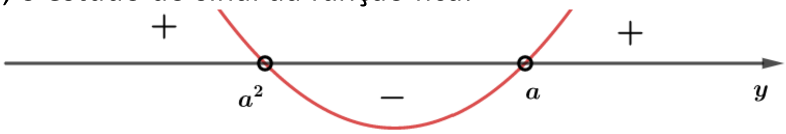
Da desigualdade $0 < a < 1$, usando $a < 1$ e multiplicando ambos os lados por a, temos:

$$a^2 < a \Rightarrow 0 < a - a^2 \Rightarrow a - a^2 > 0$$

Assim, o número $a - a^2$ é sempre positivo, então, podemos remover o módulo:

$$y = \frac{(a+a^2) \pm (a-a^2)}{2}$$
$$y_1 = a^2$$
$$y_2 = a$$

Como $a^2 < a$, o estudo do sinal da função fica:



$$y^2 - (a + a^2)y + a^3 < 0$$

Queremos os valores da função negativos, então y deve pertencer ao intervalo:

$$a^2 < y < a$$

Retornando à variável x:

$$a^2 < a^x < a^1$$

Disso, concluímos:

$$1 < x < 2$$
$$\therefore S =]1, 2[$$

Gabarito: $\boldsymbol{S =]1, 2[}$

1.4. FUNÇÕES EXPONENCIAIS

1.4.1. DEFINIÇÃO

A função exponencial é dada por:

$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*} \\ \boldsymbol{f(x) = a^x; a > 0 \text{ e } a \neq 1} \end{gathered}}$$

Perceba que a condição da base da função é $a > 0$ e $a \neq 1$. Vamos ver a razão disso:

Suponha $a = -3$, então:

$$f(x) = (-3)^x$$

Se $x = 1/2$, temos:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$$

O número resultante é irracional e não pertence ao conjunto dos reais!

Agora, suponha $a = 0$ ou $a = 1$, nesses casos, temos as funções constantes:

$$a = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a = 1 \Rightarrow f(x) = 1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Temos dois casos diferentes de função exponencial, vamos estudar cada um deles.

1.4.2. CASO 1

O primeiro caso é para base $0 < a < 1$, vamos ver o que acontece com a forma da função:

$$f(x) = a^x$$

Verificando a monotonicidade da função:

$$\forall x_2, x_1 \in \mathbb{R}, \text{tal que } x_2 < x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 < 0$$

Usando o Teorema 2, temos:

$$\boldsymbol{0 < a < 1 \; e \; a^n > 1 \Leftrightarrow n < 0}$$

Fazendo $n = x_2 - x_1$:

$$x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow a^{x_2 - x_1} > 1$$

$$\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$$

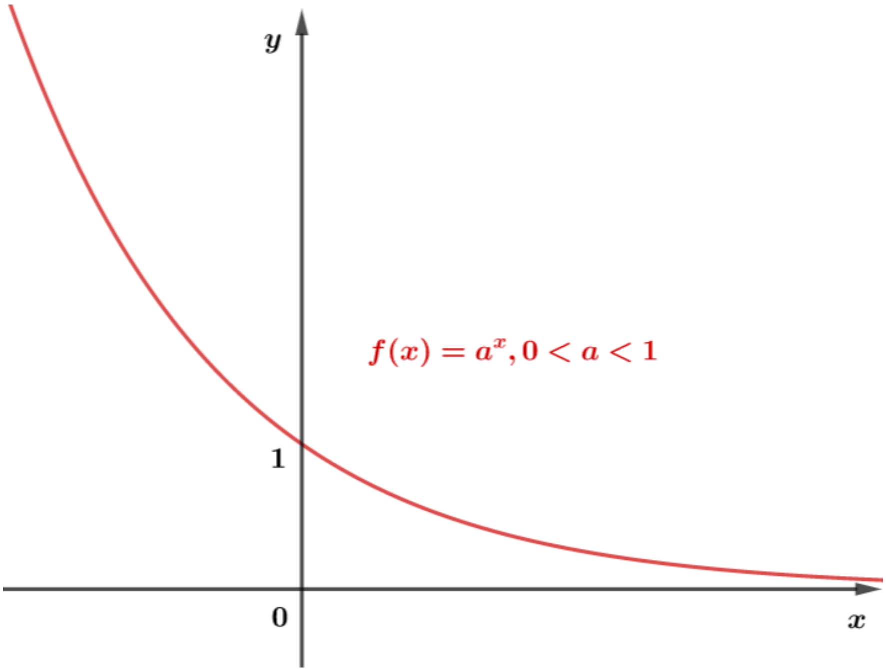
$$\Rightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$$

Assim, encontramos a seguinte implicação:

$$x_2 < x_1 \Rightarrow a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

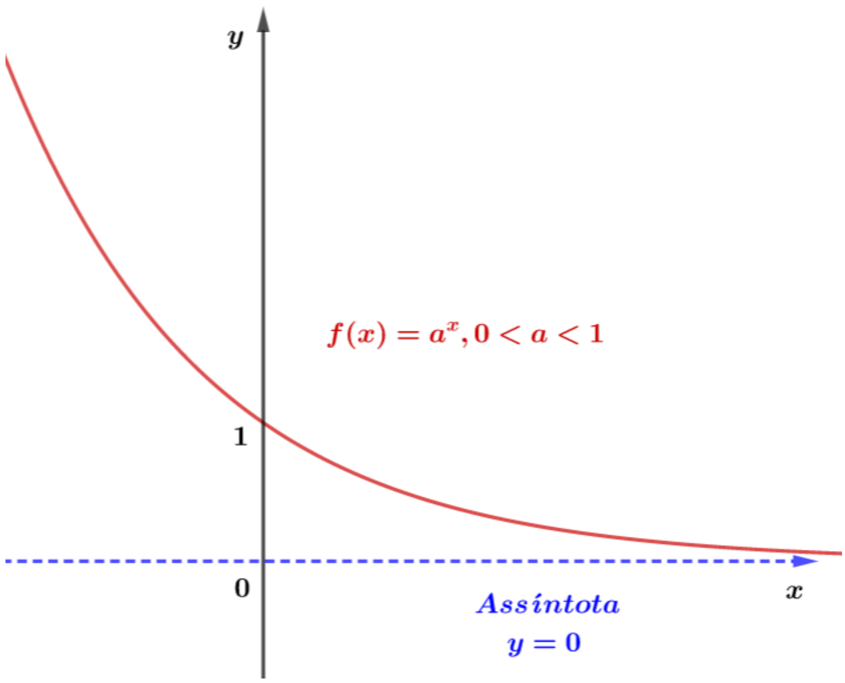
Portanto, a função é estritamente decrescente para $0 < a < 1$.

Nesse caso, o gráfico da função fica:



Note que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. A função exponencial nunca se zera!

Chamamos de assíntota, a reta que limita o valor que a função admite. No exemplo acima, a assíntota é a reta $y = 0$ e coincide com o eixo x. Aumentando-se os valores de x, a função tende a se aproximar do valor 0!



1.4.3. CASO 2

O segundo caso é para $a > 1$. Vamos analisar a monotonicidade da função:

$\forall x_2, x_1 \in \mathbb{R}$, tal que $x_2 > x_1$, temos $x_2 - x_1 > 0$. Usando o Teorema 1:

$$\boxed{a > 1 \ e \ a^n > 1 \Leftrightarrow n > 0}$$

Fazendo $n = x_2 - x_1 > 0$, podemos escrever:

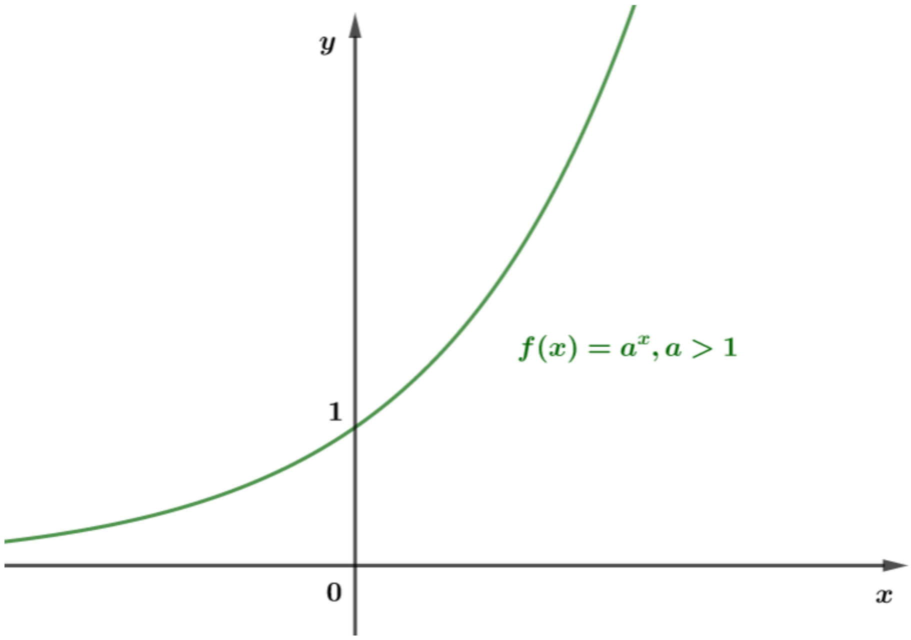
$$x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow a^{x_2 - x_1} > 1$$
$$\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$$
$$a^{x_2} > a^{x_1}$$

Desse modo, temos a seguinte implicação:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

A função é estritamente crescente para o caso $a > 1$.

Se gráfico é dado por:



Perceba que o gráfico dessa função tende a zero quando x tende a menos infinito.

A função exponencial $f(x) = a^x$ é injetora, pois para $a > 1$, a função é estritamente crescente e para $0 < a < 1$, a função é estritamente decrescente. Consequentemente, temos:

$$x_2 = x_1 \Rightarrow a^{x_2} = a^{x_1}$$

A imagem da função exponencial é o conjunto dos reais positivos:

$$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$$

Portanto, se o contra-domínio da função f for $\mathbb{R}_+^*$, ela é sobrejetora. Logo, é bijetora.

(Exercícios de Fixação)

2. Resolva as seguintes equações:

a) $6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$

b) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$

c) $5^{2^{x^2-4x-3}} = 625$

d) $x^{2x^2-7x+4} = x$

e) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^x - 9841 = 0$

f) $x^x + 139x^{-x} - 108x^{-2x} = 32$

Resolução:

a) $6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$

Perceba os termos 2^x e 3^x:

$$6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot (2^x) \cdot (3^x) + 6 \cdot 2^{2x} = 0$$

Vamos dividir toda a equação por 2^{2x}:

$$\frac{6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot (2^x) \cdot (3^x) + 6 \cdot 2^{2x}}{2^{2x}} = 0$$

$$6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$$

Agora, basta substituir $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$:

$$6y^2 - 13y + 6 = 0$$

Encontrando as raízes na variável y:

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} = \frac{2}{3} \; ou \; \frac{3}{2}$$

Retornando à variável x, temos:

$$y_1 = \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}$$

$$\Rightarrow x_1 = -1$$

$$y_2 = \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}$$

$$\Rightarrow x_2 = 1$$

Portanto, a solução é:

$$S = \{\pm 1\}$$

b) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$

Vamos reescrever a equação:

$$(2^{2x}) - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot 3^x - \frac{2^{2x}}{2}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 2^{2x} = 3^x \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$2^{2x-1} = 3^{x-1} \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

$$2^{2x-3} = 3^{x-1,5}$$

$$(2^2)^{x-1,5} = 3^{x-1,5}$$

$$4^{x-1,5} = 3^{x-1,5}$$

Dividindo a equação por $3^{x-1,5} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1,5} = 1$$

Desse modo, encontramos:

$$x - 1,5 = 0$$

$$x = 1,5$$

$$\Rightarrow S = \{1{,}5\}$$

c) $5^{2^{x^2-4x-3}} = 625$

Fatorando 625, obtemos:

$$5^{2^{x^2-4x-3}} = 5^4$$

Agora, basta igualar os expoentes:

$$2^{x^2-4x-3} = 4 = 2^2$$

Novamente:

$$x^2 - 4x - 3 = 2$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$x = \left(2 \pm \sqrt{9}\right) = 2 \pm 3 = -1 \; ou \; 5$$
$$\Rightarrow S = \{-1; 5\}$$

d) $x^{2x^2-7x+4} = x$

Nessa equação, se fizermos $x = 1$ ou $x = 0$, a equação sempre é verdadeira. Logo, $x = 1$ e $x = 0$ são soluções.

Para as outras soluções, devemos igualar os expoentes:

$$2x^2 - 7x + 4 = 1$$
$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \frac{1}{2} \; ou \; 3$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{0; \frac{1}{2}; 1; 3\right\}$$

e) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^x - 9841 = 0$

Vamos reescrever a equação:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^x = 9841$$

Perceba que o lado esquerdo da equação é uma PG de razão 3. Sabemos que a soma de uma PG é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Nesse caso, $a_1 = 3^0$ e $q = 3$:

$$S_{x+1} = \frac{3^{x+1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^{x+1} - 1}{2}$$

Substituindo na equação, temos:

$$\frac{3^{x+1} - 1}{2} = 9841$$
$$3^{x+1} = 19683$$
$$3^{x+1} = 3^9$$
$$x + 1 = 9$$
$$x = 8$$
$$\Rightarrow S = \{8\}$$

f) $x^x + 139x^{-x} - 108x^{-2x} = 32$

Vamos multiplicar toda a equação por x^{2x}:

$$x^{3x} + 139x^x - 108 = 32x^{2x}$$
$$x^{3x} - 32x^{2x} + 139x^x - 108 = 0$$

Fazendo $x^x = y$, temos:

$$y^3 - 32y^2 + 139y - 108 = 0$$

Fatorando a equação:

$$y^3 - 32y^2 + 108y + 32y - y - 108 = 0$$
$$y^3 - y + 108y - 108 - 32y^2 + 32y = 0$$
$$y(y^2 - 1) + 108(y - 1) - 32y(y - 1) = 0$$
$$(y - 1)(y(y + 1) + 108 - 32y) = 0$$
$$(y - 1)(y^2 + y + 108 - 32y) = 0$$
$$(y - 1)(y^2 - 31y + 108) = 0$$

Raízes:

$$y_1 = 1$$
$$y_{2,3} = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 432}}{2} = \frac{31 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{31 \pm 23}{2} = 27 \ ou \ 4$$

$y_1 = 1 \Rightarrow x^x = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

$$y_2 = 4 \Rightarrow x^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x_2 = 2$$
$$y_3 = 27 \Rightarrow x^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x_3 = 3$$
$$S = \{1; 2; 3\}$$

Gabarito: a) $S = \{\pm 1\}$ b) $S = \{1, 5\}$ c) $S = \{-1; 5\}$ d) $S = \left\{0; \frac{1}{2}; 1; 3\right\}$ e) $S = \{8\}$ f) $S = \{1; 2; 3\}$

3. Resolva as seguintes inequações:

a) $1 < 3^{|x^2 - x|} < 9$

b) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$

c) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$

d) $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1$

e) $2^{\sqrt{x}} - 2^{1 - \sqrt{x}} \leq 1$

f) $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$

Resolução:

a) $1 < 3^{|x^2 - x|} < 9$

$$3^0 < 3^{|x^2 - x|} < 3^2$$

Podemos comparar os expoentes:

$$0 < |x^2 - x| < 2$$

Agora, temos duas inequações:

$$|x^2 - x| > 0$$
$$|x(x - 1)| > 0$$

Como o módulo de qualquer número é maior ou igual a zero, temos nessa desigualdade:

$$\Rightarrow x \neq 0 \ e \ x \neq 1$$
$$|x^2 - x| < 2$$
$$-2 < x^2 - x < 2$$
$$\begin{cases} x^2 - x > -2 \\ x^2 - x < 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 - x + 2 > 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$$

Resolvendo cada uma separadamente:

$$x^2 - x + 2 > 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$x^2 - x - 2 < 0$$
$$(x-2)(x+1) < 0$$

Analisando o sinal dessa inequação, encontramos:

$$-1 < x < 2$$

Fazendo a intersecção das soluções, obtemos:

$$S =]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,2[$$

b) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$

Substituindo $3^x = y$, temos:

$$\sqrt{y^2 - 9y} > y - 9$$

Analisando a condição de existência:

$$y^2 - 9y \geq 0$$
$$y(y-9) \geq 0$$

Estudando o sinal, encontramos:

$$y \leq 0 \; ou \; y \geq 9$$

Como $y = 3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos uma única condição:

$$3^x \geq 9 \Rightarrow 3^x \geq 3^2 \Rightarrow x \geq 2$$

Agora, vamos dividir a inequação em dois casos:

Caso 1) Se o lado direito for negativo, qualquer y que esteja na condição de existência será solução.

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 9y} > 0 \\ y - 9 < 0 \end{cases} \Rightarrow y < 9 \Rightarrow 3^x < 3^2 \Rightarrow x < 2$$

Não convém, devido à condição de existência $x \geq 2$.

Caso 2) Se o lado direito for positivo. Podemos elevar ambos os membros ao quadrado e analisar a inequação:

$$y^2 - 9y > (y-9)^2$$
$$y^2 - 9y > y^2 - 18y + 81$$
$$9y > 81$$
$$y > 9 \Rightarrow 3^x > 3^2 \Rightarrow x > 2$$

Portanto, $x > 2$ está contido na condição de existência e satisfaz a inequação:

$$S = (2, +\infty)$$

c) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$

Fatorando as expressões:

$$25 \cdot 2^x - 2^x 5^x + 5^x - 25 > 0$$
$$2^x(25 - 5^x) - (25 - 5^x) > 0$$
$$(2^x - 1)(25 - 5^x) > 0$$

Agora, basta analisar os dois casos possíveis:

$$\begin{cases} 2^x - 1 > 0 \\ 25 - 5^x > 0 \end{cases}$$
$$2^x > 2^0 \Rightarrow x > 0$$
$$25 - 5^x > 0$$
$$5^2 > 5^x \Rightarrow x < 2$$

Nesse caso, temos o intervalo $]0,2[$.

$$\begin{cases} 2^x - 1 < 0 \\ 25 - 5^x < 0 \end{cases}$$
$$2^x < 2^0 \Rightarrow x < 0$$
$$25 - 5^x < 0$$
$$5^2 < 5^x \Rightarrow x > 2$$

Não temos solução nesse caso, pois $x < 0$ e $x > 2$.

Portanto, temos a solução:

$$S =]0, 2[$$

d) $\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1$

Vamos verificar o discriminante da expressão quadrática $4x^2 + 2x + 1$:

$$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$$

Portanto, essa expressão sempre resulta em valores positivos.

Então, temos dois casos possíveis:

$$\begin{cases} \left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1 \\ 4x^2 + 2x + 1 > 1 \end{cases} \; ou \; \begin{cases} \left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1 \\ 0 < 4x^2 + 2x + 1 < 1 \end{cases}$$

Para o primeiro caso:

$$\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1$$

Como $4x^2 + 2x + 1 > 1$, temos:

$$x^2 - x > 0$$
$$x(x - 1) > 0$$
$$\Rightarrow x < 0 \; ou \; x > 1$$
$$S_1 =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$
$$4x^2 + 2x > 0$$
$$2x(2x + 1) > 0$$
$$\Rightarrow x < -\frac{1}{2} \; ou \; x > 0$$
$$S_2 =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[$$

Fazendo a intersecção das soluções, encontramos:

$$S = S_1 \cap S_2 =]-\infty, -1/2[\cup]1, +\infty[$$

Para o segundo caso:

$$\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1$$

Como $0 < 4x^2 + 2x + 1 < 1$, temos:

$$x^2 - x < 0$$
$$x(x - 1) < 0$$
$$\Rightarrow 0 < x < 1$$
$$S_3 =]0, 1[$$
$$4x^2 + 2x + 1 < 1$$
$$2x(2x + 1) < 0$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 0$$
$$S_4 =]-\frac{1}{2}, 0[$$

Fazendo a intersecção das soluções:

$$S = S_3 \cap S_4 = \emptyset$$

Portanto, a solução do problema é dada por:

$$S =]-\infty, -1/2[\cup]1, +\infty[$$

e) $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leq 1$

Analisando a condição de existência:

$$x \geq 0$$

Substituindo $2^{\sqrt{x}} = y$:

$$y - \frac{2}{y} \leq 1$$
$$\frac{y^2 - y - 2}{y} \leq 0$$

Temos apenas um caso possível, pois $y = 2^{\sqrt{x}} > 0$.

Então, precisamos resolver apenas a inequação:

$$y^2 - y - 2 \leq 0$$
$$(y-2)(y+1) \leq 0$$
$$\Rightarrow -1 \leq y \leq 2$$

Como $y > 0$, temos:

$$0 < y \leq 2 \Rightarrow 0 < 2^{\sqrt{x}} \leq 2^1$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência:

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$
$$S = [0, 1]$$

f) $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$

Reescrevendo a inequação, temos:

$$2^{3x} + 2^x 3^{2x} - 2 \cdot 3^{3x} > 0$$

Dividindo a inequação por 3^{3x}:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 > 0$$

Fazendo $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$:

$$y^3 + y - 2 > 0$$

Fatorando:

$$y^3 + y - 1 - 1 > 0$$
$$(y^3 - 1) + (y - 1) > 0$$
$$(y-1)(y^2 + y + 1 + 1) > 0$$
$$(y-1)(y^2 + y + 2) > 0$$

Como $y^2 + y + 2$ possui $\Delta = -7 < 0$, ela sempre será positiva. Então:

$$y - 1 > 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} > 1 \Rightarrow -x > 0$$
$$x < 0$$

Atente-se ao valor numérico da base, pois se a base for menor do que 1, a desigualdade é invertida!

$$S =]-\infty, 0[$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{S =]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[}$ **b)** $\boldsymbol{S = (2, +\infty)}$ **c)** $\boldsymbol{S =]0, 2[}$ **d)** $\boldsymbol{S =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[}$ **e)** $\boldsymbol{S = [0, 1]}$ **f)** $\boldsymbol{S =]-\infty, 0[}$

4. Resolva a equação para $a \in \mathbb{R}$:

$$144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$$

Resolução:

Fazendo $12^{|x|} = y \geq 1$ $(|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R})$:

$$y^2 - 2y + a = 0$$

Vamos dividir o problema em casos:

1) $\Delta = 4 - 4a < 0 \Rightarrow 4a > 4 \Rightarrow a > 1$

Para $a > 1$, nunca teremos solução.

2) $\Delta \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$

Se $a = 1$, temos:

$$y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$$
$$12^{|x|} = 1 \Rightarrow x = 0$$

Se $a < 1$, teremos 2 raízes distintas:

$$y^2 - 2y + a = 0$$
$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4-4a}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$$
$$12^{|x|} = 1 \pm \sqrt{1-a}$$
$$|x| = \log_{12}\left(1 \pm \sqrt{1-a}\right)$$
$$x = \pm \log_{12}\left(1 \pm \sqrt{1-a}\right)$$

Ainda não estudamos logaritmo, mas tente entender a solução da questão. Se você não sabe nada de logaritmo, tente resolver essa questão depois de estudar esse capítulo.

Perceba que $\log_{12}\left(1 - \sqrt{1-a}\right)$ devemos satisfazer a condição de existência:

$$1 - \sqrt{1-a} > 0 \Rightarrow 1 > \sqrt{1-a} \Rightarrow 1 > 1 - a \Rightarrow a > 0$$

Então, temos a solução dada por:

$$a > 1 \Rightarrow S = \emptyset$$
$$a = 1 \Rightarrow x = 0$$
$$0 < a < 1 \Rightarrow S = \left\{\pm \log_{12}\left(1 \pm \sqrt{1-a}\right)\right\}$$
$$a \leq 0 \Rightarrow S = \left\{\pm \log_{12}\left(1 + \sqrt{1-a}\right)\right\}$$

Gabarito: $a > 1 \Rightarrow S = \emptyset$

$a = 1 \Rightarrow x = 0$

$0 < a < 1 \Rightarrow S = \left\{\pm \log_{12}\left(1 \pm \sqrt{1-a}\right)\right\}$

$a \leq 0 \Rightarrow S = \left\{\pm \log_{12}\left(1 + \sqrt{1-a}\right)\right\}$

2. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

2.1. DEFINIÇÃO

Iniciaremos o estudo das funções logarítmicas. Esse tema é muito explorado nas provas militares, então, preste bastante atenção!

Preliminarmente, vamos ver como se deu sua criação.

Aprendemos no capítulo anterior, como resolver equações funcionais de bases iguais, por exemplo:

$$3^x = 9$$

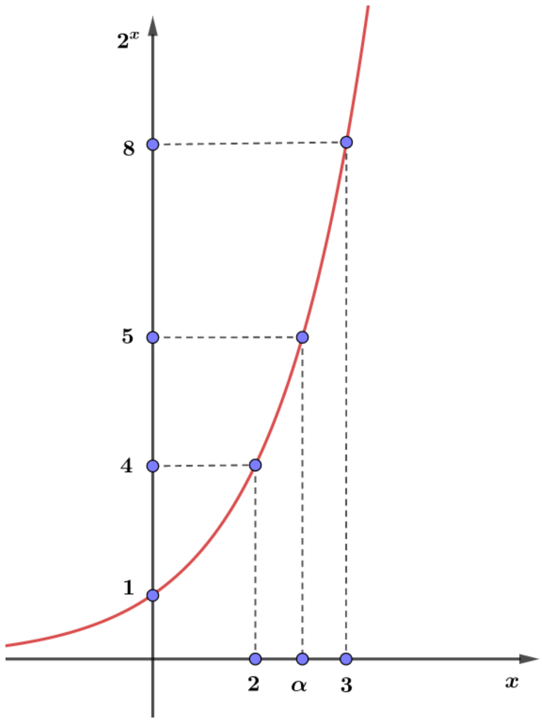
$$3^x = 3^2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Mas o que aconteceria se as bases fossem diferentes? Como no exemplo abaixo:

$$2^x = 5$$

Vimos que a função exponencial é contínua e injetora, então, podemos esboçar o gráfico da função e verificar qual intervalo que x pertence:



Se $x = \alpha$, vemos que $2 < \alpha < 3$. Podemos representar o valor de α usando a definição de logaritmo:

$$2^\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = \log_2 5$$

Dizemos que α é o expoente que na base 2 resulta em 5. Perceba que a função logarítmica é a função inversa da função exponencial!

Vejamos sua definição formal:

Para $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ e $b \neq 1$, temos:

$$\boxed{\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a}$$

$\log_b a$ lê-se: logaritmo de a na base b.

a é o logaritmando ou antilogaritmo.

b é a base do logaritmo.

x é o logaritmo.

Exemplos:

1) $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$

2) $\log_5 125 = 3$, pois $5^3 = 125$

3) $\log_7 49 = 2$, pois $7^2 = 49$

Decorre da definição as seguintes propriedades:

I) $\log_b 1 = 0$

Sabemos que qualquer base elevada a 0 resulta em 1. Logo, o logaritmo de 1 em qualquer base é 0.

II) $\log_b b = 1$

III) $b^{\log_b a} = a$

Sabemos que:

$$a = b^c \Leftrightarrow c = \log_b a$$

Basta substituir $c = \log_b a$ em $a = b^c$:

$$a = b^{\log_b a}$$

IV) $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$

Vamos demonstrar essa propriedade:

$$\log_b a = \log_b c$$

Usando a definição de logaritmo, temos:

$$a = b^{\log_b c}$$

Usando a propriedade III:

$$\Rightarrow a = c$$

Portanto, a função logarítmica é injetora.

Além dessas propriedades, temos alguns casos específicos de logaritmos:

$\boldsymbol{a)\ colog_a b = -\log_a b\ \ ou\ colog_a b = \log_a\left(\frac{1}{b}\right)}$

Definição de cologaritmo. O IME já cobrou questão envolvendo esse número na prova objetiva de 2017/2018. O importante é saber que $colog_a b = -\log_a b$.

$\boldsymbol{b)\ \ln b = \log_e b}$

Essa é a definição de logaritmo natural de um número $b > 0$. Ele é o logaritmo de b na base e.

e é um número e é chamado de número de Euler devido ao matemático Leonhard Euler.

O seu valor aproximado é $e \cong 2{,}71$.

***c*) $\log b = \log_{10} b$**

Quando não dizemos qual base o logaritmo está escrito, subentende-se que a base é a decimal.

***d*) $antilog_a x = a^x$**

Definição de antilogaritmo, em símbolos, se $a, x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = antilog_a x$$

5. Calcule o valor de:

a) $\log_2 32$

b) $\log_3 27$

c) $\log_5 625$

d) $\log_9 81$

e) $7^{\log_7 49}$

f) $2^{1+\log_2 11}$

g) $3^{2-\log_3 1000}$

Resolução:

a) $\log_2 32$

Fatorando o número 32, obtemos:

$$32 = 2^5$$

Desse modo:

$$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$$

b) $\log_3 27$

$$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

c) $\log_5 625$

$$\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$$

d) $\log_9 81$

$$\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$$

e) $7^{\log_7 49}$

Usando a propriedade $b^{\log_b a} = a$, temos:

$$7^{\log_7 49} = 49$$

f) $2^{1+\log_2 11}$

$$2^{1+\log_2 11} = 2 \cdot 2^{\log_2 11} = 2 \cdot 11 = 22$$

g) $3^{2-\log_3 1000}$

$$3^{2-\log_3 1000} = \frac{3^2}{3^{\log_3 1000}} = \frac{3^2}{1000} = \frac{9}{1000} = 0{,}009$$

Gabarito: a) 5 b) 3 c) 4 d) 2 e) 49 f) 22 g) $0,009$

2.2. PROPRIEDADES

Para $a, b, c > 0$ e $a \neq 1$, as seguintes propriedades são válidas:

$\boldsymbol{P1})\ log_a(bc) = log_a b + log_a c$

$\boldsymbol{P2})\ \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - \log_a c$

$\boldsymbol{P3})\ \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{P4})\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\boldsymbol{P5})\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\boldsymbol{P6})\ \log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b\ ; \beta \in \mathbb{R}^*$

$\boldsymbol{P7})\ a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Demonstrações:

$\boldsymbol{P1})\ log_a(bc) = log_a b + log_a c$

Vamos nomear os logs acima:

$$\log_a(bc) = x$$
$$\log_a b = y$$
$$\log_a c = z$$

Queremos provar que $x = y + z$.

Usando a definição de logaritmo:

$$bc = a^x$$
$$b = a^y$$
$$c = a^z$$

Fazendo as substituições $b = a^y$ e $c = a^z$ em $bc = a^x$, temos:

$$a^y a^z = a^x$$
$$a^{y+z} = a^x$$

Como a função exponencial é injetora, concluímos:

$$\Rightarrow x = y + z$$
$$\therefore log_a(bc) = log_a b + log_a c$$

$\boldsymbol{P2})\ \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - \log_a c$

Podemos usar a mesma ideia da demonstração de P1. Nomeando os logs, temos:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = x$$

$$\log_a b = y$$

$$\log_a c = z$$

Queremos provar:

$$x = y - z$$

Usando a definição de logaritmo:

$$\frac{b}{c} = a^x$$

$$b = a^y$$

$$c = a^z$$

Substituindo b e c na primeira equação, temos:

$$\frac{a^y}{a^z} = a^x$$

$$a^{y-z} = a^x$$

$$\Rightarrow x = y - z$$

$$\therefore \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - \log_a c$$

$\boldsymbol{P3})\ \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}$

Fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^\alpha = y$, queremos provar que $y = \alpha x$.

Usando a definição do logaritmo:

$$b = a^x$$

$$b^\alpha = a^y$$

Substituindo uma na outra:

$$(a^x)^\alpha = a^y$$

$$a^{\alpha x} = a^y$$

$$\Rightarrow y = \alpha x$$

$$\therefore \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

$\boldsymbol{P4})\ \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

TOME NOTA!

Essa propriedade é muito útil na resolução de questões envolvendo logaritmos! Ela é conhecida como a propriedade da mudança de base.

Vejamos sua demonstração:

Considerando $\log_a b = x, \log_c b = y$ e $\log_c a = z$, temos:

$$\begin{cases} \log_a b = x \\ \log_c b = y \\ \log_c a = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a^x \\ b = c^y \\ a = c^z \end{cases}$$

Queremos provar $x = y/z$:

Substituindo $a = c^z$ em $b = a^x$, temos:

$$b = (c^z)^x = c^{xz}$$

Mas $b = c^y$, então:

$$c^y = c^{xz}$$

$$y = xz$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{z}$$

$$\therefore \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

*Podemos também escrever:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

$\boldsymbol{P5})\ \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Vamos usar a propriedade $P4$ e escrever $\log_a b$ na base b:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$$

$$\Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$\boldsymbol{P6})\ \log_{a^\beta} b = \dfrac{1}{\beta} \log_a b\,; \beta \in \mathbb{R}^*$

Nessa demonstração, temos que mostrar para dois casos:

$$b = 1\ e\ b \neq 1$$

Para $b = 1$, temos:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_{a^\beta} 1 = 0$$

Assim, temos a igualdade:

$$\log_{a^\beta} 1 = \frac{1}{\beta}\log_a 1 \,, \beta \in \mathbb{R}^*$$

Para $b \neq 1$, usando $P5$, temos:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\log_b a^\beta} = \frac{1}{\beta \log_b a} = \frac{1}{\beta}\log_a b$$

$\boldsymbol{P7}$) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Vamos escrever $a = b^{\log_b a}$. Dessa forma, temos:

$$a^{\log_c b} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_c b}$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_b a \cdot \log_c b}$$

Usando a $P4$, podemos escrever:

$$\log_b a \cdot \log_c b = \log_c a$$

Portanto, concluímos:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

6. Usando as propriedades dos logaritmos, resolva:

a) $\log_{\sqrt[3]{16}} \sqrt{2}$

b) $3^{\log_3 5}$

c) $antilog_3(-2)$

d) $\sum_{i=1}^{10} \log i$

e) $e^{-\ln x}$

f) $5^{\log_{25} 2}$

g) $\log\log\sqrt{\sqrt[5]{10}}$

h) $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$

i) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$

j) Calcule $\log_{30} 8$ se $\log 5 = x$ e $\log 3 = y$.

k) Calcule $\log_3 5$ se $\log_6 2 = a$ e $\log_6 5 = b$.

l) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

m) $3^{\sqrt{\log_3 2}} - 2^{\sqrt{\log_2 3}}$

n) Simplifique a expressão: $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$

Resolução:

a) $\log_{\sqrt[3]{16}} \sqrt{2}$

Vamos simplificar os números envolvidos:

$$\log_{2^{\frac{4}{3}}} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}$$

b) $3^{\log_3 5}$

$$3^{\log_3 5} = 5$$

c) $antilog_3(-2)$

$$antilog_3(-2) = x$$
$$\log_3 x = -2 \Rightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

d) $\sum_{i=1}^{10} \log i$

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log 10$$
$$\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10)$$
$$\log 10!$$

10! É o número que fatorial do número 10.

e) $e^{-\ln x}$

$$e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

f) $5^{\log_{25} 2}$

$$5^{\log_{25} 2} = 5^{\log_{5^2} 2} = 5^{\frac{\log_5 2}{2}} = 5^{\log_5 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$$

g) $\log \log \sqrt{\sqrt[5]{10}}$

$$\log \log \sqrt{\sqrt[5]{10}} = \log \log \sqrt[10]{10} = \log \log 10^{\frac{1}{10}} = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$$

h) $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$

$$\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$$
$$\log_3 5 \cdot \log_5 4 + 1$$
$$\log_3 4 + 1$$
$$\log_3 4 + \log_3 3$$
$$\log_3 12$$

i) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$

$$\log_4 2 \cdot \log_6 4 \cdot \log_8 6$$
$$\log_6 2 \cdot \log_8 6$$

$$\log_8 2$$
$$\log_{2^3} 2 = \frac{1}{3}$$

j) Calcule $\log_{30} 8$ se $\log 5 = x$ e $\log 3 = y$.

Vamos trabalhar com os números. Reescrevendo o logaritmo na base 10:

$$\log_{30} 8 = \frac{\log 8}{\log 30} = \frac{\log 2^3}{\log(10 \cdot 3)} = \frac{3\log 2}{1+\log 3} = \frac{3\log\left(\frac{10}{5}\right)}{1+\log 3} = \frac{3(1-\log 5)}{1+\log 3} = \frac{3(1-x)}{1+y}$$

k) Calcule $\log_3 5$ se $\log_6 2 = a$ e $\log_6 5 = b$.

Reescrevendo o logaritmo na base 6:

$$\log_3 5 = \frac{\log_6 5}{\log_6 3} = \frac{\log_6 5}{\log_6\left(\frac{6}{2}\right)} = \frac{\log_6 5}{1-\log_6 2} = \frac{b}{1-a}$$

l) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

Podemos usar a propriedade:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$
$$2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2} = 5^{\log_3 2} - 5^{\log_3 2} = 0$$

m) $3^{\sqrt{\log_3 2}} - 2^{\sqrt{\log_2 3}}$

$$\log_3 2 = x \Rightarrow 2 = 3^x$$
$$3^{\sqrt{\log_3 2}} - 2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{x}} - 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3^{\sqrt{x}} - (3^x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3^{\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}} = 0$$

n) Simplifique a expressão: $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$

$$\log a = x \Rightarrow a = 10^x$$
$$a^{\frac{\log x}{x}} = (10^x)^{\frac{\log x}{x}} = 10^{\log x} = x = \log a$$

Gabarito:

a) $3/8$ b) 5 c) $1/9$ d) $\boldsymbol{log}\ 10!$ e) $1/x$ f) $\sqrt{2}$ g) -1 h) $\boldsymbol{log_3}12$ i) $1/3$ j) $\frac{3(1-x)}{1+y}$ k) $\frac{b}{1-a}$ l) 0 m) 0 n) $\boldsymbol{log\ a}$

2.3. FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

2.3.1. DEFINIÇÃO

Definimos a função logarítmica do seguinte modo:

$$\boxed{\begin{array}{c} f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ f(x) = \log_a x \end{array}}$$

A função logarítmica possui uma **condição de existência**:

$$x > 0$$

$$a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Vamos ver alguns exemplos de funções logarítmicas:

1) $f(x) = \log x$

2) $g(x) = \ln x$

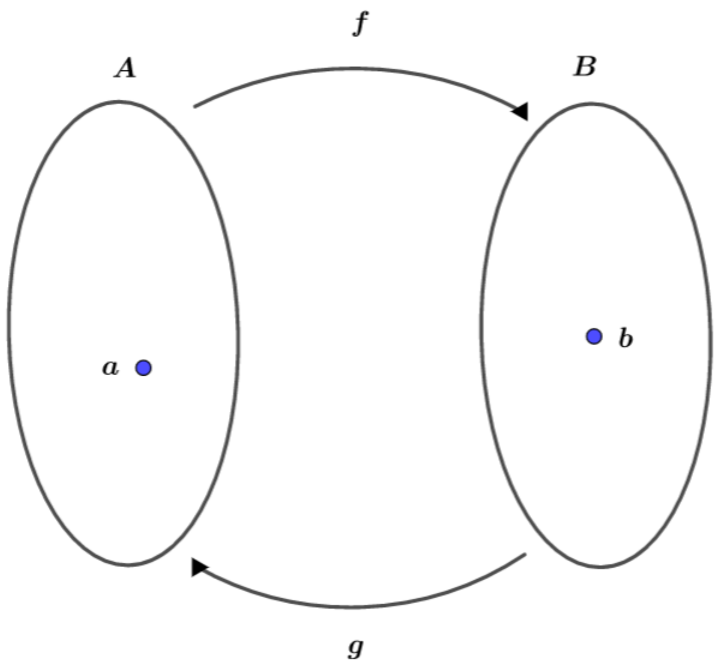
3) $h(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$

2.3.2. PROPRIEDADES

P1) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ e $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, para $a > 0$ e $a \neq 1$. Então, f e g são funções inversas.

Demonstração:

Se f e g são inversas, então, de acordo com o diagrama, temos:



$$f(a) = b \Rightarrow f\big(g(b)\big) = b$$

$$g(b) = a \Rightarrow g\big(f(a)\big) = a$$

Com isso, temos que mostrar que $f\big(g(x)\big) = x$ e $g\big(f(x)\big) = x$.

Calculando fog e gof:

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = a^{g(x)} = a^{\log_a x} = x$$

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = \log_a f(x) = \log_a a^x = x$$

Chegamos à identidade que queríamos:

$$f\big(g(x)\big) = x$$

$$g(f(x)) = x$$

Portanto, f e g são inversas!

P2) A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é estritamente crescente para $a > 1$ e estritamente decrescente para $0 < a < 1$. Logo, ela é uma função injetora. Ela também é sobrejetora, já que o contradomínio dessa função é o conjunto dos reais. Portanto, ela é bijetora e por isso é inversível.

$$\boxed{f(x) = \log_a x \Rightarrow \begin{cases} \text{estritamente crescente} \Leftrightarrow a > 1 \\ \text{estritamente decrescente} \Leftrightarrow 0 < a < 1 \end{cases}}$$

Demonstração:

Vamos provar inicialmente para o caso $a > 1$:

Temos que mostrar a ida:

$$a > 1 \Rightarrow (x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1)$$

Se $x_2 > x_1$, podemos usar a definição de logaritmo e escrever:

$$a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$$

Vimos no capítulo de função exponencial que se $a > 1$ e $a^\alpha > a^\beta$, então, $\alpha > \beta$.

Então:

$$a > 1 \ e \ a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1} \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$$

Agora, devemos mostrar a volta:

$$(\log_a x_2 > \log_a x_1 \Rightarrow x_2 > x_1) \Rightarrow a > 1$$

Fazendo $\log_a x_2 = y_2$ e $\log_a x_1 = y_1$, temos:

$$x_2 = a^{y_2}$$
$$x_1 = a^{y_1}$$

Como $\log_a x_2 > \log_a x_1$, escrevendo em termos de y:

$$y_2 > y_1$$

Se $y_2 > y_1$, então, $a^{y_2} > a^{y_1}$. Portanto $x_2 > x_1$.

$$\log_a x_2 > \log_a x_1 \Rightarrow x_2 > x_1, para\ a > 1$$

Logo, para $a > 1$, a função logaritmo é estritamente crescente.

Vamos provar o outro caso, para $0 < a < 1$:

Podemos usar a mesma ideia usada no item anterior, o que mudará será a relação de desigualdade entre os números.

Ida:

$$0 < a < 1 \Rightarrow (x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1)$$

Se $x_2 > x_1$, temos:

$$a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$$

Como $0 < a < 1$, sabemos que a desigualdade acima resulta:

$$\log_a x_2 < \log_a x_1$$

Volta:

$$(\log_a x_2 > \log_a x_1 \Rightarrow x_2 < x_1) \Rightarrow 0 < a < 1$$

Fazendo $\log_a x_2 = y_2$ e $\log_a x_1 = y_1$, temos:

$$x_2 = a^{y_2}$$

$$x_1 = a^{y_1}$$

Se $\log_a x_2 > \log_a x_1$, escrevendo em termos de y:

$$y_2 > y_1$$

Sendo $0 < a < 1$, podemos escrever:

$$a^{y_2} < a^{y_1}$$

$$a^{\log_a x_2} < \mathrm{a}^{\log_\mathrm{a} x_1}$$

$$\Rightarrow x_2 < x_1$$

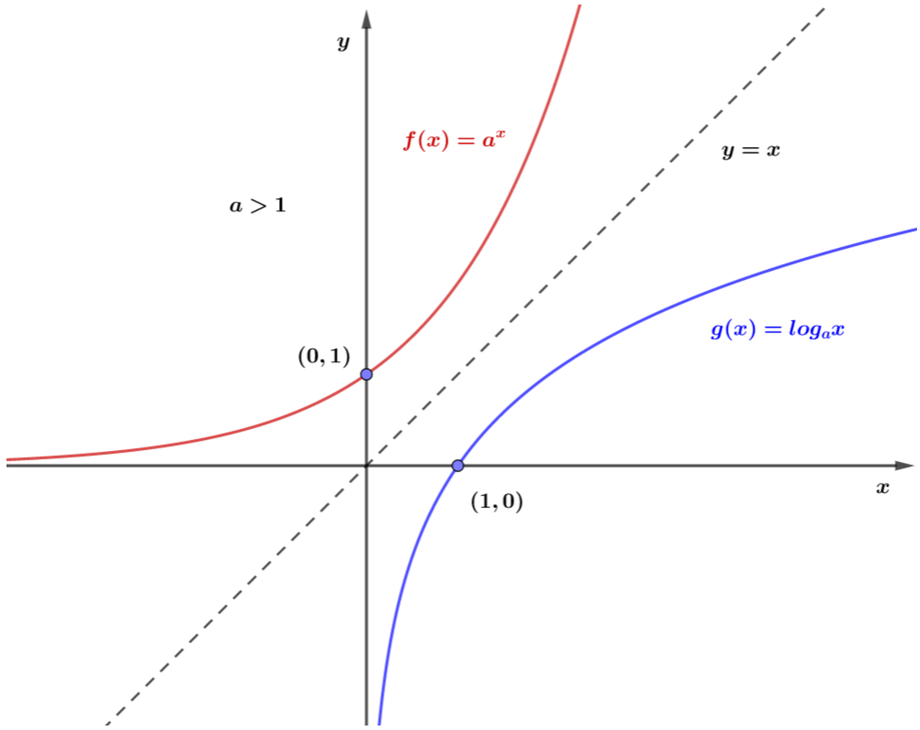
Portanto, provamos a ida e a volta da propriedade, logo a função logaritmo é estritamente decrescente para $0 < a < 1$.

2.3.3. GRÁFICO

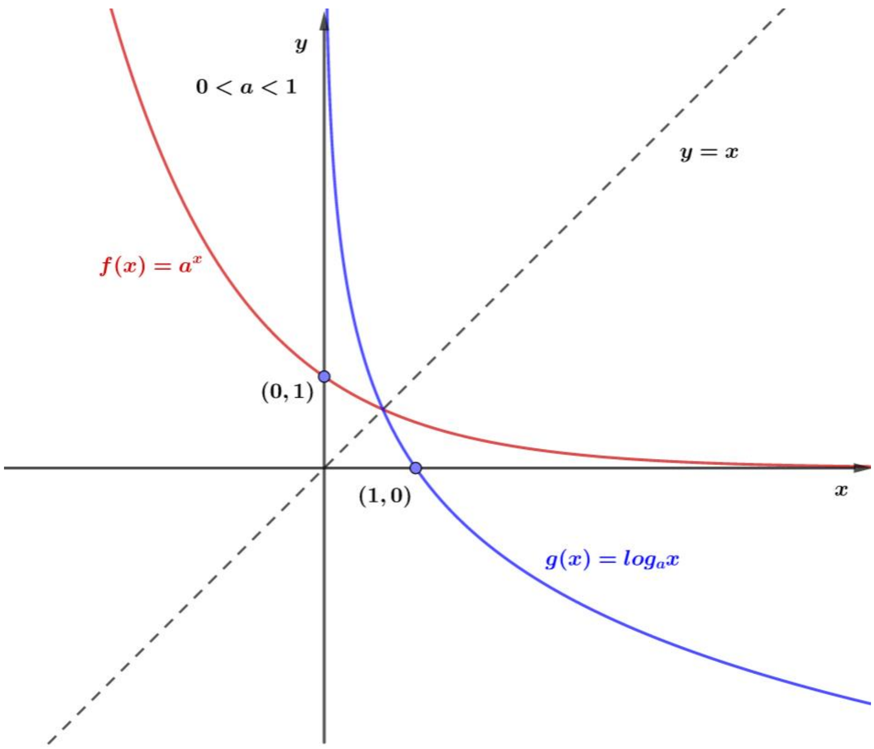
Vimos que a função exponencial é a inversa da função logarítmica. Pela definição de função inversa, essas funções são simétricas em relação à reta $y = x$. Também estudamos que a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

Vamos esboçar o gráfico para esses dois casos:

Para $a > 1$, temos:



Para $0 < a < 1$, temos:



Vamos aprender a esboçar o gráfico usando exemplos:

1) $f(x) = \log_2(2x + 8)$

Condição de existência:

$$2x + 8 > 0 \Rightarrow 2x > -8 \Rightarrow x > -4$$

Raiz:

$$\log_2(2x+8) = 0$$

$$2x + 8 = 2^0 = 1$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

Para $x = 0$, temos: $f(0) = \log_2 8 = 3$.

Devemos verificar a monotonicidade da função:

$$x_2 > x_1$$

$$2x_2 > 2x_1$$

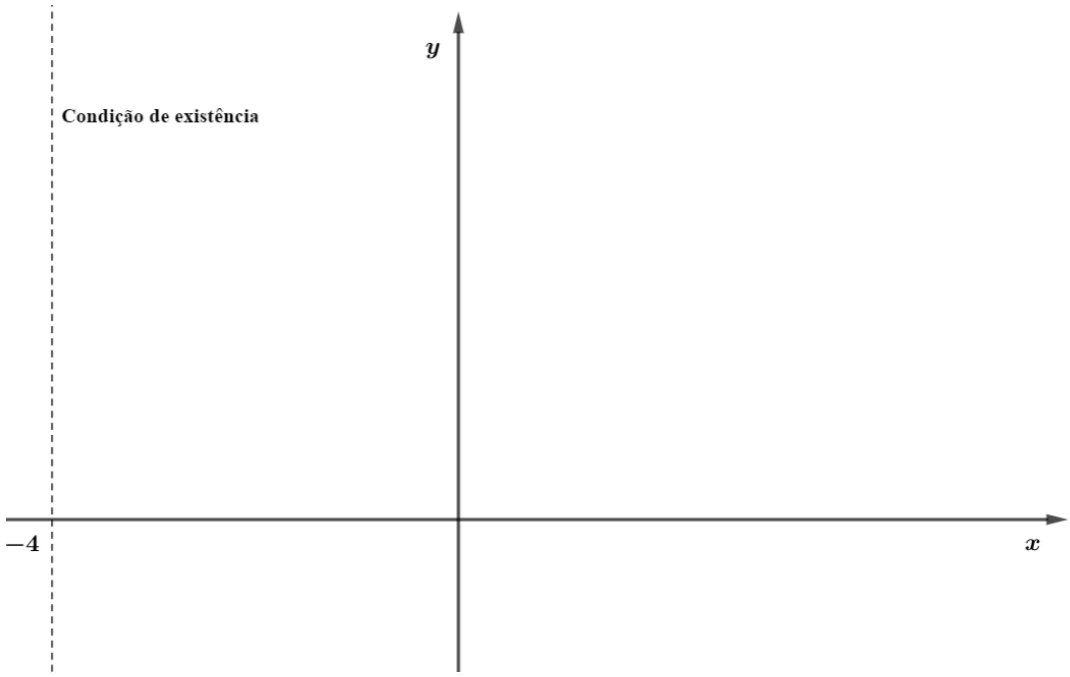
$$2x_2 + 8 > 2x_1 + 8$$

$$\log_2(2x_2 + 8) > \log_2(2x_1 + 8)$$

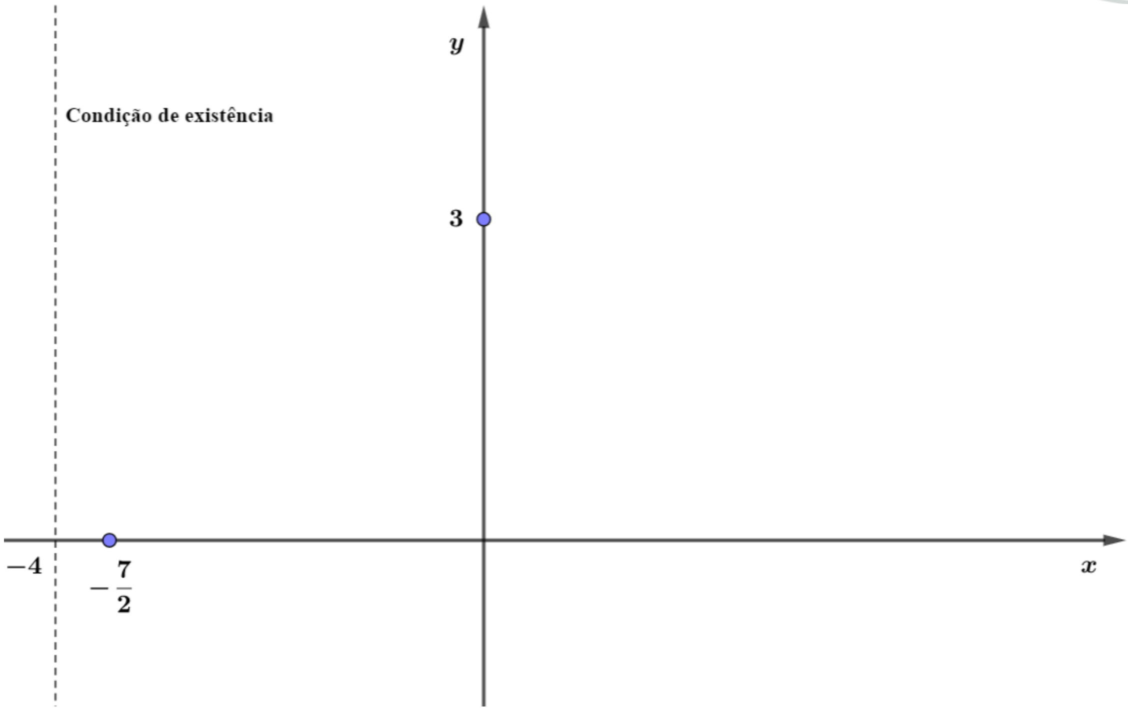
$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

f é crescente.

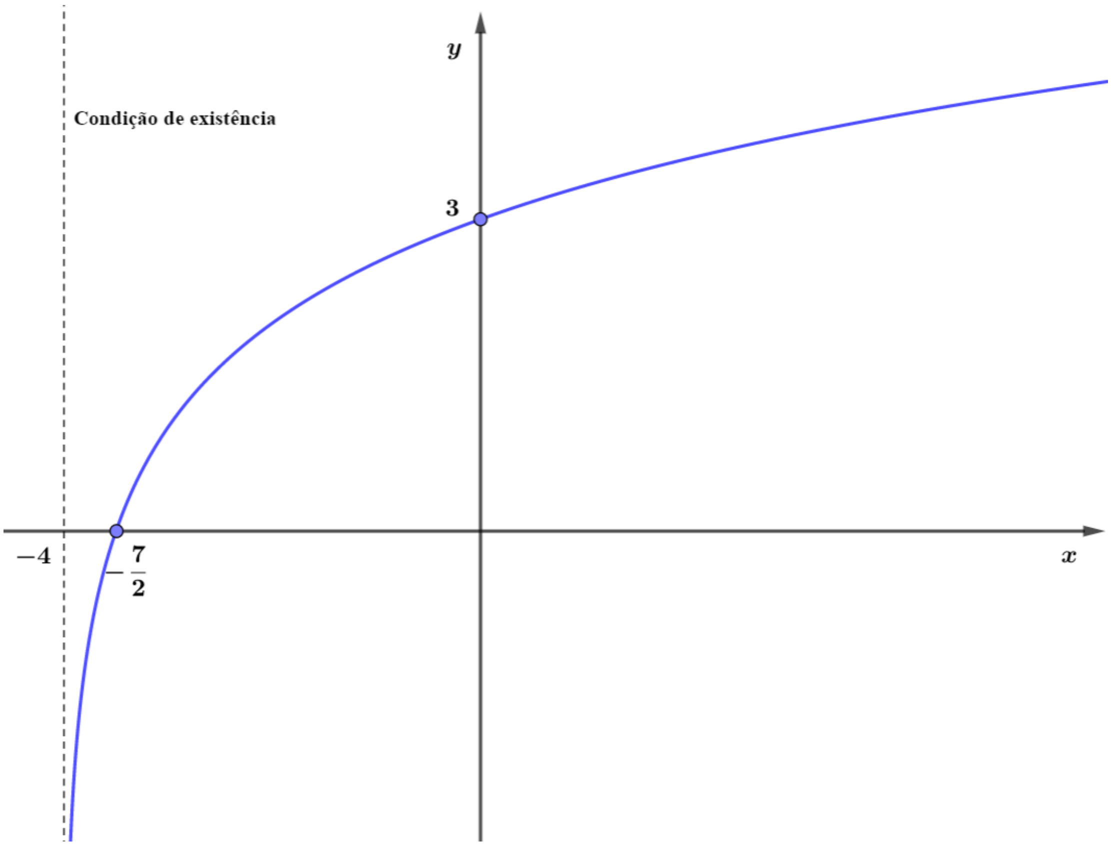
Para esboçar o gráfico, devemos traçar a reta que limita os valores de x, a reta assíntota $x = -4$:



Depois, colocamos os pontos $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$ e $(0, 3)$:



Como a função é crescente, temos o seguinte esboço (lembrando que a função nunca encosta na assíntota!):



2) $f(x) = \log_2(-2x + 8)$

Condição de existência:

$$-2x + 8 > 0 \Rightarrow -2x > -8 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4$$

Raiz:

$$-2x + 8 = 1$$
$$-2x = -7$$
$$x = \frac{7}{2}$$

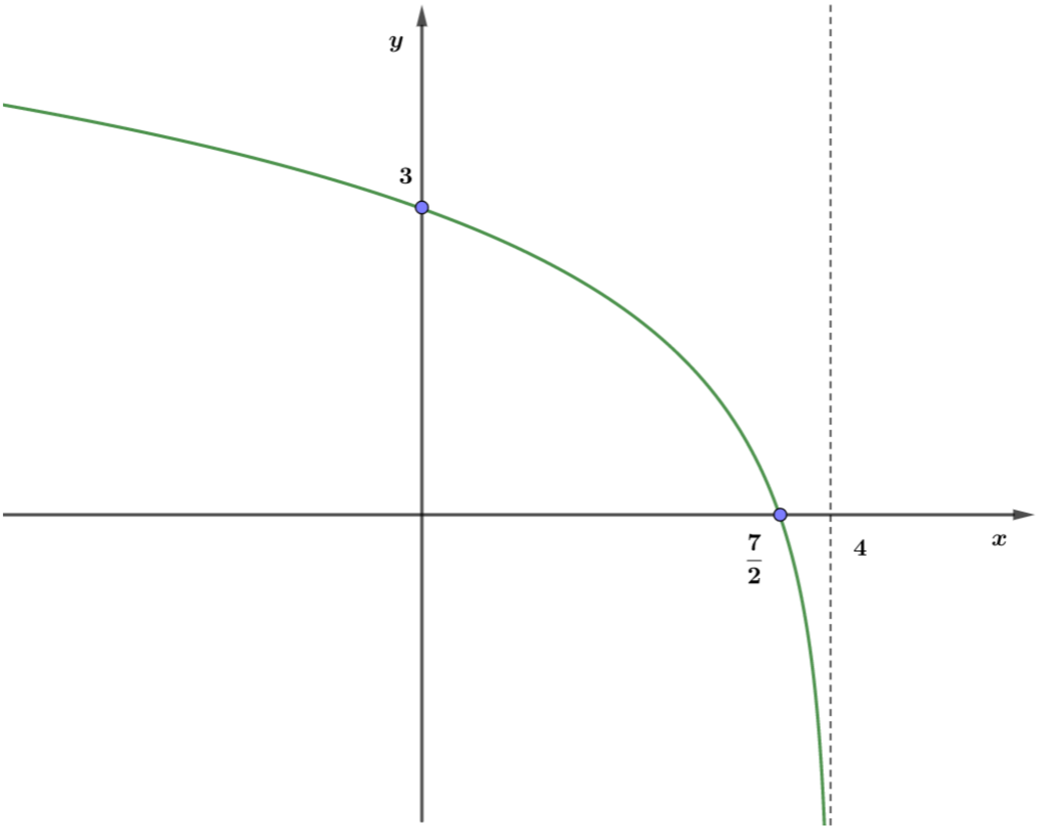
Para $x = 0$, temos $f(0) = \log_2 8 = 3$.

Verificando a monotonicidade:

$$x_2 > x_1$$
$$-x_2 < -x_1$$
$$-2x_2 < -2x_1$$
$$-2x_2 + 8 < -2x_1 + 8$$
$$\log_2(-2x_2 + 8) < \log_2(-2x_1 + 8)$$
$$\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Logo, a função é decrescente.

Esboçando o gráfico, obtemos:



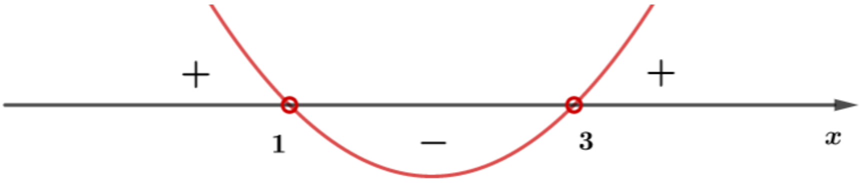
3) $f(x) = \log_2(x^2 - 4x + 3)$

O ITA já cobrou questões pedindo para esboçar um gráfico desse tipo de função.

Condição de existência:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$(x-3)(x-1) > 0$$



$$\Rightarrow x < 1 \; ou \; x > 3$$

Raízes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 1$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

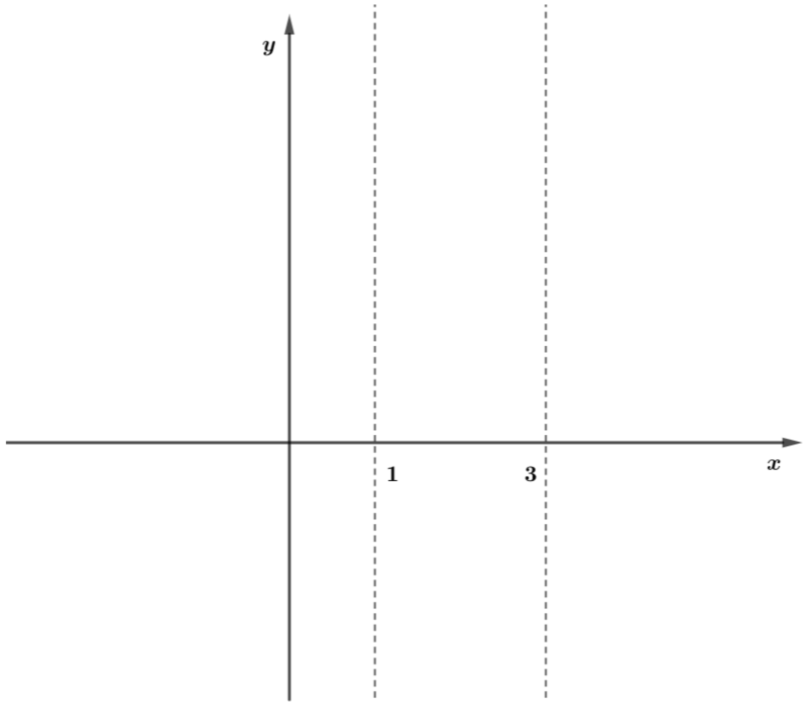
Para $x = 0$, temos $f(0) = \log_2 3$.

Monotonicidade:

Para $x < 1$, a função $x^2 - 4x + 3$ é decrescente, os valores da função diminuem ao se aproximarem de 1. Para $x > 3$, ela é crescente. A função logarítmica f seguirá a mesma monotonicidade da função interna a ela, isto é, $x^2 - 4x + 3$. Vamos esboçar o gráfico:

O primeiro passo é traçar as retas assíntotas:

$$x = 1 \; e \; x = 3$$

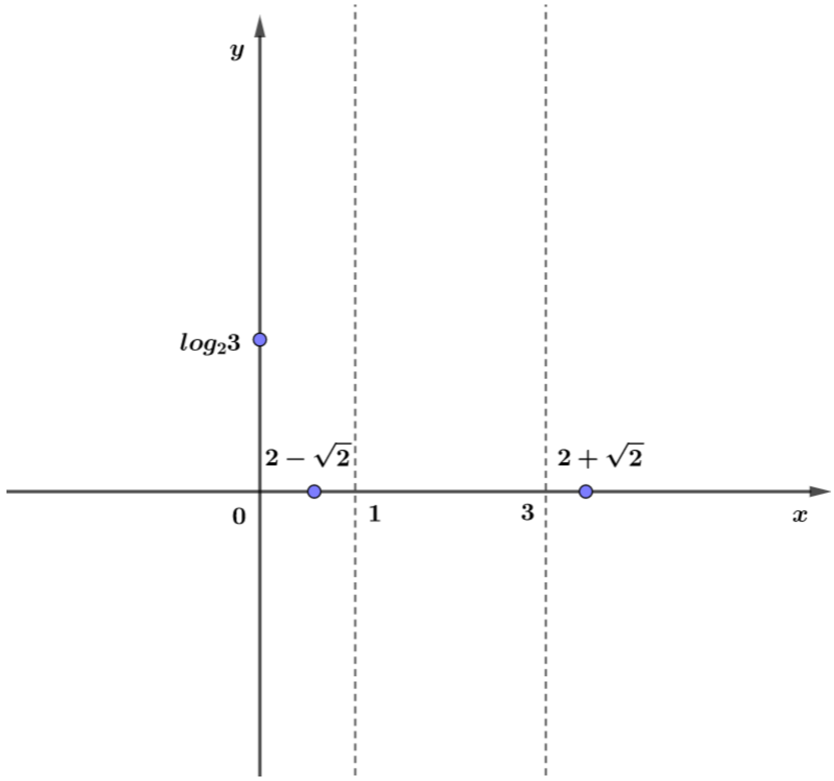


O segundo passo é inserir os pontos de raízes e o ponto que cruza y:

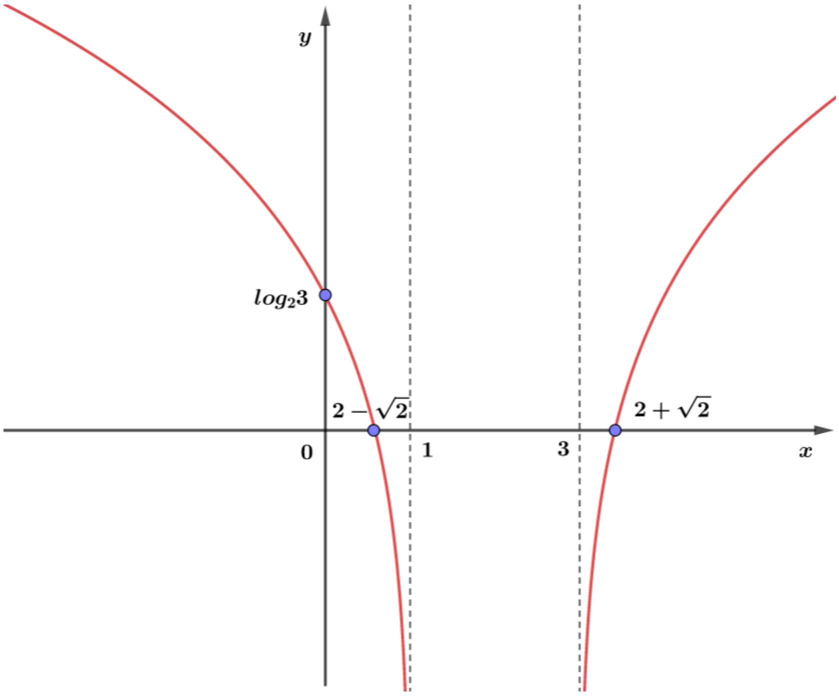
$$\left(2-\sqrt{2},0\right)$$

$$\left(2+\sqrt{2},0\right)$$

$$\left(0,\log_2 3\right)$$



Sabendo que a função é decrescente para $x<1$ e crescente para $x>3$, basta traçar as curvas que passam pelos pontos marcados de modo a obedecer monotonicidade da função. Desse modo:



2.4. EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Aprendemos a usar as propriedades logarítmicas e o que é uma função logarítmica, agora, podemos proceder à resolução de equações logarítmicas.

As equações logarítmicas podem ser divididas em 3 casos:

Caso 1) $\mathbf{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$

Para resolver esse tipo de equação, sempre devemos verificar as **condições de existência** do logaritmo. Desse modo, temos que:

$$a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$f(x) > 0$$

$$g(x) > 0$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Veja o exemplo:

1) Resolva a equação:

$$\log_3(3x - 4) = \log_3(x + 1)$$

Verificando as condições de existência, temos:

$$3x - 4 > 0 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

Fazendo a intersecção, obtemos $x > 4/3$.

Resolvendo a equação:

$$3x - 4 = x + 1$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2} > \frac{4}{3}$$

Como $x = 5/2 > 4/3$, temos que ela é solução da equação:

$$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$$

Caso 2) $\boldsymbol{\log_a f(x) = \beta, \beta \in \mathbb{R}}$

Esse tipo de equação é resolvido fazendo:

$$f(x) = a^{\beta}$$

Para $a \neq 1$ e $a > 0$.

Não precisamos verificar as condições de existência do logaritmo, pois:

$$f(x) = a^{\beta} > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}$$

Veja o exemplo:

2) Resolva a equação:

$$\log_4(5x + 1) = 2$$

Vamos proceder usando a definição de logaritmo:

$$5x + 1 = 4^2 = 16$$

$$5x = 15$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Caso 3) Incógnita auxiliar

Esse tipo de equação se resume a substituir uma incógnita por outra de modo a facilitar o entendimento da equação. Lembre-se de prestar atenção às condições de existência quando fizer essa substituição!

Vejamos um exemplo:

3) Resolva a equação:

$$(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x = 3$$

Condição de existência:

$$x > 0$$

Nesse caso, basta fazer $\log_3 x = y$:

$$y^2 - 2y = 3$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

Essa é uma equação do segundo grau. Sabemos que suas raízes são dadas por:

$$y = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2 = 3 \; ou - 1$$

Para $y = -1$, temos:

$$\log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Para $y = 3$, temos:

$$\log_3 x = 3 \Rightarrow x = 3^3 = 27$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\frac{1}{3};\ 27\right\}$$

7. (ITA/1968) Sejam a e $b \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Que relação devem satisfazer a e b para que a equação $x^2 - (\log_b a)x + 2\log_a b = 0$ tenha duas raízes reais e iguais.

Resolução:

Para que a equação tenha duas raízes reais e iguais, devemos ter $\Delta = 0$:

$$\Delta = (\log_b a)^2 - 8\log_a b = (\log_b a)^2 - \frac{8}{\log_b a} = \frac{(\log_b a)^3 - 8}{\log_b a} = 0$$

$$(\log_b a)^3 - 8 = 0$$
$$(\log_b a)^3 = 2^3$$
$$\log_b a = 2$$
$$a = b^2$$

Para $a = b^2$, temos duas raízes reais e iguais.

Gabarito: $\boldsymbol{a = b^2}$

8. (ITA/1969) Resolva a equação $a^{2x} + a^x - 6 = 0$, com $a > 1$.

Resolução:

Fazendo $a^x = y$:

$$y^2 + y - 6 = 0$$
$$(y+3)(y-2) = 0$$

Raízes:

$$y_1 = -3 \ ou \ y_2 = 2$$

Retornando à variável x:

$$a^x = -3 \Rightarrow impossível$$
$$a^x = 2 \Rightarrow x = \log_a 2$$

Logo, temos uma única solução:

$$S = \{\log_a 2\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \{\log_a 2\}}$

9. (ITA/1970) Dados $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule $\log_9 20$.

Resolução:

Vamos reescrever o logaritmo na base 10:

$$\log_9 20 = \frac{\log 20}{\log 9} = \frac{\log(2\cdot 10)}{\log 3^2} = \frac{1+\log 2}{2\log 3} = \frac{1+a}{2b}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{1+a}{2b}}$

10. (ITA/1975) Resolver a equação $4^x + 6^x = 9^x$.

Resolução:

Perceba os termos escondidos 2^x e 3^x, vamos dividir a equação por 2^{2x}:

$$4^x + 6^x = 9^x$$
$$1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$$

Fazendo $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, temos:

$$1 + y - y^2 = 0$$
$$-y^2 + y + 1 = 0$$
$$y = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{-2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Como $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, temos uma única possibilidade:

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, a solução é:

$$S = \left\{\log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\log_{\frac{3}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$

11. (ITA/1998) Resolver a equação $\log_x 49 = \log_{x^2} 7 + \log_{2x} 7$.

Resolução:

Vamos reescrever todos os logaritmos na base 10:

$$\frac{\log 7^2}{\log x} = \frac{\log 7}{\log x^2} + \frac{\log 7}{\log 2x}$$
$$\frac{2\log 7}{\log x} = \frac{\log 7}{2\log x} + \frac{\log 7}{\log 2 + \log x}$$
$$\frac{2}{\log x} = \frac{1}{2\log x} + \frac{1}{\log 2 + \log x}$$

Substituindo $\log x = y$:

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{2y} + \frac{1}{\log 2 + y}$$
$$2(2y)(\log 2 + y) = y(\log 2 + y) + 2y^2$$

Podemos cortar y, pois $y \neq 0$.

$$4(\log 2 + y) = \log 2 + y + 2y$$
$$4\log 2 + 4y = \log 2 + y + 2y$$
$$3\log 2 = -y$$
$$y = -3\log 2$$
$$\log x = -3\log 2$$

$$x = 10^{-3\log 2}$$
$$\therefore S = \{10^{-3\log 2}\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \{10^{-3\log 2}\}}$

2.5. INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Para resolver inequações logarítmicas, devemos lembrar que a função logaritmo é crescente para base $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Assim, podemos escrever:

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 \ se \ a > 1 \\ ou \\ 0 < f(x) < g(x) \ se \ 0 < a < 1 \end{cases}}}$$

Vamos resolver algumas inequações:

1) Resolva a inequação:

$$\log_2(3x - 6) > \log_2(x - 1)$$

Antes de resolver uma inequação, sempre devemos verificar sua condição de existência:

$$3x - 6 > 0 \Rightarrow x > 2$$
$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$
$$\Rightarrow x > 2$$

Agora, podemos proceder à resolução:

Como a base é $2 > 1$, podemos escrever:

$$\log_2(3x - 6) > \log_2(x - 1) \Rightarrow 3x - 6 > x - 1$$
$$2x > 5$$
$$x > \frac{5}{2}$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência, temos:

$$x > \frac{5}{2} \ e \ x > 2 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$$
$$\therefore S = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

12. (ITA/1971) Resolva a inequação $2(\ln x)^2 - \ln x > 6$.

Resolução:

Analisando a condição de existência, temos:

$$x > 0$$

Substituindo $y = \ln x$:

$$2y^2 - y - 6 > 0$$

Raízes:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} = 2\ ou - \frac{3}{2}$$

$$(y-2)\left(y + \frac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow y < -\frac{3}{2}\ ou\ y > 2$$

Para $y < -3/2$:

$$\ln x < -\frac{3}{2}$$

$$x < e^{-\frac{3}{2}}$$

Para $y > 2$:

$$\ln x > 2$$

$$x > e^2$$

Assim, a solução da inequação é dada por:

$$S =]0; e^{-\frac{3}{2}}[\cup]e^2, +\infty[$$

Gabarito: $\boldsymbol{S =]0; e^{-\frac{3}{2}}[\cup]e^2, +\infty[}$

13. (ITA/1973) Resolva a inequação

$$\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\log_x e - 1} > 1$$

Resolução:

Sempre devemos analisar a condição de existência inicialmente:

Dos logaritmos:

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

Dos denominadores:

$$lnx \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$\log_x e - 1 \neq 0 \Rightarrow \log_x e \neq 1 \Rightarrow x \neq e$$

Vamos reescrever $\log_x e = \frac{1}{\ln x}$:

$$\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\frac{1}{\ln x} - 1} > 1$$

Fazendo $\ln x = y$:

$$\frac{1}{y} + \frac{y}{1-y} - 1 > 0$$

$$\frac{1 - y + y^2 - y(1-y)}{y(1-y)} > 0$$

$$\frac{2y^2 - 2y + 1}{y(1-y)} > 0$$

Analisando as raízes de $2y^2 - 2y + 1$:

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

Como $\Delta < 0$ e a parábola possui concavidade para cima, a expressão sempre é positiva.

Logo, devemos ter:

$$y(1-y) > 0 \Rightarrow 0 < y < 1$$

$$0 < \ln x < 1$$

$$e^0 < x < e^1$$

$$x \in]1, e[$$

Gabarito:

14. (ITA/1977) Resolva a inequação

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_4\left(x^2-5\right)\right) > 0$$

Resolução:

Analisando a condição de existência:

$$x^2-5>0 \Rightarrow |x| > \sqrt{5}$$
$$\log_4\left(x^2-5\right) > 0$$
$$x^2-5>1 \Rightarrow x^2 > 6 \Rightarrow |x| > \sqrt{6}$$

Agora, podemos resolver a inequação. Como a base do logaritmo mais externo é $\frac{1}{3} < 1$, podemos escrever:

$$\log_4(x^2-5) < \left(\frac{1}{3}\right)^0$$
$$x^2-5<4 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência:

$$\sqrt{6} < |x| < 3$$

Gabarito: $\boldsymbol{\sqrt{6} < |x| < 3}$

15. (ITA/1991) Resolva a inequação

$$3\log x + \log(2x+3)^3 \leq 3\log 2$$

Resolução:

Analisando a condição de existência:

$$x>0$$
$$2x+3>0$$
$$x>-\frac{3}{2}$$

Vamos unir os termos logaritmos:

$$3\log x + \log(2x+3)^3 \leq 3\log 2$$
$$\log x^3 + \log(2x+3)^3 - \log 2^3 \leq 0$$
$$\log\left[\frac{x^3(2x+3)^3}{8}\right] \leq 0$$
$$\Rightarrow \left[\frac{x(2x+3)}{2}\right]^3 \leq 1$$
$$\frac{x(2x+3)}{2} \leq 1$$
$$x(2x+3) \leq 2$$
$$2x^2+3x-2 \leq 0$$

Raízes:

$$x = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{4} = \frac{-3\pm 5}{4} = -2\ ou\ \frac{1}{2}$$
$$2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right) \leq 0$$
$$\Rightarrow -2 \leq x \leq 1/2$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência:

$$S = \left(0; \frac{1}{2}\right]$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left(0; \frac{1}{2}\right]}$

2.6. LOGARITMOS DECIMAIS

Vamos estudar o sistema de logaritmos na base 10.

2.6.1. CARACTERÍSTICA E MANTISSA

Qualquer número positivo pode ser comparado entre potências de base 10 de expoentes consecutivos.

Exemplo:

1) $0{,}012 \Rightarrow 10^{-2} < 0{,}012 < 10^{-1}$

2) $32 \Rightarrow 10^{1} < 32 < 10^{2}$

3) $1252 \Rightarrow 10^{3} < 1252 < 10^{4}$

Usando essa ideia, podemos escrever para $x \in \mathbb{R}_{+}$ e $c \in \mathbb{Z}$:

$$10^{c} < x < 10^{c+1}$$

$$\log 10^{c} < \log x < \log 10^{c+1}$$

$$c < \log x < c + 1$$

Dessa desigualdade, temos:

$$\log x = c + m, 0 \leq m < 1$$

c é chamado de característica do logaritmo decimal x e m é chamado de mantissa do logaritmo decimal x.

Vamos aprender a calcular a característica e a mantissa.

Devemos dividir em dois casos:

Caso 1) $x > 1$

x é um número com n algarismo na parte inteira. Então:

$$c = n - 1$$

Caso 2) $0 < x < 1$

x é um número com n algarismo zero antes do primeiro algarismo significativo.

$$c = -n$$

Exemplos:

1) $124{,}3$

$$n = 3 \Rightarrow c = 2$$

2) $0{,}015$

$$n = 2 \Rightarrow c = -2$$

A mantissa é obtida através das tabelas de logaritmos. Ela, geralmente, é um número irracional e por esse motivo as tabelas fornecem valores aproximados dos logaritmos dos números inteiros.

2.6.2. TEOREMA DA MANTISSA

Os logaritmos decimais x e $x \cdot 10^p$ para $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $p \in \mathbb{Z}$, possuem a mesma mantissa.

Demonstração:

$$\log x = c + m, c \in \mathbb{Z}\ e\ m \in [0,1)$$

$$\log x \cdot 10^p = \log x + p = \underbrace{c + p}_{\mathbb{Z}} + m$$

A característica de $x \cdot 10^p$ é $c' = c + p$ e a mantissa é a mesma de x.

Exemplos:

$$\log 2 = 0{,}3010 = 0 + 0{,}3010$$

A mantissa de $\log 2$ é $0{,}3010$ e sua característica é $c = 0$.

$$\log 3 = 0{,}4771 = 0 + 0{,}4771$$

A mantissa de $\log 3$ é $0{,}4771$ e sua característica é $c = 0$.

2.7. SISTEMAS DE LOGARITMOS USANDO SEQUÊNCIAS

Seja uma PG da forma $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ com $a_i > 0$ e $q > 0$.

Usando a forma geral, temos:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Aplicando logaritmo na base b:

$$\log_b a_n = \log_b(a_1 q^{n-1})$$

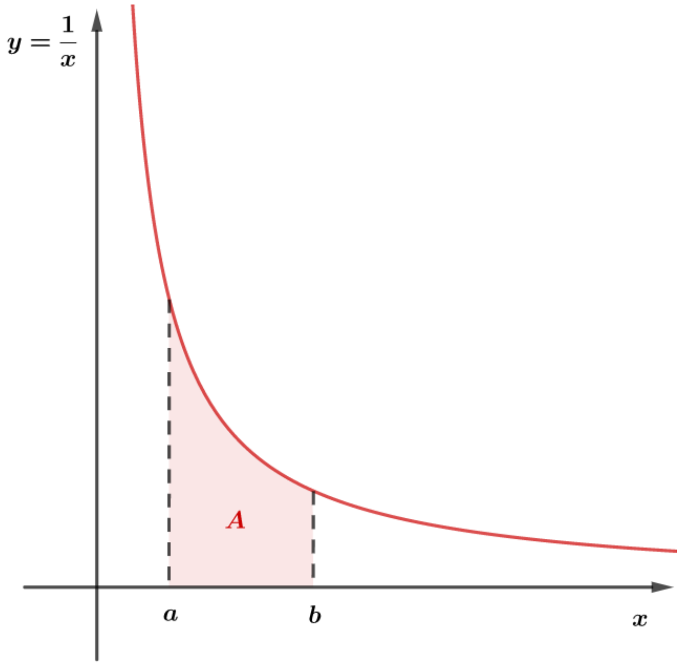
$$\log_b a_n = \log_b a_1 + (n-1)\log_b q$$

Perceba que ao aplicar o logaritmo na forma geral da PG, obtemos uma PA de razão $\log_b q$.

2.8. CÁLCULO DE ÁREAS USANDO LOGARITMOS

Podemos usar as propriedades dos logaritmos para calcular áreas.

Para uma função $y = 1/x$, temos o seguinte gráfico:



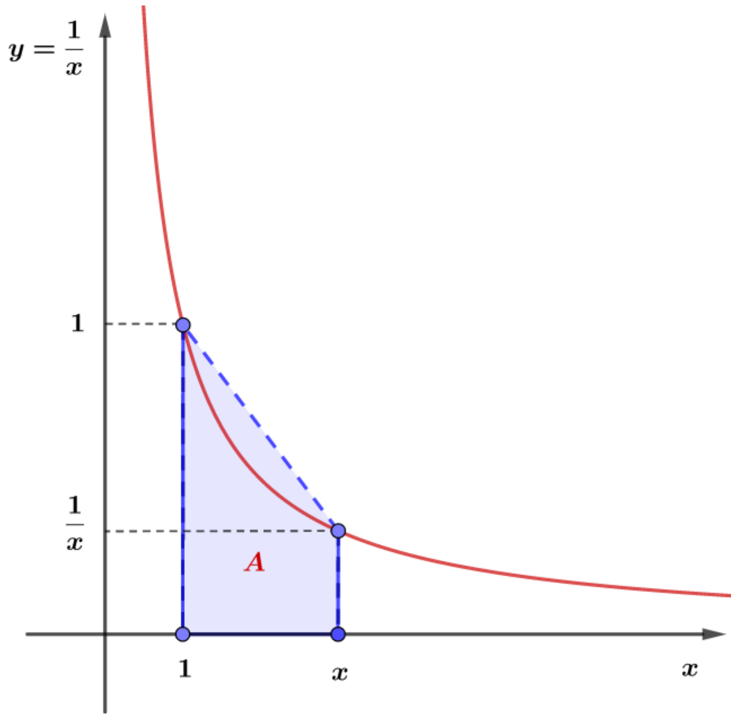
A é a área da região colorida.

Se integrarmos o gráfico entre os pontos a e b, obtemos a seguinte fórmula:

$$A = \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a$$

Podemos usar essa equação para calcular o valor numérico de $\ln x$. A área pode ser aproximada para um trapézio. Veja a figura:

Para $x > 1$:



Nesse caso, a área é dada por:

$$A \cong \ln x - \ln 1 = \ln x$$

$$\Rightarrow \ln x \cong A$$

Ainda não estudamos a área de um trapézio, veremos na aula de Geometria Plana. Saiba que a área do trapézio é dada por:

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

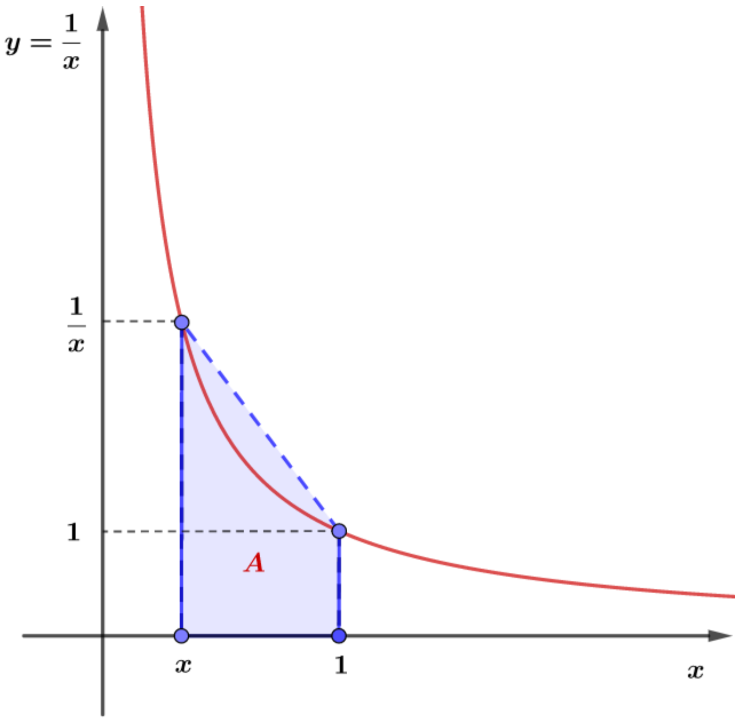
Onde B é a base maior, b é a base menor e h é a altura.

Nesse caso, temos:

$$A = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)(x-1)}{2} = \frac{x^2-1}{2x}$$

$$\ln x \cong \frac{x^2-1}{2x}$$

Para $0 < x < 1$:



$$A \cong \ln 1 - \ln x = -\ln x$$

$$\ln x \cong -A$$

$$A = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)(1-x)}{2}$$

$$A = \frac{(1-x^2)}{2x}$$

$$\ln x \cong \frac{x^2-1}{2x}$$

Exemplo:

1) Calcule o valor aproximado de $\ln 3$:

$$\ln x \cong \frac{x^2-1}{2x}$$

$$\ln 3 = \frac{3^2-1}{6} = \frac{4}{3} \cong 1{,}33$$

Esse valor é uma aproximação, o valor de $\ln 3$ é:

$$\ln 3 = 1{,}0986122887$$

Perceba que são valores bem próximos.

3. FUNÇÃO PISO E FUNÇÃO TETO

Vamos estudar rapidamente duas funções que podem ser cobradas na prova, as funções piso e as funções teto.

3.1. DEFINIÇÃO

A função piso é denotada por $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Ele representa o maior inteiro que é menor ou igual a x. Na prática, o que fazemos é um "arredondamento para baixo", de modo a obter um número inteiro que satisfaz os requisitos.

Ao contrário da função piso, temos a função teto, denotada por $g(x) = \lceil x \rceil$. Ele representa o menor inteiro que é maior ou igual a x. Nesse caso, fazemos o "arredondamento para cima" e pegamos o menor valor inteiro que satisfaz os requisitos da função. Vamos ver a definição formal de cada um deles:

$$\boldsymbol{f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\}}$$

$$\boldsymbol{g(x) = \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}}$$

É possível representar a parte fracionária de x, usando a seguinte função:

$$\boldsymbol{h(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor}$$

$\{x\}$ representa a parte fracionária do número real x.

Exemplos:

1) $\lfloor 1{,}5 \rfloor = 1$

2) $\lceil \sqrt{3} \rceil = 2$

3) $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$

4) $\{3{,}14159\} = 3{,}14159 - \lfloor 3{,}14159 \rfloor = 3{,}14159 - 3 = 0{,}14159$

3.1.1. Propriedades

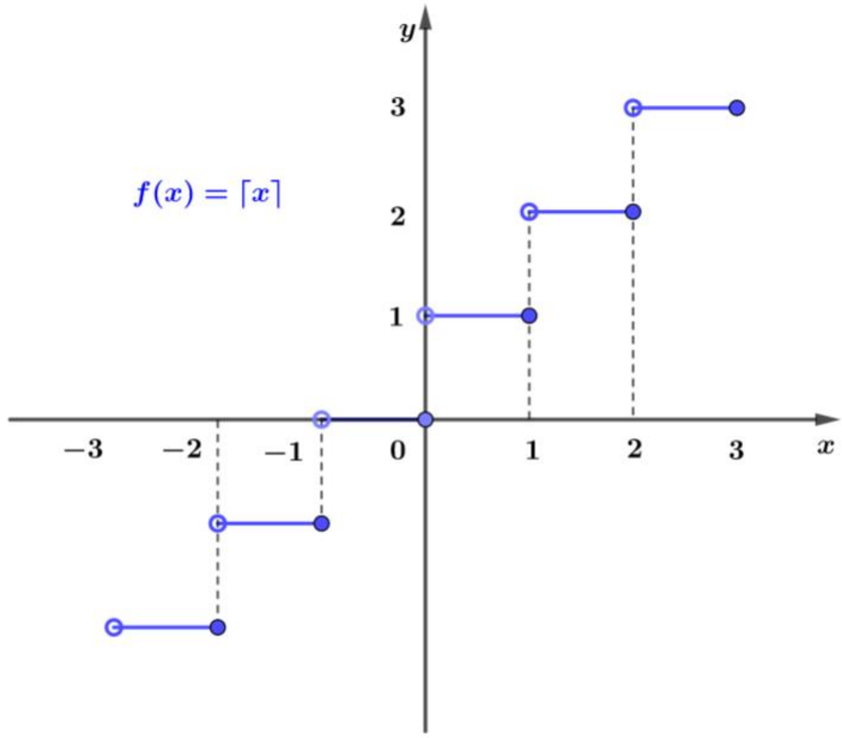
P1) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

P2) $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

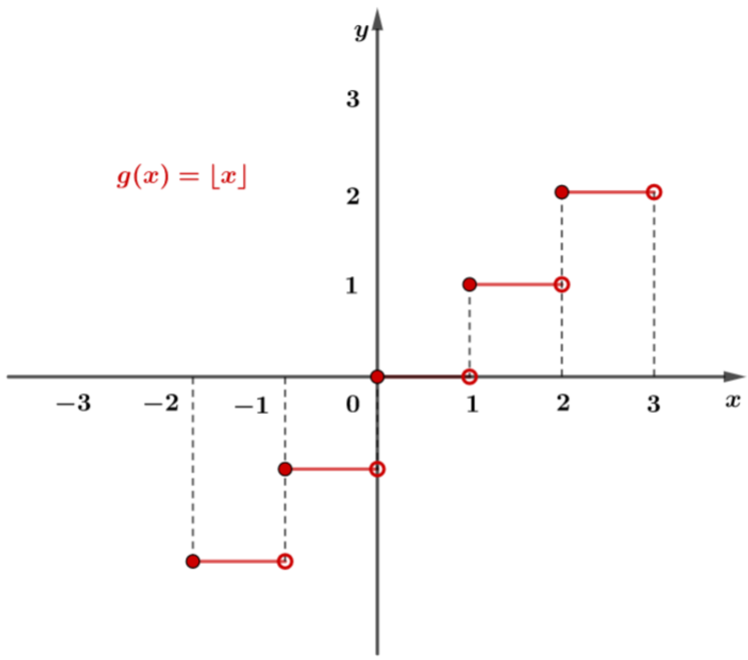
3.2. GRÁFICO

Vamos esboçar o gráfico das funções piso, teto e a fracionária.

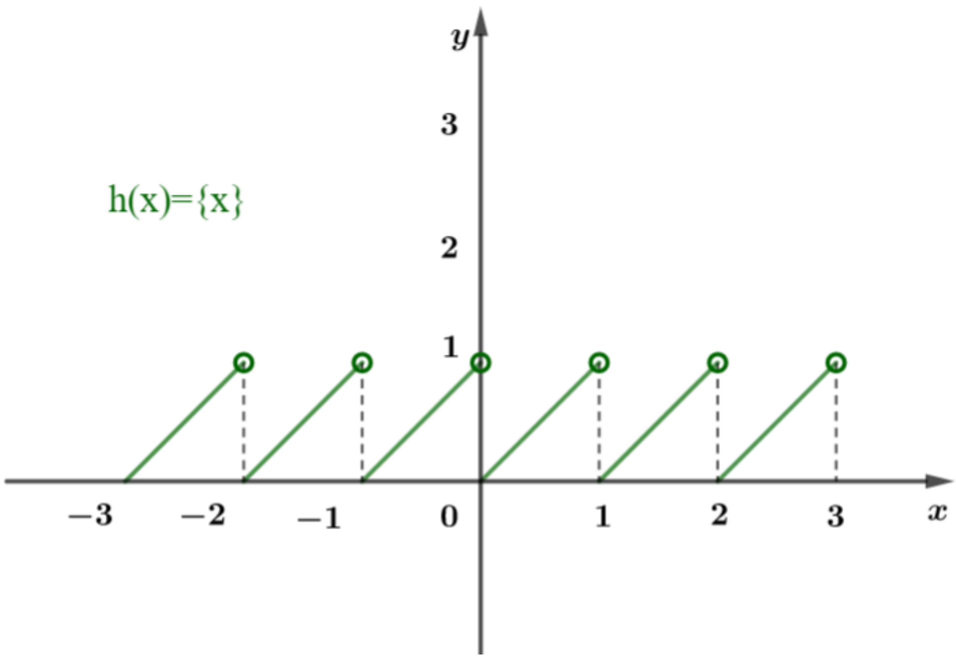
Para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = \lceil x \rceil$, temos:



Para $g: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = \lfloor x \rfloor$, temos:



Para $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \{x\}$, temos:



16. Resolva as seguintes equações:

a) $\lfloor x \rfloor^2 - 2\lfloor x \rfloor - 3 = 0$

b) $\{x\} + 2\lfloor x \rfloor = 1$, para $x \in \,]3, 4[$

Resolução:

a) $\lfloor x \rfloor^2 - 2\lfloor x \rfloor - 3 = 0$

Vamos fazer a substituição $y = \lfloor x \rfloor$. Desse modo:

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$
$$(y - 3)(y + 1) = 0$$

Assim, encontramos as raízes:

$$y_1 = -1 \; ou \; y_2 = 3$$

Retornando à variável x:

$$\lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow -2 < x \leq -1$$
$$\lfloor x \rfloor = 3 \Rightarrow 2 < x \leq 3$$

A solução é dada por:

$$S =]-2, -1] \cup]2, 3]$$

b) $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$, para $x \in \,]3, 4[$

Vamos escrever $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$:

$$x - \lfloor x \rfloor + \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

Como $x \in \,]3, 4[$, temos $\lfloor x \rfloor = 3$.

Para $1/x$:

$$3 < x < 4$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$$

Então:

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$x - 3 + \frac{1}{x} - 0 = 1$$
$$x + \frac{1}{x} - 4 = 0$$
$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

Encontrando as raízes:

$$x = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

Assim, a solução é dada por:

$$S = \left\{2 \pm \sqrt{3}\right\}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{S =]-2,-1] \cup]2,3]}$ **b)** $\boldsymbol{S = \left\{2 \pm \sqrt{3}\right\}}$

4. EQUAÇÕES FUNCIONAIS

Equações funcionais são equações cujas incógnitas são funções, vamos estudar as principais e aprender a resolver algumas. As outras podem ser resolvidas usando a mesma ideia.

4.1. EQUAÇÕES FUNCIONAIS BÁSICAS

4.1.1. EQUAÇÕES FUNCIONAIS DE CAUCHY

$$I)\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$II)\ f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$
$$III)\ f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$
$$IV)\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

4.1.2. EQUAÇÃO FUNCIONAL DE JENSEN

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

4.1.3. EQUAÇÃO FUNCIONAL DE D`ALAMBERT

$$f(x+y) + f(x-y) = 2 \cdot f(x) \cdot f(y)$$

4.1.4. EQUAÇÕES FUNCIONAIS TRIGONOMÉTRICAS

$$I)\ g(x+y) = f(x)\cdot g(y) + f(y)\cdot g(x)$$
$$II)\ g(x\cdot y) = f(x)\cdot g(y) - f(y)\cdot g(x)$$
$$III)\ f(x+y) = f(x)\cdot f(y) - g(x)\cdot g(y)$$
$$IV)\ f(x-y) = f(x)\cdot f(y) + g(x)\cdot g(y)$$

4.2. COMO RESOLVER UMA EQUAÇÃO FUNCIONAL

1) Vamos resolver a primeira equação funcional de Cauchy:

$$\boldsymbol{f(x+y) = f(x) + f(y)}$$

Para resolver esse tipo de problema, devemos usar o bom senso e ver quais informações conseguimos extrair dessa equação.

Vamos verificar, inicialmente, o valor de $x = y = 0$:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$$
$$\Rightarrow f(0) = 0$$

Agora, podemos proceder verificando sua paridade, fazendo $x \in \mathbb{R}$ e $y = -x$:

$$f(x-x) = f(x) + f(-x)$$
$$f(0) = f(x) + f(-x)$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow -f(x) = f(-x)$$

Dessa forma, podemos afirmar que a paridade da função é ímpar.

E o que acontece se fizermos $y = x, 2x, 3x, 4x, \ldots$?

$$f(x+x) = f(x) + f(x)$$
$$f(2x) = 2f(x)$$
$$f(x+2x) = f(x) + f(2x)$$
$$f(3x) = 3f(x)$$
$$f(x+3x) = f(x) + f(3x)$$
$$f(4x) = 4f(x)$$
$$\vdots$$

Podemos deduzir que $f(kx) = kf(x)$. Vamos provar por PIF:

Para $k = 1$, temos $f(x) = f(x)$.

Para $k \in \mathbb{N}$, devemos provar que $f(kx) = kf(x) \Rightarrow f\big((k+1)x\big) = (k+1)f(x)$:

Usando a equação funcional e fazendo $y = kx$, temos:

$$f(x+kx) = f(x) + f(kx)$$
$$f\big((k+1)x\big) = f(x) + kf(x)$$

$$\Rightarrow f\big((k+1)x\big) = (k+1)f(x)$$

Concluímos que a função também possui a forma $f(kx) = kf(x)$.

Podemos também usar a indução vulgar e provar que $f(-kx) = -kf(x)$.

Se $f(-kx) = -kf(x)$, temos:

$$f(-x-kx) = f(-x) + f(-kx)$$

Como f é ímpar temos $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-(k+1)x) = -f(x) - kf(x)$$

$$\Rightarrow f(-(k+1)x) = -(k+1)f(x)$$

Com isso, provamos que $f(kx) = kf(x), k \in \mathbb{Z}\ e\ x \in \mathbb{R}$.

E se fizermos $x = 1$?

$$f(k \cdot 1) = kf(1)$$

$$f(k) = kf(1)$$

Perceba que $f(1)$ pode ser escrito como uma constante, vamos defini-la como a constante c:

$$\Rightarrow f(k) = k \cdot c, k \in \mathbb{Z}$$

Se tomarmos $k = x \in \mathbb{Z}$ e substituir na equação acima, temos:

$$f(x) = cx, x \in \mathbb{Z}$$

Vamos verificar se x pode ser racional, fazendo $x = p/q$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$:

$$x = \frac{p}{q} \Rightarrow q \cdot x = p \cdot 1$$

$$f(q \cdot x) = f(p \cdot 1)$$

$$qf(x) = pf(1)$$

$$f(x) = \frac{p}{q} f(1)$$

$$\Rightarrow f(x) = xf(1)$$

Portanto, $f(x) = cx, x \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = c$.

Usando o Teorema de Dedekind, podemos provar que $f(x) = cx, x \in \mathbb{R}$. Não veremos essa demonstração nesta aula, pois ela foge ao escopo do curso.

$$\Rightarrow f(x) = cx, x \in \mathbb{R}$$

2) Vamos aprender a resolver a equação funcional de Jensen:

$$\boldsymbol{f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}}$$

Inicialmente, vamos verificar o que ocorre quando $x \in \mathbb{R}$ e $y = 0$:

$$f\left(\frac{x+0}{2}\right)=\frac{f(x)+f(0)}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)+f(0)}{2}$$

Assim, vamos fazer $f(0)=b$ e substituir na equação:

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)+b}{2}$$

Usando essa equação, podemos escrever:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x+y)+b}{2}$$

Mas a equação funcional também pode ser:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Então, temos a igualdade:

$$\frac{f(x+y)+b}{2}=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

$$f(x+y)+b=f(x)+f(y)$$

Olha o bizu! Vamos subtrair $-2b$ nos dois lados da equação:

$$f(x+y)+b-2b=f(x)+f(y)-2b$$

$$f(x+y)-b=[f(x)-b]+[f(y)-b]$$

Tomando $g(x)=f(x)-b$ e substituindo, temos:

$$g(x+y)=g(x)+g(y)$$

A equação acima é a primeira equação de Cauchy, então, podemos escrever:

$$g(x)=cx, x\in\mathbb{R}$$

Retornando à função f:

$$g(x)=f(x)-b$$

$$cx=f(x)-b$$

$$\Rightarrow f(x)=cx+b, x\in\mathbb{R}$$

Portanto, a função que satisfaz a equação funcional de Jensen é a função linear acima.

5. QUESTÕES NÍVEL 1

1. **(ESA/2018)**

Seja a função definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2^x$. Então $f(a+1) - f(a)$ é igual a:

a) $2f(a)$

b) $f(a)$

c) $f(1)$

d) 2

e) 1

2. **(EEAR/2018)**

O valor real que satisfaz a equação $4^x - 2^x - 2 = 0$ é um número

a) entre -2 e 2

b) entre 2 e 4

c) maior que 4

d) menor que -2

3. **(EEAR/2012)**

No conjunto dos números reais, a equação $(3^x)^x = 9^8$ tem por raízes

a) um número positivo e um negativo.

b) um número negativo e o zero.

c) dois números negativos.

d) dois números positivos.

4. **(EEAR/2009)**

Se x é a raiz da equação $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,25$, então o valor de x é

a) $5.$

b) $3.$

c) $-2.$

d) $-4.$

5. **(EEAR/2008)**

A raiz real da equação $4^{x-1} = \frac{1}{8}$ é um número

a) inteiro positivo.

b) inteiro negativo.

c) racional positivo.

d) racional negativo.

6. **(EEAR/2008)**

A raiz real da equação $25^{\sqrt{x}} - 24 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 25$ é um número múltiplo de

a) $7.$

b) 5.

c) 3.

d) 2.

7. (EEAR/2005)

A soma dos valores de x que verificam a equação $5^{2x} - 7 \cdot 5^{x} + 10 = 0$ é

a) $\log 10$

b) $\log_5 10$

c) $\log_2 5 + \log_5 2$

d) $\log_2 2 + \log_2 5$

8. (EEAR/2004)

Na equação $2^{x+1} + 2^{-x} = 3$, é verdadeira a afirmativa:

a) Uma das raízes é 1.

b) A soma das raízes é um número inteiro positivo.

c) O produto das raízes é um número inteiro negativo.

d) O quociente das raízes pode ser zero (0).

9. (EEAR/2003)

Todo número real positivo pode ser escrito na forma 10^{x}. Tendo em vista que $8 \approx 10^{0,90}$, então o expoente x, tal que $125 = 10^{x}$, vale aproximadamente,

a) 1,90

b) 2,10

c) 2,30

d) 2,50

10. (EEAR/2003)

O valor da raiz da equação $2^{x+1} + 2^{x-1} = 40$ é um número

a) inteiro positivo

b) irracional

c) inteiro negativo

d) imaginário puro

11. (EEAR/2003)

Se $0,0625^{x+2} = 0,25$, então $(x+1)^{6}$ vale

a) $-\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{32}$

c) 64

d) $\frac{1}{64}$

12. (EEAR/2002)

Resolvendo a equação $2^{2^{2x^2+1}} = 256$, concluímos que ela

a) não admite soluções reais

b) admite $\sqrt{\frac{3}{2}}$ como raiz.

c) admite duas soluções reais positivas.

d) admite duas soluções cuja soma é zero.

13. (EEAR/2002)

Se $8^{x-9} = 16^{\frac{x}{2}}$, então x é um número múltiplo de

a) 2

b) 3

c) 5

d) 7

14. (EEAR/2001)

Se x e y são números reais que tornam simultaneamente verdadeiras as sentenças $2^{x+y} - 2 = 30$ e $2^{x-y} - 2 = 0$, então x^y é igual a:

a) 9

b) 8

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{9}$

15. (EEAR/2001)

Resolvendo a equação $(0,0625)^{x-2} = 0,25$, obtemos x igual a:

a) $2/9$

b) $2/5$

c) $5/2$

d) $9/2$

16. (ESA/2012)

O conjunto solução da equação exponencial $4^x - 2^x = 56$ é

a) $\{-7,8\}$

b) $\{3,8\}$

c) $\{3\}$

d) $\{2,3\}$

e) $\{8\}$

17. (EEAR/2018)

Na função $f(x) = 27^{\frac{x+2}{x}}$, tal que $x \neq 0$, o valor de x para que $f(x) = 3^6$, é um número

a) divisível por 2

b) divisível por 3

c) divisível por 5

d) divisível por 7

18. (EEAR/2015)

Se $f(x) = a^x + b$ é uma função tal que $f(0) = \frac{4}{3}$ e $f(-1) = 1$, então o valor de a é

a) 1

b) 2

c) $1/2$

d) $3/2$

19. (EEAR/2013)

Seja uma função real definida por $f(x) = (x+1) \cdot m^{x-1}$. Se $f(2) = 6$, então m é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 2.

d) 1.

20. (EEAR/2007)

Sejam as funções f, g, h e t definidas, respectivamente, por $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$, $g(x) = \pi^x$, $h(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{-x}$ e $t(x) = \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^x$.

Dessas quatro funções, é(são) decrescente(s)

a) todas.

b) somente três.

c) somente duas.

d) somente uma.

21. (EEAR/2001)

O conjunto imagem da função $f(x) = 3^x - 5$ é:

a) $\{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) < -4\}$

b) $\{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) > -4\}$

c) $\{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq -5\}$

d) $\{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) > -5\}$

22. (EEAR/2017)

A desigualdade $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{4}\right)^x$ tem como conjunto solução

a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 5\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 5\}$

23. (EEAR/2002)

A solução da inequação $x^{2x-1} < x^3$, sendo $x > 0$ e $x \neq 1$, é o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} | \dots\}$. Assinale a alternativa que completa corretamente os pontilhados:

a) $x < 2$

b) $x > 2$

c) $0 < x < 2$

d) $1 < x < 2$

24. (EEAR/2002)

Os valores de x para os quais $(0,8)^{4x^2-x} > (0,8)^{3(x+1)}$

a) $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

c) $x < -\frac{3}{2}$ ou $x > \frac{1}{2}$

d) $x < -\frac{1}{2}$ ou $x > \frac{3}{2}$

25. (ESA/2018)

O valor da expressão $A = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \log_8 32$ é:

a) -1

b) $5/3$

c) $2/3$

d) 0

e) 1

26. (ESA/2018)

Adotando-se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, o valor de $\log_5 120$ será dado por:

a) $\frac{x+2y+1}{1-y}$

b) $\frac{x+2y}{1-y}$

c) $\frac{4x+3y}{x+y}$

d) $\frac{2x+y}{1-x}$

e) $\frac{2x+y+1}{1-x}$

27. (ESA/2016)

Utilizando os valores aproximados $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, encontramos para $\log \sqrt[3]{12}$ o valor de:

a) 0,33

b) 0,36

c) 0,35

d) 0,31

e) 0,32

28. (ESA/2015)

Dados $\log 3 = a$ e $\log 2 = b$, a solução de $4^x = 30$ é:

a) $\frac{2a+1}{b}$

b) $\frac{a+2}{b}$

c) $\frac{2b+1}{a}$

d) $\frac{a+1}{2b}$

e) $\frac{b+2}{a}$

29. (ESA/2012)

Sabendo que $\log P = 3\log a - 4\log b + \frac{1}{2}\log c$, assinale a alternativa que representa o valor de P (dados: $a = 4, b = 2$ e $c = 16$)

a) 12

b) 52

c) 16

d) 24

e) 73

30. (ESA/2010)

Se $\log_2 3 = a$ e $\log_2 5 = b$, então o valor de $\log_{0,5} 75$ é

a) $a + b$

b) $-a + 2b$

c) $a - b$

d) $a - 2b$

e) $-a - 2b$

31. (EEAR/2019)

Sejam m, n e b números reais positivos, com $b \neq 1$. Se $\log_b m = x$ e se $\log_b n = y$, então $\log_b(m \cdot n) + \log_b\left(\frac{n}{m}\right)$ é igual a

a) x

b) $2y$

c) $x + y$

d) $2x - y$

32. (EEAR/2017)

Se $\log 2 = 0,3$ e $\log 36 = 1,6$, então $\log 3 =$ ___.

a) 0,4

b) 0,5

c) 0,6

d) 0,7

33. (EEAR/2013)

Se $\log x + \log y = k$, então $\log x^5 + \log y^5$ é

a) $10k$

b) k^{10}

c) $5k$

d) k^5

34. (EEAR/2000)

Resolvendo o sistema $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ xy = 8 \end{cases}$, obtemos:

a) $S = \left\{\left(32, \frac{1}{4}\right)\right\}$

b) $S = \{(8, 1)\}$

c) $S = \{(2, 4)\}$

d) $S = \left\{\left(16, \frac{1}{2}\right)\right\}$

35. (EEAR/2016)

O valor de x na equação $\log_{\frac{1}{3}}(\log_{27} 3x) = 1$ é

a) 1

b) 3

c) 9

d) 27

36. (ESPCEX/2017)

Resolvendo a equação $\log_3(x^2 - 2x + 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) = \log_3(x + 1)$, obtém-se:

a) $S = \{-1\}$

b) $S = \{4, 5\}$

c) $S = \{6\}$

d) $S = \emptyset$

e) $S = \{4\}$

37. (EEAR/2002)

Se o logaritmo de um número na base n é 4 e na base $n/2$ é 8, então esse número está no intervalo

a) $[1, 50]$

b) $[51, 100]$

c) $[101, 200]$

d) $[201, 500]$

38. (EEAR/2014)

Se $f(x) = \log x$ e $a \cdot b = 1$, então $f(a) + f(b)$ é igual a

a) 0

b) 1

c) 10

d) 100

39. (EEAR/2013)

Para que exista a função $f(x) = \log(x - m)$, é necessário que x seja

a) maior que m.

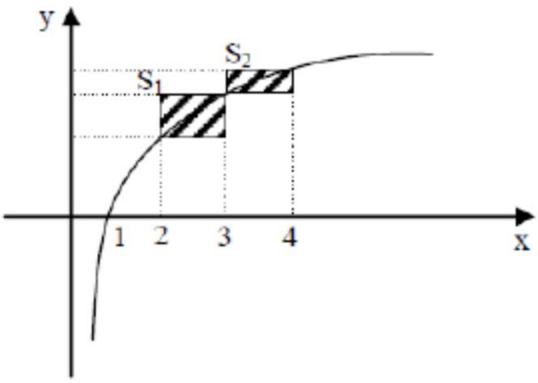
b) menor que m.

c) maior ou igual a m.

d) menor ou igual a m.

40. (EEAR/2002)

Na figura abaixo, a curva representa o gráfico da função $y = \log x$, para $x > 0$.



Assim, a soma das áreas das regiões hachuradas é igual a

a) $\log 2$

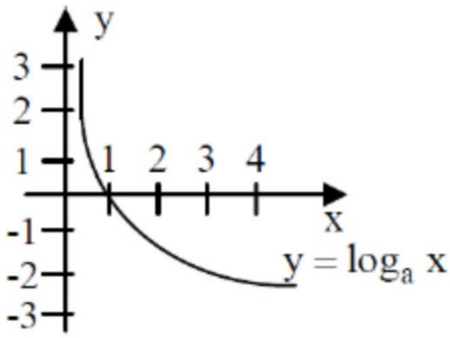
b) $\log 3$

c) $\log 4$

d) $\log 6$

41. (EEAR/2003)

O gráfico abaixo representa a função $y = \log_a x$.



Dentro das condições de existência para que a operação de logaritmação seja sempre possível e de resultado único, a base a é

a) $0 < a < 1$

b) $a = 0$

c) $a > 1$

d) $a < 0$

42. (EEAR/2017)

As funções logarítmicas $f(x) = \log_{0,4} x$ e $g(x) = \log_4 x$ são, respectivamente,

a) crescente e crescente

b) crescente e decrescente

c) decrescente e crescente

d) decrescente e decrescente

43. (EEAR/2011)

Sejam as funções logarítmicas $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = \log_b x$. Se $f(x)$ é crescente e $g(x)$ é decrescente, então

a) $a > 1\ e\ b < 1$

b) $a > 1\ e\ 0 < b < 1$

c) $0 < a < 1\ e\ b > 1$

d) $0 < a < 1\ e\ 0 < b < 1$

44. (EEAR/2002)

O número de pontos de intersecção dos gráficos das funções definidas por $f(x) = 3\log x$ e $g(x) = \log 9 + \log x$, sendo $x > 0$, é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

45. (ESA/2018)

Sejam $f: \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$, respectivamente. O valor de $f\ o\ g(2)$ é:

a) 0

b) 2

c) -2

d) 4

e) -4

46. (ESA/2011)

Se $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x^2$, com x real e maior que zero, então o valor de $f\big(f(5)\big)$ é

a) $\frac{2\log 2}{1+\log 2}$

b) $\frac{\log 2}{\log 2+2}$

c) $\frac{5\log 2}{\log 2+1}$

d) $\frac{8\log 2}{1-\log 2}$

e) $\frac{5\log 2}{1-\log 2}$

47. (EEAR/2006)

O menor número inteiro que satisfaz a inequação $\log_2(3x-5) > 3$ é um número

a) par negativo.

b) par positivo.

c) ímpar negativo.

d) ímpar positivo.

48. (ESPCEX/2000)

Considere a soma $S = \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \log\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots + \log\left(\frac{n}{n-1}\right)$, em que n é um número natural. O menor valor de n para o qual $S > 1$ é

a) 20

b) 21

c) 22

d) 25

e) 29

49. (EEAR/2003)

Se $x \in \mathbb{Z}$ e $f(x)$ é uma função tal que $f(p+q) = f(p)\cdot f(q)$ e $f(2) = 2$, então $f(0)$ e $f(-2)$ são, respectivamente,

a) $1\ e\ \frac{1}{2}$

b) $0\ e\ \frac{1}{2}$

c) 1 e 0

d) 1 e -4

GABARITO

1. b
2. a
3. a
4. c
5. d
6. d
7. b
8. d
9. b
10. a
11. d
12. d
13. b
14. a
15. c
16. c
17. a
18. d
19. c
20. d
21. d
22. b
23. d
24. b
25. c
26. e
27. b
28. d
29. c
30. e
31. b
32. b
33. c
34. a
35. a
36. d
37. d
38. a
39. a
40. a
41. a
42. c
43. b
44. b
45. a
46. d
47. d

48. b
49. a

RESOLUÇÃO

1. **(ESA/2018)**

Seja a função definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2^x$. Então $f(a+1) - f(a)$ é igual a:

a) $2f(a)$

b) $f(a)$

c) $f(1)$

d) 2

e) 1

Comentários

Queremos:

$$f(a+1) - f(a) = 2^{a+1} - 2^a = 2 \cdot 2^a - 2^a = 2^a(2-1) = 2^a$$
$$\Rightarrow f(a+1) - f(a) = 2^a = f(a)$$

Gabarito: "b".

---

2. **(EEAR/2018)**

O valor real que satisfaz a equação $4^x - 2^x - 2 = 0$ é um número

a) entre -2 e 2

b) entre 2 e 4

c) maior que 4

d) menor que -2

Comentários

Fazendo a substituição $2^x = y$, temos:

$$4^x - 2^x - 2 = 0 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow (y+1)(y-2) = 0$$

Resolvendo em y, encontramos:

$$y = 2 \ ou \ y = -1$$

Como $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos apenas a possibilidade $y = 2$, logo:

$$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

1 é um número entre -2 e 2.

Gabarito: "a".

---

3. **(EEAR/2012)**

No conjunto dos números reais, a equação $(3^x)^x = 9^8$ tem por raízes

a) um número positivo e um negativo.

b) um número negativo e o zero.

c) dois números negativos.

d) dois números positivos.

Comentários

$$(3^x)^x = 9^8 \Leftrightarrow 3^{x^2} = (3^2)^8 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 3^{16}$$
$$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

Portanto, temos como solução um número positivo e um número negativo.

Gabarito: "a".

---

4. (EEAR/2009)

Se x é a raiz da equação $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,25$, então o valor de x é

a) 5.

b) 3.

c) -2.

d) -4.

Comentários

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2{,}25 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$
$$\Rightarrow x = -2$$

Gabarito: "c".

---

5. (EEAR/2008)

A raiz real da equação $4^{x-1} = \frac{1}{8}$ é um número

a) inteiro positivo.

b) inteiro negativo.

c) racional positivo.

d) racional negativo.

Comentários

$$4^{x-1} = \frac{1}{8}$$
$$\Rightarrow 2^{2(x-1)} = 2^{-3}$$
$$\Rightarrow 2(x-1) = -3$$
$$\Rightarrow 2x = -1$$
$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

Gabarito: "d".

---

6. **(EEAR/2008)**

A raiz real da equação $25^{\sqrt{x}} - 24 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 25$ é um número múltiplo de

a) 7.

b) 5.

c) 3.

d) 2.

Comentários

$$25^{\sqrt{x}} - 24 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 25 \Leftrightarrow 5^{2\sqrt{x}} - 24 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 25 = 0$$

Fazendo $5^{\sqrt{x}} = y$:

$$y^2 - 24y - 25 = 0$$
$$(y - 25)(y + 1) = 0$$
$$y = 25 \; ou \; y = -1$$

Como $5^{\sqrt{x}} > 0$, temos:

$$5^{\sqrt{x}} = 25 = 5^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, a raiz é um número múltiplo de 2.

Gabarito: "d".

---

7. **(EEAR/2005)**

A soma dos valores de x que verificam a equação $5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 10 = 0$ é

a) $\log 10$

b) $\log_5 10$

c) $\log_2 5 + \log_5 2$

d) $\log_2 2 + \log_2 5$

Comentários

Substituindo $5^x = y$:

$$y^2 - 7y + 10 = 0$$

Resolvendo em y, encontramos:

$$y = 5 \; ou \; y = 2$$

Portanto, temos como raízes:

$$5^x = 5 \Rightarrow x = 1$$
$$5^x = 2 \Rightarrow x = \log_5 2$$

A soma das raízes é:

$$S = 1 + \log_5 2 = \log_5 5 + \log_5 2 = \log_5(5 \cdot 2) = \log_5 10$$

Gabarito: "b".

---

8. **(EEAR/2004)**

Na equação $2^{x+1} + 2^{-x} = 3$, é verdadeira a afirmativa:

a) Uma das raízes é 1.

b) A soma das raízes é um número inteiro positivo.

c) O produto das raízes é um número inteiro negativo.

d) O quociente das raízes pode ser zero (0).

Comentários

Resolvendo a equação:

$$2^{x+1} + 2^{-x} = 3$$

$$2 \cdot 2^x + \frac{1}{2^x} - 3 = 0$$

Fazendo $2^x = y$:

$$2y + \frac{1}{y} - 3 = 0$$

$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$

Resolvendo em y:

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = 1 \; ou \; \frac{1}{2}$$

Assim, temos como raízes:

$$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$$

Analisando as alternativas, vemos que o quociente das raízes pode ser zero.

Gabarito: "d".

---

9. (EEAR/2003)

Todo número real positivo pode ser escrito na forma 10^x. Tendo em vista que $8 \approx 10^{0,90}$, então o expoente x, tal que $125 = 10^x$, vale aproximadamente,

a) 1,90

b) 2,10

c) 2,30

d) 2,50

Comentários

Veja que:

$$8 \approx 10^{0,90} \Rightarrow 2^3 \approx 10^{0,90}$$

$$125 = 10^x \Rightarrow 5^3 = 10^x$$

Vamos multiplicar as duas equações e tentar encontrar o valor aproximado de x:

$$2^3 \cdot 5^3 \approx 10^{0,90} \cdot 10^x$$

$$(2 \cdot 5)^3 \approx 10^{0,90+x}$$

$$10^3 \approx 10^{0,90+x}$$

$$3 \approx 0,90 + x$$

$$x \approx 2,10$$

Gabarito: "b".

---

10. (EEAR/2003)

O valor da raiz da equação $2^{x+1} + 2^{x-1} = 40$ é um número

a) inteiro positivo

b) irracional

c) inteiro negativo

d) imaginário puro

Comentários

Fazendo $2^x = y$, temos:

$$2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} = 40$$

$$2y + \frac{y}{2} = 40$$

$$5y = 80$$

$$y = 16$$

$$\Rightarrow 2^x = 16 = 2^4$$

$$\therefore x = 4$$

Gabarito: "a".

---

11. (EEAR/2003)

Se $0,0625^{x+2} = 0,25$, então $(x+1)^6$ vale

a) $-\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{32}$

c) 64

d) $\frac{1}{64}$

Comentários

Reescrevendo os números na forma fracionária:

$$0,0625^{x+2} = 0,25 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^1$$

$$2x + 4 = 1 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Portanto:

$$(x+1)^6 = \left(-\frac{3}{2}+1\right)^6 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Gabarito: "d".

---

12. (EEAR/2002)

Resolvendo a equação $2^{2^{2x^2+1}} = 256$, concluímos que ela

a) não admite soluções reais

b) admite $\sqrt{\frac{3}{2}}$ como raiz.

c) admite duas soluções reais positivas.

d) admite duas soluções cuja soma é zero.

Comentários

$$2^{2^{2x^2+1}} = 256 \Leftrightarrow 2^{2^{2x^2+1}} = 2^8 = 2^{2^3}$$

$$2x^2+1 = 3 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Portanto, a equação admite duas soluções cuja soma é $-1+1=0$.

Gabarito: "d".

---

13. (EEAR/2002)

Se $8^{x-9} = 16^{\frac{x}{2}}$, então x é um número múltiplo de

a) 2

b) 3

c) 5

d) 7

Comentários

$$(2^3)^{x-9} = (2^4)^{\frac{x}{2}}$$

$$2^{3x-27} = 2^{2x}$$

$$3x - 27 = 2x$$

$$x = 27$$

27 é um número múltiplo de 3.

Gabarito: "b".

---

14. (EEAR/2001)

Se x e y são números reais que tornam simultaneamente verdadeiras as sentenças $2^{x+y} - 2 = 30$ e $2^{x-y} - 2 = 0$, então x^y é igual a:

a) 9

b) 8

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{9}$

Comentários

Da segunda equação, temos:

$$2^{x-y} = 2 \Rightarrow x - y = 1$$

Da primeira equação:

$$2^{x+y} = 32 = 2^5 \Rightarrow x + y = 5$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$x = 3 \; e \; y = 2$$

Logo:

$$x^y = 3^2 = 9$$

Gabarito: "a".

---

15. (EEAR/2001)

Resolvendo a equação $(0,0625)^{x-2} = 0,25$, obtemos x igual a:

a) $2/9$

b) $2/5$

c) $5/2$

d) $9/2$

Comentários

$$\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{x-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-4} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2x - 4 = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Gabarito: "c".

---

16. (ESA/2012)

O conjunto solução da equação exponencial $4^x - 2^x = 56$ é

a) $\{-7, 8\}$

b) $\{3, 8\}$

c) $\{3\}$

d) $\{2, 3\}$

e) $\{8\}$

Comentários

Substituindo $2^x = y$ e resolvendo a equação em y:

$$y^2 - y - 56 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2}$$

$$y = 8 \; ou \; y = -7$$

Como $2^x > 0$, temos:

$$2^x = 8 = 2^3 \therefore x = 3$$

Gabarito: "c".

17. (EEAR/2018)

Na função $f(x) = 27^{\frac{x+2}{x}}$, tal que $x \neq 0$, o valor de x para que $f(x) = 3^6$, é um número

a) divisível por 2

b) divisível por 3

c) divisível por 5

d) divisível por 7

Comentários

$$27^{\frac{x+2}{x}} = 3^6 \Rightarrow \left(3^3\right)^{\frac{x+2}{x}} = 3^6 \Rightarrow 3^{\frac{3x+6}{x}} = 3^6 \Rightarrow 3x + 6 = 6x \Rightarrow 3x = 6$$

$$\therefore x = 2$$

Gabarito: "a".

18. (EEAR/2015)

Se $f(x) = a^x + b$ é uma função tal que $f(0) = \frac{4}{3}$ e $f(-1) = 1$, então o valor de a é

a) 1

b) 2

c) $1/2$

d) $3/2$

Comentários

Usando os valores dados:

$$f(0) = \frac{4}{3} \Rightarrow a^0 + b = \frac{4}{3} \Rightarrow 1 + b = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$f(-1) = 1 \Rightarrow a^{-1} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Gabarito: "d".

19. (EEAR/2013)

Seja uma função real definida por $f(x) = (x+1) \cdot m^{x-1}$. Se $f(2) = 6$, então m é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 2.

d) 1.

Comentários

$$f(2) = 6 \Rightarrow (2+1) \cdot m^{2-1} = 6 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2$$

Gabarito: "c".

20. (EEAR/2007)

Sejam as funções f, g, h e t definidas, respectivamente, por $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$, $g(x) = \pi^x$, $h(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{-x}$ e $t(x) = \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x}$.

Dessas quatro funções, é(são) decrescente(s)

a) todas.

b) somente três.

c) somente duas.

d) somente uma.

Comentários

Analisando cada função:

$$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$$

Vemos que f é uma função exponencial de base $\frac{3}{2}>1$. Portanto, sabemos que é crescente, pois quanto maior x, maior fica $y=f(x)$.

$$g(x)=\pi^{x}$$

g é também uma função exponencial, de base $\pi>1$. Sabemos que é crescente, pois quanto maior o valor de x, maior será o valor de $y=g(x)$.

$$h(x)=\left(\sqrt{2}\right)^{-x}=\left[\left(\sqrt{2}\right)^{-1}\right]^{x}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x}$$

Assim, vemos que h é uma função exponencial de base $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$. Assim, quanto maior o valor de x, menor será o valor de $y=h(x)$, sendo, portanto, uma função decrescente.

$$t(x)=\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x}$$

Sabemos que:

$$\sqrt{10}>\sqrt{9}\Rightarrow\sqrt{10}>3\Rightarrow\frac{\sqrt{10}}{3}>1$$

Assim, t é uma função exponencial de base $\frac{\sqrt{10}}{3}>1$, e, portanto, quanto maior o valor de x, maior será o valor de $y=t(x)$, sendo t, desse modo, uma função crescente.

Portanto, dentre as alternativas, apenas h é decrescente.

Gabarito: “d”.

---

21. (EEAR/2001)

O conjunto imagem da função $f(x)=3^{x}-5$ é:

a) $\{f(x)\in\mathbb{R}|f(x)<-4\}$

b) $\{f(x)\in\mathbb{R}|f(x)>-4\}$

c) $\{f(x)\in\mathbb{R}|f(x)\geq-5\}$

d) $\{f(x)\in\mathbb{R}|f(x)>-5\}$

Comentários

Para todo x real, temos:

$$3^{x}>0\Rightarrow 3^{x}-5>-5\Rightarrow f(x)>-5$$

Portanto, a imagem de f é:

$$Im(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) > -5\}$$

Gabarito: "d".

---

22. (EEAR/2017)

A desigualdade $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ tem como conjunto solução

a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 5\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 5\}$

Comentários

Vamos reescrever a inequação:

$$\left(2^{-1}\right)^{3x-5} > \left(2^{-2}\right)^{x}$$

$$2^{5-3x} > 2^{-2x}$$

$$5 - 3x > -2x \Rightarrow 5 > x$$

$$\therefore x < 5$$

Portanto, a solução é

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x < 5\}$$

Gabarito: "b".

---

23. (EEAR/2002)

A solução da inequação $x^{2x-1} < x^3$, sendo $x > 0$ e $x \neq 1$, é o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} | \ldots\}$. Assinale a alternativa que completa corretamente os pontilhados:

a) $x < 2$

b) $x > 2$

c) $0 < x < 2$

d) $1 < x < 2$

Comentários

$$x^{2x-1} < x^3$$

Para $x > 1$:

$$2x - 1 < 3 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2$$

Temos como solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 2\}$$

Para $0 < x < 1$:

$$2x - 1 > 3 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \ (não\ convém)$$

Gabarito: "d".

---

24. (EEAR/2002)

Os valores de x para os quais $(0,8)^{4x^2-x} > (0,8)^{3(x+1)}$

a) $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

c) $x < -\frac{3}{2}$ ou $x > \frac{1}{2}$

d) $x < -\frac{1}{2}$ ou $x > \frac{3}{2}$

Comentários

Como a base é um número entre 0 e 1, temos que trocar o sinal de desigualdade, logo:

$$4x^2 - x < 3(x+1) \Rightarrow 4x^2 - 4x - 3 < 0$$

$$(2x-3)(2x+1) < 0$$

A solução dessa inequação é:

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

Gabarito: "b".

---

25. (ESA/2018)

O valor da expressão $A = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \log_8 32$ é:

a) -1

b) $5/3$

c) $2/3$

d) 0

e) 1

Comentários

$$A = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) + \log_8 32 = \log_2 2^{-1} + \log_{2^3} 2^5 = -1 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

Gabarito: "c".

---

26. (ESA/2018)

Adotando-se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, o valor de $\log_5 120$ será dado por:

a) $\frac{x+2y+1}{1-y}$

b) $\frac{x+2y}{1-y}$

c) $\frac{4x+3y}{x+y}$

d) $\frac{2x+y}{1-x}$

e) $\frac{2x+y+1}{1-x}$

Comentários

Vamos escrever o logaritmo na base 10 e tentar escrevê-lo em função de $\log 2$ e $\log 3$:

$$\log_5 120 = \frac{\log 120}{\log 5} = \frac{\log(3\cdot 4\cdot 10)}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{\log 3 + \log 4 + \log 10}{\log 10 - \log 2} = \frac{\log 3 + \log 2^2 + \log 10}{\log 10 - \log 2}$$

$$= \frac{\log 3 + 2\log 2 + \log 10}{\log 10 - \log 2} = \frac{y + 2x + 1}{1 - x}$$

Gabarito: "e".

27. (ESA/2016)

Utilizando os valores aproximados $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, encontramos para $\log \sqrt[3]{12}$ o valor de:

a) 0,33

b) 0,36

c) 0,35

d) 0,31

e) 0,32

Comentários

Reescrevendo o logaritmo:

$$\log \sqrt[3]{12} = \log(2^2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot (\log 2^2 + \log 3) = \frac{1}{3} \cdot (2\log 2 + \log 3)$$

Substituindo os valores:

$$\frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 0{,}30 + 0{,}48) = \frac{1}{3} \cdot 1{,}08 = 0{,}36$$

Gabarito: "b".

28. (ESA/2015)

Dados $\log 3 = a$ e $\log 2 = b$, a solução de $4^x = 30$ é:

a) $\frac{2a+1}{b}$

b) $\frac{a+2}{b}$

c) $\frac{2b+1}{a}$

d) $\frac{a+1}{2b}$

e) $\frac{b+2}{a}$

Comentários

Aplicando o logaritmo decimal na equação:

$$4^x = 30 \Leftrightarrow 2^{2x} = 30 \Leftrightarrow \log 2^{2x} = \log 30 \Leftrightarrow 2x \log 2 = \log(3 \cdot 10)$$

$$\therefore x = \frac{\log 3 + \log 10}{2\log 2} = \frac{a+1}{2b}$$

Gabarito: "d".

29. (ESA/2012)

Sabendo que $\log P = 3\log a - 4\log b + \frac{1}{2}\log c$, assinale a alternativa que representa o valor de P (dados: $a = 4, b = 2$ e $c = 16$)

a) 12

b) 52

c) 16

d) 24

e) 73

Comentários

$$\log P = 3\log a - 4\log b + \frac{1}{2}\log c$$

$$\log P = \log a^3 - \log b^4 + \log c^{\frac{1}{2}}$$

$$\log P = \log \frac{a^3 \cdot c^{\frac{1}{2}}}{b^4}$$

$$\Rightarrow P = \frac{a^3 \cdot c^{\frac{1}{2}}}{b^4} = \frac{4^3 \cdot 16^{\frac{1}{2}}}{2^4} = \frac{4^3 \cdot 4}{2^4} = \frac{2^8}{2^4} = 2^4 = 16$$

Gabarito: "c".

---

30. (ESA/2010)

Se $\log_2 3 = a$ e $\log_2 5 = b$, então o valor de $\log_{0,5} 75$ é

a) $a + b$

b) $-a + 2b$

c) $a - b$

d) $a - 2b$

e) $-a - 2b$

Comentários

$$\log_{0,5} 75 = \log_{2^{-1}}\left(3 \cdot 5^2\right) = \frac{1}{-1} \cdot \left(\log_2 3 + \log_2 5^2\right) = -(\log_2 3 + 2\log_2 5) = -a - 2b$$

Gabarito: "e".

---

31. (EEAR/2019)

Sejam m, n e b números reais positivos, com $b \neq 1$. Se $\log_b m = x$ e se $\log_b n = y$, então $\log_b(m \cdot n) + \log_b\left(\frac{n}{m}\right)$ é igual a

a) x

b) $2y$

c) $x + y$

d) $2x - y$

Comentários

$$\log_b(m \cdot n) + \log_b\left(\frac{n}{m}\right) = \log_b m + \log_b n + \log_b n - \log_b m = 2\log_b n = 2y$$

Gabarito: "b".

---

32. (EEAR/2017)

Se $\log 2 = 0,3$ e $\log 36 = 1,6$, então $\log 3 =$ ___.

a) 0,4

b) 0,5

c) 0,6

d) 0,7

Comentários

$$\log 36 = 1{,}6$$

$$\log 6^2 = 1{,}6$$

$$2\log(2 \cdot 3) = 1{,}6$$

$$\log 2 + \log 3 = 0{,}8$$

Substituindo o valor de $\log 2$:

$$0{,}3 + \log 3 = 0{,}8$$

$$\therefore \log 3 = 0{,}5$$

Gabarito: “b”.

---

33. (EEAR/2013)

Se $\log x + \log y = k$, então $\log x^5 + \log y^5$ é

a) $10k$

b) k^{10}

c) $5k$

d) k^5

Comentários

$$\log x^5 + \log y^5 = 5\log x + 5\log y = 5(\log x + \log y) = 5k$$

Gabarito: “c”.

---

34. (EEAR/2000)

Resolvendo o sistema $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ xy = 8 \end{cases}$, obtemos:

a) $S = \left\{\left(32, \frac{1}{4}\right)\right\}$

b) $S = \{(8, 1)\}$

c) $S = \{(2, 4)\}$

d) $S = \left\{\left(16, \frac{1}{2}\right)\right\}$

Comentários

Da primeira equação, temos:

$$\log_2 x + \log_{2^2} y = 4$$

$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y = 4$$

$$\log_2 x + \log_2 y^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\log_2 x\sqrt{y} = 4$$

$$\Rightarrow x\sqrt{y} = 2^4 = 16\ (eq.I)$$

Dividindo a $eq.I$ pela segunda equação do sistema:

$$\frac{\sqrt{y}}{y}=2\Rightarrow\sqrt{y}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{4}$$

Para esse valor de y, temos da segunda equação:

$$\Rightarrow x\cdot\frac{1}{4}=8\Rightarrow x=32$$

Portanto, a solução é o par ordenado $\left(32,\frac{1}{4}\right)$

Gabarito: "a".

---

35. (EEAR/2016)

O valor de x na equação $\log_{\frac{1}{3}}(\log_{27}3x)=1$ é

a) 1

b) 3

c) 9

d) 27

Comentários

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_{27}3x)=1$$

$$\log_{27}3x=\frac{1}{3}$$

$$3x=27^{\frac{1}{3}}=3$$

$$\therefore x=1$$

Gabarito: "a".

---

36. (ESPCEX/2017)

Resolvendo a equação $\log_3(x^2-2x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)=\log_3(x+1)$, obtém-se:

a) $S=\{-1\}$

b) $S=\{4,5\}$

c) $S=\{6\}$

d) $S=\emptyset$

e) $S=\{4\}$

Comentários

Vamos analisar a condição de existência dos logaritmos:

$$x^2-2x-3>0\Rightarrow(x-3)(x+1)>0\Rightarrow x<-1\ ou\ x>3$$

$$x-1>0\Rightarrow x>1$$

$$x+1>0\Rightarrow x>-1$$

Fazendo a interseção das condições, temos que $x>3$.

Agora, vamos resolver a equação:

$$\log_3(x^2-2x-3)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)=\log_3(x+1)$$

$$\log_3(x^2-2x-3)+\log_{3^{-1}}(x-1)=\log_3(x+1)$$
$$\log_3(x^2-2x-3)-\log_3(x-1)=\log_3(x+1)$$
$$\log_3\left(\frac{x^2-2x-3}{x-1}\right)=\log_3(x+1)$$
$$\frac{x^2-2x-3}{x-1}=x+1$$
$$x^2-2x-3=x^2-1$$
$$-2x-3=-1$$
$$-2x=2$$
$$\therefore x=-1$$

Note que a condição de existência diz que $x>3$, logo não temos solução nesse caso, ou seja,

$$S=\emptyset$$

Gabarito: D

---

37. (EEAR/2002)

Se o logaritmo de um número na base n é 4 e na base $n/2$ é 8, então esse número está no intervalo

a) $[1,50]$

b) $[51,100]$

c) $[101,200]$

d) $[201,500]$

Comentários

Seja x o número mencionado. Assim, temos:

$$\log_n x=4\Rightarrow x=n^4$$
$$\log_{\frac{n}{2}} x=8\Rightarrow x=\left(\frac{n}{2}\right)^8=\frac{(n^4)^2}{2^8}$$
$$x=\frac{x^2}{2^8}$$
$$\therefore x=2^8=256\in[201,500]$$

Gabarito: "d".

---

38. (EEAR/2014)

Se $f(x)=\log x$ e $a\cdot b=1$, então $f(a)+f(b)$ é igual a

a) 0

b) 1

c) 10

d) 100

Comentários

$$f(a)+f(b)=\log a+\log b=\log(a\cdot b)=\log 1=0$$

Gabarito: "a".

---

39. (EEAR/2013)

Para que exista a função $f(x) = \log(x - m)$, é necessário que x seja

a) maior que m.

b) menor que m.

c) maior ou igual a m.

d) menor ou igual a m.

Comentários

Devemos analisar a condição de existência:

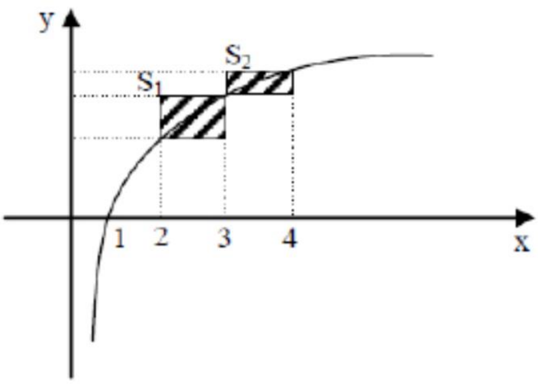
$$x - m > 0 \Rightarrow x > m$$

Gabarito: "a".

---

40. (EEAR/2002)

Na figura abaixo, a curva representa o gráfico da função $y = \log x$, para $x > 0$.



Assim, a soma das áreas das regiões hachuradas é igual a

a) $\log 2$

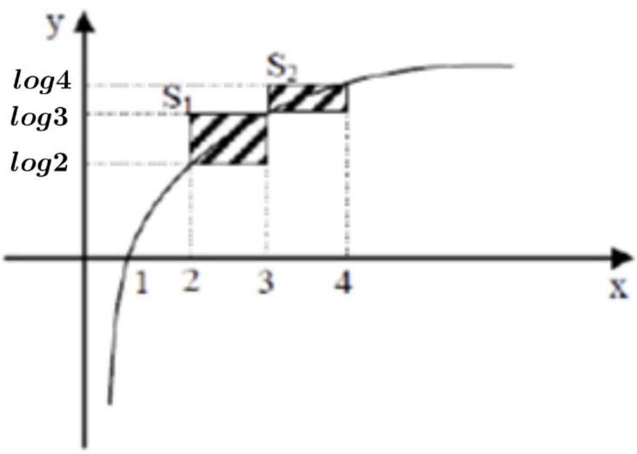
b) $\log 3$

c) $\log 4$

d) $\log 6$

Comentários

Observe a figura:



As áreas são dadas por:

$$S_1 = (\log 3 - \log 2)(3 - 2) = \log 3 - \log 2$$
$$S_2 = (\log 4 - \log 3)(4 - 3) = \log 4 - \log 3$$

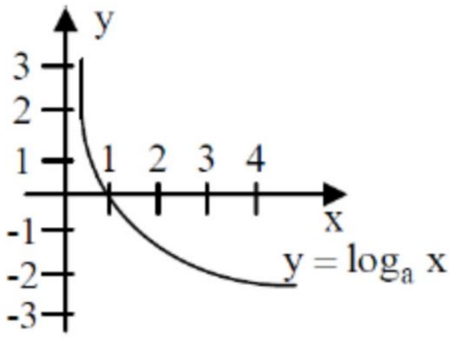
Somando as áreas:

$$S = S_1 + S_2 = \log 4 - \log 2 = \log 2^2 - \log 2 = 2\log 2 - \log 2 = \log 2$$

Gabarito: "a".

41. (EEAR/2003)

O gráfico abaixo representa a função $y = \log_a x$.



Dentro das condições de existência para que a operação de logaritmação seja sempre possível e de resultado único, a base a é

a) $0 < a < 1$

b) $a = 0$

c) $a > 1$

d) $a < 0$

Comentários

Perceba que o gráfico é de uma função decrescente. Assim, a base a deve ser um número entre 0 e 1:

$$0 < a < 1$$

Gabarito: "a".

42. (EEAR/2017)

As funções logarítmicas $f(x) = \log_{0,4} x$ e $g(x) = \log_4 x$ são, respectivamente,

a) crescente e crescente

b) crescente e decrescente

c) decrescente e crescente

d) decrescente e decrescente

Comentários

Note que a base da função f está entre 0 e 1, logo, ela é decrescente. Como a base de g é maior que 1, temos que ela é crescente.

Gabarito: "c".

43. (EEAR/2011)

Sejam as funções logarítmicas $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = \log_b x$. Se $f(x)$ é crescente e $g(x)$ é decrescente, então

a) $a > 1$ e $b < 1$

b) $a > 1$ e $0 < b < 1$

c) $0 < a < 1$ e $b > 1$

d) $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$

Comentários

Analisando a função f:

$$f(x) = \log_a x = y$$
$$\Rightarrow a^y = x$$

Se f é crescente, quanto maior y, maior será o valor de x. Portanto, perceba isso só ocorre quando $a > 1$.

Analisando a função g:

$$g(x) = \log_b x = y$$
$$\Rightarrow b^y = x$$

Se g é decrescente, então quanto maior y, menor deve ser o x. Isso só ocorre na última igualdade acima, se $0 < b < 1$. Logo:

$$a > 1 \; e \; 0 < b < 1$$

Gabarito: "b".

---

44. (EEAR/2002)

O número de pontos de intersecção dos gráficos das funções definidas por $f(x) = 3\log x$ e $g(x) = \log 9 + \log x$, sendo $x > 0$, é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

Comentários

Vamos verificar quantas raízes encontramos para $f(x) = g(x)$:

$$3\log x = \log 9 + \log x$$
$$2\log x = \log 3^2$$
$$\log x^2 = \log 9$$
$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Da condição de existência dos logaritmos, temos que $x > 0$, logo, existe apenas uma única solução, $x = 3$. Portanto, temos apenas 1 ponto de intersecção.

Gabarito: "b".

---

45. (ESA/2018)

Sejam $f: \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$, respectivamente. O valor de $f \ o \ g(2)$ é:

a) 0

b) 2

c) -2

d) 4

e) -4

Comentários

Sabemos que $f \ o \ g(x)$ é a função composta $f(g(x))$. Portanto:

$$f \ o \ g(2) = f(g(2))$$

Calculando primeiramente $g(2)$:

$$g(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$$

Assim:

$$f \ o \ g(2) = f(g(2)) = f(1) = \log_2 1 = 0$$

Gabarito: "a".

---

46. (ESA/2011)

Se $f(x) = \log_{\sqrt{5}} x^2$, com x real e maior que zero, então o valor de $f(f(5))$ é

a) $\frac{2\log 2}{1+\log 2}$

b) $\frac{\log 2}{\log 2+2}$

c) $\frac{5\log 2}{\log 2+1}$

d) $\frac{8\log 2}{1-\log 2}$

e) $\frac{5\log 2}{1-\log 2}$

Comentários

Calculando primeiramente $f(5)$:

$$f(5) = \log_{\sqrt{5}} 5^2 = \log_{\sqrt{5}} 25 = \frac{\log_5 25}{\log_5 \sqrt{5}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Agora, queremos:

$$f(f(5)) = f(4) = \log_{\sqrt{5}} 16$$

Fazendo a mudança do log para a base 10:

$$f(f(5)) = \log_{\sqrt{5}} 16 = \frac{\log 16}{\log \sqrt{5}} = \frac{\log 2^4}{\log 5^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\log 2}{\frac{1}{2}\log 5} = \frac{8\log 2}{\log 5} = \frac{8\log 2}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{8\log 2}{1-\log 2}$$

Gabarito: "d".

---

47. (EEAR/2006)

O menor número inteiro que satisfaz a inequação $\log_2(3x-5) > 3$ é um número

a) par negativo.

b) par positivo.

c) ímpar negativo.

d) ímpar positivo.

Comentários

Como a base é maior que 1, temos:

$$3x - 5 > 2^3 \Rightarrow 3x > 13 \Rightarrow x > \frac{13}{3}$$

O menor inteiro que satisfaz a condição acima é

$$x = \frac{15}{3} = 5$$

Que é um ímpar positivo.

Gabarito: "d".

---

48. (ESPCEX/2000)

Considere a soma $S = \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \log\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots + \log\left(\frac{n}{n-1}\right)$, em que n é um número natural. O menor valor de n para o qual $S > 1$ é

a) 20

b) 21

c) 22

d) 25

e) 29

Comentários

Aplicando as propriedades dos logaritmos na soma, temos:

$$S = \log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{4}{3}\right) + \log\left(\frac{5}{4}\right) + \cdots + \log\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$S = \log\left[\left(\frac{\cancel{3}}{2}\right)\left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\right)\dots\left(\frac{n}{\cancel{n-1}}\right)\right]$$

$$S = \log\left(\frac{n}{2}\right)$$

Para $S > 1$:

$$\log\left(\frac{n}{2}\right) > 1 \Rightarrow \frac{n}{2} > 10 \Rightarrow n > 20$$

Sendo n um número natural, o menor valor que satisfaz a condição acima é $n = 21$.

Gabarito: "b".

---

49. (EEAR/2003)

Se $x \in \mathbb{Z}$ e $f(x)$ é uma função tal que $f(p+q) = f(p) \cdot f(q)$ e $f(2) = 2$, então $f(0)$ e $f(-2)$ são, respectivamente,

a) $1\ e\frac{1}{2}$

b) $0\ e\frac{1}{2}$

c) 1 e 0

d) 1 e -4

Comentários

Considerando que a relação dada é para quaisquer $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$f(p+q) = f(p) \cdot f(q)$$

Portanto, substituindo $p = 2$ e $q = 0$, a equação continuará válida:

$$f(2+0) = f(2) \cdot f(0) \Rightarrow f(2) = f(2) \cdot f(0) \Rightarrow 2 = 2f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 1}$$

Assim, para calcular $f(-2)$, basta substituir $p = 2$ e $q = -2$:

$$f(2-2) = f(2) \cdot f(-2) \Rightarrow f(0) = f(2) \cdot f(-2) \Rightarrow 1 = 2f(-2) \Rightarrow \boxed{f(-2) = \frac{1}{2}}$$

Gabarito: “a”.

6. QUESTÕES NÍVEL 2

50. (AFA/2020)

Numa aula de Biologia da turma Delta do Colégio LOG, os alunos observam o crescimento de uma cultura de bactérias.

Inicialmente tem-se uma amostra com 3 bactérias. Após várias observações, eles concluíram que o número de bactérias dobra a cada meia hora.

Os alunos associaram as observações realizadas a uma fórmula matemática, que representa o número f de bactérias da amostra, em função de n horas.

A partir da fórmula matemática obtida na análise desses alunos durante a aula de Biologia, o professor de matemática da turma Delta propôs que eles resolvessem a questão abaixo, com $n \in \mathbb{N}$.

Se $g(n) = \log_2[f(n)]$, $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, então $\sum_{n=1}^{100} g(n)$ é um número cuja soma dos algarismos é

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

51. (AFA/2020)

Considere:

- a matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+2 & 1 & x+1 \end{pmatrix}$ cujo determinante é $\det A = M$
- a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cujo determinante é $\det B = N$; e
- $T = 3 - x$

Seja f uma função real definida por $f(x) = \log_T M + \log_T N$.

Sobre o domínio de f, é correto afirmar que:

a) é o conjunto dos números reais.

b) possui apenas elementos negativos.

c) não tem o número 2 como elemento.

d) possui três elementos que são números naturais.

52. (AFA/2020)

Considere a função real $g: \mathbb{R} \to A$ tal que $g(x) = -b - b^{-|x|}$; $b \in \mathbb{R}$ e $b > 1$; em que A é o conjunto imagem de g.

Com relação à função g, analise as alternativas e marque a verdadeira.

a) $\exists x \in \mathbb{R}$ para os quais $g(x) > -b$

b) A função g admite inversa.

c) O conjunto solução da equação $g(x) = -b - 1$ é unitário.

d) A função h definida por $h(x) = g(x) + b + 1$ é positiva $\forall x \in \mathbb{R}$

53. (AFA/2020)

Sejam as funções reais f, g e h tais que:

- f é função quadrática, cujas raízes são 0 e 4 e cujo gráfico tangencia o gráfico de g;
- g é tal que $g(x) = m$ com $m > 0$, em que m é a raiz da equação $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x^2+8x+3} = 128$;
- h é função afim, cuja taxa de variação é 1 e cujo gráfico intercepta o gráfico de f na maior das raízes de f

Considere os gráficos dessas funções num mesmo plano cartesiano.

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

(   ) A função real k definida por $k(x) = \frac{[f(x)]\cdot[h(x)]^5}{[g(x)]^2}$ é NÃO negativa se, e somente se $x \in]-\infty, 0]$

(   ) $h(x) < f(x) \leq g(x)$ se, e somente se $x \in]-\frac{4}{5}, 4[-\{2\}$

(   ) A equação $h(x) - f(x) = 0$ possui duas raízes positivas.

Sobre as proposições, tem-se que:

a) todas são verdadeiras.

b) apenas duas são verdadeiras.

c) apenas uma é verdadeira.

d) nenhuma delas é verdadeira.

54. (AFA/2019)

O domínio mais amplo da função real f definida por $f(x) = \sqrt{\log_a(x^2 - 3)}$, em que $a \in]0, 1[$, é

a) $[-2, 2]$

b) $]-2, 2[$

c) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

d) $\left[-2, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, 2\right]$

55. (AFA/2018)

Considere os números A, B e C a seguir.

$A = \log_{25} 27 \cdot \log_4 5 \cdot \log_3 \sqrt{2}$

$B = \log_n\left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\right)$ (n é natural maior que 2)

$C = \left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b}$ $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}_+^*$

A correta relação de ordem entre os números A, B e C é

a) $A < B < C$

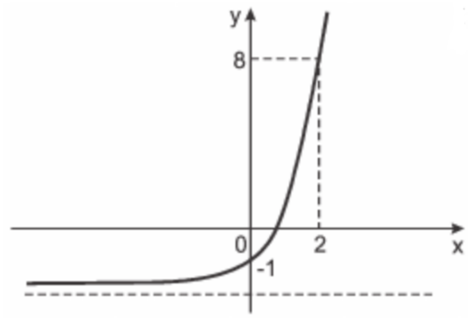
b) $B < A < C$

c) $B < C < A$

d) $C < A < B$

56. (AFA/2017)

A função real f definida por $f(x) = a.3^x + b$, sendo a e b constantes reais, está graficamente representada abaixo.



Pode-se afirmar que o produto $(a.b)$ pertence ao intervalo real

a) $[-4, -1[$

b) $[-1, 2[$

c) $[2, 5[$

d) $[5, 8]$

57. (AFA/2016)

Considere a função real f definida por $f(x) = a^x$ com $a \in]0, 1[$.

Sobre a função real g definida por $g(x) = |-b - f(x)|$ com $b \in]-\infty, -1[$, é correto afirmar que

a) possui raiz negativa e igual a $\log_a(-b)$

b) é crescente em todo o seu domínio.

c) possui valor máximo.

d) é injetora.

58. (AFA/2015)

Considere a função real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x - b$, em que $0 < a < 1$ e $b > 1$.

Analise as alternativas abaixo e marque a FALSA.

a) Na função f, se $x > 0$, então $-b < f(x) < 1 - b$.

b) $Im(f)$ contém elementos menores que o número real $-b$.

c) A raiz da função f é um número negativo.

d) A função real h, definida por $h(x) = f(|x|)$ não possui raízes.

59. (AFA/2014)

Pesquisas realizadas verificaram que, no planeta Terra, no início do ano de 2013, a população de pássaros da espécie A era 12 vezes a população de pássaros da espécie B.

Sabe-se que a população de pássaros da espécie A cresce a uma taxa de 5% no ano, enquanto que a população de pássaros da espécie B cresce a uma taxa de 20% ao ano.

Com base nesses dados, é correto afirmar que, essas duas populações de pássaros serão iguais

(Considere: $log7 = 0,85$; $log6 = 0,78$; $log2 = 0,3$)

a) no 1º semestre do ano de 2034.

b) no 2º semestre do ano de 2034.

c) no 1º semestre do ano de 2035.

d) no 2º semestre do ano de 2035.

60. (AFA/2013)

No plano cartesiano, seja $P(a,b)$ o ponto de interseção entre as curvas dadas pelas funções reais f e g definidas por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

É correto afirmar que

a) $a = \log_2\left(\frac{1}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)}\right)$

b) $a = \log_2(\log_2 a)$

c) $a = \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a}\right)\right)$

d) $a = \log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right)$

61. (AFA/2012)

Considere uma aplicação financeira denominada UNI que rende juros mensais de $M = \log_{27} 196$ e outra aplicação financeira denominada DUNI que rende juros mensais de $N = -\log_{\frac{1}{9}} 14$.

A razão entre os juros mensais M e N, nessa ordem, é

a) 70%

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{3}$

d) 80%

62. (AFA/2011)

Dada a expressão $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-x^2}$, em que x é um número real qualquer, podemos afirmar que

a) o maior valor que a expressão pode assumir é 3.

b) o menor valor que a expressão pode assumir é 3.

c) o menor valor que a expressão pode assumir é $\frac{1}{81}$.

d) o maior valor que a expressão pode assumir é $\frac{1}{27}$.

63. (AFA/2011)

Um médico, apreciador de logaritmos, prescreveu um medicamento a um de seus pacientes, também apreciador de logaritmo, conforme a seguir.

Tomar x gotas do medicamento α de 8 em 8 horas. A quantidade de gotas y diária deverá ser calculada pela fórmula $\log_8 y = \log_2 6$

Considerando $\log 2 = \frac{3}{10}$ e $\log 3 = 0,48$, é correto afirmar que $\log_2 x$ é um número do intervalo

a) [3,4[

b) [4,5[

c) [5,6[

d) [6,7[

64. (AFA/2010 - Adaptada)

Sendo D o maior domínio possível, sobre a função real $f: D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + \log_2(x^2)$, é INCORRETO afirmar que f é

a) par

b) sobrejetora

c) crescente em $[1, +\infty[$

d) injetora

65. (AFA/2010)

Sejam as funções reais dadas por $f(x) = 2^{2x+1}$ e $g(x) = 3^{x+1}$. Se $b \in \mathbb{R}$ tal que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2g(b)$ e $p = \log_3 b$, então sobre p é correto afirmar que:

a) não está definido

b) é positivo e menor que 1

c) é negativo e menor que 1

d) é positivo e maior que 1

66. (EFOMM/2021)

Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = \begin{cases} 2^x, x \geq 1 \\ x, x < 1 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x \geq 0 \\ x^2 - 1, x < 0 \end{cases}$

Sendo assim, pode-se dizer que $fog(x)$ é definida por:

a) $fog(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x > 0 \\ 2^{1-x^2}, x = 0 \\ x^2 - 1, -\sqrt{2} < x < 0 \\ 2^{x^2-1}, x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$

b) $fog(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x = 0 \\ 2^{1-x^2}, x > 0 \\ 1 - x^2, -\sqrt{2} \leq x < 0 \\ 2^{x^2-1}, x < -\sqrt{2} \end{cases}$

c) $fog(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x > 0 \\ 2^{1-x^2}, x = 0 \\ x^2 - 1, -\sqrt{2} < x \leq 0 \\ 2^{x^2-1}, x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$

d) $fog(x) = \begin{cases} 1 - x^2, 0 < x < 1 \\ 2^{1-x^2}, x = 0 \\ x^2 - 1, -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \\ 2^{x^2-1}, x < -\sqrt{2} \end{cases}$

e) $fog(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x \geq 1 \\ 2^{1-x^2}, 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 1, -\sqrt{2} \leq x < 0 \\ 2^{x^2-1}, x < -\sqrt{2} \end{cases}$

67. (EN/2021)

Assinale a opção que apresenta uma solução, em x e y, do sistema $\begin{cases} log_5 x + 3^{log3\ y} = 7 \\ x^y = 5^{12} \end{cases}$.

a) $x = 125$ e $y = 3$

b) $x = 3$ e $y = 125$

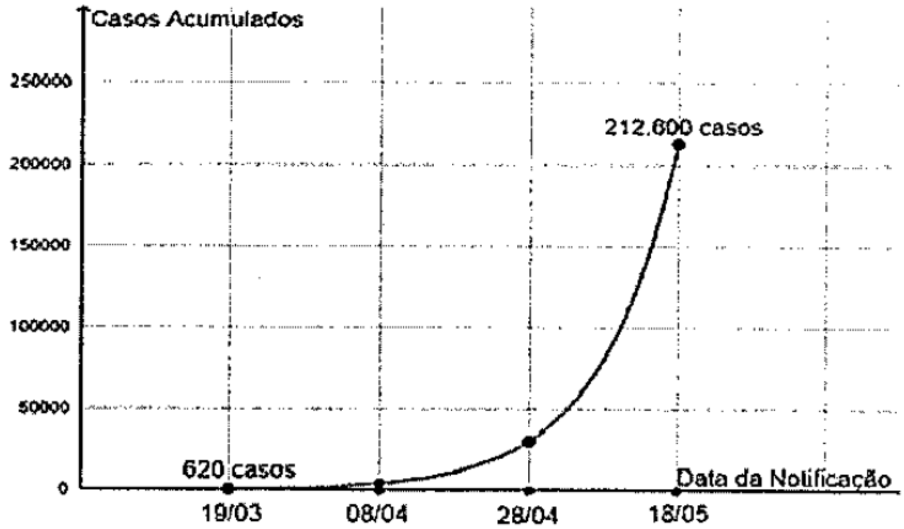
c) $x = 1625$e $y = 3$

d) $x = 4$ e $y = 125$

e) $x = 3$ e $y = 4$

68. (EN/2021)

Um determinado país com 220 milhões de habitantes foi acometido por um vírus X. Verificou-se que, no primeiro ano do aparecimento do vírus na população, havia 620 casos acumulados do vírus X do dia 19 de março e constatou-se que a progressão de contaminação do vírus era constante a cada 20 dias até o dia 18 de maio, conforme gráfico ilustrativo abaixo. Considerando que essa progressão continuou constante até o dia 27 de junho, a porcentagem da população nessa data, por casos acumulados, que foi contaminada é de aproximadamente:



a) 1,7%

b) 2,4%

c) 3,5%

d) 4,7%

e) 5,6%

69. (EFOMM/2020)

Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que

$$f(m \cdot n) = n \cdot f(m) + m \cdot f(n)$$

para todos os naturais m e n. Se $f(20) = 3$, $f(14) = 1,25$ e $f(35) = 4$, então, o valor de $f(8)$ é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

70. (EFOMM/2018)

Seja $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(1) = 2$ e $f(xy) = -\frac{f(-y)}{x}, \forall x, y \in \mathbb{R}^*$. Então, o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ será

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

e) 1

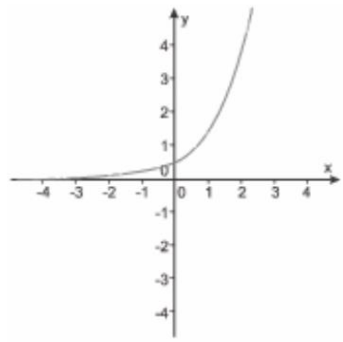
71. (EFOMM/2016)

Um aluno precisa construir o gráfico da função real f, definida por $f(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$. Ele percebeu que a função possui a seguinte característica:

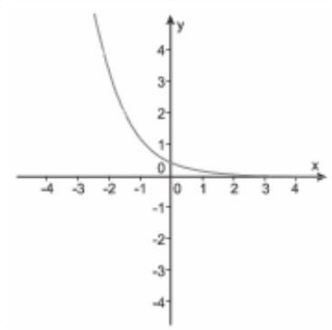
$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^x}{2} = f(x).$$

Assinale a alternativa que representa o gráfico dessa função.

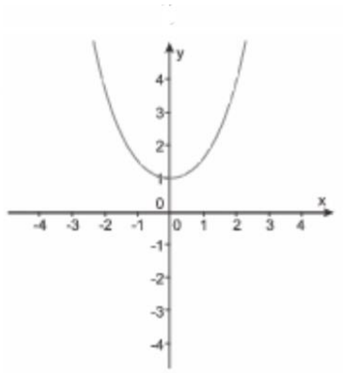
a)



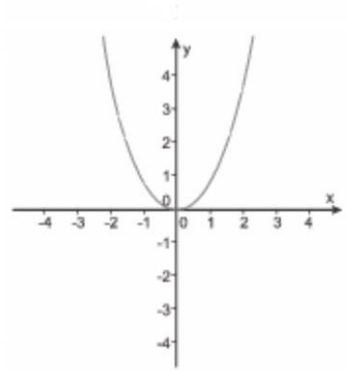
b)



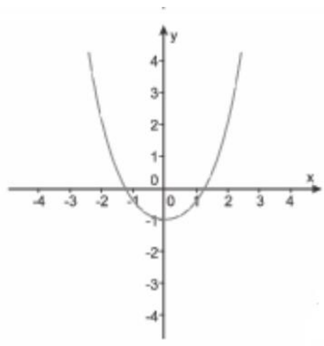
c)



d)



e)



72. (EFOMM/2015)

Os números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q. Nesse caso, é correto afirmar que a sequência $\log a_1, \log a_2, \ldots, \log a_n$ forma

a) uma progressão geométrica crescente, se $q > 1$.

b) uma progressão aritmética crescente, se $q > 1$.

c) uma progressão geométrica decrescente, se $0 < q < 1$.

d) uma progressão aritmética crescente, se $0 < q < 1$.

e) uma progressão aritmética crescente, desde que $q > 0$.

73. (EFOMM/2013)

O número de bactérias B, numa cultura, após t horas, é $B = B_0 e^{kt}$, onde k é um a constante real. Sabendo-se que o número inicial de bactérias é 100 e que essa quantidade duplica em $\tau = \frac{In\,2}{2}$ horas, então o número N de bactérias, após 2 horas, satisfaz:

a) $800 < N < 1600.$

b) $1600 < N < 8100.$

c) $8100 < N < 128000.$

d) $128000 < N < 256000.$

e) $256000 < N < 512000.$

74. (EFOMM/2010)

Sabendo que o $\log_{30} 3 = a$ e $\log_{30} 5 = b$, que opção representa $\log_{10} 2$?

a) $\frac{1-a-b}{2+a}$

b) $\frac{1-a-b}{a-1}$

c) $\frac{1-a-b}{1+a}$

d) $\frac{1-a-b}{2-a}$

e) $\frac{1-a-b}{1-a}$

75. (EFOMM/2009)

Numa embarcação é comum ouvirem-se determinados tipos de sons. Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um desses sons esteja relacionado com a equação logarítmica $\beta = 12 + log_{10} I$, $em\ que\ \beta$ é medido em decibéis e I em watts por metro quadrado. Qual é a razão $\frac{I_1}{I_2}$, sabendo-se que I_1 corresponde ao ruído sonoro de 8 decibéis de uma aproximação de dois navios e que I_2 corresponde a 6 decibéis no interior da embarcação?

a) 0,1

b) 1

c) 10

d) 100

e) 1000

76. (EFOMM/2006)

Se $\log a = 0,4771$ e $\log b = 0,3010$, então $\log \frac{a}{b}$ é

a) $0,1761$

b) $-0,1761$

c) $0,7781$

d) $0,8239$

e) $-0,8239$

77. (EFOMM/2005)

Determine o domínio da função real $y = \sqrt{(\log_{\frac{1}{2}} x + 2)}$

a) $D = \{x \in \mathbb{R}/0 < x \leq 4\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R}/0 > x \geq 4\}$

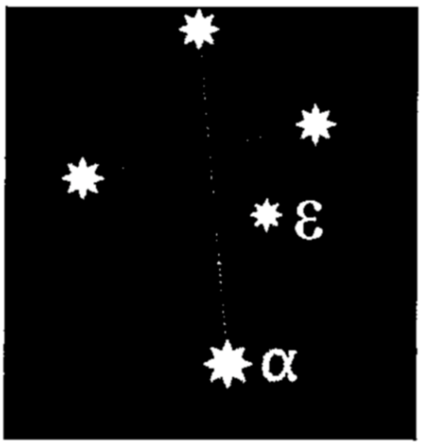
c) $D = \{x \in \mathbb{R}/0 < x \leq 2\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}/0 > x \geq 2\}$

e) $D = \{x \in \mathbb{R}/x < 4\}$

78. (Escola Naval/2019)

O Cruzeiro do Sul é uma das mais importantes constelações para os povos no hemisfério sul. Ela é muito útil na navegação e está presente em nossa Bandeira Nacional, no Brasão Nacional, assim como em símbolos de colégios, agremiações etc. Dentre as cinco principais estrelas há a Alpha Crucis (α), a mais brilhante, e a Epsilon Crucis (ε), a menos brilhante dentre as principais que formam uma cruz, conforme figura abaixo.



Pode-se medir, de forma aproximada, a distância até uma estrela pela equação $M_d = -5 + 5 \cdot \log_{10} \frac{D}{3,3}$, tal que M_d é o módulo de distância de uma estrela (uma medida de brilho na Astronomia) e D é a distância, em anos-luz. Considerando $M_d = 5$ para Alpha Crucis e $M_d = 4,2$ para Epsilon Crucis, D_a a distância até Alpha Crucis e D_e a distância até Epsilon Crucis, ambas em anos-luz, pode-se afirmar, de forma aproximada, que:

Dados: $log_{10}3 = 0,48$ e $log_{10}23 = 1,36$

a) $D_e > D_a$

b) $D_a + D_e = 557,7$

c) $D_a = 330$

d) $D_e = 69$

e) $D_a = 100$

79. (Escola Naval/2018)

Sejam f e g funções reais tais que g é a inversa de f. Se f é definida como $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, calcule $e^{g\left(\frac{1}{2}\right)}$ e assinale a opção correta.

a) 2

b) $\sqrt{2}$

c) 3

d) $\sqrt{3}$

e) $-\sqrt{2}$

80. (Escola Naval/2015)

O elemento químico Califórnio, Cf^{251}, emite partículas alfa, se transformando no elemento Cúrio, Cm^{247}. Essa desintegração obedece à função exponencial $N(t) = N_o e^{-at}, onde$ N(t) é quantidade de partículas de Cf^{251} no instante t em determinada amostra; N_0 é a quantidade de partículas no instante inicial; e α é uma constante, chamada constante de desintegração. Sabendo que em 898 anos a concentração de Cf^{251} é reduzida à metade, pode-se afirmar que o tempo necessário para que a quantidade de Cf^{251} seja apenas 25% da quantidade inicial está entre

a) 500 e 1000 anos.

b) 1000 e 1500 anos.

c) 1500 e 2000 anos.

d) 2000 e 2500 anos.

e) 2500 e 3000 anos.

81. (Escola Naval/2014)

Considere as funções reais $f(x) = \frac{100}{1+2^{-x}}$ e $g(x) = 2^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Qual é o valor da função composta $(g\ o\ f^{-1})(90)$?

a) 1

b) 3

c) 9

d) $\frac{1}{10}$

e) $\frac{1}{3}$

82. (Escola Naval/2014)

Sabendo que $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10, qual é o domínio da função real de variável real $f(x) = \frac{arccos^3(log\frac{x}{10})}{\sqrt{4x-x^3}}$?

a) $]0,2[$

b) $]\frac{1}{2},1[$

c) $]0,1]$

d) $[1,2[$

e) $[\frac{1}{2},2[$

83. (Escola Naval/2014)

Após acionado o flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, que armazena uma carga elétrica dada por $Q(t) = Q_0\left(1 - e^{\frac{-t}{2}}\right)$, onde Q_0 é capacidade limite de carga e t é medido em segundos. Qual o tempo, em segundos, para recarregar o capacitor de 90% da sua capacidade limite?

a)$\ell n10$

b)$\ell n(10)^2$

c)$\sqrt{\ell n10}$

d)$\sqrt{(\ell n10)^{-1}}$

e)$\sqrt{\ell n(10)^2}$

84. (Escola Naval/2014)

Considere as funções reais $f(x) = \frac{x}{2} - \ell nx$ e $g(x) = \frac{x}{2} - (\ell nx)^2$ onde ℓnx expressa o logaritmo de x na base neperiana e $(e \cong 2,7)$. Se P e Q são os pontos de interseção dos gráficos de f e g, podemos afirmar que o coeficiente angular da reta que passa por P e Q é

a) $\frac{e+1}{2(e-3)}$

b) $e + 1$

c) $\frac{e-1}{2(e+1)}$

d) $2e + 1$

e) $\frac{e-3}{2(e-1)}$

85. (Escola Naval/2013)

Considere f uma função real de variável real tal que:

1. $f(x + y) = f(x)f(y)$

2. $f(1) = 3$

3. $f(\sqrt{2}) = 2$

Então $f(2 + 3\sqrt{2})$ é igual a

a) 108

b) 72

c) 54

d) 36

e) 12

86. (Escola Naval/2013)

Sabendo que $b = \sec^3\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \cdots\right)$ então, o valor de $\log_2|b|$ é

a) 8

b) 4

c) 3

d) 1

e) 0

87. (Escola Naval/2013)

Sabendo que $b=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\cdots\right)$ então o valor de $\log_2|b|$ é

a) 1

b) 0

c) -1

d) -2

e) 3

88. (Escola Naval/2013)

Qual é o domínio da função real de variável real, definida por $f(x)=\ln(x^2-3x+2)+\sqrt{e^{2x-1}-1}$?

a) $[1,2[$

b) $[\frac{1}{2},2[\cup]3,+\infty[$

c) $]2,+\infty[$

d) $[\frac{1}{2},1[\cup]2,+\infty[$

e) $[\frac{1}{2},+\infty[$

89. (Escola Naval/2012)

Sejam A e B conjuntos de números reais tais que seus elementos constituem, respectivamente, o domínio da função $f(x)=\ln(2+x+3|x|-|x+1|)$ e a imagem da função $g(x)=-2^{\frac{\sqrt{2(x+|x-2|)}}{2}}$. Pode-se afirmar que

a) $A=B$

b) $A\cap B=\emptyset$

c) $A\supset B$

d) $A\cap B=\mathbb{R}_+$

e) $A-B=\mathbb{R}\_$

GABARITO

50. d

51. c
52. c
53. d
54. d
55. b
56. a
57. a
58. b
59. b
60. a
61. c
62. c
63. d
64. d
65. a
66. a
67. c
68. d
69. a
70. b
71. c
72. b
73. b
74. e
75. d
76. a
77. a
78. c
79. d
80. c
81. b
82. d
83. b
84. e
85. b
86. c
87. c
88. d
89. c

RESOLUÇÃO

50. (AFA/2020)

Numa aula de Biologia da turma Delta do Colégio LOG, os alunos observam o crescimento de uma cultura de bactérias.

Inicialmente tem-se uma amostra com 3 bactérias. Após várias observações, eles concluíram que o número de bactérias dobra a cada meia hora.

Os alunos associaram as observações realizadas a uma fórmula matemática, que representa o número f de bactérias da amostra, em função de n horas.

A partir da fórmula matemática obtida na análise desses alunos durante a aula de Biologia, o professor de matemática da turma Delta propôs que eles resolvessem a questão abaixo, com $n \in \mathbb{N}$.

Se $g(n) = \log_2[f(n)]$, $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, então $\sum_{n=1}^{100} g(n)$ é um número cuja soma dos algarismos é

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

Comentários

O crescimento da população de bactérias é dado pela equação funcional $f(n+0{,}5) = 2 \cdot f(n)$, que tem a forma geral $f(n+\tau) = c \cdot f(n)$. A solução de uma equação desse tipo é uma função exponencial, a saber: $f(n) = f(0) \cdot c^{\frac{n}{\tau}}$. No nosso caso:

$f(n+1) = f(n+0{,}5+0{,}5) = 2f(n+0{,}5) = 4f(n) \Rightarrow f(n) = 3 \cdot 4^n$. Logo:

$$S = \sum_{n=1}^{100} g(n) = \sum_{n=1}^{100} \log_2[f(n)] = \sum_{n=1}^{100} \log_2[3 \cdot 4^n] = \sum_{n=1}^{100} \log_2 3 + \log_2 4^n =$$

$$= 100 \log_2 3 + \sum_{n=1}^{100} 2n = 100 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} + 2 \cdot \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 100 \cdot \frac{0{,}48}{0{,}30} + 10100 = 10260$$

A soma dos algarismos de S é $1 + 0 + 2 + 6 + 0 = 9$.

Gabarito: "d"

---

51. (AFA/2020)

Considere:

- **a matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+2 & 1 & x+1 \end{pmatrix}$ cujo determinante é $\det A = M$**

- a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cujo determinante é $\det B = N$; e
- $T = 3 - x$

Seja f uma função real definida por $f(x) = \log_T M + \log_T N$.

Sobre o domínio de f, é correto afirmar que:

a) é o conjunto dos números reais.

b) possui apenas elementos negativos.

c) não tem o número 2 como elemento.

d) possui três elementos que são números naturais.

Comentários

Podemos calcular M expandindo Laplace na segunda linha, que tem zeros:

$$M = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+2 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ x+2 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^2 + (x+2) = x^2 + 3x + 3$$

Calculamos N de modo semelhante:

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cdots = 1$$

Para $f(x)$ estar bem definida, devemos garantir que: $T, M, N > 0, T \neq 1$. Já temos que $N = 1 > 0$. Impomos então:

$$\star: \begin{cases} x^2 + 3x + 3 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ 3 - x \neq 1 \end{cases}$$

Resolvendo $\star$:

$$x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \text{ qualquer que seja } x \in \mathbb{R}.$$

Solução: $x < 3, x \neq 2$

Observação: perceba que, se o candidato lesse as alternativas antes de partir para as contas de maneira automática, ele marcaria diretamente a alternativa visto que sua verdade é de fácil verificação.

Gabarito: "c".

---

52. (AFA/2020)

Considere a função real $g: \mathbb{R} \to A$ tal que $g(x) = -b - b^{-|x|}$; $b \in \mathbb{R}$ e $b > 1$; em que A é o conjunto imagem de g.

Com relação à função g, analise as alternativas e marque a verdadeira.

a) $\exists x \in \mathbb{R}$ para os quais $g(x) > -b$

b) A função g admite inversa.

c) O conjunto solução da equação $g(x) = -b - 1$ é unitário.

d) A função h definida por $h(x) = g(x) + b + 1$ é positiva $\forall x \in \mathbb{R}$

Comentários

Alternativa a incorreta. $g(x) > -b \Leftrightarrow -b - b^{-|x|} > -b \Leftrightarrow b^{-|x|} < 0$, absurdo pois a imagem de uma função exponencial é positiva.

Alternativa b incorreta. $g(-x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde g não é injetora e, portanto, não admite inversa.

Alternativa c correta. $g(x) = -b - 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Alternativa d incorreta. $h(0) = g(0) + b + 1 = -b - 1 + b + 1 = 0$, e é falso que $0 > 0$.

Gabarito: "c".

---

53. (AFA/2020)

Sejam as funções reais f, g e h tais que:

- **f é função quadrática, cujas raízes são 0 e 4 e cujo gráfico tangencia o gráfico de g;**
- **g é tal que $g(x) = m$ com $m > 0$, em que m é a raiz da equação $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x^2+8x+3} = 128$;**
- **h é função afim, cuja taxa de variação é 1 e cujo gráfico intercepta o gráfico de f na maior das raízes de f**

Considere os gráficos dessas funções num mesmo plano cartesiano.

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) A função real k definida por $k(x) = \frac{[f(x)]\cdot[h(x)]^5}{[g(x)]^2}$ é NÃO negativa se, e somente se $x \in]-\infty, 0]$

( ) $h(x) < f(x) \leq g(x)$ se, e somente se $x \in]-\frac{4}{5}, 4[-\{2\}$

( ) A equação $h(x) - f(x) = 0$ possui duas raízes positivas.

Sobre as proposições, tem-se que:

a) todas são verdadeiras.

b) apenas duas são verdadeiras.

c) apenas uma é verdadeira.

d) nenhuma delas é verdadeira.

Comentários

Das duas primeiras informações se extrai que $f(2) = f\left(\frac{0+4}{2}\right) = m$. Vamos calcular m:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2m^2+8m+3} = 128 \Leftrightarrow (-2m^2 + 8m + 3) \cdot \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 128 \Leftrightarrow 2m^2 - 8m - 3 = 7$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow m = 5 \; ou \; m = -1.$$

Como $m > 0$, temos $m = 5$. Portanto, temos que $f(x) = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 4)$ e $f(2) = 5$, donde:

$$5 = f(2) = a \cdot 2 \cdot (-2) = -4a \Rightarrow a = -\frac{5}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{5}{4} \cdot x(x-4) = -\frac{5}{4}x^2 + 5x$$

Pela terceira informação, temos que $h(x) = x + t$, sendo $h(4) = 0$. Logo, $h(x) = x - 4$. Vamos agora analisar os itens:

I) Falso. $k(x) = \frac{[f(x)]\cdot[h(x)]^5}{[g(x)]^2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \cdot x \cdot (x-4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 4 \; ou \; x \leq 0.$

II) Falso. $h(x) < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x - 4 < -\frac{5}{4}x^2 + 5x \leq 5 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{5}{4}x^2 - 4x - 4 < 0 \\ \frac{5}{4}x^2 - 5x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Delta_1 = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot (-4) = 36 \Rightarrow x_1 = 4 \; ou \; -\frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{4}{5} < x < 4$$

$$\Delta_2 = (-5)^2 - 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot 5 = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

Logo, o item é falso, uma vez que $x = 2$ também vale.

III) Falso. As raízes não são ambas positivas.

$$h(x) = f(x) \Leftrightarrow x - 4 = -\frac{5}{4}x(x-4) \Leftrightarrow x = 4 \; ou \; 1 = -\frac{5}{4}x \Leftrightarrow x = 4 \; ou \; x = -4/5$$

Gabarito: "d"

---

54. (AFA/2019)

O domínio mais amplo da função real f definida por $f(x) = \sqrt{\log_a(x^2 - 3)}$, em que $a \in]0, 1[$, é

a) $[-2, 2]$

b) $]-2, 2[$

c) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

d) $[-2, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, 2]$

Comentários

Inicialmente, vamos estabelecer a condição de existência do logaritmo:

$$a > 0 \ e \ a \neq 1$$

$$x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x^2 > 3 \Rightarrow x > \sqrt{3} \ ou \ x < -\sqrt{3} \ \ (I)$$

Analisando a condição de existência do radical:

$$\log_a(x^2 - 3) \geq 0$$

Como a base é $0 < a < 1$, devemos ter:

$$x^2 - 3 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \ \ (II)$$

Portanto fazendo a interseção de (I) com (II):

$$x \in \left[-2, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, 2\right]$$

Gabarito: “d”

---

55. (AFA/2018)

Considere os números A, B e C a seguir.

$$A = \log_{25} 27 \cdot \log_4 5 \cdot \log_3 \sqrt{2}$$

$$B = \log_n\left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\right) \quad (\text{n é natural maior que 2})$$

$$C = \left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b} \quad \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}_+^*$$

A correta relação de ordem entre os números A, B e C é

a) $A < B < C$

b) $B < A < C$

c) $B < C < A$

d) $C < A < B$

Comentários

$$A = \frac{\log 3^3}{\log 5^2} \cdot \frac{\log 5}{\log 2^2} \cdot \frac{\log 2^{\frac{1}{2}}}{\log 3} = \frac{3 \log 3}{2 \log 5} \cdot \frac{\log 5}{2 \log 2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \log 2}{\log 3} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

$$B = \log_n\left(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}\right) \Rightarrow n^B = \log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} \Rightarrow n^{n^B} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n^2}}$$

$$\Rightarrow n^B = \frac{1}{n^2} = n^{-2}$$

$$\Rightarrow B = -2.$$

$$\log C = \log c \cdot \log\left(\frac{a}{b}\right) + \log a \cdot \log\left(\frac{b}{c}\right) + \log b \cdot \log\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \log c \cdot (\log a - \log b) + \log a \cdot (\log b - \log c) + \log b \cdot (\log c - \log a) = 0$$

$$\Rightarrow C = 1.$$

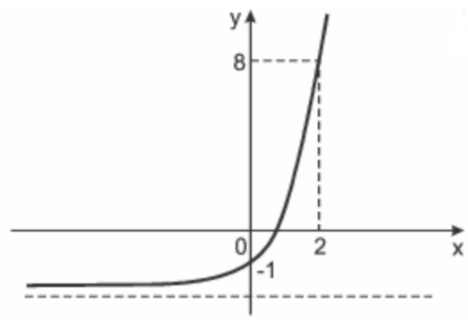
Logo: $B = -2 < A = \frac{3}{8} < C = 1$

Gabarito: "b"

---

56. (AFA/2017)

A função real f definida por $f(x) = a.3^x + b$, sendo a e b constantes reais, está graficamente representada abaixo.



Pode-se afirmar que o produto $(a.b)$ pertence ao intervalo real

a) $[-4, -1[$

b) $[-1, 2[$

c) $[2, 5[$

d) $[5, 8]$

Comentários

Do gráfico, temos que:

$$\begin{cases} f(2) = 8 \Rightarrow a.3^2 + b = 8 \Rightarrow 9.a + b = 8 \\ f(0) = -1 \Rightarrow a.3^0 + b = -1 \Rightarrow a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow 8a = 9 \Rightarrow \boxed{a = \frac{9}{8}} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{17}{8}}$$

Portanto:

$$a \cdot b = \frac{9}{8} \cdot \left(-\frac{17}{8}\right) = -\frac{153}{64}$$

$$\Rightarrow -4 \leq a \cdot b < -1$$

Gabarito: "a"

---

57. (AFA/2016)

Considere a função real f definida por $f(x) = a^x$ com $a \in]0, 1[$.

Sobre a função real g definida por $g(x) = |-b - f(x)|$ com $b \in]-\infty, -1[$, é correto afirmar que

a) possui raiz negativa e igual a $\log_a(-b)$

b) é crescente em todo o seu domínio.

c) possui valor máximo.

d) é injetora.

Comentários

a) verdadeira. Primeiramente, observe que $\log_a(-b)$ está bem definido, uma vez que $1 \neq a > 0$ e

$b \in]-\infty, -1[\Rightarrow -b > 0$. Além disso, $g(\log_a(-b)) = \left|-b - a^{\log_a(-b)}\right| = |-b - (-b)| = 0$.

Logo $\log_a(-b)$ é raiz. Para mostrar que esse número é negativo, perceba que (inverte-se a desigualdade uma vez que $0 < a < 1$):

$$\log_a(-b) < 0 = \log_a 1 \Leftrightarrow -b > 1 \Leftrightarrow b < -1, \text{ o que é verdadeiro.}$$

b) falsa. g não é crescente em todo o domínio porque a função dentro do módulo é estritamente monótona e g admite raiz.

c) falsa. A medida que x vai para $-\infty$, $f(x) = a^x$ vai para ∞ e portanto $g(x)$ vai para $|-b - \infty| = \infty$. Logo, não admite máximo.

d) falsa. Não é injetora. Tome por exemplo $x_1 \neq x_2$ com $f(x_1) = -\frac{b}{2}$ e $f(x_2) = -\frac{3b}{2}$. Teremos $g(x_1) = g(x_2)$. Tais x_1 e x_2 existem porque $-\frac{b}{2}$ e $-\frac{3b}{2}$ são positivos e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^\star$.

Gabarito: "a".

---

58. (AFA/2015)

Considere a função real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x - b$, em que $0 < a < 1$ e $b > 1$.

Analise as alternativas abaixo e marque a FALSA.

a) Na função f, se $x > 0$, então $-b < f(x) < 1 - b$.

b) $Im(f)$ contém elementos menores que o número real $-b$.

c) A raiz da função f é um número negativo.

d) A função real h, definida por $h(x) = f(|x|)$ não possui raízes.

Comentários

a) verdadeira. $x > 0 \Leftrightarrow 0 < a^x < a^0 = 1 \Leftrightarrow -b < f(x) = a^x - b < 1 - b$

b) falsa. $f(x) < -b \Leftrightarrow a^x < 0$, absurdo.

c) verdadeira. A raiz r é: $r = \log_a b$. Temos $r < 0 \Leftrightarrow b = a^r > a^0 = 1$, o que é verdade.

d) verdadeira. Pelo item c, para h possuir raiz, teríamos que ter $|x| = r < 0$, absurdo.

Gabarito: "b"

---

59. (AFA/2014)

Pesquisas realizadas verificaram que, no planeta Terra, no início do ano de 2013, a população de pássaros da espécie A era 12 vezes a população de pássaros da espécie B.

Sabe-se que a população de pássaros da espécie A cresce a uma taxa de 5% no ano, enquanto que a população de pássaros da espécie B cresce a uma taxa de 20% ao ano.

Com base nesses dados, é correto afirmar que, essas duas populações de pássaros serão iguais

(Considere: $log7 = 0,85$; $log6 = 0,78$; $log2 = 0,3$)

a) no 1º semestre do ano de 2034.

b) no 2º semestre do ano de 2034.

c) no 1º semestre do ano de 2035.

d) no 2º semestre do ano de 2035.

Comentários

Pelos dados do enunciado, contando o tempo t em anos, podemos montar as seguintes fórmulas para a população de pássaros $A(t)$ e para $B(t)$,

$$A(2013 + t) = A_0 \cdot (1{,}05)^t$$
$$B(2013 + t) = B_0 \cdot (1{,}20)^t$$
$$A_0 = 12B_0$$

Queremos achar o ano em que as populações são iguais:

$$1 = \frac{A(t)}{B(t)} = \frac{A_0 \cdot (1{,}05)^{t-2013}}{B_0 \cdot (1{,}20)^{t-2013}} = 12 \cdot \left(\frac{1{,}05}{1{,}20}\right)^{t-2013} \Rightarrow 0 = \log 12 + (t - 2013)\log\left(\frac{1{,}05}{1{,}20}\right)$$

$$0 = \log 2 + \log 6 + (t - 2013)\log\left(\frac{7}{8}\right) \Rightarrow -\log 2 - \log 6 = (t - 2013)\cdot(\log 7 - 3\log 2)$$

$$\Rightarrow t = 2013 + \frac{\log 2 + \log 6}{3\log 2 - \log 7} = 2013 + \frac{0{,}3 + 0{,}78}{3 \cdot 0{,}3 - 0{,}85} = 2013 + \frac{1{,}08}{0{,}05} = 2013 + 21{,}6$$
$$= 2034{,}6$$

Logo, as populações serão iguais em algum momento do 2°semestre de 2034.

Gabarito: "b"

---

60. (AFA/2013)

No plano cartesiano, seja $P(a, b)$ o ponto de interseção entre as curvas dadas pelas funções reais f e g definidas por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

É correto afirmar que

a) $a = \log_2\left(\frac{1}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)}\right)$

b) $a = \log_2(\log_2 a)$

c) $a = \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a}\right)\right)$

d) $a = \log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right)$

Comentários

O ponto de intersecção (a, b) satisfaz ambas as equações:

$$\begin{cases} f(a) = b \Rightarrow \dfrac{1}{2^a} = b \\ g(a) = b \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} a = b \end{cases} \Rightarrow 2^a = \frac{1}{b} \Rightarrow a = \log_2 \frac{1}{b}$$

Porém:

$$\log_{\frac{1}{2}} a = b \Rightarrow \frac{1}{2^b} = a \Rightarrow \frac{1}{a} = 2^b \Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{a}\right) = b$$

Portanto:

$$a = \log_2 \frac{1}{b} \Rightarrow a = \log_2\left(\frac{1}{\log_2\left(\frac{1}{a}\right)}\right)$$

Gabarito: "a"

---

61. (AFA/2012)

Considere uma aplicação financeira denominada UNI que rende juros mensais de $M = \log_{27} 196$ e outra aplicação financeira denominada DUNI que rende juros mensais de $N = -\log_{\frac{1}{9}} 14$.

A razão entre os juros mensais M e N, nessa ordem, é

a) 70%

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{4}{3}$

d) 80%

Comentários

$$\frac{M}{N} = \frac{\log_{27} 196}{-\log_{\frac{1}{9}} 14} = \frac{\dfrac{\log 196}{\log 27}}{-\dfrac{\log 14}{\log\left(\frac{1}{9}\right)}} = -\frac{\log 14^2}{\log 3^3} \cdot \frac{\log 3^{-2}}{\log 14} = -\frac{2\log 14}{3\log 3} \cdot \frac{-2\log 3}{\log 14} = \frac{4}{3}$$

Gabarito: "c"

---

62. (AFA/2011)

Dada a expressão $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-x^2}$, em que x é um número real qualquer, podemos afirmar que

a) o maior valor que a expressão pode assumir é 3.

b) o menor valor que a expressão pode assumir é 3.

c) o menor valor que a expressão pode assumir é $\frac{1}{81}$.

d) o maior valor que a expressão pode assumir é $\frac{1}{27}$.

Comentários

$$E=\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-x^2}=(3^{-1})^{4x-x^2}=3^{x^2-4x+4-4}=\frac{1}{3^4}\cdot 3^{(x-2)^2}$$

A expressão acima cresce quando $(x-2)^2$ cresce. Portanto, E atinge seu valor mínimo para $x=2$. Nesse caso, $E=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$.

Gabarito: "c"

---

63. (AFA/2011)

Um médico, apreciador de logaritmos, prescreveu um medicamento a um de seus pacientes, também apreciador de logaritmo, conforme a seguir.

Tomar x gotas do medicamento α de 8 em 8 horas. A quantidade de gotas y diária deverá ser calculada pela fórmula $\log_8 y=\log_2 6$

Considerando $\log 2=\frac{3}{10}$ e $\log 3=0,48$, é correto afirmar que $\log_2 x$ é um número do intervalo

a) [3,4[

b) [4,5[

c) [5,6[

d) [6,7[

Comentários

$$x \text{ gotas a cada 8 horas} \Rightarrow y=3x \text{ gotas diárias.}$$

$$\log_8 3x=\log_2 6\Rightarrow\frac{\log 3x}{\log 8}=\frac{\log 6}{\log 2}\Rightarrow\frac{\log 3+\log x}{3\log 2}=\frac{\log 2+\log 3}{\log 2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log 3+\log x=3\log 2+3\log 3\Rightarrow\log x=3\log 2+2\log 3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log_2 x=\frac{3\log 2+2\log 3}{\log 2}=3+\frac{2\log 3}{\log 2}=3+\frac{2\cdot 0{,}48}{\frac{3}{10}}=3+3{,}2=6{,}2$$

Gabarito: "d"

---

64. (AFA/2010 - Adaptada)

Sendo D o maior domínio possível, sobre a função real $f: D\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=1+\log_2(x^2)$, é INCORRETO afirmar que f é

a) par

b) sobrejetora

c) crescente em $[1, +\infty[$

d) injetora

Comentários

O maior domínio D é $\mathbb{R}^{\star}$.

$$f(-x) = 1 + \log_2((-x)^2) = 1 + \log_2(x^2) = f(x)$$

Logo f não é injetora, pois $x \neq -x$ mas $f(x) = f(-x)$.

Gabarito: "d"

---

65. (AFA/2010)

Sejam as funções reais dadas por $f(x) = 2^{2x+1}$ e $g(x) = 3^{x+1}$. Se $b \in \mathbb{R}$ tal que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2g(b)$ e $p = \log_3 b$, então sobre p é correto afirmar que:

a) não está definido

b) é positivo e menor que 1

c) é negativo e menor que 1

d) é positivo e maior que 1

Comentários

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2g(b) \Rightarrow 2^{2\cdot\frac{1}{2}+1} = 2\cdot 3^{b+1} \Rightarrow 4 = 2\cdot 3^{b+1} \Rightarrow \log_3 2 = b + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \log_3 2 - 1 = \frac{\log 2}{\log 3} - 1 = \frac{\log 2 - \log 3}{\log 3} \approx \frac{0{,}30 - 0{,}48}{0{,}48} < 0$$

Logo, como $b < 0$, não está definido $p = \log_3 b$.

Gabarito: "a"

---

66. (EFOMM/2021)

Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = \begin{cases} 2^x, x \geq 1 \\ x, x < 1 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x \geq 0 \\ x^2 - 1, x < 0 \end{cases}$

Sendo assim, pode-se dizer que $fog(x)$ é definida por:

a) $fog(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x > 0 \\ 2^{1-x^2}, x = 0 \\ x^2 - 1, -\sqrt{2} < x < 0 \\ 2^{x^2-1}, x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$

b) $fog(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x = 0 \\ 2^{1-x^2}, x > 0 \\ 1 - x^2, -\sqrt{2} \leq x < 0 \\ 2^{x^2-1}, x < -\sqrt{2} \end{cases}$

c) $fog(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x > 0 \\ 2^{1-x^2}, x = 0 \\ x^2 - 1, -\sqrt{2} < x \leq 0 \\ 2^{x^2-1}, x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$

d) $fog(x) = \begin{cases} 1 - x^2, 0 < x < 1 \\ 2^{1-x^2}, x = 0 \\ x^2 - 1, -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \\ 2^{x^2-1}, x < -\sqrt{2} \end{cases}$

e) $fog(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x \geq 1 \\ 2^{1-x^2}, 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 1, -\sqrt{2} \leq x < 0 \\ 2^{x^2-1}, x < -\sqrt{2} \end{cases}$

Comentários

Queremos encontrar:

$$fog(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2^{g(x)}, g(x) \geq 1 \\ g(x), g(x) < 1 \end{cases}$$

Para $g(x) \geq 1$:

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x \geq 0 \\ x^2 - 1, x < 0 \end{cases}$$

Se $x \geq 0$:

$$g(x) = 1 - x^2 \geq 1 \Rightarrow -x^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Se $x < 0$:

$$g(x) = x^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 2 \Rightarrow x \geq \sqrt{2}\ ou\ x \leq -\sqrt{2}$$

Fazendo a interseção com $x < 0$, obtemos $\boxed{x \leq -\sqrt{2}}$.

Logo:

$$fog(x) = \begin{cases} 2^{1-x^2}, & x = 0 \\ 2^{x^2-1}, & x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$

Para $g(x) < 1$:

Se $x \geq 0$:

$$g(x) = 1 - x^2 < 1 \Rightarrow -x^2 < 0 \therefore x \neq 0$$

Logo, temos $\boxed{x > 0}$.

Se $x < 0$:

$$g(x) = x^2 - 1 < 1 \Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

Fazendo a interseção, encontramos:

$$\boxed{-\sqrt{2} < x < 0}$$

$$fog(x)=\begin{cases}1-x^2, & x>0\\ x^2-1, & -\sqrt{2}<x<0\end{cases}$$

Assim, temos:

$$fog(x)=\begin{cases}1-x^2, x>0\\ 2^{1-x^2}, x=0\\ x^2-1, -\sqrt{2}<\ x<0\\ 2^{x^2-1}, x\le -\sqrt{2}\end{cases}$$

Gabarito: A

---

67. (EN/2021)

Assinale a opção que apresenta uma solução, em x e y, do sistema $\begin{cases}log_5\, x+\ 3^{log3\ y}=7\\ x^y=\ 5^{12}\end{cases}$.

a) $x=125$ e $y=3$

b) $x=3$ e $y=125$

c) $x=1625$e $y=3$

d) $x=4$ e $y=125$

e) $x=3$ e $y=4$

Comentários

Lembrando que $a^{\log_a b}=b$, respeitando as condições de existência do log, então podemos reescrever a primeira equação do sistema como:

$$\log_5 x+y=7$$

Por outro, lado, temos:

$$x^y=5^{12}$$

$$y=\log_x 5^{12}=12\cdot\log_x 5=12\cdot\frac{\log_5 5}{\log_5 x}$$

Portanto:

$$y=12\cdot\frac{1}{\underbrace{\log_5 x}_{7-y}}$$

Portanto:

$$y\cdot(7-y)=12$$

$$y^2-7y+12=0$$

$$y_1=4\ ou\ y_2=3$$

Se $y_1=4$, então:

$$x^4=5^{12}\therefore x=5^3=125$$

Se $y_2=3$, então:

$$x^3 = 5^{12} \therefore x = 5^4 = 625$$

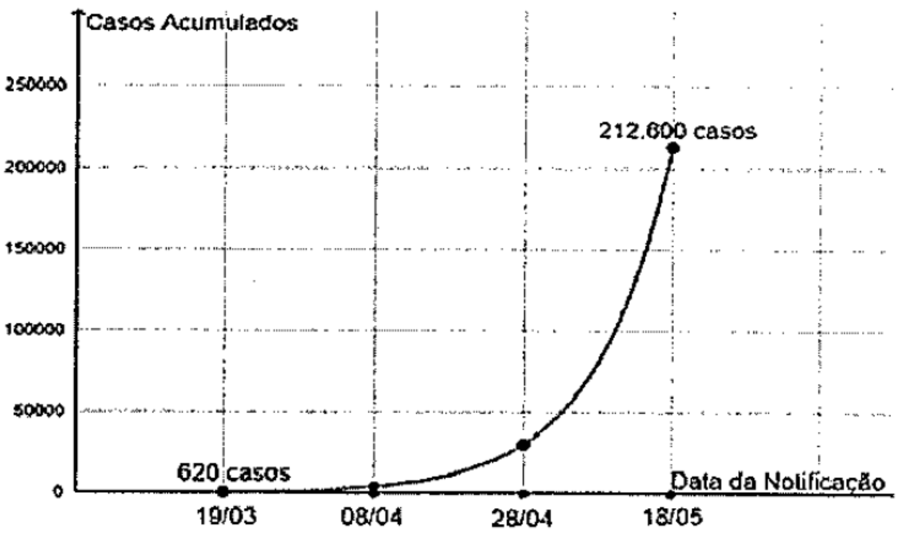
Solução:

$$S = \{(125; 4); (625; 3)\}$$

Gabarito: C

68. (EN/2021)

Um determinado país com 220 milhões de habitantes foi acometido por um vírus X. Verificou-se que, no primeiro ano do aparecimento do vírus na população, havia 620 casos acumulados do vírus X do dia 19 de março e constatou-se que a progressão de contaminação do vírus era constante a cada 20 dias até o dia 18 de maio, conforme gráfico ilustrativo abaixo. Considerando que essa progressão continuou constante até o dia 27 de junho, a porcentagem da população nessa data, por casos acumulados, que foi contaminada é de aproximadamente:



a) 1,7%

b) 2,4%

c) 3,5%

d) 4,7%

e) 5,6%

Comentários

A cada 20 dias o número de contaminados é multiplicado por um valor, mantendo uma progressão. Note que de 19/03 a 18/05 temos 60 dias. Então, se no dia 19/03 tínhamos 620 casos e a cada 20 dias o número é multiplicado por um fator, então:

$$620 \cdot r^3 = 212000$$

$$r^3 = 343$$

$$r = 7$$

De 18/05 até 27/06 nós temos 40 dias = 2x20. Então, até dia 27/06 temos duas razões. Então:

$$T = 212000 \cdot 7^2$$

$$T = 10.388.000$$

A porcentagem da população contaminada é de:

$$\%contaminados = \frac{10.388.00}{220.000.000} \cdot 100\% = 4{,}7\%$$

Gabarito: D

---

69. (EFOMM/2020)

Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que

$$\boldsymbol{f(m \cdot n) = n \cdot f(m) + m \cdot f(n)}$$

para todos os naturais m e n. Se $f(20) = 3$, $f(14) = 1,25$ e $f(35) = 4$, então, o valor de $f(8)$ é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários

O segredo dessa questão está na fatoração.

$$f(20) = f(4 \cdot 5) = 5 \cdot f(4) + 4 \cdot f(5)$$

$$f(4) = f(2 \cdot 2) = 2 \cdot f(2) + 2 \cdot f(2) = 4 \cdot f(2)$$

Logo, substituindo a segunda na primeira, $f(20) = 20 \cdot f(2) + 4 \cdot f(5)$.

$$f(14) = f(7 \cdot 2) = 2 \cdot f(7) + 7 \cdot f(2)$$

$$f(35) = 5 \cdot f(7) + 7 \cdot f(5).$$

$$f(8) = f(2 \cdot 4) = 4 \cdot f(2) + 2 \cdot f(4) = 4 \cdot f(2) + 2 \cdot 4 \cdot f(2) = 12 \cdot f(2)$$

Montamos então um sistema, a fim de descobrir $f(2)$ e, portanto, descobrir $f(8)$:

$$\begin{cases} 3 = f(20) = 20 \cdot f(2) + 4 \cdot f(5) \\ 1{,}25 = f(14) = 7 \cdot f(2) + 2 \cdot f(7) \\ 4 = f(35) = 7 \cdot f(5) + 5 \cdot f(7) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear de três equações e três incógnitas, a saber, $f(2), f(5), f(7)$, obtemos:

$$f(2) = \frac{1}{12}, f(5) = \frac{1}{3}, f(7) = \frac{1}{3}.$$

Logo $f(8) = 12f(2) = 1$.

Gabarito: "a"

70. (EFOMM/2018)

Seja $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(1) = 2$ e $f(xy) = -\frac{f(-y)}{x}, \forall x, y \in \mathbb{R}^*$. Então, o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ será

a) 5

b) 4

c) 3

d) 2

e) 1

Comentários

$$2 = f(1) = f\left((-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{(-2)} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

Gabarito: "b"

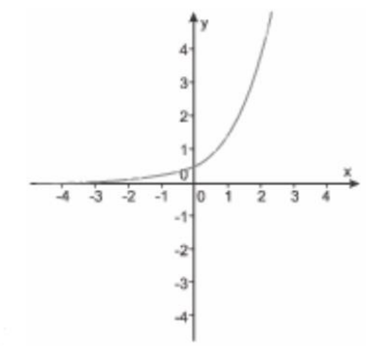
71. (EFOMM/2016)

Um aluno precisa construir o gráfico da função real f, definida por $f(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$. Ele percebeu que a função possui a seguinte característica:

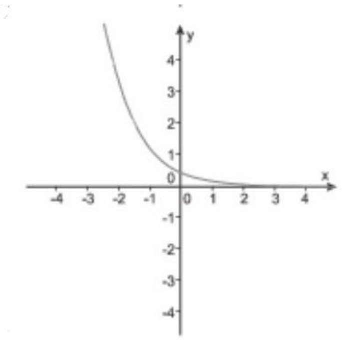
$f(-x) = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{x}}{2} = f(x).$

Assinale a alternativa que representa o gráfico dessa função.

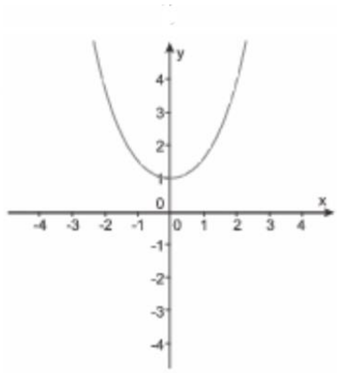
a)



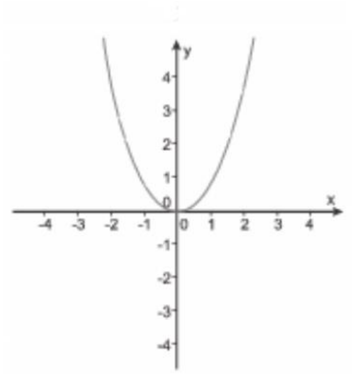
b)



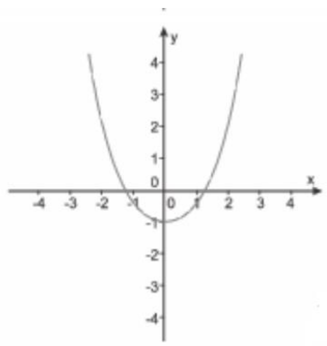
c)



d)



e)



Comentários

O aluno percebeu que $f(x) = f(-x)$, isto é, que a função é par e, portanto, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y. Além disso, substituindo $x = 0$, vemos que $f(0) = \frac{e^0}{2} + \frac{e^{-0}}{2} = \frac{1}{2} +$

$\frac{1}{2} = 1$. O único gráfico simétrico em relação ao eixo y e que passa pelo ponto $(0,1)$ é o da alternativa c.

Gabarito: "c"

72. (EFOMM/2015)

Os números reais positivos $a_1, a_2,\ldots,a_n$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q. Nesse caso, é correto afirmar que a sequência $\log a_1$, $\log a_2,\ldots,$ $\log a_n$ forma

a) uma progressão geométrica crescente, se $q > 1$.

b) uma progressão aritmética crescente, se $q > 1$.

c) uma progressão geométrica decrescente, se $0 < q < 1$.

d) uma progressão aritmética crescente, se $0 < q < 1$.

e) uma progressão aritmética crescente, desde que $q > 0$.

Comentários

Fórmula do termo geral da progressão geométrica: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Logo: $b_n = \log a_n = \log a_1 + (n-1) \cdot \log q$

Assim, (b_n) é uma progressão aritmética de termo inicial $b_1 = \log a_1$ e razão $r = \log q$.

Se $q > 1$, $\log q > 0$ e a PA é crescente. Se $0 < q < 1$, $\log q < 0$ e a PA é decrescente.

Gabarito: "b"

73. (EFOMM/2013)

O número de bactérias B, numa cultura, após t horas, é $B = B_0 e^{kt}$, onde k é um a constante real. Sabendo-se que o número inicial de bactérias é 100 e que essa quantidade duplica em $\tau = \frac{In\ 2}{2}$ horas, então o número N de bactérias, após 2 horas, satisfaz:

a) $800 < N < 1600$.

b) $1600 < N < 8100$.

c) $8100 < N < 128000$.

d) $128000 < N < 256000$.

e) $256000 < N < 512000$.

Comentários

A quantidade duplica em $\tau = \frac{\ln 2}{2}$ horas $\Rightarrow 2B_0 = B_0 e^{k \cdot \frac{\ln 2}{2}} = B_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{k}{2}} = B_0 \cdot 2^{\frac{k}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 = 2^{\frac{k}{2}} \Rightarrow k = 2.$$

O número inicial de bactérias é $100 \Rightarrow B_0 = 100$.

Após 2 horas $(t = 2)$

$$N = 100 \cdot e^{2t} = 100 \cdot e^{4}.$$

Sabe-se que $2 < e < 3 \Rightarrow 16 = 2^4 < e^4 < 3^4 = 81 \Rightarrow 1600 < N = 100e^4 < 8100$.

Gabarito: “b”

---

74. (EFOMM/2010)

Sabendo que o $\log_{30} 3 = a$ e $\log_{30} 5 = b$, que opção representa $\log_{10} 2$?

a) $\frac{1-a-b}{2+a}$

b) $\frac{1-a-b}{a-1}$

c) $\frac{1-a-b}{1+a}$

d) $\frac{1-a-b}{2-a}$

e) $\frac{1-a-b}{1-a}$

Comentários

Nessa questão, todos os logaritmos sem base são na base 10.

$$a = \log_{30} 3 = \frac{\log 3}{\log 30} = \frac{\log 3}{\log 3 + \log 10} = \frac{\log 3}{\log 3 + 1} \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{\log 3} \Rightarrow \log 3 = \frac{a}{1-a}$$

$$b = \log_{30} 5 = \frac{\log 5}{\log 30}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\log_{30} 3}{\log_{30} 5} = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{\log 3}{\log \frac{10}{2}} = \frac{\log 3}{1 - \log 2} \Rightarrow 1 - \log 2 = \frac{\log 3}{\frac{a}{b}} = \frac{\frac{a}{1-a}}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{1-a}$$

$$\Rightarrow \log 2 = 1 - \frac{b}{1-a} = \frac{1-a-b}{1-a}$$

Gabarito: “e”

---

75. (EFOMM/2009)

Numa embarcação é comum ouvirem-se determinados tipos de sons. Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um desses sons esteja relacionado com a equação logarítmica $\beta = 12 + log_{10} I$, $em\ que\ \beta$ é medido em decibéis e I em watts por metro quadrado. Qual é a razão $\frac{I_1}{I_2}$, sabendo-se que I_1 corresponde ao ruído sonoro de 8 decibéis de uma aproximação de dois navios e que I_2 corresponde a 6 decibéis no interior da embarcação?

a) 0,1

b) 1

c) 10

d) 100

e) 1000

Comentários

$$8 = 12 + \log_{10} I_1 \Rightarrow I_1 = 10^{-4}$$
$$6 = 12 + \log_{10} I_2 \Rightarrow I_2 = 10^{-6}$$
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 100$$

Gabarito: "d"

---

76. (EFOMM/2006)

Se $\log a = 0,4771$ e $\log b = 0,3010$, então $\log \frac{a}{b}$ é

a) $0,1761$

b) $-0,1761$

c) $0,7781$

d) $0,8239$

e) $-0,8239$

Comentários

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b = 0{,}4771 - 0{,}3010 = 0{,}1761$$

Gabarito: "a"

---

77. (EFOMM/2005)

Determine o domínio da função real $y = \sqrt{(\log_{\frac{1}{2}} x + 2)}$

a) $D = \{x \in \mathbb{R}/0 < x \leq 4\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R}/0 > x \geq 4\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R}/0 < x \leq 2\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}/0 > x \geq 2\}$

e) $D = \{x \in \mathbb{R}/x < 4\}$

Comentários

Devemos ter:

$$x > 0,$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

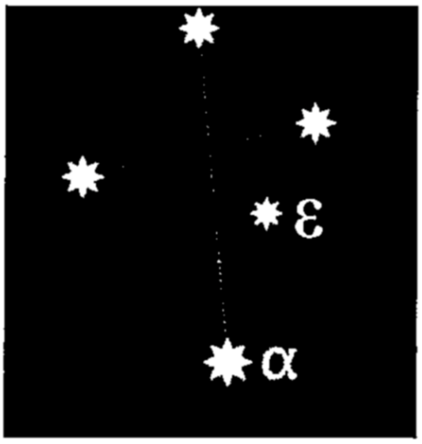
Logo, $D = \{x \in \mathbb{R}/0 < x \leq 4\}$.

Gabarito: "a"

---

78. (Escola Naval/2019)

O Cruzeiro do Sul é uma das mais importantes constelações para os povos no hemisfério sul. Ela é muito útil na navegação e está presente em nossa Bandeira Nacional, no Brasão Nacional, assim como em símbolos de colégios, agremiações etc. Dentre as cinco principais estrelas há a Alpha Crucis (α), a mais brilhante, e a Epsilon Crucis (ε), a menos brilhante dentre as principais que formam uma cruz, conforme figura abaixo.



Pode-se medir, de forma aproximada, a distância até uma estrela pela equação $M_d = -5 + 5 \cdot \log_{10} \frac{D}{3,3}$, tal que M_d é o módulo de distância de uma estrela (uma medida de brilho na Astronomia) e D é a distância, em anos-luz. Considerando $M_d = 5$ para Alpha Crucis e $M_d = 4,2$ para Epsilon Crucis, D_a a distância até Alpha Crucis e D_e a distância até Epsilon Crucis, ambas em anos-luz, pode-se afirmar, de forma aproximada, que:

Dados: $log_{10}3 = 0,48$ e $log_{10}23 = 1,36$

a) $D_e > D_a$

b) $D_a + D_e = 557,7$

c) $D_a = 330$

d) $D_e = 69$

e) $D_a = 100$

Comentários

Para Alpha Crucis: $5 = -5 + 5 \cdot \log_{10} \frac{D_a}{3,3} \Rightarrow 2 = \log_{10} \frac{D_a}{3,3} \Rightarrow D_a = 3,3 \cdot 10^2 = 330$ anos-luz

Já podemos marcar "c". Mesmo assim, vamos continuar a análise:

Considerando $\log 2 = 0,30$, para Epsilon Crucis:

$$4,2 = -5 + 5 \cdot \log_{10} \frac{D_e}{3,3} \Rightarrow 1,84 = \log_{10} \frac{D_e}{3,3} \Rightarrow D_e = 3,3 \cdot 10^{1,84} \approx 3,3 \cdot 10^{6 \cdot 0,30}$$

$$= 3,3 \cdot \left(10^{\log 2}\right)^6 = 3,3 \cdot 2^6 = 3,3 \cdot 64 = 211,2 \approx 220 \text{ anos-luz}$$

(Arredondamos para cima porque sabemos que o valor era para ser maior, pois $1,84 > 6 \cdot 0,30$.)

Gabarito: "c"

---

79. (Escola Naval/2018)

Sejam f e g funções reais tais que g é a inversa de f. Se f é definida como $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, calcule $e^{g\left(\frac{1}{2}\right)}$ e assinale a opção correta.

a) 2

b) $\sqrt{2}$

c) 3

d) $\sqrt{3}$

e) $-\sqrt{2}$

Comentários

Como queremos calcular $a = g\left(\frac{1}{2}\right)$, precisamos achar $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = \frac{1}{2}$. Logo:

$$\frac{1}{2} = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \Rightarrow e^a + e^{-a} = 2e^a - 2e^{-a} \Rightarrow 3e^{-a} = e^a \Rightarrow e^{2a} = 3 \Rightarrow e^a = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Gabarito: "d"

---

80. (Escola Naval/2015)

O elemento químico Califórnio, Cf^{251}, emite partículas alfa, se transformando no elemento Cúrio, Cm^{247}. Essa desintegração obedece à função exponencial $N(t) = N_0 e^{-at}$, $onde$ N(t) é quantidade de partículas de Cf^{251} no instante t em determinada amostra; N_0 é a quantidade de partículas no instante inicial; e α é uma constante, chamada constante de desintegração. Sabendo que em 898 anos a concentração de Cf^{251} é reduzida à metade, pode-se afirmar que o tempo necessário para que a quantidade de Cf^{251} seja apenas 25% da quantidade inicial está entre

a) 500 e 1000 anos.

b) 1000 e 1500 anos.

c) 1500 e 2000 anos.

d) 2000 e 2500 anos.

e) 2500 e 3000 anos.

Comentários

Como o decaimento é exponencial, sabe-se que o tempo de meia-vida é constante. Portanto, Se o tempo para a quantidade chegar à metade, isto é, 50%, é de 898 anos, então o tempo para chegar à metade da metade, isto é, 25%, é de $898 + 898 = 1796$ anos. Matematicamente:

$$50\% \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-at_{50\%}} \Rightarrow \ln 0{,}5 = -at_{50\%}$$

$$25\% \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-at_{25\%}} \Rightarrow -at_{25\%} = \ln 0{,}25 = \ln 0{,}5^2 = 2\ln 0{,}5 = 2 \cdot (-at_{50\%})$$

$$\Rightarrow t_{25\%} = 2 \cdot t_{50\%} = 2 \cdot 898 = 1796 \text{ anos.}$$

Gabarito: "c".

81. (Escola Naval/2014)

Considere as funções reais $f(x) = \frac{100}{1+2^{-x}}$ e $g(x) = 2^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Qual é o valor da função composta $(g\ o\ f^{-1})(90)$?

a) 1

b) 3

c) 9

d) $\frac{1}{10}$

e) $\frac{1}{3}$

Comentários

Vamos primeiro achar $a = f^{-1}(90)$:

$$90 = \frac{100}{1+2^{-a}} \Rightarrow 2^{-a} = \frac{100}{90} - 1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 2^{a} = 9$$

Logo: $(g\ o\ f^{-1})(90) = g(a) = 2^{\frac{a}{2}} = \sqrt{2^a} = 3.$

Gabarito: "b".

82. (Escola Naval/2014)

Sabendo que $\log x$ representa o logaritmo de x na base 10, qual é o domínio da função real de variável real $f(x) = \frac{arccos^3(log\frac{x}{10})}{\sqrt{4x-x^3}}$?

a) $]0, 2[$

b) $]\frac{1}{2}, 1[$

c) $]0, 1]$

d) $[1, 2[$

e) $[\frac{1}{2}, 2[$

Comentários

Impomos que:

O argumento do logaritmo seja positivo:

$$\frac{x}{10} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

O argumento da raiz no denominador seja positivo (usando o fato que $x > 0$)

$4x - x^3 > 0 \Leftrightarrow x(2-x)(2+x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ (pois x e $2 + x$ são positivos)

O argumento do arccosseno pertença a $[-1,1]$:

$$-1 \leq \log\frac{x}{10} \leq 1 \Leftrightarrow 0{,}1 \leq \frac{x}{10} \leq 10 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 100$$

Fazendo a interseção dos domínios: $D = (0{,}2) \cap [1{,}100] = [1{,}2[$

Gabarito: “d”

83. (Escola Naval/2014)

Após acionado o flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, que armazena uma carga elétrica dada por $Q(t) = Q_0\left(1 - e^{\frac{-t}{2}}\right)$, onde Q_0 é capacidade limite de carga e t é medido em segundos. Qual o tempo, em segundos, para recarregar o capacitor de 90% da sua capacidade limite?

a)$\ell n 10$

b)$\ell n(10)^2$

c)$\sqrt{\ell n 10}$

d)$\sqrt{(\ell n 10)^{-1}}$

e)$\sqrt{\ell n(10)^2}$

Comentários

$$0{,}9Q_0 = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_{90\%}}{2}}\right) \Rightarrow e^{-\frac{t_{90\%}}{2}} = 0{,}1 \Rightarrow -\frac{t_{90\%}}{2} = \ln 0{,}1 = \ln 10^{-1} = -\ln 10$$

$$\Rightarrow t_{90\%} = 2\,\ell n\, 10 = \ell n(10)^2$$

Gabarito: “b”

84. (Escola Naval/2014)

Considere as funções reais $f(x) = \frac{x}{2} - \ell n x$ e $g(x) = \frac{x}{2} - (\ell n x)^2$ onde $\ell n x$ expressa o logaritmo de x na base neperiana e $(e \cong 2{,}7)$. Se P e Q são os pontos de interseção dos gráficos de f e g, podemos afirmar que o coeficiente angular da reta que passa por P e Q é

a) $\frac{e+1}{2(e-3)}$

b) $e + 1$

c) $\frac{e-1}{2(e+1)}$

d) $2e + 1$

e) $\frac{e-3}{2(e-1)}$

Comentários

Vamos calcular os pontos P e Q.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x}{2} - \ln x = \frac{x}{2} - (\ln x)^2 \Rightarrow \ln x = 0 \; ou \; \ln x = 1 \Rightarrow x = 1 \; ou \; x = e.$$

Temos $f(1) = g(1) = \frac{1}{2} - \ln 1 = \frac{1}{2}$

e $f(e) = g(e) = \frac{e}{2} - \ln e = \frac{e}{2} - 1$

Logo:

$$P = \left(1, \frac{1}{2}\right), Q = \left(e, \frac{e}{2} - 1\right)$$

Portanto, o coeficiente angular m_{PQ} é:

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{\left(\frac{e}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}}{e - 1} = \frac{e - 3}{2(e - 1)}$$

Gabarito: "e"

---

85. (Escola Naval/2013)

Considere f uma função real de variável real tal que:

1. $f(x + y) = f(x)f(y)$

2. $f(1) = 3$

3. $f(\sqrt{2}) = 2$

Então $f(2 + 3\sqrt{2})$ é igual a

a) 108

b) 72

c) 54

d) 36

e) 12

Comentários

$$f(2 + 3\sqrt{2}) = f(2) \cdot f(3\sqrt{2}) = f(1 + 1) \cdot f(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = f(1) \cdot f(1) \cdot f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2} + \sqrt{2}) =$$

$$= f(1)^2 \cdot f(\sqrt{2})^3 = 3^2 \cdot 2^3 = 9 \cdot 8 = 72$$

Gabarito: "b"

---

86. (Escola Naval/2013)

Sabendo que $b = \sec^3\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \cdots\right)$ então, o valor de $\log_2 |b|$ é

a) 8

b) 4

c) 3

d) 1

e) 0

Comentários

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\cdots=\frac{\pi}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{\pi}{3}\cdot 2=\frac{2\pi}{3}.$$

$$\sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2.$$

Logo $b=(-2)^3=-8.$

Portanto:

$$\log_2|b|=\log_2 8=3.$$

Gabarito: "c"

---

87. (Escola Naval/2013)

Sabendo que $b=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\cdots\right)$ então o valor de $\log_2|b|$ é

a) 1

b) 0

c) -1

d) -2

e) 3

Comentários

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\cdots=\frac{\pi}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{\pi}{3}\cdot 2=\frac{2\pi}{3}.$$

$$b=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

Logo, $\log_2|b|=\log_2\frac{1}{2}=\log_2(2^{-1})=-1.$

Gabarito: "c"

---

88. (Escola Naval/2013)

Qual é o domínio da função real de variável real, definida por $f(x)=\ln(x^2-3x+2)+\sqrt{e^{2x-1}-1}$?

a) $[1,2[$

b) $[\frac{1}{2},2[\,\cup\,]3,+\infty[$

c) $]2,+\infty[$

d) $[\frac{1}{2},1[\,\cup\,]2,+\infty[$

e) $[\frac{1}{2},+\infty[$

Comentários

Impomos que:

O argumento do logaritmo seja positivo:

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \; ou \; x > 2.$$

O argumento da raiz seja não-negativo:

$$e^{2x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} \geq 1 = e^0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Fazendo a interseção:

$$D = [\frac{1}{2}, 1[\cup]2, \infty[$$

Gabarito: "d"

---

89. (Escola Naval/2012)

Sejam A e B conjuntos de números reais tais que seus elementos constituem, respectivamente, o domínio da função $f(x) = \ln(2 + x + 3|x| - |x+1|)$ e a imagem da função $g(x) = -2\frac{\sqrt{2(x+|x-2|)}}{2}$. Pode-se afirmar que

a) $A = B$

b) $A \cap B = \emptyset$

c) $A \supset B$

d) $A \cap B = \mathbb{R}_+$

e) $A - B = \mathbb{R}_-$

Comentários

Para determinar A, devemos impor que o logaritmando seja positivo:

$$2 + x + 3|x| - |x+1| > 0$$

Vamos separar a análise em casos:

Caso 1: $x \leq -1$:

$$2 + x + 3(-x) - \big(-(x+1)\big) > 0 \Leftrightarrow 2 + x - 3x + x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 3 \therefore x \leq -1$$

Caso 2: $-1 < x \leq 0$:

$$2 + x + 3(-x) - (x+1) > 0 \Leftrightarrow 2 + x - 3x - x - 1 > 0 \Leftrightarrow 3x < 1 \therefore -1 < x \leq 0$$

Caso 3: $x > 0$:

$$2 + x + 3x - (x+1) > 0 \Leftrightarrow 3x > -1 \therefore x > 0$$

Logo, $A =]-\infty, 1] \cup]1, 0] \cup]0, \infty[\therefore A = \mathbb{R}$.

Perceba que já podemos marcar item "c", uma vez que qualquer a imagem de qualquer função real é um subconjunto dos reais, donde $A \supset B$.

Gabarito: "c"

---

7. QUESTÕES NÍVEL 3

90. (ITA/2020)

Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ **números reais tais que** $2^{x_1} = 4; 3^{x_2} = 5; 4^{x_3} = 6; 5^{x_4} = 7; 6^{x_5} = 8$ **e** $7^{x_6} = 9$**. Então, o produto** $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ **é igual a**

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 14.

91. (ITA/2019)

Sabendo que x **pertence ao intervalo fechado** $[1, 64]$**, determine o maior valor da função**

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2 \left(\frac{8}{x}\right)$$

92. (ITA/2018)

Se $\log_2 \pi = a$ **e** $\log_5 \pi = b$**, então**

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$

c) $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{3}{2}$

d) $\frac{3}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$

e) $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

93. (ITA/2018)

Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ **da inequação exponencial:**

$$3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$$

94. (ITA/2017)

Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **dada por**

$$f(x) = \left|2^{-|x|} - \frac{1}{2}\right|$$

95. (ITA/2017)

Sejam a, b, c, d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas II e III.

e) todas.

96. (ITA/2017)

Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $4^{3x-1} > 3^{4x}$.

97. (ITA/2016)

Se x é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ é igual a

a) 285

b) 286

c) 287

d) 288

e) 289

98. (ITA/2016)

Considere as seguintes afirmações:

I. A função $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

II. A equação $2^{x+2} = 3^{x-1}$ possui uma única solução real.

III. A equação $(x+1)^x = x$ admite pelo menos uma solução real positiva.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

e) apenas III.

99. (ITA/2016)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1000$ e $a_n = \log_{10}(1 + a_{n-1})$ para $n \geq 2$. Considere as afirmações a seguir:

I. A sequência (a_n) é decrescente.

II. $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$.

III. $a_n < 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

e) apenas III.

100.(ITA/2016)

Seja f a função definida por $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$. Determine:

a) O domínio D_f da função f.

b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 2$.

c) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) > 1$.

101.(ITA/2015)

Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$.

III. $ln\sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ **é um número racional.**

É (são) verdadeira(s):

a) nenhuma.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) I, II e III.

102. (ITA/2014)

Determine as soluções reais da equação em x:

$$(\log_4 x)^3 - \log_4(x^4) - \frac{3\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = 0$$

103. (ITA/2014)

A soma

$$\sum_{1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}}$$

É igual a

a) $\frac{8}{9}$

b) $\frac{14}{15}$

c) $\frac{15}{16}$

d) $\frac{17}{18}$

e) 1

104. (ITA/2013)

Considere as funções f e g, da variável real x, definidas, respectivamente, por $f(x) = e^{x^2+ax+b}$ e $g(x) = \ln\left(\frac{ax}{3b}\right)$, em que a e b são números reais. Se $f(-1) = 1 = f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta gof que

a) $gof(1) = \ln 3$.

b) $\nexists gof(0)$.

c) gof **nunca se anula.**

d) gof **está definida apenas em** $\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$.

e) gof **admite dois zeros reais distintos.**

105. (ITA/2013)

Se os números reais a **e** b **satisfazem, simultaneamente, as equações**

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \text{ e } \ln(a^2 + b) + \ln 8 = \ln 5,$$

Um possível valor de $\frac{a}{b}$ **é**

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) 1

c) $\sqrt{2}$

d) 2

e) $3\sqrt{2}$

106. (ITA/2011)

Resolva a inequação em ℝ:

$$16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - x + 19)}$$

107. (ITA/2008)

Para $x \in \mathbb{R}$**, o conjunto solução de** $|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$ **é**

a) $\{0, 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{3}\}$

b) $\{0, 1, \log_5(2 + \sqrt{5})\}$

c) $\left\{0, \left(\frac{1}{2}\right)\log_5 2, \frac{1}{2}\log_5 3, \log_5 \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

d) $\{0, \log_5(2 + \sqrt{5}), \log_5(2 + \sqrt{3}), \log_5(2 - \sqrt{3})\}$

e) A única solução é $x = 0$

108. (ITA/2007)

Sejam x **e** y **dois números reais tais que** e^x, e^y **e o quociente** $\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$ **são todos racionais. A soma** $x + y$ **é igual a**

a) 0

b) 1

c) $2\log_5 3$

d) $\log_5 2$

e) $3\log_e 2$

109. (ITA/2007)

Sejam x, y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base n são números primos satisfazendo

$$\log_n(xy) = 49$$
$$\log_n\left(\frac{x}{z}\right) = 44$$

Então, $\log_n(xyz)$ é igual a

a) 52

b) 61

c) 67

d) 80

e) 97

110. (ITA/2005)

Considere a equação em x

$$a^{x+1} = b^{\frac{1}{x}}$$

Onde a e b são números reais positivos, tais que $\ln b = 2\ln a > 0$. A soma das soluções da equação é

a) 0

b) -1

c) 1

d) $\ln 2$

e) 2

111. (ITA/2004)

Para $b > 1$ e $x > 0$, resolva a equação em x:

$$(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$$

112.(ITA/2004)

Seja α um número real, com $0 < \alpha < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de x tais que

$$\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$$

a) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

b) $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

c) $]0, 2[$

d) $]-\infty, 0[$

e) $]2, +\infty[$

113.(ITA/2003)

Mostre que toda função $f: \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

114.(ITA/2003)

Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-constante e tal que $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Das afirmações:

I. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

II. $f(nx) = [f(x)]^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

III. f **é par**

É (são) verdadeira(s):

a) apenas I e II.

b) apenas II e III.

c) apenas I e III.

d) todas.

e) nenhuma.

115.(ITA/2002)

Seja a função f dada por

$$f(x) = (\log_3 5) \cdot \log_5 8^{x-1} + \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}$$

Determine todos os valores de x que tornam f não-negativa.

116.(ITA/2001)

Se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $3y^2 - y + a = 0$ tem raiz dupla, então a solução da equação $3^{2x+1} - 3^x + a = 0$ é:

a) $\log_2 6$

b) $-\log_2 6$

c) $\log_3 6$

d) $-\log_3 6$

e) $1 - \log_3 6$

117.(ITA/2001)

Sendo dado

$$\ln (2\sqrt{4}\sqrt[3]{6}\sqrt[4]{8} \ldots \sqrt[n]{2n} = a_n$$

$$\ln (\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4} \ldots \sqrt[2n]{2n} = b_n$$

então,

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} + \cdots + \frac{\ln 2n}{2n}$$

É igual a:

a) $a_n - 2b_n$

b) $2a_n - b_n$

c) $a_n - b_n$

d) $b_n - a_n$

e) $a_n + b_n$

118.(ITA/2000)

Seja $S = [-2, 2]$ e considere as afirmações:

I. $\frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x < 6$**, para todo** $x \in S$**.**

II. $\frac{1}{\sqrt{32-2^x}} < \frac{1}{\sqrt{32}}$**, para todo** $x \in S$**.**

III. $2^{2x} - 2^x \leq 0$**, para todo** $x \in S$**.**

Então, podemos dizer que

a) apenas I é verdadeira.

b) apenas III é verdadeira.

c) somente I e II são verdadeiras.

d) apenas II é falsa.

e) todas as afirmações são falsas.

119. (ITA/1999)

Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+1) = \log_4(x-1)$$

Então:

a) S é um conjunto unitário e $S \subset]2, +\infty[$.

b) S é um conjunto unitário e $S \subset]1, 2[$.

c) S possui dois elementos distintos $S \subset]-2,2[$.

d) S possui dois elementos distintos $S \subset]1, +\infty[$.

e) S é o conjunto vazio.

120. (ITA/1998)

O valor de $y \in \mathbb{R}$ que satisfaz a igualdade $\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7$, é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) 3

d) $\frac{1}{8}$

e) 7

121. (ITA/1998)

A inequação mostrada na figura adiante

$$4xlog_5(x+3) \geq (x^2+3)\log_{\frac{1}{5}}(x+3)$$

É satisfeita para todo $x \in S$. Então:

a) $S =]-3, -2] \cup [-1, +\infty[$

b) $S =]-\infty, -3[\cup [-1, +\infty[$

c) $S =]-3, -1]$

d) $S =]-2, +\infty]$

e) $S =]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[$

122.(ITA/2009)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ **uma função satisfazendo as condições:**

$f(x+y) = f(x)f(y)$**, para todo** $x, y \in \mathbb{R}$ **e** $f(x) \neq 1$**, para todo** $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$**. Das afirmações:**

I. f **pode ser ímpar;**

II. $f(0) = 1$;

III. f **é injetiva;**

IV. f **não é sobrejetiva, pois** $f(x) > 0$ **para todo** $x \in \mathbb{R}$**,**

é (são) falsa(s) apenas

a) I e III.

b) II e III.

c) I e IV.

d) IV.

e) I.

123. (ITA/1996)

Seja $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ **uma função injetora tal que** $f(1) = 0$ **e** $f(xy) = f(x) + f(y)$ **para todo** $x > 0$ **e** $y > 0$**. Se** x_1, x_2, x_3, x_4 **e** x_5 **formam nessa ordem uma progressão geométrica, onde** $x_i > 0$ **para** $i = 1, 2, 3, 4, 5$ **e sabendo que** $\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 13f(2) + 2f(x_1)$ **e** $\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = -2f(2x_1)$**, então, o valor de** x_1 **é:**

a) -2.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 1.

124.(ITA/1992)

Considere as funções $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 3^{x+\frac{1}{x}}, g(x) = x^2, h(x) = \frac{81}{x}$. O conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}^*$ tais que $(f\ o\ g)(x) = (h\ o\ f)(x)$ é subconjunto de:

a) $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

b) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

c) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

d) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

e) n.d.a.

125. (ITA/1987)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) \neq 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, para todos x e y em ℝ. Considere (a_1, a_2, a_3, a_4) uma P.A. de razão r, tal que $a_1 = 0$. Então $\left(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\right)$

a) é uma P.A. de razão igual a $f(r)$ e 1º termo $f(a_1) = f(0)$.

b) é uma P.A. de razão igual a r.

c) é uma P.G. de razão igual a $f(r)$ e 1º termo $f(a_1) = 1$.

d) é uma P.G. de razão igual a r e 1º termo $f(a_1) = f(0)$.

e) não é necessariamente uma P.A. ou uma P.G.

126.(ITA/1985)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$ para todos $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. Se $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é uma progressão aritmética de razão d, então podemos dizer que $\left(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_n)\right)$

a) É uma progressão aritmética de razão d.

b) É uma progressão aritmética de razão $f(d)$ cujo primeiro termo é a_1.

c) É uma progressão geométrica de razão $f(d)$.

d) É uma progressão aritmética de razão $f(d)$.

e) Nada se pode afirmar.

127.(ITA/1979)

Seja f uma função real definida para todo x real tal que: f é ímpar; $f(x+y) = f(x) + f(y)$; e $f(x) \geq 0$, se $x \geq 0$. Definindo $g(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x}$, se $x \neq 0$, e sendo n um número natural, podemos afirmar que:

a) f **é não-decrescente e** g **é uma função ímpar.**

b) f **é não-decrescente e** g **é uma função par.**

c) g **é uma função par e** $0 \leq g(n) \leq f(1)$.

d) g **é uma função ímpar e** $0 \leq g(n) \leq f(1)$.

e) f **é não-decrescente e** $0 \leq g(n) \leq f(1)$.

128.(ITA/1971)

Se f é uma função real de variável real dada por $f(x) = x^2$, então $f(x^2+y^2)$ é igual a:

a) $f(f(x)) + f(y) + 2f(x)f(y)$ **para todo x e y.**

b) $f(x^2) + 2f(f(x)) + f(x)f(y)$ **para todo x e y.**

c) $f(x^2) + f(y^2) + f(x)f(y)$ **para todo x e y.**

d) $f(f(x)) + f(f(y)) + 2f(x)f(y)$ **para todo x e y.**

e) $f(f(x)) + 2f(y^2) + 2f(x)f(y)$ **para todo x e y.**

129.(IME/2021)

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função onde $D = \{x \in \mathbb{R} \,|x \neq 0 \; e \; x \neq 1\}$ e que satisfaz a equação $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) - x = 2$. O valor de $f(2)$ é:

a) 5/4

b) 1/4

c) $1/2$

d) 1

e) $7/2$

130.(IME/2021)

Se A é a área da região R do plano cartesiano dada por

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|2 \leq x \leq 10 \; e \; 0 \leq y \leq \ln(x)\}$$

a) $A \leq \ln(20^4)$

b) $\ln(\ln(9!)) \leq \ln(A) \leq (2 + \ln(9!))$

c) $A \geq \ln(10!) - \ln(2)$

d) $\frac{1}{9!} \leq e^{-A} < 20^{-4}$

e) $\ln(10) + \ln(2) \leq \mathrm{A} \leq 10\ln(10) - 2\ln(2) - 10$

131. (IME/2021)

Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} \log(-2x + 3y + k) = \log(3) + \log(z) \\ log_x(1 - y) = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

onde x, y e z são variáveis e k é uma constante numérica real. Esse sistema terá solução se:

a) $k < -2$

b) $-2 < k < 0$

c) $0 < k < 2$

d) $2 < k < 4$

e) $k > 4$

132. (IME/2021)

Seja a equação $2sen^2(e^\theta) - 4\sqrt{3}sen(e^\theta)cos(e^\theta) - \cos(2e^\theta) = 1, \theta \in \mathbb{R}^+$. O menor valor de θ que é raiz da equação é:

a) $\ln\left(\frac{\pi}{6}\right)$

b) $\ln\left(\frac{\pi}{3}\right)$

c) $\ln\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

d) $\ln\left(\frac{\pi}{12}\right)$

e) $\ln\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

133.(IME/2021)

Calcule os valores reais de x que satisfaçam a inequação $\sqrt{\log_3(x) + 1} + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}}(x^2) + \frac{7}{3} > 0$.

134.(IME/2020)

Sabe-se que $S = x + y + z$, onde y e z são soluções inteiras do sistema abaixo.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{2y^2}}{2} \\ y = e^{2\ln(x)} \\ \log_2 y + \log_x z = (x+3) \end{cases}$$

O valor de S é:

a) 84

b) 168

c) 234

d) 512

e) 600

135. (IME/2020)

Uma progressão geométrica é formada com os números naturais A, B e C, nessa ordem. O $log(A)$ possui a mesma mantissa, M, do $log(B)$ e C é a característica do $log(A)$. Sabe-se que $M = log(C)$ e que possui o maior valor possível. O valor da mantissa do $log(ABC)$ é:

a) M

b) $2M$

c) $3M$

d) $3M - 2$

e) $3M - 3$

136. (IME/2020)

Considere a progressão geométrica $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ e a progressão aritmética $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ com as condições:

$$a_1 > 0$$

$$\frac{a_2}{a_1} > 1; \text{e}$$

$$b_2 - b_1 > 0$$

Para que $[\log_\alpha(a_n) - b_n]$ não dependa de n, o valor de α deverá ser:

a) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2}}$

b) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1}}$

c) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2-b_1}}$

d) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1-b_2}}$

e) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1 b_2}}$

137.(IME/2019)

Definimos a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n), \quad n \geq 1 \\ f(2n+1) = f(n) + 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Determine $f\big(f(2019)\big)$.

Observação: $\lfloor k \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a k.

138.(IME/2018)

Sejam a, b, c e d números reais positivos diferentes de 1. Temos que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão geométrica e que a, b e c formam uma progressão aritmética em que $a < b < c$. Sabendo-se que $b = b^{\log_a b} - a$, determine:

a) Os valores de a, b e c;

b) As razões das progressões aritmética e geométrica, r e q, respectivamente.

139.(IME/2017)

Seja a equação $y^{\log_3 \sqrt{3y}} = y^{\log_3 3y} - 6, y > 0$.

O produto das raízes reais desta equação é igual a:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) 2

e) 3

140.(IME/2017)

Resolva o sistema de equações, onde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \log_3(\log_{\sqrt{3}} x) - \log_{\sqrt{3}}(\log_3 y) = 1 \\ \left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3^{143} \end{cases}$$

141.(IME/2016/Modificada)

Sabendo-se que os números reais positivos a, b e c formam uma progressão geométrica e $\log\left(\frac{5c}{a}\right), \log\left(\frac{3b}{5c}\right)$ e $\log\left(\frac{a}{3b}\right)$ formam uma progressão aritmética, ambas nessa ordem. Prove que $b + c < a$.

142.(IME/2016)

Quantos inteiros k satisfazem à desigualdade $2\sqrt{\log_{10} k - 1} + 10\log_{10^{-1}} k^{\frac{1}{4}} + 3 > 0$?

a) 10

b) 89

c) 90

d) 99

e) 100

143.(IME/2015)

Determine os valores reais de x que satisfazem a inequação:

$$\frac{4}{\log_3 x^2 - 2} + \log_x \frac{1}{9} > 1$$

144.(IME/2015)

Sejam x e y números reais não nulos tais que:

$$\begin{cases} \log_x y^{\pi} + \log_y x^{e} = a \\ \dfrac{1}{\log_y x^{\pi^{-1}}} - \dfrac{1}{\log_x y^{e^{-1}}} = b \end{cases}$$

O valor de $\frac{x^{a+b+2e}}{y^{a-b+2\pi}}$ é:

a) 1

b) $\sqrt{\frac{\pi}{e}}$

c) $\sqrt{\frac{a \cdot e}{b \cdot \pi}}$

d) $a - b$

e) $\frac{(a+b)^{\frac{e}{\pi}}}{\pi}$

145. (IME/2014)

Sabe-se que $y \cdot z \cdot \sqrt{z \cdot \sqrt{x}} = x \cdot y^3 \cdot z^2 = \frac{x}{z \cdot \sqrt{y \cdot z}} = e$**, em que** e **é a base dos logaritmos naturais. O valor de** $x + y + z$ **é**

a) $e^3 + e^2 + 1$

b) $e^2 + e^{-1} + e$

c) $e^3 + 1$

d) $e^3 + e^{-2} + e$

e) $e^3 + e^{-2} + e^{-1}$

146. (IME/2014)

Resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \dfrac{y}{x} \\ 2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^y \end{cases}$$

147. (IME/2014)

Qual é o menor número?

a) $\pi \cdot 8!$

b) 9^9

c) $2^{2^{2^2}}$

d) 3^{3^3}

e) $2^{13} \cdot 5^3$

148. (IME/2013)

Considere a equação $\log_{3x} \frac{3}{x} + (\log_3 x)^2 = 1$**. A soma dos quadrados das soluções reais dessa equação está contida no intervalo**

a) $[0, 5)$

b) $[5, 10)$

c) $[10, 15)$

d) $[15, 20)$

e) $[20, \infty)$

149. (IME/2012)

Se $\log_{10} 2 = x$ **e** $\log_{10} 3 = y$**, então** $\log_5 18$ **vale:**

a) $\frac{x+2y}{1-x}$

b) $\frac{x+y}{1-x}$

c) $\frac{2x+y}{1+x}$

d) $\frac{x+2y}{1+x}$

e) $\frac{3x+2y}{(1-x)}$

150. (IME/2010)

Seja $f(x) = |3 - \log(x)|, x \in \mathbb{R}$**. Sendo** n **um número inteiro positivo, a desigualdade**

$$\left|\frac{f(x)}{4}\right| + \left|\frac{2f(x)}{12}\right| + \left|\frac{4f(x)}{36}\right| + \cdots + \left|\frac{2^{n-3}f(x)}{3^{n-1}}\right| + \cdots \leq \frac{9}{4}$$

Somente é possível se:

Obs.: log **representa a função logarítmica na base 10.**

a) $0 \leq x \leq 10^6$

b) $10^{-6} \leq x \leq 10^8$

c) $10^3 \leq x \leq 10^6$

d) $10^0 \leq x \leq 10^6$

e) $10^{-6} \leq x \leq 10^6$

151. (IME/2009)

Dada a função $F: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$**, com as seguintes características:**

$F(0, 0) = 1;$

$F(n, m + 1) = q \cdot F(n, m)$**, onde** q **é um número real diferente de zero.**

$F(n + 1, 0) = r + F(n, 0)$**, onde** r **é um número real diferente de zero.**

Determine o valor de $\sum_{i=0}^{2009} F(i, i)\, , i \in \mathbb{N}$**.**

152. (IME/2007)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, tal que:

$$\begin{cases} f(4) = 5 \\ f(x+4) = f(x) \cdot f(4) \end{cases}$$

O valor de $f(-4)$ é:

a) $-4/5$

b) $-1/4$

c) $-1/5$

d) $1/5$

e) $4/5$

153.(IME/2005)

Dada a função $f(x) = \frac{(156^x + 156^{-x})}{2}$, demonstre que:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

154. (IME/2004)

Seja uma função $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, onde ⍰ representa o conjunto dos números reais, tal que $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$ para a e b pertencentes ao domínio de f. Demonstre que f é uma função par.

155. (IME/1993)

Considere uma função $L: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ que satisfaz:

1. L **é crescente, isto é, para quaisquer** $0 < x < y$ **tem-se** $L(x) < L(y)$.

2. $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$ **para quaisquer** $x, y > 0$.

Mostre que:

a) $L(1) = 0$.

b) $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$ **para todo** $x > 0$.

c) $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$ **para quaisquer** $x, y > 0$.

d) $L(x^n) = nL(x)$ **para todo** $x > 0$ **e natural** n.

e) $L(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}L(x)$ **para todo** $x > 0$ **e natural** n.

f) $L(x) < 0 < L(y)$ **sempre que** $0 < x < 1 < y$.

GABARITO

90. a
91. 81
92. e
93. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq \log_3\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$
94. Esboço
95. c
96. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < \log_{\frac{8}{9}} 2\right\}$
97. d
98. b
99. e
100. a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x > \frac{3+3\sqrt{5}}{2}\right\}$
101. d
102. $S = \left\{\frac{1}{4}, 64, \frac{1}{16}\right\}$
103. d
104. e
105. a
106. $S = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
107. e
108. e
109. a
110. b
111. $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$
112. c
113. Demonstração
114. a
115. $\frac{1}{5} \leq x \leq 1$
116. d
117. c
118. a
119. b
120. d
121. a
122. e
123. b
124. e
125. c
126. d
127. e
128. d
129. a
130. b
131. c
132. e

133. $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{3} \leq x < 3^8\right\}$
134. a
135. d
136. c
137. $f\big(f(2019)\big) = 10$
138. a) $a = 2^{\frac{\log_3 2}{4}}, b = 2^{\frac{\log_3 2+1}{4}}, c = 3 \cdot 2^{\frac{\log_3 2}{4}}$ b) $r = 2^{\frac{\log_3 2}{4}}$ e $q = \log_{\frac{3}{2}} 2$
139. a
140. $S = \left\{\left(\sqrt{3}^{363}; 3^{11}\right)\right\}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < \log_{\frac{8}{9}} 2\right\}$
141. Demonstração
142. c
143. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{3} < x < 1 \; ou \; 3 < x < 9\right\}$
144. a
145. b
146. $x = y = 2$
147. c
148. c
149. a
150. d
151. $\frac{q^{2010}-1}{q-1} + r \cdot \left[\frac{(2009q-2010)q^{2010}+q}{(q-1)^2}\right]$
152. d
153. Demonstração.
154. Demonstração.
155. Demonstração.

RESOLUÇÃO

90. (ITA/2020)

Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ números reais tais que $2^{x_1} = 4; 3^{x_2} = 5; 4^{x_3} = 6; 5^{x_4} = 7; 6^{x_5} = 8$ e $7^{x_6} = 9$. Então, o produto $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ é igual a

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 14.

Comentários

Os números reais podem ser escritos como:

$$2^{x_1} = 4 \Rightarrow x_1 = \log_2 4$$
$$3^{x_2} = 5 \Rightarrow x_2 = \log_3 5$$

$$4^{x_3} = 6 \Rightarrow x_3 = \log_4 6$$
$$5^{x_4} = 7 \Rightarrow x_4 = \log_5 7$$
$$6^{x_5} = 8 \Rightarrow x_5 = \log_6 8$$
$$7^{x_6} = 9 \Rightarrow x_6 = \log_7 9$$

Assim, fazendo o produto entre eles, obtemos:

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = \log_2 4 \cdot \log_3 5 \cdot \log_4 6 \cdot \log_5 7 \cdot \log_6 8 \cdot \log_7 9$$

Podemos usar a seguinte propriedade dos logaritmos para simplificar a expressão:

$$\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$$

Reorganizando os termos da expressão:

$$\log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9 \cdot \log_6 8 = \log_2 6 \cdot \log_6 8 \cdot \log_3 7 \cdot \log_7 9$$
$$= \log_2 8 \cdot \log_3 9 = \log_2 2^3 \cdot \log_3 3^2 = 3 \cdot 2 = 6$$
$$\therefore x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 6$$

Gabarito: "a".

---

91. (ITA/2019)

Sabendo que x pertence ao intervalo fechado $[1, 64]$, determine o maior valor da função

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right)$$

Comentários

Para analisar os valores dessa função, devemos simplificá-lo.

Usando as propriedades do logaritmo, temos:

$$\log_2\left(\frac{8}{x}\right) = \log_2 8 - \log_2 x = \log_2 2^3 - \log_2 x = 3 - \log_2 x$$

Assim, encontramos:

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot (3 - \log_2 x)$$

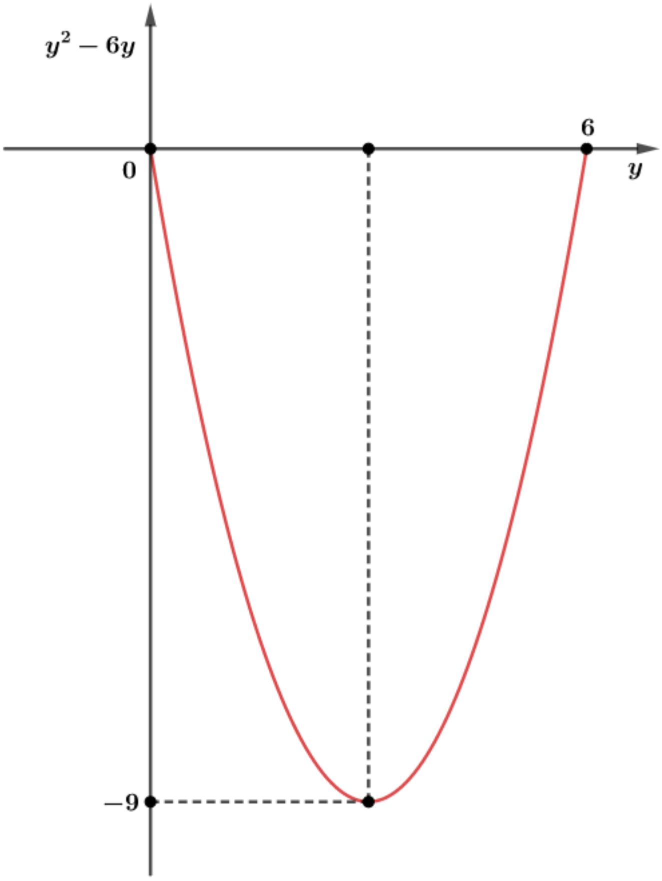
Vamos fazer uma mudança de variável. Como $x \in [1, 64]$, fazendo $y = \log_2 x$, obtemos:

$$x = 2^y \Rightarrow 1 \leq 2^y \leq 64 \Rightarrow 2^0 \leq 2^y \leq 2^6$$

Sendo a função exponencial injetora e 2^y crescente, temos:

$$0 \leq y \leq 6 \Rightarrow y \in [0, 6]$$
$$f(y) = y^4 - 12y^3 + 36y^2$$
$$f(y) = y^2(y^2 - 12y + 36)$$
$$f(y) = y^2(y - 6)^2$$
$$\Rightarrow \boxed{f(y) = (y^2 - 6y)^2}$$

A expressão $y^2 - 6y$ no plano cartesiano representa uma parábola com concavidade para cima. No intervalor $y \in [0, 6]$, essa expressão assume os valores $[-9,0]$ conforme a figura:



Desse modo, a imagem da função f é:

$$f(y) = (y^2 - 6y)^2 \xRightarrow{y \in [0,6]} \boxed{Im(f) \in [0, 81]}$$

Portanto, o maior valor da função é 81.

Gabarito: 81

92. (ITA/2018)

Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, então

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$

c) $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{3}{2}$

d) $\frac{3}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$

e) $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Comentários

Analisando as alternativas, temos que encontrar alguma relação para o número $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Usando os dados do enunciado, temos:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\log_2 \pi}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\log_5 \pi}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}$$

Vamos igualar a base dos logaritmos, fazendo:

$$\log_5 \pi = \frac{\log_2 \pi}{\log_2 5}$$

Substituindo na equação, encontramos:

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\frac{\log_2 \pi}{\log_2 5}} = \frac{1 + \log_2 5}{\log_2 \pi}$$

$$1 = \log_2 2 \Rightarrow \frac{1 + \log_2 5}{\log_2 \pi} = \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 \pi} = \frac{\log_2(2 \cdot 5)}{\log_2 \pi} = \frac{\log_2 10}{\log_2 \pi} = \log_\pi 10$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_\pi 10$$

Devemos analisar quanto vale o número $\log_\pi 10$. Fazendo $x = \log_\pi 10$, temos:

$$\pi^x = 10$$

π vale aproximadamente 3,14. Podemos dizer que $\pi^2 < 10$, então x deve ser maior do que 2.

Com isso, encontramos:

$$2 < x$$

$$x = \log_\pi 10 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow 2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Logo, o gabarito é a letra e.

Gabarito: "e".

---

93. (ITA/2018)

Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação exponencial:

$$3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$$

Comentários

Reescrevendo a inequação, temos:

$$3^{x-2} + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} \leq \frac{1081}{18}$$

$$\frac{3^x}{3^2} + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^3 + 3^x \cdot 3^4 \leq \frac{1081}{18}$$

Fazendo $y = 3^x$, obtemos:

$$\frac{y}{9} + 3y + 9y + 27y + 81y \leq \frac{1081}{18}$$

$$\frac{y(1 + 27 + 81 + 243 + 729)}{9} \leq \frac{1081}{18}$$

$$\frac{y1081}{9} \leq \frac{1081}{18}$$

Simplificando a inequação:

$$\Rightarrow y \leq \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Voltando à variável x:

$$y = 3^x \leq \frac{1}{2}$$

Aplicando o log na base 3 na inequação:

$$\log_3 3^x \leq \log_3 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x \leq \log_3 \frac{1}{2}$$

O conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq \log_3 \left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq \log_3 \left(\frac{1}{2}\right)\right\}}$

---

94. (ITA/2017)

Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left|2^{-|x|} - \frac{1}{2}\right|$$

Comentários

Para esboçar o gráfico de uma função modular, devemos construir a função de dentro pra fora. Do enunciado do problema, temos:

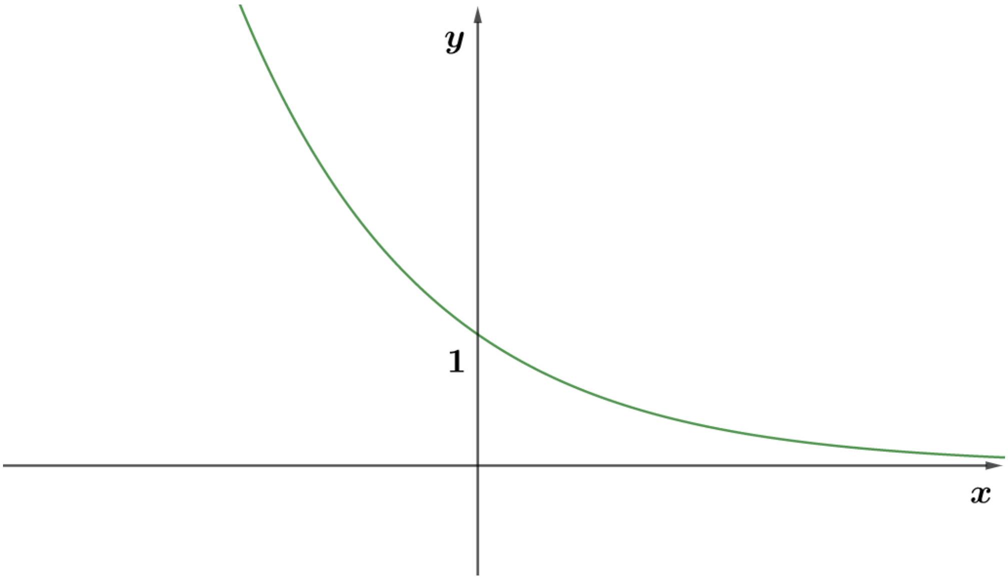
$$f(x) = \left|\frac{1}{2^{|x|}} - \frac{1}{2}\right|$$

Vamos iniciar pela função mais simples:

Esboçando $\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

Como a base é menor do que 1, a função é decrescente.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



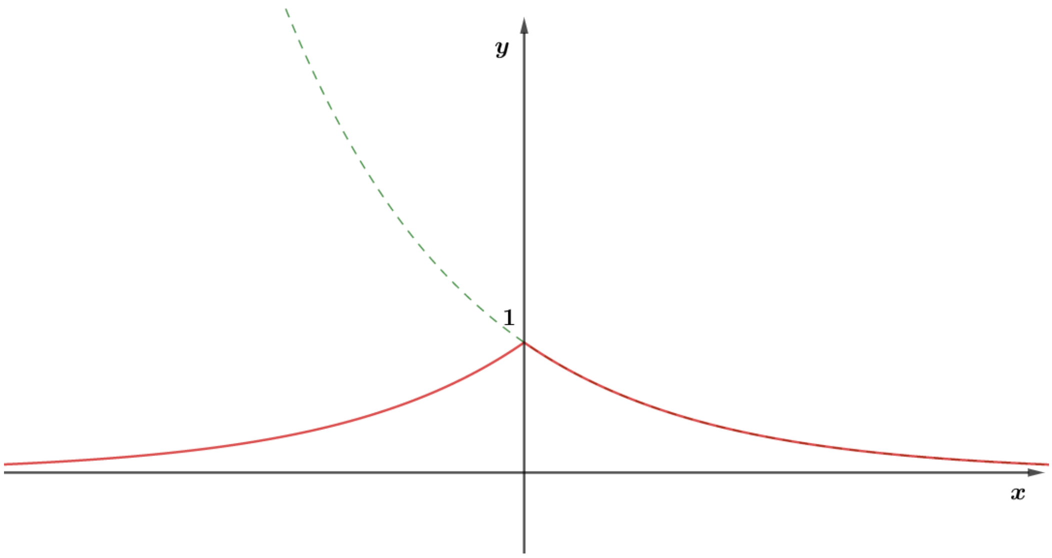
Agora aplicando o módulo em x, $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{2^x}, x \geq 0 \\ 2^x, x < 0 \end{cases}$$

2^x é uma função crescente e $1/2^x$ é uma função decrescente. O que muda no gráfico ao aplicar o módulo é a região do gráfico cujo x é negativo.

Para esboçar esse gráfico, basta redesenhar a parte das abcissas negativas de acordo com a função abaixo:

$$f(x) = \frac{1}{2^{|x|}}$$



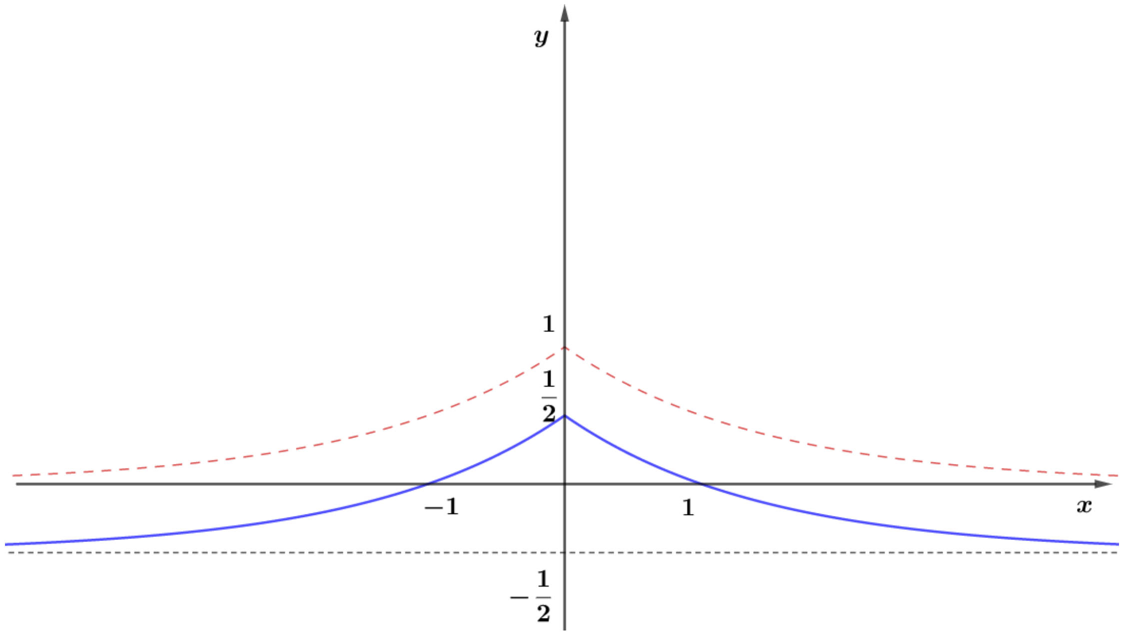
Agora, transladamos $-1/2$ no gráfico. Vamos descer o gráfico $1/2$ unidade verticalmente.

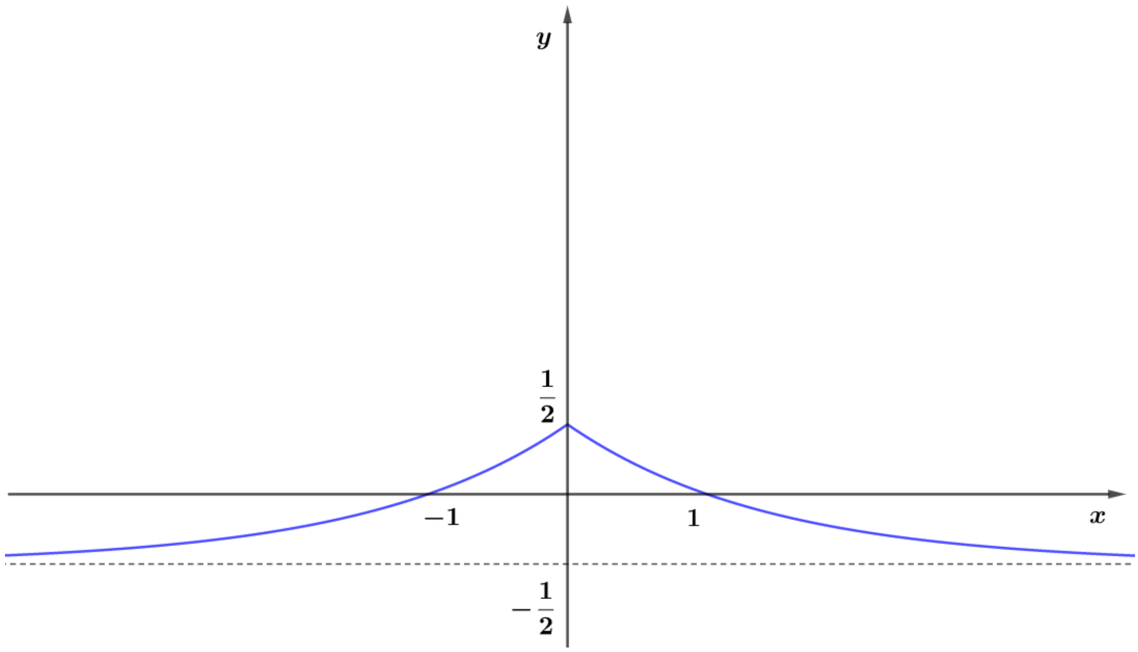
Nesse caso, temos 2 raízes:

$$\frac{1}{2^{|x|}} - \frac{1}{2} = 0$$
$$\Rightarrow x = \pm 1$$

Esboçando:

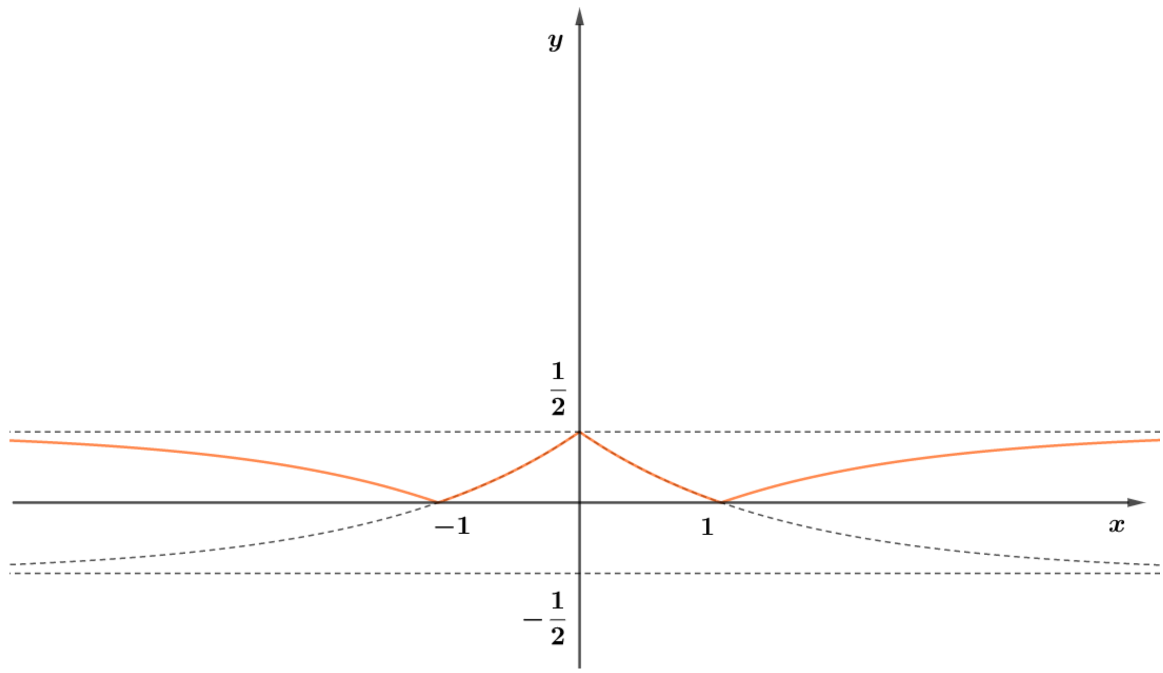
$$f(x) = \frac{1}{2^{|x|}} - \frac{1}{2}$$



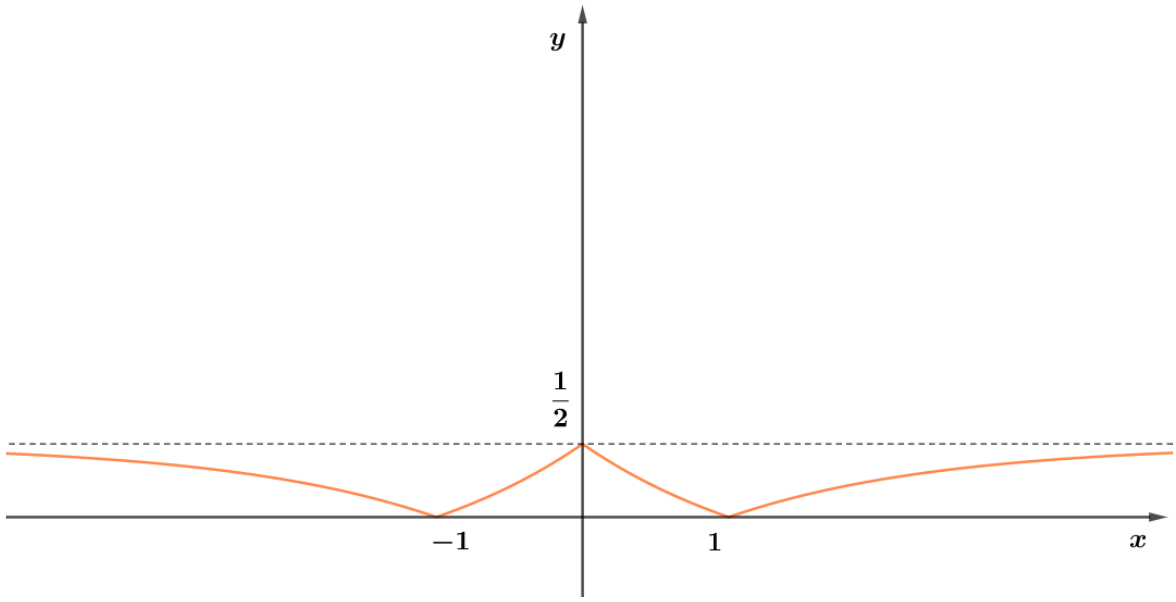


Por último, aplicamos o módulo no gráfico acima. Basta espelhar o gráfico em relação ao eixo x:

$$f(x) = \left|\frac{1}{2^{|x|}} - \frac{1}{2}\right|$$



O esboço final é dado por:



Gabarito: Esboço

95. (ITA/2017)

Sejam a, b, c, d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas II e III.

e) todas.

Comentários

I. Analisando a afirmação, para verificar a igualdade, devemos aplicar o log na base c em ambos os lados da igualdade:

$$\log_c a^{\log_c b} = \log_c b^{\log_c a}$$

$$\log_c b \log_c a = \log_c a \log_c b$$

Portanto, a afirmação é verdadeira.

II. Vamos usar a afirmação I para verificar essa afirmação.

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Da equação:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c}\left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = \frac{a^{\log_d c}}{b^{\log_d c}}\frac{b^{\log_d a}}{c^{\log_d a}}\frac{c^{\log_d b}}{a^{\log_d b}}$$

Vamos escrever cada termo usando x, y, z para melhor visualizar o resultado:

$$a^{\log_d c} = c^{\log_d a} = x$$

$$b^{\log_d c} = c^{\log_d b} = y$$

$$a^{\log_d b} = b^{\log_d a} = z$$

Substituindo na expressão:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{y}{z}$$

Calculando o resultado, temos:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{y}{z} = \frac{xyz}{xyz} = 1$$

∴Verdadeira.

III. Analisando a afirmação, se tentarmos escrever todos os logs na base 10, encontramos:

$$\frac{\log bc}{\log ab} = \frac{\log c}{\log a}$$

$$\frac{\log b + \log c}{\log a + \log b} = \frac{\log c}{\log a}$$

Vendo a equação acima, podemos perceber que é improvável que o lado esquerdo se iguale ao lado direito. Vamos pensar em um contra-exemplo:

$$\log_{ab} bc = \log_a c$$

Para $a = 2, b = 2$ e $c = 1$:

$$\log_4 2 = \log_2 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 0\ (absurdo!)$$

∴Falsa.

Gabarito: "c".

---

96. (ITA/2017)

Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $4^{3x-1} > 3^{4x}$.

Comentários

$$4^{3x-1} > 3^{4x}$$

Vamos aplicar log na inequação:

$$\log 4^{3x-1} > \log 3^{4x}$$

$$(3x-1)\log 4 > 4x\log 3$$

Isolando o x:

$$3x\log 4 - \log 4 > 4x\log 3$$

$$x(3\log 4 - 4\log 3) > \log 4$$

$$x(\log 4^3 - \log 3^4) > \log 4$$

$$x\left(\log\frac{4^3}{3^4}\right) > \log 4$$

$$x\left(\log\frac{64}{81}\right) > \log 4$$

Como $\frac{64}{81} < 1$, temos $\log\frac{64}{81} < 0$. Assim, dividindo a inequação por $\log\frac{64}{81}$, encontramos:

$$x < \frac{\log 4}{\log\frac{64}{81}}$$

Simplificando:

$$\log\frac{64}{81} = \log\frac{8^2}{9^2} = \log\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 2\log\frac{8}{9}$$

$$\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$$

Dessa forma, temos:

$$x < \frac{2\log 2}{2\log\frac{8}{9}}$$

$$x < \frac{\log 2}{\log\frac{8}{9}}$$

$$x < \log_{\frac{8}{9}} 2$$

Portanto, a solução da inequação é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x < \log_{\frac{8}{9}} 2 \right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x < \log_{\frac{8}{9}} 2 \right\}}$

97. (ITA/2016)

Se x é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ é igual a

a) 285

b) 286

c) 287

d) 288

e) 289

Comentários

Vamos reescrever o número x. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \in [1,10[$.

Se x é um número natural com 2015 dígitos, podemos escrever:

$$x = a \cdot 10^{2014}$$

2014 é porque a conta como 1 dígito.

Agora, aplicando o radical:

$$\sqrt[7]{x} = \sqrt[7]{a} \cdot \sqrt[7]{10^{2014}}$$

$$x^{\frac{1}{7}} = a^{\frac{1}{7}} 10^{\frac{2014}{7}}$$

Dividindo 2014 por 7, obtemos:

$$2014 = 7 \cdot 287 + 5$$

Substituindo na equação:

$$x^{\frac{1}{7}} = a^{\frac{1}{7}} 10^{\frac{7 \cdot 287 + 5}{7}}$$

$$x^{\frac{1}{7}} = a^{\frac{1}{7}} 10^{287} \cdot 10^{\frac{5}{7}}$$

$$x^{\frac{1}{7}} = (a \cdot 10^5)^{\frac{1}{7}} \cdot 10^{287}$$

$$\sqrt[7]{x} = \sqrt[7]{10^5 a} \cdot 10^{287}$$

Definimos que $1 \leq a < 10$. Então:

$$10^5 \leq 10^5 \cdot a < 10^6$$

$$1 < \sqrt[7]{10^5} \leq \sqrt[7]{10^5 \cdot a} < \sqrt[7]{10^6} < 10$$

$$1 < \sqrt[7]{10^5 \cdot a} < 10$$

Portanto, o número $\sqrt[7]{10^5 \cdot a}$ possui 1 algarismo. Logo, o total de algarismos do número é dado por:

$$\sqrt[7]{x} = \underbrace{\sqrt[7]{10^5 a}}_{1\ algarismo} \cdot \underbrace{10^{287}}_{287\ algarismos}$$

$$287 + 1 = 288$$

Gabarito: "d".

---

98. (ITA/2016)

Considere as seguintes afirmações:

I. A função $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

II. A equação $2^{x+2} = 3^{x-1}$ possui uma única solução real.

III. A equação $(x+1)^x = x$ admite pelo menos uma solução real positiva.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

e) apenas III.

Comentários

I. Vamos verificar se a função é crescente comparando dois números a, b. Seja $a, b \in]1, +\infty[$ tal que $1 < a < b$. Então:

$$1 < a < b$$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{b} > -\frac{1}{a}$$

$$1 - \frac{1}{b} > 1 - \frac{1}{a}$$

$$\frac{b-1}{b} > \frac{a-1}{a}$$

$$f(b) > f(a)$$

Portanto, $a < b \rightarrow f(a) < f(b)$. f é estritamente crescente.

∴ Verdadeira.

II. Vamos resolver a equação:

$$2^{x+2} = 3^{x-1}$$

$$4 \cdot 2^x = \frac{3^x}{3}$$

Isolando x:

$$12 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

Aplicando log na base $3/2$:

$$\log_{\frac{3}{2}} 12 = x$$

Encontramos uma única solução real.

∴Verdadeira.

III. Verificando a equação:

$$(x+1)^x = x$$

Aplicando log na base x:

$$\log_x (x+1)^x = \log_x x$$
$$x \log_x (x+1) = 1$$

Vamos ver se existe algum x real positivo que satisfaz a equação:

Se $0 < x < 1$, temos $\log_x(x+1) < 1$ e consequentemente:

$$x \log_x (x+1) < 1$$

Se $x > 1$, temos $\log_x(x+1) > 1$ e consequentemente:

$$x \log_x (x+1) > 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, a expressão $x \log_x (x+1)$ resulta em uma desigualdade. Portanto, não temos x que satisfaz a equação.

∴Falsa.

Gabarito: "b".

---

99. (ITA/2016)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1000$ e $a_n = \log_{10}(1 + a_{n-1})$ para $n \geq 2$. Considere as afirmações a seguir:

I. A sequência (a_n) é decrescente.

II. $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$.

III. $a_n < 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

e) apenas III.

Comentários

I. Para $n = 2$, temos:

$$a_2 = \log_{10}(1 + a_1) = \log_{10}(1 + 1000) = \log_{10} 1001$$

Vamos comparar a_2 com a_1. Aproximando a_2:

$$a_2 = \log_{10} 1001 \cong \log_{10} 1000 = 3 < 1000 = a_1$$

Então, encontramos $a_2 < a_1$. Vamos supor que $a_{n+1} < a_n$ e provar essa propriedade usando PIF.

Para $n = 1$, já sabemos que $a_2 < a_1$.

Para $k \in \mathbb{N}$, temos que provar que $a_k < a_{k-1} \to a_{k+1} < a_k$.

Usando a definição para a_k:

$$a_k = \log_{10}(1 + a_{k-1})$$
$$10^{a_k} = 1 + a_{k-1}$$
$$a_{k-1} = 10^{a_k} - 1$$

Para a_{k+1}:

$$a_{k+1} = \log_{10}(1 + a_k)$$
$$10^{a_{k+1}} = 1 + a_k$$
$$a_k = 10^{a_{k+1}} - 1$$

Da hipótese:

$$a_k < a_{k-1}$$

Substituindo a_k e a_{k-1}:

$$10^{a_{k+1}} - 1 < 10^{a_k} - 1$$
$$10^{a_{k+1}} < 10^{a_k}$$
$$\Rightarrow a_{k+1} < a_k$$

Portanto, encontramos que $a_{n+1} < a_n$, logo, a sequência (a_n) é decrescente.

∴Verdadeira.

II. $a_1 = 1000 > 0$

Se $a_n > 0$, temos:

$$a_{n+1} = \log_{10}(1 + a_n) > \log_{10} 1 = 0$$

Portanto, $a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > 0$. Logo, $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

∴Verdadeira.

III. Para $n = 3$:

$$a_3 = \log_{10}(1 + a_2)$$

Usando a aproximação $a_2 \cong 3 < 4$, temos:

$$a_3 = \log_{10}(1 + a_2) < \log_{10}(1 + 4) = \log_{10} 5 < \log_{10} 10 = 1$$

Como a sequência é decrescente e $a_3 < 1$, temos que $a_n < 1, \forall n \geq 3$.

∴Verdadeira.

Gabarito: “e”.

100.(ITA/2016)

Seja f a função definida por $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$. Determine:

a) O domínio D_f da função f.

b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 2$.

c) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) > 1$.

Comentários

a) Analisando as condições da função, encontramos os seguintes requisitos:

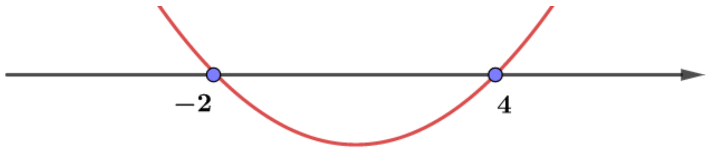
$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \\ x^2 - 2x - 8 > 0 \end{cases}$$

$$x > -1 \text{ e } x \neq 0$$

Resolvendo a inequação:

$$x^2 - 2x - 8 > 0$$

$$(x - 4)(x + 2) > 0$$



$$\Rightarrow x < -2 \; ou \; x > 4$$

Juntando as condições, encontramos:

$$x > 4$$

Portanto, o domínio da função é dado por:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$$

b) Fazendo $f(x) = 2$, temos:

$$\log_{x+1}(x^2 - 2x - 8) = 2$$

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 1)^2$$

$$x^2 - 2x - 8 = x^2 + 2x + 1$$

$$4x = -9$$

$$\Rightarrow x = -\frac{9}{4}$$

Como o domínio de f é $x > 4$, temos que $x = -9/4$ não pode ser solução do problema. Logo:

$$S = \emptyset$$

c) Fazendo $f(x) > 1$, temos:

$$\log_{x+1}(x^2 - 2x - 8) > 1$$

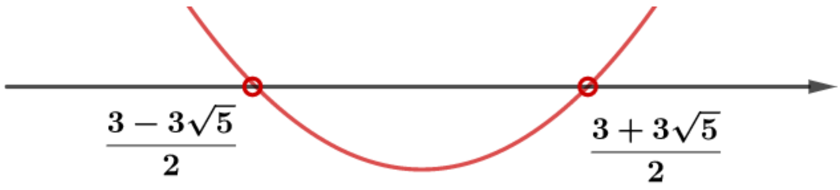
Como $x > 4$, temos que a base do logaritmo é maior do que 1, logo a função é crescente.

Dessa forma, podemos escrever:

$$x^2 - 2x - 8 > (x + 1)^1$$
$$x^2 - 3x - 9 > 0$$

Raízes:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 36}}{2} = \frac{\left(3 \pm \sqrt{45}\right)}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$



A solução dessa inequação é dada por:

$$x < \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \ ou \ x > \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$$

Devemos fazer a intersecção dessa solução com o domínio de f. Para isso, precisamos saber se esses números são maiores ou menores do que 4. Comparando o maior valor:

$$\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} > \frac{3 + 3 \cdot 2}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 > 4$$

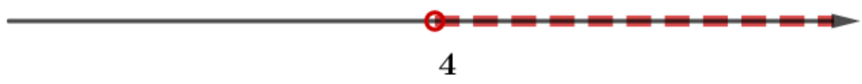
$$\Rightarrow \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} > 4$$

Agora, para o menor valor:

$$\frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} < \frac{3 - 3 \cdot 2}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5 < 4$$

$$\Rightarrow \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} < 4$$

Colocando os números no eixo x, temos:



Fazendo a intersecção da solução, encontramos:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x > \frac{3+3\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}}$ b) $\boldsymbol{S = \emptyset}$ c) $\boldsymbol{S = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x > \frac{3+3\sqrt{5}}{2} \right\}}$

101.(ITA/2015)

Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$.

III. $ln\sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

a) nenhuma.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) I, II e III.

Comentários

I. Do enunciado da afirmação:

A expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é uma dízima periódica. Portanto, x é racional.

$\therefore$Verdadeira.

II. A sequência é uma PG infinita de razão $q = 1/\sqrt{2}$. Veja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}^0}+\frac{1}{\sqrt{2}^1}+\frac{1}{\sqrt{2}^2}+\cdots\right)$$

Lembrando que a soma de uma PG infinita é dada por:

$$S=\frac{1}{1-q}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}^0}+\frac{1}{\sqrt{2}^1}+\frac{1}{\sqrt{2}^2}+\cdots\right)=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$$

O resultado que encontramos é diferente da afirmação.

∴ Falsa.

III. Vamos simplificar o número:

$$ln\sqrt[3]{e^2}+(\log_3 2)(\log_4 9)$$

$$\frac{2}{3}+(\log_3 2)(\log_{2^2} 3^2)$$

$$\frac{2}{3}+\log_3 2\cdot\log_2 3$$

$$\frac{2}{3}+\frac{\log 2}{\log 3}\cdot\frac{\log 3}{\log 2}$$

$$\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}\in\mathbb{Q}$$

∴Verdadeira.

Gabarito: "d".

102.(ITA/2014)

Determine as soluções reais da equação em x:

$$(\log_4 x)^3-\log_4(x^4)-\frac{3\log_{10}16x}{\log_{100}16}=0$$

Comentários

Como condição de existência: $x>0$.

Simplificando a equação, temos:

$$(\log_4 x)^3-\log_4(x^4)-\frac{3\log_{10}16x}{\log_{100}16}=0$$

$$(\log_4 x)^3-4\log_4 x-\frac{\frac{3\log_4 16x}{\log_4 10}}{\frac{\log_4 16}{\log_4 100}}=0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4\log_4 x - \frac{\frac{3(\log_4 4^2 + \log_4 x)}{\log_4 10}}{\frac{\log_4 4^2}{\log_4 10^2}} = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4\log_4 x - \frac{\frac{3(2 + \log_4 x)}{\log_4 10}}{\frac{2}{2\log_4 10}} = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4\log_4 x - 3(2 + \log_4 x) = 0$$

Fazendo $\log_4 x = y$:

$$y^3 - 4y - 3(2 + y) = 0$$

$$y^3 - 7y - 6 = 0$$

Fatorando a equação:

$$y^3 - y - 6y - 6 = 0$$

$$y(y^2 - 1) - 6(y + 1) = 0$$

$$(y + 1)(y(y - 1) - 6) = 0$$

$$(y + 1)(y^2 - y - 6) = 0$$

$$(y + 1)(y - 3)(y + 2) = 0$$

Encontrando as raízes:

$$y_1 = -1$$

$$y_2 = 3$$

$$y_3 = -2$$

Encontrando os valores de x:

$$y = \log_4 x$$

$$y_1 = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 4^3 = 64$$

$$y_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 4^{-2} = \frac{1}{16}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\frac{1}{4}, 64, \frac{1}{16}\right\}$$

Gabarito: $S = \left\{\frac{1}{4}, 64, \frac{1}{16}\right\}$

103.(ITA/2014)

A soma

$$\sum_{1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}}$$

É igual a

a) $\frac{8}{9}$

b) $\frac{14}{15}$

c) $\frac{15}{16}$

d) $\frac{17}{18}$

e) 1

Comentários

Simplificando a expressão, temos:

$$\sum_{1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}} = \sum_{1}^{4} \frac{\log_{2^{-1}} 2^{\frac{5}{n}}}{\log_{2^{-1}} (2^3)^{n+2}} = \sum_{1}^{4} \frac{-\frac{5}{n}}{\frac{3(n+2)}{-1}} = \sum_{1}^{4} \frac{5}{3n(n+2)}$$

Calculando o valor da soma:

$$\sum_{1}^{4} \frac{5}{3n(n+2)} = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6}\right)$$

$$\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24}\right) = \frac{\frac{5}{3}(40+15+8+5)}{120} = \frac{5}{3}\left(\frac{68}{120}\right) = \frac{68}{3\cdot 24} = \frac{68}{72} = \frac{17}{18}$$

$$\Rightarrow S = \frac{17}{18}$$

Gabarito: "d".

---

104. (ITA/2013)

Considere as funções f e g, da variável real x, definidas, respectivamente, por $f(x) = e^{x^2+ax+b}$ e $g(x) = \ln\left(\frac{ax}{3b}\right)$, em que a e b são números reais. Se $f(-1) = 1 = f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta gof que

a) $gof(1) = \ln 3$.

b) $\nexists gof(0)$.

c) gof **nunca se anula.**

d) gof **está definida apenas em** $\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$.

e) gof **admite dois zeros reais distintos.**

Comentários

O enunciado nos dá $f(-1)$ e $f(-2)$. Vamos encontrar os coeficientes a e b de f:

$$f(-1) = e^{1-a+b} = 1$$
$$f(-2) = e^{4-2a+b} = 1$$

Dividindo $\frac{f(-1)}{f(-2)}$:

$$\frac{e^{1-a+b}}{e^{4-2a+b}} = 1$$
$$e^{a-3} = 1$$
$$e^{a} = e^{3}$$
$$\Rightarrow a = 3$$

Substituindo o resultado em $f(-1)$:

$$e^{1-3+b} = 1$$
$$e^{b-2} = 1$$
$$e^{b} = e^{2}$$
$$\Rightarrow b = 2$$

Portanto, as funções f e g são dadas por:

$$f(x) = e^{x^2+3x+2}$$
$$g(x) = \ln\left(\frac{3x}{3\cdot 2}\right) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

Encontrando gof:

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = \ln\left(\frac{f(x)}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^{x^2+3x+2}}{2}\right) = \ln\left(e^{x^2+3x+2}\right) - \ln 2 = x^2 + 3x + 2 - \ln 2$$

Vamos analisar as alternativas:

a) Devemos calcular $gof(1)$:

$$gof(1) = 1 + 3 + 2 - ln2 = 6 - \ln 2 \neq ln3$$

b) $gof(0) = 2 - \ln 2$. Existe $gof(0)$.

c) Vamos verificar se gof possui raízes:

$$gof(x) = 0$$
$$x^2 + 3x + 2 - \ln 2 = 0$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2 - \ln 2)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1 + \ln 2}}{2}$$

gof possui 2 raízes distintas. O que nos leva à alternativa e.

Gabarito: “e”.

105.(ITA/2013)

Se os números reais a e b satisfazem, simultaneamente, as equações

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \text{ e } \ln(a^2 + b) + \ln 8 = \ln 5,$$

Um possível valor de $\frac{a}{b}$ é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) 1

c) $\sqrt{2}$

d) 2

e) $3\sqrt{2}$

Comentários

Do enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{a\sqrt{b}} = \dfrac{1}{2} \\ \ln(a^2 + b) + \ln 8 = \ln 5 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} a\sqrt{b} = \dfrac{1}{4} \\ \ln(a^2 + b) = \ln 5 - \ln 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 b = \dfrac{1}{16} \\ \ln(a^2 + b) = \ln\left(\dfrac{5}{8}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 b = \dfrac{1}{16} \\ a^2 + b = \dfrac{5}{8} \end{cases}$$

Vamos encontrar os valores de a e b substituindo a primeira equação na segunda:

$$a^2 = \frac{1}{16b}$$

$$\frac{1}{16b} + b = \frac{5}{8}$$

$$16b^2 - 10b + 1 = 0$$

$$b = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{16} = \frac{5 \pm 3}{16} = \frac{1}{2} \; ou \; \frac{1}{8}$$

Das condições da equação com radical, temos que necessariamente $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Então:

$$b = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$b = \frac{1}{8} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Possíveis valores para a/b:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{8}}=4\sqrt{2}$$

Analisando as alternativas, encontramos a resposta em a.

Gabarito: "a".

106.(ITA/2011)

Resolva a inequação em $\mathbb{R}$:

$$16<\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2-x+19)}$$

Comentários

Vamos simplificar a inequação:

$$16<\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2-x+19)}$$

$$4^2<(4^{-1})^{\log_{5^{-1}}(x^2-x+19)}$$

$$4^2<(4^{-1})^{(-1)\log_5(x^2-x+19)}$$

$$4^2<4^{\log_5(x^2-x+19)}$$

$$\Rightarrow 2<\log_5(x^2-x+19)$$

$$5^2<x^2-x+19$$

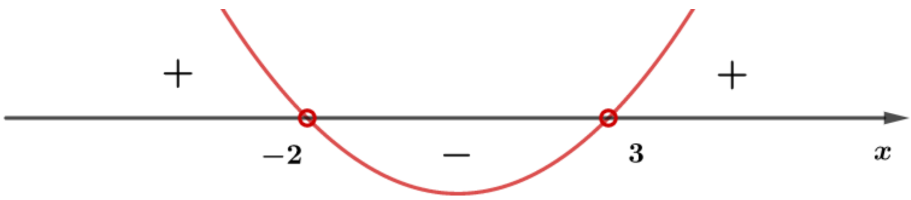
$$0<x^2-x-6$$

$$0<(x-3)(x+2)$$

Raízes:

$$x=3\ ou\ x=-2$$

Estudo do sinal:



$$\therefore x<-2\ ou\ x>3$$

$$S=(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$$

Gabarito: $S=(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

107.(ITA/2008)

Para $x\in\mathbb{R}$, o conjunto solução de $|5^{3x}-5^{2x+1}+4\cdot 5^x|=|5^x-1|$ é

a) $\{0,2\pm\sqrt{5},2\pm\sqrt{3}\}$

b) $\{0, 1, \log_5(2+\sqrt{5})\}$

c) $\left\{0, \left(\frac{1}{2}\right)\log_5 2, \frac{1}{2}\log_5 3, \log_5 \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

d) $\{0, \log_5(2+\sqrt{5}), \log_5(2+\sqrt{3}), \log_5(2-\sqrt{3})\}$

e) A única solução é $x = 0$

Comentários

Inicialmente, devemos simplificar a equação:

$$|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$$

$$|5^x(5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 4)| = |5^x - 1|$$

$$|5^x(5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 4)| = |5^x - 1|$$

$$|5^x(5^x - 1)(5^x - 4)| = |5^x - 1|$$

$$|5^x - 1|(|5^x(5^x - 4)| - 1) = 0$$

Possibilidades:

$$5^x - 1 = 0 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Ou

$$|5^x(5^x - 4)| - 1 = 0$$

$$|5^x(5^x - 4)| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 5^x(5^x - 4) = 1 \\ 5^x(5^x - 4) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 1 = 0 \\ 5^{2x} - 4 \cdot 5^x + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo cada equação separadamente, temos:

$$5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 1 = 0$$

$$5^x = \left(2 \pm \sqrt{4 + 1}\right) = 2 \pm \sqrt{5}$$

Como $5^x > 0$ e $2 - \sqrt{5} < 0$, nesse caso, a única solução é $5^x = 2 + \sqrt{5}$. O que resulta:

$$x = \log_5(2 + \sqrt{5})$$

Resolvendo a outra equação:

$$5^{2x} - 4 \cdot 5^x + 1 = 0$$

$$5^x = \left(2 \pm \sqrt{4 - 1}\right) = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$2 - \sqrt{3} > 0$$

$$\Rightarrow 5^x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \log_5\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

Portanto, encontramos 4 soluções:

$$S = \{0, \log_5(2+\sqrt{5}), \log_5(2 \pm \sqrt{3})\}$$

Gabarito: "e".

108.(ITA/2007)

Sejam x e y dois números reais tais que e^x, e^y e o quociente

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$$

são todos racionais. A soma $x + y$ é igual a

a) 0

b) 1

c) $2\log_5 3$

d) $\log_5 2$

e) $3\log_e 2$

Comentários

Vamos eliminar o termo radical do denominador do número:

$$\frac{(e^x - 2\sqrt{5})}{(4 - e^y\sqrt{5})}\frac{(4 + e^y\sqrt{5})}{(4 + e^y\sqrt{5})}$$

$$\frac{4e^x - 8\sqrt{5} + e^{x+y}\sqrt{5} - 2e^y 5}{16 - 5e^{2y}}$$

$$\frac{4e^x - 2e^y 5 - 8\sqrt{5} + e^{x+y}\sqrt{5}}{16 - 5e^{2y}}$$

O enunciado afirma que o número é racional, então necessariamente os radicais do numerador devem ser iguais a zero:

$$-8\sqrt{5} + e^{x+y}\sqrt{5} = 0$$

$$e^{x+y} = 8$$

$$\Rightarrow x + y = \ln 2^3 = 3\ln 2$$

Com isso, encontramos a resposta no gabarito e.

Gabarito: "e".

---

109. (ITA/2007)

Sejam x, y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base n são números primos satisfazendo

$$\log_n(xy) = 49$$

$$\log_n\left(\frac{x}{z}\right) = 44$$

Então, $\log_n(xyz)$ é igual a

a) 52

b) 61

c) 67

d) 80

e) 97

Comentários

O enunciado afirma que $\log_n x, \log_n y, \log_n z$ são números primos. Vamos procurar alguma informação usando os dados fornecidos:

$$\log_n(xy) = 49$$

$$\log_n x + \log_n y = 49$$

Como os logs envolvidos são números primos e a soma é ímpar, temos que um número deve ser par e o outro ímpar. O único par que é primo é 2, então:

$$\begin{cases} \log_n x = 2 \\ \log_n y = 47 \end{cases} ou \begin{cases} \log_n x = 47 \\ \log_n y = 2 \end{cases}$$

Usando a outra equação:

$$\log_n\left(\frac{x}{z}\right) = 44$$

$$\log_n x - \log_n z = 44$$

Testando os valores dos logs, temos:

$$\log_n x = 2 \Rightarrow 2 - \log_n z = 44$$

$$\log_n z = -42$$

$$-42 \text{ não é primo}$$

Vamos testar o outro valor:

$$\log_n x = 47 \Rightarrow 47 - \log_n z = 44$$

$$\log_n z = 3$$

$$3 \text{ é primo}$$

Então, os logs que satisfazem o problema são:

$$\log_n x = 47$$

$$\log_n y = 2$$

$$\log_n z = 3$$

A questão pede $\log_n(xyz)$:

$$\log_n(xyz) = \log_n x + \log_n y + \log_n z = 52$$

Portanto, encontramos o gabarito na letra a.

Gabarito: “a”.

110.(ITA/2005)

Considere a equação em x

$$a^{x+1} = b^{\frac{1}{x}}$$

Onde a e b são números reais positivos, tais que $\ln b = 2\ln a > 0$. A soma das soluções da equação é

a) 0

b) -1

c) 1

d) $\ln 2$

e) 2

Comentários

Aplicando ln na equação, temos:

$$\ln a^{x+1} = \ln b^{\frac{1}{x}}$$

$$(x+1)\ln a = \frac{1}{x}\ln b$$

Substituindo $\ln b = 2\ln a$:

$$(x+1)\ln a = \frac{1}{x}\cdot 2\ln a$$

Como $\ln a > 0$:

$$x+1 = \frac{2}{x}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -2 \; e \; x_2 = 1$$

A soma das raízes é dado por:

$$x_1 + x_2 = -2 + 1 = -1$$

Gabarito: "b".

111.(ITA/2004)

Para $b > 1$ e $x > 0$, resolva a equação em x:

$$(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$$

Comentários

Reescrevendo a equação do enunciado:

$$(2x)^{\log_b 2} = (3x)^{\log_b 3}$$

Aplicando log na base b, temos:

$$\log_b (2x)^{\log_b 2} = \log_b (3x)^{\log_b 3}$$

Simplificando:

$$\log_b 2 \log_b 2x = \log_b 3 \log_b 3x$$

$$\log_b 2 (\log_b 2 + \log_b x) = \log_b 3 (\log_b 3 + \log_b x)$$

$$(\log_b 2)^2 + \log_b 2 \log_b x = (\log_b 3)^2 + \log_b 3 \log_b x$$

$$\log_b 2 \log_b x - \log_b 3 \log_b x = (\log_b 3)^2 - (\log_b 2)^2$$

$$\log_b x (\log_b 2 - \log_b 3) = (\log_b 3 - \log_b 2)(\log_b 3 + \log_b 2)$$

$$\log_b x = -(\log_b (3 \cdot 2))$$

$$\log_b x = \log_b 6^{-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

Portanto, encontramos uma única solução dada por:

$$S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$$

Gabarito: $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

112.(ITA/2004)

Seja α um número real, com $0 < \alpha < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de x tais que

$$\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$$

a) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

b) $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

c) $]0, 2[$

d) $]-\infty, 0[$

e) $]2, +\infty[$

Comentários

Simplificando a inequação, temos:

$$\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$$

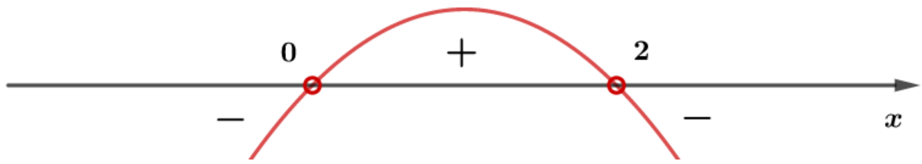
$$\frac{\alpha^{2x}}{\alpha^{\frac{2x^2}{2}}} < 1$$

$$\alpha^{2x} < \alpha^{x^2}$$

Como $0 < \alpha < 1$, temos:

$$2x > x^2$$
$$2x - x^2 > 0$$
$$x(2 - x) > 0$$

Vamos fazer o estudo do sinal da inequação acima:



Portanto, os valores de x que satisfazem a inequação é:

$$0 < x < 2$$
$$S =]0, 2[$$

Gabarito: "c".

113.(ITA/2003)

Mostre que toda função $f: \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

Comentários

Vamos analisar a equação funcional dada:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Fazendo $x = y = k \in \mathbb{R}/\{0\}$, temos:

$$f(k \cdot k) = f(k) + f(k)$$
$$f(k^2) = 2f(k)$$

Para $x = y = -k$:

$$f\big((-k)(-k)\big) = f(-k) + f(-k)$$
$$f(k^2) = 2f(-k)$$

Desse modo, encontramos a igualdade:

$$2f(k) = 2f(-k)$$
$$f(k) = f(-k)$$

Portanto, a função f é par em todo o seu domínio.

Gabarito: Demonstração.

114.(ITA/2003)

Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-constante e tal que $f(x + y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Das afirmações:

I. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

II. $f(nx) = [f(x)]^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

III. f é par

É (são) verdadeira(s):

a) apenas I e II.

b) apenas II e III.

c) apenas I e III.

d) todas.

e) nenhuma.

Comentários

I. O bizu nessa questão é fazer:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

Usando a equação funcional, encontramos:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0$$

Devemos provar que $f(x) \neq 0$:

Para $x = y = 0$:

$$f(0) = \left(f(0)\right)^2$$

$$f(0)\left(1 - f(0)\right) = 0$$

$$f(0) = 0 \; ou \; f(0) = 1$$

Para $y = 0$, temos:

$$f(x + 0) = f(x)f(0)$$

$$f(x)\left(1 - f(0)\right) = 0$$

Se $f(0) = 0$:

$$f(x) = f(x)f(0) = 0$$

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

O enunciado diz que a função f não é constante, logo essa igualdade não pode ser válida.

Com isso, nos resta $f(0) = 1$.

Portanto, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

∴Verdadeira.

II. Vamos provar por PIF que essa equação é válida:

Para $n = 1$, temos:

$$f(nx) = [f(x)]^n$$

$$f(x) = f(x)^1$$

Para $n = k \in \mathbb{N}^*$, temos que provar que $f(kx) = [f(x)]^k \Rightarrow f[(k+1)x] = [f(x)]^{k+1}$.

Usando a equação funcional do enunciado:

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

Fazendo $y = kx$:

$$f(x+kx) = f(x)f(kx)$$

Da hipótese, temos $f(kx) = [f(x)]^k$, logo:

$$f[(k+1)x] = f(x)[f(x)]^k$$
$$\Rightarrow f[(k+1)x] = [f(x)]^{k+1}$$

Portanto, a equação da afirmação é válida.

∴Verdadeira.

III. Para $x = k$ e $y = -k$, temos:

$$f(k-k) = f(k)f(-k)$$
$$f(0) = f(k)f(-k)$$

Da afirmação I, sabemos que $f(0) = 1$. Logo:

$$f(k)f(-k) = 1 \Rightarrow f(k) = \frac{1}{f(-k)}$$

Portanto:

$$f(k) \neq f(-k)$$

A função não é par.

∴Falsa.

Gabarito: "a".

115.(ITA/2002)

Seja a função f dada por

$$f(x) = (\log_3 5) \cdot \log_5 8^{x-1} + \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}$$

Determine todos os valores de x que tornam f não-negativa.

Comentários

Inicialmente, vamos simplificar a função:

$$f(x) = (\log_3 5) \cdot \log_5 8^{x-1} + \log_3 4^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}$$
$$f(x) = (\log_3 5) \cdot \log_5 (2^3)^{x-1} + \log_3 (2^2)^{1+2x-x^2} - \log_3 2^{x(3x+1)}$$
$$f(x) = (\log_3 5) \cdot \frac{\log_3 2^{3(x-1)}}{\log_3 5} + \log_3 2^{2(1+2x-x^2)} - \log_3 2^{x(3x+1)}$$
$$f(x) = \log_3 2^{3(x-1)} + \log_3 2^{2(1+2x-x^2)} - \log_3 2^{x(3x+1)}$$

$$f(x) = \log_3 \frac{\left[2^{3(x-1)}\right]\left[2^{2\left(1+2x-x^2\right)}\right]}{2^{x(3x+1)}}$$

$$f(x) = \log_3 2^{3x-3+2+4x-2x^2-3x^2-x}$$

$$f(x) = \log_3 2\,(-5x^2 + 6x - 1)$$

Queremos que f seja não-negativa, então $f(x) \geq 0$:

$$\log_3 2\,(-5x^2 + 6x - 1) \geq 0$$

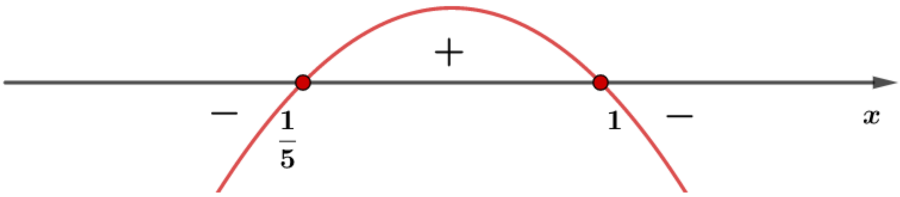
Como $\log_3 2 > 0$, temos:

$$-5x^2 + 6x - 1 \geq 0$$

Fazendo o estudo do sinal:

Raízes:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{-10} = \frac{-6 \pm 4}{-10} = 1\ ou\ \frac{1}{5}$$



Portanto, o intervalo de solução é dado por:

$$\frac{1}{5} \leq x \leq 1$$

Gabarito: $\frac{1}{5} \leq x \leq 1$

116.(ITA/2001)

Se $a \in \mathbb{R}$ **é tal que** $3y^2 - y + a = 0$ **tem raiz dupla, então a solução da equação** $3^{2x+1} - 3^x + a = 0$ **é:**

a) $\log_2 6$

b) $-\log_2 6$

c) $\log_3 6$

d) $-\log_3 6$

e) $1 - \log_3 6$

Comentários

Se a equação tem raiz dupla, então $\Delta = 0$:

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{12}$$

Substituindo a na equação de variável x:

$$3^{2x+1} - 3^x + a = 0$$

$$3^{2x+1} - 3^x + \frac{1}{12} = 0$$

$$3 \cdot (3^x)^2 - 3^x + \frac{1}{12} = 0$$

Fazendo $z = 3^x$:

$$3z^2 - z + \frac{1}{12} = 0$$

Encontrando as raízes:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-1}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Desse modo:

$$3^x = \frac{1}{6}$$

$$x = \log_3 6^{-1} = -\log_3 6$$

Gabarito: "d".

117.(ITA/2001)

Sendo dado

$$\ln\left(2\sqrt{4}\sqrt[3]{6}\sqrt[4]{8} \dots \sqrt[n]{2n}\right) = a_n$$

$$\ln\left(\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4} \dots \sqrt[2n]{2n}\right) = b_n$$

então,

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5} + \dots + \frac{\ln 2n}{2n}$$

É igual a:

a) $a_n - 2b_n$

b) $2a_n - b_n$

c) $a_n - b_n$

d) $b_n - a_n$

e) $a_n + b_n$

Comentários

Vamos calcular o valor de a_n e b_n:

Expandindo os logs:

$$a_n = \ln 2 + \frac{\ln 4}{2} + \frac{\ln 6}{3} + \frac{\ln 8}{4} + \dots + \frac{\ln 2n}{n}$$

$$b_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \cdots + \frac{\ln 2n}{2n}$$

Se fizermos $a_n - b_n$, encontramos:

$$a_n - b_n = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \cdots + \frac{\ln 2n}{2n}$$

Perceba que essa é exatamente a expressão pedida. Logo, encontramos o gabarito na letra c.

Gabarito: “c”.

118.(ITA/2000)

Seja $S = [-2, 2]$ e considere as afirmações:

I. $\frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x < 6$, **para todo** $x \in S$.

II. $\frac{1}{\sqrt{32-2^x}} < \frac{1}{\sqrt{32}}$, **para todo** $x \in S$.

III. $2^{2x} - 2^x \leq 0$, **para todo** $x \in S$.

Então, podemos dizer que

a) apenas I é verdadeira.

b) apenas III é verdadeira.

c) somente I e II são verdadeiras.

d) apenas II é falsa.

e) todas as afirmações são falsas.

Comentários

I. Basta comparar os valores de $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, para $x \in [-2, 2]$:

Como $\frac{1}{2} < 1$, temos a seguinte relação de desigualdade para $-2 \leq x \leq 2$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$4 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4 < 6$$

Portanto, a afirmação é verdadeira.

II. $2^x > 0$ para qualquer valor de x. Logo:

$$\sqrt{32 - 2^x} < \sqrt{32}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{32 - 2^x}} > \frac{1}{\sqrt{32}}$$

Portanto, falsa.

III. $2^x(2^x - 1) \leq 0$

Temos $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Então:

$$2^x - 1 \leq 0$$

$$2^x \leq 1$$

$$x \leq \log_2 1 = 0$$

$$\Rightarrow x \leq 0$$

Como $S = [-2, 2]$ e $x \leq 0$, a afirmação é falsa.

Gabarito: "a".

119.(ITA/1999)

Seja S o conjunto de todas as soluções reais da equação

$$\log_{\frac{1}{4}}(x+1) = \log_4(x-1)$$

Então:

a) S é um conjunto unitário e $S \subset]2, +\infty[$.

b) S é um conjunto unitário e $S \subset]1, 2[$.

c) S possui dois elementos distintos $S \subset]-2,2[$.

d) S possui dois elementos distintos $S \subset]1, +\infty[$.

e) S é o conjunto vazio.

Comentários

Inicialmente, devemos analisar a condição de existência dos logs:

$$x + 1 > 0 \; e \; x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\log_{4^{-1}}(x+1) = \log_4(x-1)$$

$$\log_4(x+1)^{-1} = \log_4(x-1)$$

$$\frac{1}{x+1} = x - 1$$

$$1 = x^2 - 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Como $x > 1$, a única solução possível é $x = \sqrt{2}$.

Analisando as alternativas, vemos que $1 < \sqrt{2} < 2$. Então:

$$S = \{2\} \subset]1, 2[$$

Encontramos o gabarito na letra b.

Gabarito: "b".

120.(ITA/1998)

O valor de $y \in \mathbb{R}$ que satisfaz a igualdade $\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7$, é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) 3

d) $\frac{1}{8}$

e) 7

Comentários

Simplificando a equação, temos:

$$\log_y 49 = \log_{y^2} 7 + \log_{2y} 7$$

$$\frac{\log 7^2}{\log y} = \frac{\log 7}{2\log y} + \frac{\log 7}{\log 2y}$$

$$\frac{2\log 7}{\log y} = \frac{\log 7}{2\log y} + \frac{\log 7}{\log 2 + \log y}$$

Substituindo $\log y = x$:

$$\frac{2\log 7}{x} = \frac{\log 7}{2x} + \frac{\log 7}{\log 2 + x}$$

$$\frac{2\log 7}{x} - \frac{\log 7}{2x} = \frac{\log 7}{\log 2 + x}$$

$$\frac{3\log 7}{2x} = \frac{\log 7}{\log 2 + x}$$

$$\frac{3}{2x} = \frac{1}{\log 2 + x}$$

$$3(\log 2 + x) = 2x$$

$$3\log 2 + 3x = 2x$$

$$\Rightarrow x = -3\log 2$$

Retornando à variável y:

$$\log y = -3\log 2 = \log 2^{-3}$$

$$\Rightarrow y = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

Gabarito: "d".

121.(ITA/1998)

A inequação mostrada na figura adiante

$$4xlog_5(x+3) \geq (x^2+3)\log_{\frac{1}{5}}(x+3)$$

É satisfeita para todo $x \in S$. Então:

a) $S =]-3,-2] \cup [-1,+\infty[$

b) $S =]-\infty,-3[\cup [-1,+\infty[$

c) $S =]-3,-1]$

d) $S =]-2,+\infty]$

e) $S =]-\infty,-3[\cup]-3,+\infty[$

Comentários

Inicialmente, temos que verificar a condição de existência do log:

$$x+3>0 \Rightarrow x>-3$$

Agora, vamos simplificar a inequação:

$$4xlog_5(x+3) \geq (x^2+3)\log_{\frac{1}{5}}(x+3)$$

$$4xlog_5(x+3) \geq (x^2+3)\log_{5^{-1}}(x+3)$$

$$4xlog_5(x+3) - (x^2+3)\log_{5^{-1}}(x+3) \geq 0$$

$$4xlog_5(x+3) + (x^2+3)\log_5(x+3) \geq 0$$

$$\log_5(x+3)\,(4x+x^2+3) \geq 0$$

Fazendo $f(x) = \log_5(x+3)$ e $g(x) = x^2+4x+3$. Vamos construir o gráfico de f e g:

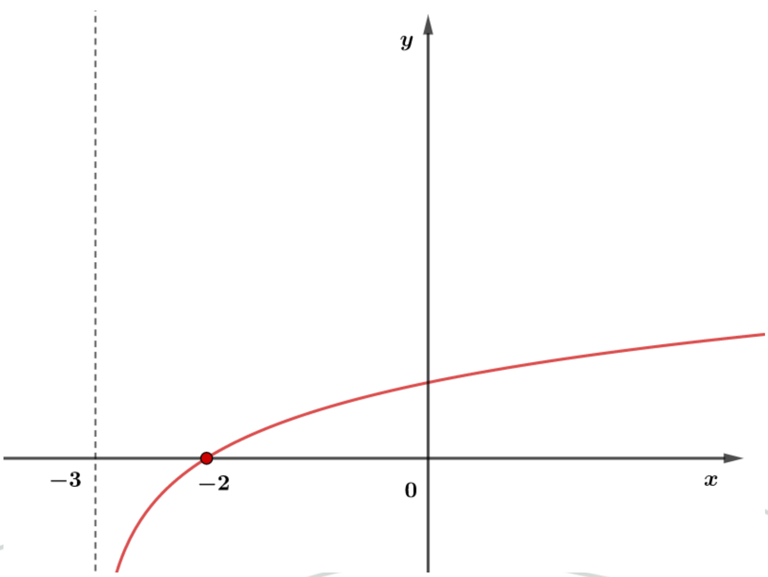
Raízes de f:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \log_5(x+3) = 0$$

$$x+3 = 5^0$$

$$x = -2$$

Gráfico de f:



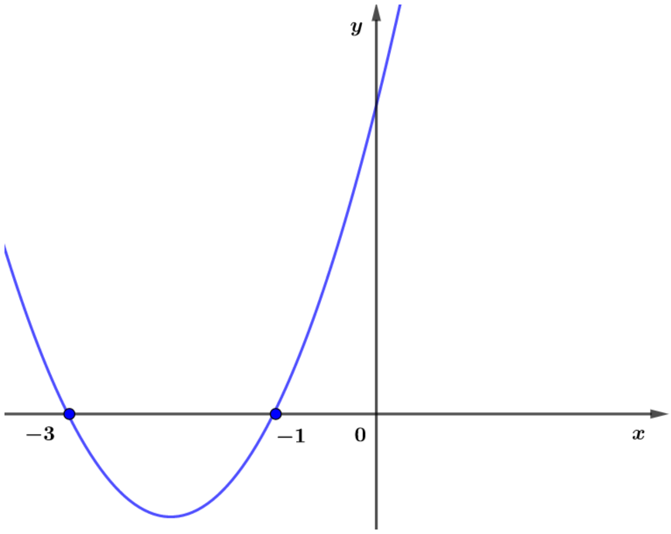
Raízes de g:

$$g(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x+3)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -3 \; ou \; x = -1$$

Gráfico de g:



Dessa forma, para satisfazer a inequação $\log_5(x+3)\,(4x + x^2 + 3) \geq 0$ devemos ter:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} ou \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

Construindo a tabela de sinais de f e g, temos:

x		-3		-2		-1	
$f(x)$	$-$		$-$		$+$		$+$
$g(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x) \cdot g(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

Portanto, para $f(x) \cdot g(x) \geq 0$, temos:

$$-3 < x \leq -2 \; ou \; x \geq -1$$

$$\Rightarrow S =]-3, -2] \cup [-1, +\infty[$$

Gabarito: "a".

122.(ITA/2009)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ uma função satisfazendo as condições:

$f(x+y) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(x) \neq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Das afirmações:

I. f pode ser ímpar;

II. $f(0) = 1$;

III. f é injetiva;

IV. f não é sobrejetiva, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

é (são) falsa(s) apenas

a) I e III.

b) II e III.

c) I e IV.

d) IV.

e) I.

Comentários

- $f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = f(0)^2$.

Então, $f(0) = 1$, pois 0 não está no contradomínio de $f \Rightarrow$ II verdadeira.

Além disso, como $f(x) \neq 1\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, temos $f(m) = 1 \Leftrightarrow m = 0$. $(*)$

- $1 = f(0) = f(x - x) = f(x) \cdot f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, se f for ímpar, teremos $1 = f(x) \cdot \big(-f(x)\big) = 1 = -f(x)^2 \leq 0$, absurdo $\Rightarrow$ I falsa.

Além disso, $f(-x) = \frac{1}{f(x)}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

- Suponha que f não seja injetiva, isto é, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \neq b$ e $f(a) = f(b)$.

Então, $a - b \neq 0 \Rightarrow 1 \neq f(a - b) = f(a) \cdot f(-b) = \frac{f(a)}{f(b)} = 1$, absurdo $\Rightarrow$ f é injetiva $\Rightarrow$ III verdadeira.

- Suponha f sobrejetiva. Então, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = -1$.

Logo, $f(2c) = f(c + c) = f(c)^2 = 1 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(c) = 1$, onde $(*)$ foi utilizado na primeira e na última implicações. Portanto, $-1 = f(c) = 1$, absurdo $\Rightarrow f$ não é sobrejetiva $\Rightarrow$ IV verdadeira.

$\Rightarrow$ A única assertiva falsa é I.

Gabarito: “e”

123.(ITA/1996)

Seja $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função injetora tal que $f(1) = 0$ e $f(xy) = f(x) + f(y)$ para todo $x > 0$ e $y > 0$. Se x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 formam nessa ordem uma progressão geométrica, onde $x_i > 0$ para $i =$

$1, 2, 3, 4, 5$ **e sabendo que** $\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = 13f(2) + 2f(x_1)$ **e** $\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = -2f(2x_1)$**, então, o valor de** x_1 **é:**

a) -2.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 1.

Comentários

- Observe que f satisfaz propriedades de logaritmo:

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \forall x, y > 0.$$

$$f(y_1 \cdot y_2 \dots y_n) = f(y_1) + f(y_2 \cdot y_3 \dots y_n) = \cdots = f(y_1) + \cdots + f(y_n) \ \forall y_i > 0.$$

Se $y_1 = \cdots = y_n = y$, $f(y^n) = nf(y) \ \forall y > 0$.

- Seja r a razão da progressão geométrica.

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i) = f\left(\prod_{i=1}^{5} x_i\right) = f\left(\prod_{i=1}^{5} x_1 r^{i-1}\right) = f(x_1^5 r^{10}) = 5f(x_1) + 10f(r)$$

Logo, $5f(x_1) + 10f(r) = 13f(2) + 2f(x_1) \Rightarrow 3f(x_1) = 13f(2) - 10f(r)\ (I)$

$$\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = \sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{1}{r}\right) = f\left(\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{r}\right) = f\left(\frac{1}{r^4}\right) = f(1) - f(r^4) = -4f(r)$$

Logo, $-4f(r) = -2f(2x_1) \Rightarrow 2f(r) = f(2x_1) = f(2) + f(x_1) \Rightarrow f(x_1) = 2f(r) - f(2)\ (II)$

De I e II, $3 \cdot \left(2f(r) - f(2)\right) = 13f(2) - 10f(r) \Rightarrow 16f(r) = 16f(2) \Rightarrow f(r) = f(2) (III)$

De II e III, $f(x_1) = f(2)$. Como f é injetora, $x_1 = 2$.

Gabarito: "b"

---

124. (ITA/1992)

Considere as funções $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **e** $h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ **definidas por** $f(x) = 3^{x+\frac{1}{x}}, g(x) = x^2, h(x) = \frac{81}{x}$**. O conjunto dos valores de** $x \in \mathbb{R}^*$ **tais que** $(f \circ g)(x) = (h \circ f)(x)$ **é subconjunto de:**

a) $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

b) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

c) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

d) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

e) n.d.a.

Comentários

$$(f\ o\ g)(x) = (h\ o\ f)(x) \Rightarrow 3^{x^2+\frac{1}{x^2}} = \frac{81}{3^{x+\frac{1}{x}}}$$

Fazendo $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ temos:

$$3^{y^2-2} = \frac{3^4}{3^y} \Rightarrow 3^{y^2+y} = 3^6$$

Como a função 3^y é injetora, temos:

$$y^2 + y = 6 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = -3$$

- Caso $y = 2$:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

- Caso y = -3:

$$x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Perceba que $x = 1$ é solução, mas não se encontra em nenhum dos conjuntos das alternativas (a) a (d).

Gabarito: "e"

125.(ITA/1987)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) \neq 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$ e $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, para todos x e y em ℝ. Considere (a_1, a_2, a_3, a_4) uma P.A. de razão r, tal que $a_1 = 0$. Então $\left(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\right)$

a) é uma P.A. de razão igual a $f(r)$ e 1º termo $f(a_1) = f(0)$.

b) é uma P.A. de razão igual a r.

c) é uma P.G. de razão igual a $f(r)$ e 1º termo $f(a_1) = 1$.

d) é uma P.G. de razão igual a r e 1º termo $f(a_1) = f(0)$.

e) não é necessariamente uma P.A. ou uma P.G.

Comentários

Perceba que não foi aplicada nenhuma restrição extra para f. A fim de resolver rápido a questão, pode-se considerar a função $f(x) = e^x$, que satisfaz o enunciado. Temos:

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, r, 2r, 3r) \Rightarrow \left(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\right) = (1, e^r, e^{2r}, e^{3r})$, que é uma P.G. de razão $e^r = f(r)$ e 1º termo $f(a_1) = f(0) = 1$. $\Rightarrow$ a alternativa correta é "c".

Temos necessariamente $f(0) = f(0+0) = f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 1$, pois $f(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Prova de que sempre é uma P.G.:

$$f(kr) = f\big((k-1)r + r\big) = f\big((k-1)r\big) \cdot f(r)$$

Logo, por indução, $f(kr) = f(0) \cdot f(r)^k = f(r)^k, k \in \mathbb{N}$.

O aluno avançado pode ter reconhecido uma das quatro equações de Cauchy aqui, cuja solução geral é $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f(x) = a^x$.

Gabarito: "c"

---

126. (ITA/1985)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$ para todos $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. Se $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é uma progressão aritmética de razão d, então podemos dizer que $\big(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_n)\big)$

a) É uma progressão aritmética de razão d.

b) É uma progressão aritmética de razão $f(d)$ cujo primeiro termo é a_1.

c) É uma progressão geométrica de razão $f(d)$.

d) É uma progressão aritmética de razão $f(d)$.

e) Nada se pode afirmar.

Comentários

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d \Rightarrow f(a_k) = f(a_1) + (k-1) \cdot f(d).$$

É uma progressão geométrica (b_k), com $b_1 = f(a_1)$ e razão $f(d)$.

Gabarito: "d"

---

127. (ITA/1979)

Seja f uma função real definida para todo x real tal que: f é ímpar; $f(x+y) = f(x) + f(y)$; e $f(x) \geq 0$, se $x \geq 0$. Definindo $g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x}$, se $x \neq 0$, e sendo n um número natural, podemos afirmar que:

a) f é não-decrescente e g é uma função ímpar.

b) f é não-decrescente e g é uma função par.

c) g é uma função par e $0 \leq g(n) \leq f(1)$.

d) g é uma função ímpar e $0 \leq g(n) \leq f(1)$.

e) f é não-decrescente e $0 \leq g(n) \leq f(1)$.

Comentários

$f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = f(1) \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}$ (equação funcional de Cauchy).

$$1 \geq 0 \Rightarrow f(1) \geq 0.$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x} = \frac{f(1) \cdot x - f(1)}{x} = f(1) \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Quando x cresce, $\frac{1}{x}$ decresce, $f(1)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)$ cresce.

$$0 \leq g(n) = f(1)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq f(1)$$

Gabarito: "e"

---

128. (ITA/1971)

Se f é uma função real de variável real dada por $f(x)=x^2$, então $f(x^2+y^2)$ é igual a:

a) $f\big(f(x)\big)+f(y)+2f(x)f(y)$ **para todo x e y.**

b) $f(x^2)+2f\big(f(x)\big)+f(x)f(y)$ **para todo x e y.**

c) $f(x^2)+f(y^2)+f(x)f(y)$ **para todo x e y.**

d) $f\big(f(x)\big)+f\big(f(y)\big)+2f(x)f(y)$ **para todo x e y.**

e) $f\big(f(x)\big)+2f(y^2)+2f(x)f(y)$ **para todo x e y.**

Comentários

$$f\big(f(x)\big)+f\big(f(y)\big)+2f(x)f(y)=f(x^2)+f(y^2)+2x^2y^2$$
$$=x^4+y^4+2x^2y^2=(x^2+y^2)^2=f(x^2+y^2)$$

Gabarito: "d"

129.(IME/2021)

Seja $f: D\to\mathbb{R}$ uma função onde $D=\{x\in\mathbb{R}\,|x\neq 0\ e\ x\neq 1\}$ e que satisfaz a equação $f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)-x=2$. O valor de $f(2)$ é:

a) 5/4

b) 1/4

c) $1/2$

d) 1

e) $7/2$

Comentários

Vamos atribuir valores de x e encontrar relações para f:

$$f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f(x)-x=2$$

$$x=2\Rightarrow f\left(1-\frac{1}{2}\right)+f(2)-2=2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)=4$$

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow f\left(1-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=2$$

$$f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

$$x=-1\Rightarrow f\big(1-(-1)\big)+f(-1)-(-1)=2$$

$$f(2)+f(-1)=1$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)=4 \ \ (I) \\ f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2} \ \ (II) \\ f(2)+f(-1)=1 \ \ (III) \end{cases}$$

Fazendo $(III)-(II)$:

$$f(2)-f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$$

Somando com (I):

$$2f(2)=-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2}$$

$$\therefore f(2)=\frac{5}{4}$$

Gabarito: A

---

130. (IME/2021)

Se A é a área da região R do plano cartesiano dada por

$$R=\{(x,y)\in\ \mathbb{R}^2\ |2\leq x\leq 10\ e\ 0\leq y\leq \ln(x)\}$$

a) $A\ \leq \ln(20^4)$

b) $\ln(\ln(9!))\leq \ln(A)\leq (2+\ln(9!))$

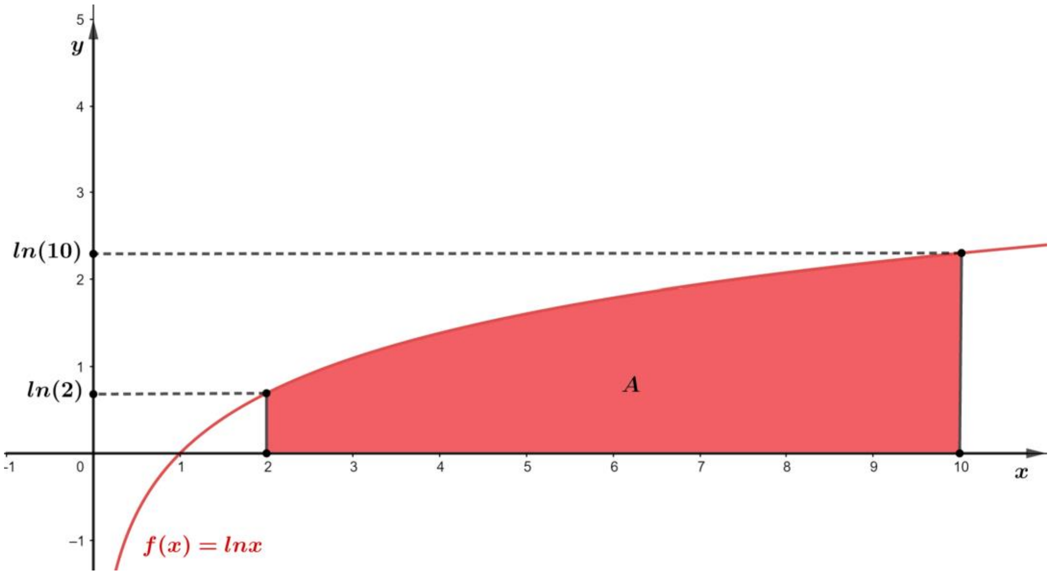
c) $A\geq \ln(10!)-\ln(2)$

d) $\frac{1}{9!}\leq e^{-A}<20^{-4}$

e) $\ln(10)+\ln(2)\leq \mathrm{A}\leq 10\ln(10)-2\ln(2)-10$

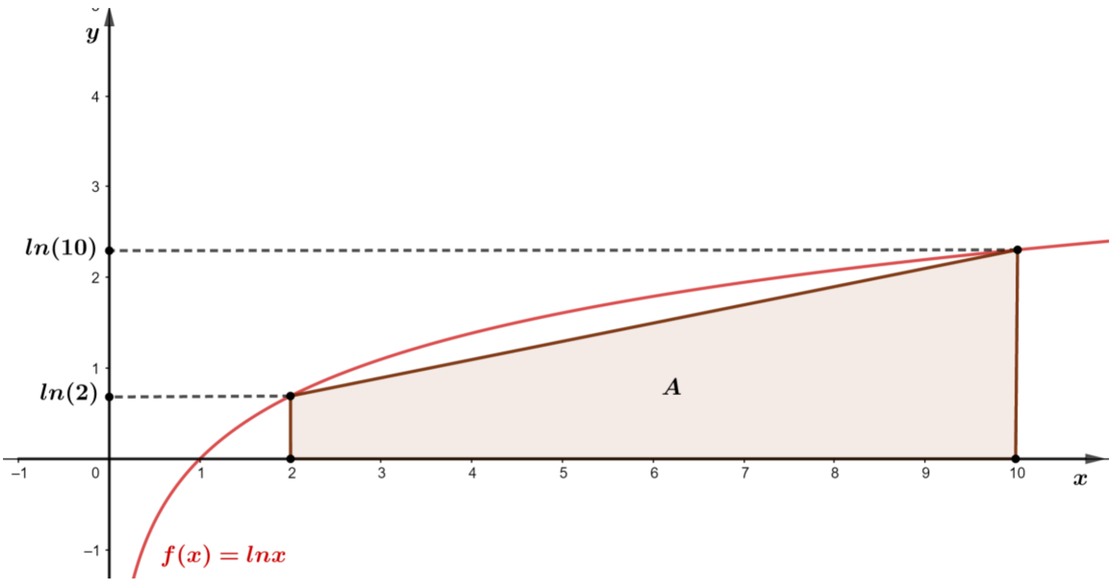
Comentários

A área da região R é dada pela figura abaixo:



Analisando as alternativas, vemos que temos uma aproximação para A. Podemos estimar A de diversas formas:

1) Usando a área do trapézio:



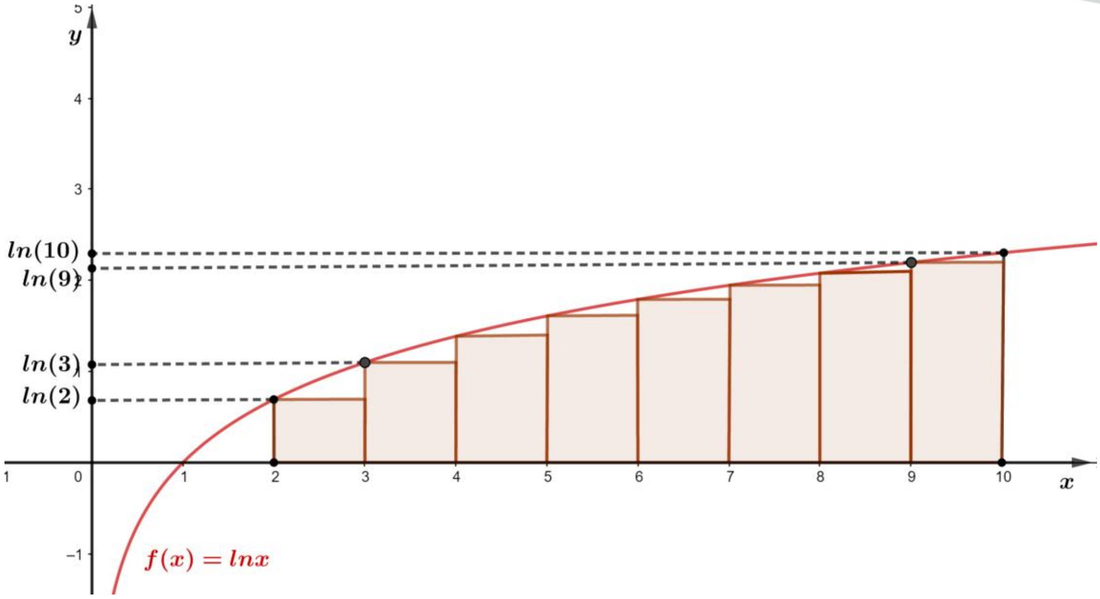
Temos:

$$A > \frac{(\ln 2 + \ln 10)8}{2} = 4 \ln 20 = \ln 20^4$$

$$\therefore \boxed{A > \ln 20^4}$$

Com isso, eliminamos a letra a.

Podemos também estimar os limites inferior e superior usando a soma da área de retângulos:



$$A > \underbrace{\ln 2 \cdot 1}_{\acute{a}rea\ de\ ret\hat{a}ngulo} + \ln 3 \cdot 1 + \ln 4 \cdot 1 + \cdots + \ln 9 \cdot 1 = \underbrace{\ln 1}_{0} + \ln 2 + \cdots + \ln 9 = \ln(9!)$$

$$\therefore \boxed{A > \ln(9!)}$$

Na letra d:

$$\frac{1}{9!} \leq e^{-A} < 20^{-4}$$

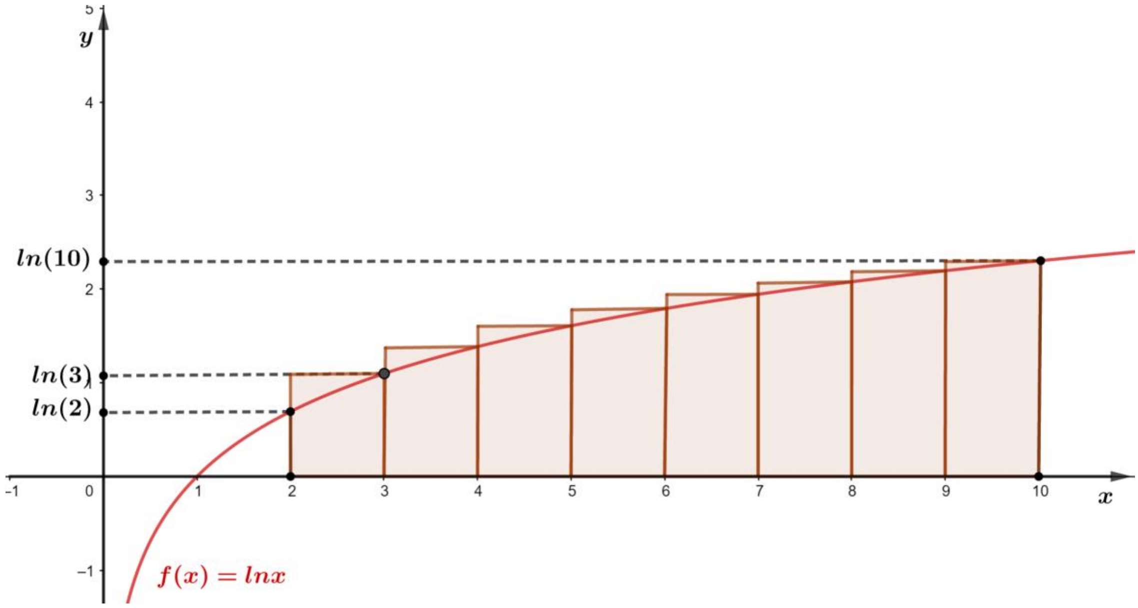
$$\ln(9!^{-1}) \leq \ln e^{-A} < \ln(20^{-4})$$

$$-\ln(9!) \leq -A < -\ln 20^4$$

$$\Rightarrow \ln 20^4 < A \leq \ln(9!)$$

Portanto, alternativa errada.

Limitando a área superiormente:



$$A < \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \cdots + \ln 10$$

$$A < \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln 10 - \ln 2$$

$$A < \ln(10!) - \ln 2$$

$$A < \ln(9!) + \ln\left(\frac{10}{2}\right)$$

$$\therefore \boxed{A < \ln(9!) + \ln 5}$$

Veja que na letra b, temos:

$$\ln(\ln(9!)) \leq \ln(A) \leq (2 + \ln(9!))$$

$$\ln(9!) \leq A \leq \ln e^2 + \ln(9!)$$

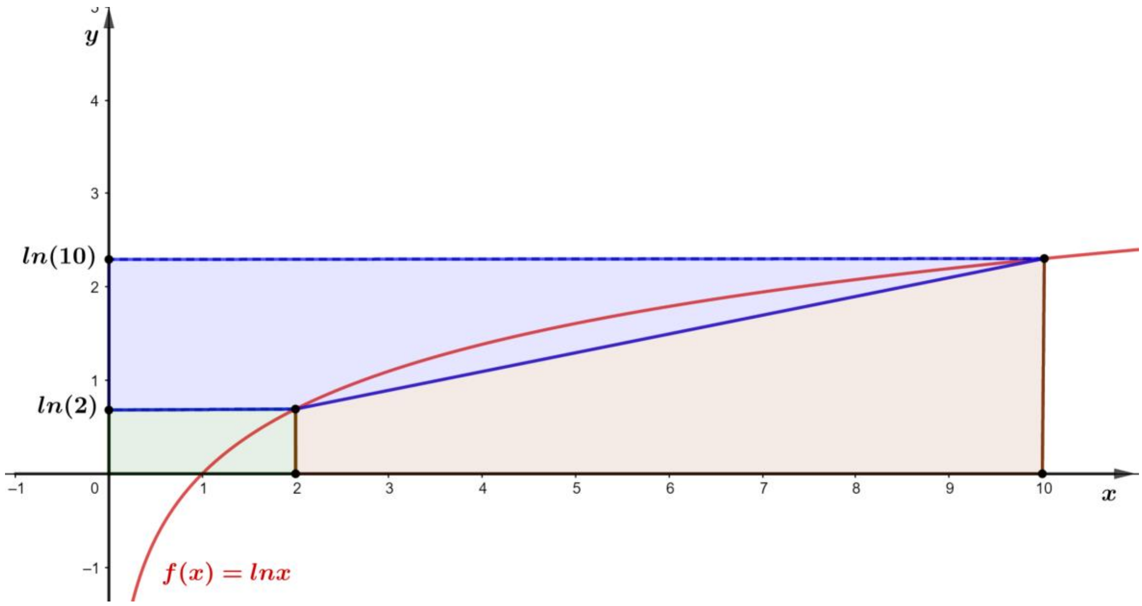
Note que das desigualdades encontradas, temos:

$$\ln(9!) < A < \ln(9!) + \ln 5 < \ln(9!) + \ln e^2$$

$$\therefore \ln(9!) < A < \ln(9!) + \ln e^2$$

Portanto, a alternativa correta é a letra b.

A alternativa E está errada, pois estimando-se a área usando a figura abaixo, temos:



$$A > \underbrace{\ln 10 \cdot 10}_{área\ verde+azul+vermelho} - \underbrace{\ln 2 \cdot 2}_{área\ verde} - \underbrace{(\ln 10 - \ln 2) \cdot \frac{(2+10)}{2}}_{área\ azul}$$

$$A > 10 \ln 10 - 2 \ln 2 - 6 \ln 5$$

$$6 \ln 5 \cong 6 \cdot 1{,}6 = 9{,}6$$

$$\therefore A > 10 \ln 10 - 2 \ln 2 - 6 \ln 5 > A > 10 \ln 10 - 2 \ln 2 - 10$$

Na alternativa E, temos:

$$\ln(10) + \ln(2) \leq \mathrm{A} \leq 10 \ln(10) - 2 \ln(2) - 10$$

Gabarito: B

131.(IME/2021)

Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} \log(-2x+3y+k) = \log(3) + \log(z) \\ log_x(1-y) = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

onde x, y e z são variáveis e k é uma constante numérica real. Esse sistema terá solução se:

a) $k < -2$

b) $-2 < k < 0$

c) $0 < k < 2$

d) $2 < k < 4$

e) $k > 4$

Comentários

Analisando a condição de existência dos logaritmos:

$$\begin{cases} -2x+3y+k > 0 \\ z > 0 \\ 1 - y > 0 \Rightarrow y < 1 \\ x > 0 \; e \; x \neq 1 \end{cases}$$

Da terceira equação, temos:

$$z = 1 - x > 0$$

$$\therefore x < 1$$

Logo, $0 < x < 1$.

Da segunda equação:

$$1 - y = x \Rightarrow y = 1 - x \therefore y = z$$

Da primeira equação:

$$\log(-2x+3y+k) = \log(3) + \log(z)$$

$$\log(-2x+3y+k) = \log(3z)$$

$$-2x+3y+k = 3z$$

$$-2x+k = 0$$

$$\therefore x = \frac{k}{2}$$

Sabemos que $x \in (0, 1)$, logo:

$$0 < \frac{k}{2} < 1$$

$$\therefore 0 < k < 2$$

Gabarito: C

132.(IME/2021)

Seja a equação $2sen^2(e^\theta) - 4\sqrt{3}sen(e^\theta)cos(e^\theta) - \cos(2e^\theta) = 1, \theta \in \mathbb{R}^+$. O menor valor de θ que é raiz da equação é:

a) $\ln\left(\frac{\pi}{6}\right)$

b) $\ln\left(\frac{\pi}{3}\right)$

c) $\ln\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

d) $\ln\left(\frac{\pi}{12}\right)$

e) $\ln\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Comentários

Seja $x = e^\theta > 0$, substituindo na equação:

$$2sen^2(x) - 4\sqrt{3}senx\cos x - \cos(2x) = 1$$

$$-4\sqrt{3}senx\cos x = \cos(2x) + 1 - 2sen^2(x)$$

Vamos usar as transformações:

$$2senx\cos x = sen(2x)$$

$$1 - 2sen^2x = \cos(2x)$$

Na equação:

$$-2\sqrt{3}sen(2x) = \cos(2x) + \cos(2x)$$

$$-2\sqrt{3}sen(2x) = 2\cos(2x)$$

$$\Rightarrow tg(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como queremos o menor valor de θ, devemos tomar o menor valor de x possível. Na relação acima:

$$2x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

x deve ser positivo, então o menor valor ocorre para $k = 0$:

$$x = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow e^\theta = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \ln(e^\theta) = \ln\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\therefore \theta = \ln\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

Gabarito: E

133.(IME/2021)

Calcule os valores reais de x que satisfaçam a inequação $\sqrt{\log_3(x) + 1} + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}}(x^2) + \frac{7}{3} > 0$.

Comentários

Analisando as condições de existência do problema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \log_3 x \geq -1 \therefore \boxed{x \geq \frac{1}{3}}$$

Vamos analisar a inequação e aplicar as propriedades do logaritmo:

$$\sqrt{\log_3(x) + 1} + \frac{1}{3}\log_{3^{-1}}(x^2) + \frac{7}{3} > 0$$

$$\sqrt{\log_3(x) + 1} + \frac{(-2)}{3}\log_3(x) + \frac{7}{3} > 0$$

$$3\sqrt{\log_3(x) + 1} > 2\log_3 x - 7$$

Fazendo $\log_3 x = y$, temos:

$$3\sqrt{y+1} > 2y - 7$$

Analisando as possibilidades:

1) $2y - 7 < 0$

$$y < \frac{7}{2} \Rightarrow \log_3 x < \frac{7}{2} \Rightarrow x < 3^{\frac{7}{2}}$$

$$\therefore \boxed{x < 27\sqrt{3}}$$

$$\therefore S_1 = \left[\frac{1}{3}, 27\sqrt{3}\right)$$

2) $\begin{cases} 2y - 7 \geq 0 \\ 9(y+1) > (2y-7)^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y \geq \frac{7}{2} \\ 9y + 9 > 4y^2 - 28y + 49 \end{cases}$$

Da primeira inequação:

$$\log_3 x \geq \frac{7}{2} \Rightarrow x \geq 27\sqrt{3}$$

Da segunda:

$$4y^2 - 37y + 40 < 0$$

Raízes:

$$y = \frac{37 \pm \sqrt{729}}{8} = \frac{37 \pm 27}{8} = 8 \; ou \; \frac{5}{4}$$

Portanto, devemos ter:

$$\frac{5}{4} < y < 8 \Rightarrow \frac{5}{4} < \log_3 x < 8 \Rightarrow \boxed{3^{\frac{5}{4}} < x < 3^8}$$

$$\therefore S_2 = \left(3^{\frac{5}{4}}, 3^8\right)$$

Note que $3^{\frac{5}{4}} = 3\sqrt[4]{3} < 27\sqrt{3}$. Fazendo a união das soluções:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{3} \leq x < 3^8\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{3} \leq x < 3^8\right\}}$

134.(IME/2020)

Sabe-se que $S = x + y + z$, onde y e z são soluções inteiras do sistema abaixo.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{2y^2}}{2} \\ y = e^{2\ln(x)} \\ \log_2 y + \log_x z = (x+3) \end{cases}$$

O valor de S é:

a) 84

b) 168

c) 234

d) 512

e) 600

Comentários

Das condições de existência dos logaritmos, devemos ter $\boldsymbol{x, y, z > 0}$ e $\boldsymbol{x \neq 1}$.

Nessa questão, o bizu é observar a segunda equação:

$$y = e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2 \Rightarrow y = x^2$$

Com essa relação, substituímos na primeira equação para achar o valor de x:

$$x = \frac{\sqrt[3]{2y^2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2x^4}}{2} \Rightarrow 2x = \sqrt[3]{2x^4} \Rightarrow 8x^3 = 2x^4 \Rightarrow \boxed{x = 4} \Rightarrow \boxed{y = 16}$$

Agora, basta substituir x e y na terceira equação para achar z:

$$\log_2 y + \log_x z = (x+3)$$

$$\log_2 16 + \log_4 z = 7 \Rightarrow 4 + \log_4 z = 7 \Rightarrow \log_4 z = 3 \Rightarrow z = 4^3 \Rightarrow \boxed{z = 64}$$

$$\therefore S = x + y + z = 4 + 16 + 64 = 84$$

Gabarito: "a".

135.(IME/2020)

Uma progressão geométrica é formada com os números naturais A, B e C, nessa ordem. O $log(A)$ possui a mesma mantissa, M, do $log(B)$ e C é a característica do $log(A)$. Sabe-se que $M = log(C)$ e que possui o maior valor possível. O valor da mantissa do $log(ABC)$ é:

a) M

b) $2M$

c) $3M$

d) $3M - 2$

e) $3M - 3$

Comentários

Como (A, B, C) formam uma PG nessa ordem, podemos escrever:

$$B^2 = AC$$

O enunciado dá informações a respeito da característica e da mantissa dos logaritmos. A primeira coisa que devemos lembrar é que a característica de um logaritmo é a parte inteira do seu valor e a mantissa é a parte fracionária.

O enunciado diz que:

$$\log(A) = C + M$$
$$\log(B) = X + M$$
$$\log(C) = M$$

Não sabemos qual é a característica de $\log(B)$, podemos extrair essa informação da PG:

$$B^2 = AC$$

Aplicando o log na equação acima:

$$\log(B^2) = \log(AC) \Rightarrow 2\log(B) = \log(A) + \log(C)$$

Substituindo os valores dos logaritmos:

$$2(X + M) = C + M + M \Rightarrow 2X = C \Rightarrow X = \frac{C}{2}$$

Como a característica de C é zero, temos que C é um número entre 1 e 10. Além disso, X deve ser um número natural, logo C deve ser um número par, as possibilidades são:

$$C \in \{2; 4; 6; 8\}$$

O enunciado diz que $M = \log(C)$ possui o maior valor possível, logo, $C = 8$.

Com isso, temos:

$$\log(C) = \log(8) = \log(2^3) = 3 \cdot \log(2)$$

O valor do $\log(2)$ é aproximadamente $0{,}3$, logo:

$$M \cong 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$$

Queremos saber o valor da mantissa do $\log(ABC)$:

$$\log(ABC) = \log(A) + \log(B) + \log(C)$$

Usando $2\log(B) = \log(A) + \log(C)$:

$$\log(ABC) = 3\log(B) = 3(X+M) = \frac{3C}{2} + 3M = \frac{3 \cdot 8}{2} + 3(0{,}9) = 12 + 2{,}7$$

Devemos notar que a mantissa do $\log(ABC)$ está no número 2,7 e ele é resultado de $3M$, ou seja,

$$3M = 2{,}7 = 2 + 0{,}7 \Rightarrow 3M - 2 = 0{,}7$$

Portanto, a mantissa do $\log(ABC)$ é $0{,}7 = 3M - 2$.

Gabarito: "d".

---

136. (IME/2020)

Considere a progressão geométrica $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ e a progressão aritmética $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ com as condições:

$$a_1 > 0$$
$$\frac{a_2}{a_1} > 1; \text{e}$$
$$b_2 - b_1 > 0$$

Para que $[\log_\alpha(a_n) - b_n]$ não dependa de n, o valor de α deverá ser:

a) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2}}$

b) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1}}$

c) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2-b_1}}$

d) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1-b_2}}$

e) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1 b_2}}$

Comentários

Como $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma PG e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ é uma PA, temos:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$b_n = b_1 + (n-1)r$$

Sendo q a razão da PG e r a razão da PA.

Das condições do enunciado:

$$a_1 > 0 \ e \ \frac{a_2}{a_1} > 1 \Rightarrow a_1 > 0 \ e \ q > 1$$
$$b_2 - b_1 > 0 \Rightarrow r > 0$$

Assim, a PG possui apenas termos positivos e é crescente e a PA também é crescente.

Vamos analisar a expressão dada:

$$[\log_\alpha(a_n) - b_n] = [\log_\alpha(a_1 q^{n-1}) - (b_1 + (n-1)r)]$$
$$= \log_\alpha a_1 + (n-1)\log_\alpha q - b_1 - nr + r$$
$$= \log_\alpha a_1 - \log_\alpha q - b_1 + r + n\log_\alpha q - nr$$

Para que a expressão não dependa de n, devemos ter:

$$n\log_\alpha q - nr = 0$$

$$n(\log_\alpha q - r) = 0 \Rightarrow \log_\alpha q - r = 0 \Rightarrow \log_\alpha q = r \Rightarrow q = \alpha^r \Rightarrow \alpha = q^{\frac{1}{r}}$$

Escrevendo q em função de a_1 e a_2, e r em função de b_1 e b_2:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \text{ e } r = b_2 - b_1$$

$$\therefore \boxed{\alpha = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2 - b_1}}}$$

Gabarito: "c".

137.(IME/2019)

Definimos a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n), \quad n \geq 1 \\ f(2n+1) = f(n) + 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Determine $f(f(2019))$.

Observação: $\lfloor k \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a k.

Comentários

Inicialmente, devemos analisar a lei de formação da função. Para um número par, temos que $f(2n) = f(n)$ e para um número ímpar, $f(2n+1) = f(n) + 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$. A função está determinada para $n = 1$ ou $n = 0$, vamos usar esses valores para encontrar o que se pede.

Usando a lei de formação, obtemos:

$$f(2019) = f(1009) + 2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor}$$
$$f(1009) = f(504) + 2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor}$$
$$f(504) = f(252)$$
$$f(252) = f(126)$$
$$f(126) = f(63)$$
$$f(63) = f(31) + 2^{\lfloor \log_2 31 \rfloor}$$
$$f(31) = f(15) + 2^{\lfloor \log_2 15 \rfloor}$$
$$f(15) = f(7) + 2^{\lfloor \log_2 7 \rfloor}$$
$$f(7) = f(3) + 2^{\lfloor \log_2 3 \rfloor}$$

$$f(3) = f(1) + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor}$$
$$f(1) = 1$$

Vamos somar as equações para cancelar os termos de f:

$$\begin{cases} f(2019) = \cancel{f(1009)} + 2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor} \\ \cancel{f(1009)} = \cancel{f(504)} + 2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor} \\ \cancel{f(504)} = \cancel{f(252)} \\ \cancel{f(252)} = \cancel{f(126)} \\ \cancel{f(126)} = \cancel{f(63)} \\ \cancel{f(63)} = \cancel{f(31)} + 2^{\lfloor \log_2 31 \rfloor} \\ \cancel{f(31)} = \cancel{f(15)} + 2^{\lfloor \log_2 15 \rfloor} \\ \cancel{f(15)} = \cancel{f(7)} + 2^{\lfloor \log_2 7 \rfloor} \\ \cancel{f(7)} = \cancel{f(3)} + 2^{\lfloor \log_2 3 \rfloor} \\ \cancel{f(3)} = \cancel{f(1)} + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} \\ \cancel{f(1)} = 1 \end{cases} \quad +$$

$$f,(2019) = 2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 31 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 15 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 7 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 3 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} + 1$$

Agora, precisamos encontrar os valores de $2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor}$, $2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor}, \dots, 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor}$. Das propriedades dos logaritmos, sabemos que $2^{\log_2 a} = a$.

Analisemos o valor de $\lfloor \log_2 1009 \rfloor$. Seja $\log_2 1009 = x$:

$$\lfloor \log_2 1009 \rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Como 2 é uma base maior que 1, temos que a função logarítmica é crescente. Então, podemos escrever:

$$\log_2 512 < \log_2 1009 < \log_2 1024$$
$$\log_2 2^9 < x < \log_2 2^{10}$$
$$9 < x < 10$$

$\lfloor k \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a k, desse modo:

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor \log_2 1009 \rfloor = 9$$

Analogamente, para os outros valores:

$$\log_2 256 < \log_2 504 < \log_2 512 \Rightarrow 8 < \log_2 504 < 9 \Rightarrow \lfloor \log_2 504 \rfloor = 8$$
$$\log_2 16 < \log_2 31 < \log_2 32 \Rightarrow 4 < \log_2 31 < 5 \Rightarrow \lfloor \log_2 31 \rfloor = 4$$
$$\log_2 8 < \log_2 15 < \log_2 16 \Rightarrow 3 < \log_2 15 < 4 \Rightarrow \lfloor \log_2 15 \rfloor = 3$$
$$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8 \Rightarrow 2 < \log_2 7 < 3 \Rightarrow \lfloor \log_2 7 \rfloor = 2$$
$$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 \Rightarrow 1 < \log_2 3 < 2 \Rightarrow \lfloor \log_2 7 \rfloor = 1$$
$$\lfloor \log_2 1 \rfloor = 0$$

Assim, obtemos:

$$f(2019) = 2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 31 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 15 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 7 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 3 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} + 1$$

$$f(2019) = 2^9 + 2^8 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 1$$

$$f(2019) = 512 + 256 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1$$

$$\boxed{f(2019) = 800}$$

Queremos o valor de $f(f(2019))$, usando o mesmo raciocínio:

$$f(f(2019)) = f(800) = f(400) = f(200) = f(100) = f(50) = f(25)$$

$$f(25) = f(12) + 2^{\lfloor \log_2 12 \rfloor}$$

$$f(12) = f(6)$$

$$f(6) = f(3)$$

$$f(3) = f(1) + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} = 1 + 2^0 = 2$$

$$\Rightarrow f(12) = f(6) = f(3) = 2$$

$$\Rightarrow f(25) = 2 + 2^{\lfloor \log_2 12 \rfloor}$$

$$\log_2 8 < \log_2 12 < \log_2 16 \Rightarrow 3 < \log_2 12 < 4 \Rightarrow \lfloor \log_2 12 \rfloor = 3$$

$$\Rightarrow f(25) = 2 + 2^3 = 10$$

Portanto:

$$\boxed{f(f(2019)) = 10}$$

Gabarito: $f(f(2019)) = 10$

---

138. (IME/2018)

Sejam a, b, c e d números reais positivos diferentes de 1. Temos que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão geométrica e que a, b e c formam uma progressão aritmética em que $a < b < c$. Sabendo-se que $b = b^{\log_a b} - a$, determine:

a) Os valores de a, b e c;

b) As razões das progressões aritmética e geométrica, r e q, respectivamente.

Comentários

a) Do enunciado, temos:

$$a, b, c, d > 0 \text{ e } a, b, c, d \neq 1$$

$$(\log_a d, \log_b d, \log_c d) \text{ é uma PG}$$

$$(a, b, c) \text{ é uma PA, com } a < b < c$$

$$b = b^{\log_a b} - a$$

Vamos analisar a PA, usando os dados fornecidos, podemos escrever:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

$$\Rightarrow 2b = a + c \quad (I)$$

Analisando a PG:

$$(\log_b d)^2 = (\log_a d)(\log_c d)$$

$$\left(\frac{\log_a d}{\log_a b}\right)^2 = (\log_a d)\left(\frac{\log_a d}{\log_a c}\right) = \frac{(\log_a d)^2}{\log_a c}$$

$$\Rightarrow (\log_a b)^2 = \log_a c \quad (II)$$

Agora, vamos usar a equação para encontrar alguma informação entre a e b:

$$b = b^{\log_a b} - a$$

$$a + b = b^{\log_a b} \quad (III)$$

O bizu agora é fazer $b = a^{\log_a b}$ para o lado direito da equação (III):

$$a + b = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a b} = a^{(\log_a b)^2}$$

Usando a equação (II):

$$(\log_a b)^2 = \log_a c$$

$$\Rightarrow a^{(\log_a b)^2} = a^{\log_a c} = c$$

Perceba que o termo encontrado é igual àquele encontrado na equação (III):

$$a + b = a^{(\log_a b)^2} = c$$

Dessa forma, usando as equações encontradas, podemos escrever:

$$\begin{cases} a + b = c \\ 2b = a + c \end{cases}$$

Encontrando b e c em função de a:

$$2b = a + c \Rightarrow 2b = a + a + b$$

$$\Rightarrow b = 2a$$

$$a + b = c$$

$$\Rightarrow c = 3a$$

Substituindo esses valores na equação (III), temos:

$$a + b = b^{\log_a b} \quad (III)$$

$$a + 2a = (2a)^{\log_a 2a}$$

$$3a = (2a)^{(\log_a 2 + 1)}$$

Aplicando log na base a na equação:

$$\log_a 3a = (\log_a 2 + 1)(\log_a 2a)$$

$$\log_a 3 + 1 = (\log_a 2 + 1)(\log_a 2 + 1)$$

$$\log_a 3 + 1 = (\log_a 2)^2 + 2\log_a 2 + 1$$

$$\Rightarrow \log_a 3 = (\log_a 2)^2 + 2\log_a 2$$

Escrevendo os logs na base 2:

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 a} = \left(\frac{\log_2 2}{\log_2 a}\right)^2 + \frac{2\log_2 2}{\log_2 a}$$

Fazendo $x = \log_2 a$, temos:

$$\frac{\log_2 3}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{2\log_2 2}{x}$$

$$\log_2 3\, x = 1 + 2\text{x}$$

$$x(\log_2 3 - 2) = 1$$

$$x = \frac{1}{\log_2 3 - 2}$$

Retornando à variável a:

$$\log_2 a = \frac{1}{\log_2 3 - 2} = \frac{1}{\log_2 3 - \log_2 2^2} = \frac{1}{\log_2 \frac{3}{4}} = \log_{\frac{3}{4}} 2$$

$$\Rightarrow a = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$$

$$b = 2a$$

$$\Rightarrow b = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2 + 1}$$

$$c = 3a$$

$$\Rightarrow c = 3 \cdot 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$$

b) Temos as sequências:

$$(\log_a d\,, \log_b d\,, \log_c d) \text{ é uma PG}$$

$$(a, b, c) \text{ é uma PA, com } a < b < c$$

$$\Rightarrow r = b - a = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2 + 1} - 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2} = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}(2 - 1) = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$$

$$\Rightarrow q = \frac{\log_b d}{\log_a d} = \frac{\frac{\log_2 d}{\log_2 b}}{\frac{\log_2 d}{\log_2 a}} = \frac{\log_2 a}{\log_2 b}$$

$$q = \frac{\log_2 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}}{\log_2 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2 + 1}} = \frac{\log_{\frac{3}{4}} 2}{\log_{\frac{3}{4}} 2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_{\frac{3}{4}} 2}} = \frac{1}{1 + \log_2 \frac{3}{4}} = \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 \frac{3}{4}} = \frac{1}{\log_2 \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} 2$$

Portanto, $r = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$ e $q = \log_{\frac{3}{2}} 2$.

Questão trabalhosa pessoal, para encontrar os valores de a, b, c, temos que ir pelo método da tentativa e erro até achar alguma informação relevante.

Gabarito: a) $\boldsymbol{a = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}, b = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2 + 1}, c = 3 \cdot 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}}$ **b)** $\boldsymbol{r = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}}$ **e** $\boldsymbol{q = \log_{\frac{3}{2}} 2}$

---

139. (IME/2017)

Seja a equação $y^{\log_3 \sqrt{3y}} = y^{\log_3 3y} - 6, y > 0.$

O produto das raízes reais desta equação é igual a:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) 2

e) 3

Comentários

Vamos simplificar a equação do problema:

$$y^{\log_3 \sqrt{3y}} = y^{\log_3 3y} - 6$$

$$y^{\log_3 (3y)^{\frac{1}{2}}} = y^{\log_3 3y} - 6$$

$$y^{\frac{1}{2}\log_3 3y} = y^{\log_3 3y} - 6$$

Chamando $x = y^{\frac{1}{2}\log_3 3y}$, temos:

$$x = x^2 - 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

Raízes:

$$x_1 = -2 \; ou \; x_2 = 3$$

Encontrando os valores de y:

$$y^{\frac{1}{2}\log_3 3y} = -2$$

O enunciado diz que $y > 0$, então a equação acima não é válida. Então, temos que usar a outra raiz:

$$y^{\frac{1}{2}\log_3 3y} = 3$$

Aplicando log na base 3:

$$\log_3 y^{\frac{1}{2}\log_3 3y} = \log_3 3$$

$$\frac{1}{2}(1 + \log_3 y)\log_3 y = 1$$

Substituindo $z = \log_3 y$:

$$(1+z)z = 2$$

$$z^2 + z - 2 = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2 \; ou \; 1$$

$$z_1 = -2 \Rightarrow \log_3 y_1 = -2$$

$$y_1 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$z_2 = 1 \Rightarrow \log_3 y_2 = 1$$

$$y_2 = 3$$

Multiplicando as raízes, temos:

$$y_1 y_2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Portanto, encontramos a resposta na letra a.

Gabarito: "a".

140.(IME/2017)

Resolva o sistema de equações, onde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \log_3\left(\log_{\sqrt{3}} x\right) - \log_{\sqrt{3}}(\log_3 y) = 1 \\ \left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3^{143} \end{cases}$$

Comentários

Inicialmente, devemos analisar a condição de existência dos logs:

$$\log_{\sqrt{3}} x > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$\log_3 y > 0 \Rightarrow y > 1$$

Vamos usar a primeira equação:

$$\log_3\left(\log_{\sqrt{3}} x\right) - \log_{\sqrt{3}}(\log_3 y) = 1$$

Fazendo $\log_{\sqrt{3}} x = z$ e $\log_3 y = w$, temos:

$$\log_3 z - \log_{3^{\frac{1}{2}}} w = 1$$

$$\log_3 z = 1 + 2\log_3 w$$

$$\log_3 z = \log_3 3 + \log_3 w^2$$

$$\log_3 z = \log_3 3w^2$$

$$\Rightarrow z = 3w^2$$

Agora, vamos usar a segunda equação:

$$\left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3^{143}$$

Aplicando log na base 3:

$$\log_3\left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = \log_3 3^{143}$$

$$2\left(\log_3 y + \log_3 x^{\frac{1}{3}}\right) = 143$$

$$2\log_3 y + \frac{2}{3}\log_3 x = 143$$

Substituindo $z = \log_{\sqrt{3}} x$ e $w = \log_3 y$:

$$z = \log_{\sqrt{3}} x = 2\log_3 x$$

$$\Rightarrow 2w + \frac{z}{3} = 143$$

$$6w + z = 143 \cdot 3$$

Substituindo $z = 3w^2$:

$$6w + 3w^2 = 143 \cdot 3$$

$$2w + w^2 = 143$$

$$w^2 + 2w - 143 = 0$$

$$w = \left(-1 \pm \sqrt{1 + 143}\right) = -1 \pm 12 = -13 \; ou \; 11$$

Mas pelas condições de existência, temos $w = \log_3 y > 0$. Então, a única solução é $w = 11$. Desse modo:

$$w = 11 \Rightarrow \log_3 y = 11 \Rightarrow y = 3^{11}$$

$$z = 3w^2 = 3 \cdot 11^2 = 363$$

$$2\log_3 x = 363$$

$$\Rightarrow x = 3^{\frac{363}{2}} = \sqrt{3}^{363}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\left(\sqrt{3}^{363}; 3^{11}\right)\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\left(\sqrt{3}^{363}; 3^{11}\right)\right\}}$

---

141. (IME/2016/Modificada)

Sabendo-se que os números reais positivos a, b e c formam uma progressão geométrica e $\log\left(\frac{5c}{a}\right), \log\left(\frac{3b}{5c}\right)$ e $\log\left(\frac{a}{3b}\right)$ formam uma progressão aritmética, ambas nessa ordem. Prove que $b + c < a$.

Comentários

Do enunciado, temos:

$$(a, b, c) \text{ é uma PG}$$

$$\Rightarrow b^2 = ac$$

$$\left(log\left(\frac{5c}{a}\right), log\left(\frac{3b}{5c}\right), log\left(\frac{a}{3b}\right)\right) \text{ é uma PA}$$

$$\Rightarrow 2\log\left(\frac{3b}{5c}\right) = \log\left(\frac{5c}{a}\right) + \log\left(\frac{a}{3b}\right)$$

$$\log\left(\frac{3b}{5c}\right)^2 = \log\left[\left(\frac{5c}{a}\right)\left(\frac{a}{3b}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3b}{5c}\right)^2 = \frac{5c}{3b}$$

$$(3b)^3 = (5c)^3$$

$$3b = 5c$$

$$\Rightarrow b = \frac{5}{3}c$$

Usando a informação da PG:

$$b^2 = ac$$

$$\left(\frac{5}{3}c\right)^2 = ac$$

$$\Rightarrow a = \frac{25}{9}c$$

Dessa forma, somando $b + c$, temos:

$$b + c = \frac{5}{3}c + c = \frac{8}{3}c < \frac{25}{9}c = a$$

$$\therefore b + c < a$$

Gabarito: Demonstração

142.(IME/2016)

Quantos inteiros k satisfazem à desigualdade $2\sqrt{\log_{10} k - 1} + 10\log_{10^{-1}} k^{\frac{1}{4}} + 3 > 0$?

a) 10

b) 89

c) 90

d) 99

e) 100

Comentários

Resolvendo a inequação:

Da condição de existência do log:

$$k > 0$$

$$2\sqrt{\log_{10} k - 1} + 10\log_{10^{-1}} k^{\frac{1}{4}} + 3 > 0$$

$$2\sqrt{\log_{10} k - 1} + 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-1} \log_{10} k + 3 > 0$$

Substituindo $\log_{10} k = x$:

$$2\sqrt{x - 1} - \frac{5}{2}x + 3 > 0$$

$$4\sqrt{x-1} > 5x-6$$

Possibilidades:

$$\begin{cases} 5x-6 \leq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{6}{5} \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{6}{5}$$

$$\begin{cases} 5x-6 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 16(x-1) > (5x-6)^2 \end{cases}$$

$$x \geq \frac{6}{5}$$

$$x \geq 1$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{6}{5}$$

$$16(x-1) > 25x^2 - 60x + 36$$

$$25x^2 - 76x + 52 < 0$$

Raízes:

$$x = \frac{\left(38 \pm \sqrt{38^2 - 25 \cdot 52}\right)}{25} = \frac{38 \pm \sqrt{144}}{25} = \frac{38 \pm 12}{25} = 2 \; ou \; \frac{26}{25}$$

Com isso, temos:

$$\frac{26}{25} < x < 2$$

Juntando com as outras condições, temos:

$$\frac{26}{25} < \frac{6}{5} < x < 2$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} < x < 2$$

Unindo os intervalos de soluções, temos:

$$x \in \left[1, \frac{6}{5}\right] \cup \left(\frac{6}{5}, 2\right)$$

$$\Rightarrow x \in [1, 2)$$

Dessa forma, temos os valores de k:

$$\log_{10} k = x$$

$$1 \leq x < 2$$

$$\log_{10} 10^1 \leq \log_{10} x < \log_{10} 10^2$$

$$\Rightarrow 10 \leq x < 100$$

Então, os valores inteiros de x pertencem ao intervalo $[10,100)$. A quantidade é dada por:

$$n = 99 - 10 + 1 = 90$$

Com isso, encontramos o gabarito na letra c.

Gabarito: “c”.

143.(IME/2015)

Determine os valores reais de x que satisfazem a inequação:

$$\frac{4}{\log_3 x^2 - 2} + \log_x \frac{1}{9} > 1$$

Comentários

Simplificando a inequação, temos:

$$\frac{4}{\log_3 x^2 - 2} + \log_x \frac{1}{9} > 1$$

$$\frac{4}{2\log_3 x - 2} + \log_x 3^{-2} > 1$$

$$\frac{4}{2\log_3 x - 2} - 2\log_x 3 > 1$$

$$\frac{4}{2\log_3 x - 2} - \frac{2}{\log_3 x} > 1$$

Fazendo $\log_3 x = y$:

$$\frac{4}{2y-2} - \frac{2}{y} > 1$$

$$\frac{4y - 4(y-1)}{2y(y-1)} - 1 > 0$$

$$\frac{4 - 2y(y-1)}{2y(y-1)} > 0$$

$$\frac{-2y^2 + 2y + 4}{2y(y-1)} > 0$$

$$\frac{-y^2 + y + 2}{y(y-1)} > 0$$

$$-\frac{(y+1)(y-2)}{y(y-1)} > 0$$

$$\frac{(y+1)(y-2)}{y(y-1)} < 0$$

Estudando o sinal das funções acima, temos:

	$y<-1$	$-1<y<0$	$0<y<1$	$1<y<2$	$y>2$
$(y+1)(y-2)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$y(y-1)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\frac{(y+1)(y-2)}{y(y-1)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Analisando a tabela, vemos que y deve pertencer ao intervalo:

$$-1 < y < 0 \; ou \; 1 < y < 2$$

$$-1 < \log_3 x < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1$$

$$1 < \log_3 x < 2 \Rightarrow 3 < x < 9$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{3} < x < 1 \; ou \; 3 < x < 9\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{3} < x < 1 \; ou \; 3 < x < 9\right\}}$

144.(IME/2015)

Sejam x e y números reais não nulos tais que:

$$\begin{cases} \log_x y^{\pi} + \log_y x^{e} = a \\ \dfrac{1}{\log_y x^{\pi^{-1}}} - \dfrac{1}{\log_x y^{e^{-1}}} = b \end{cases}$$

O valor de $\frac{x^{a+b+2e}}{y^{a-b+2\pi}}$ é:

a) 1

b) $\sqrt{\frac{\pi}{e}}$

c) $\sqrt{\frac{a\cdot e}{b\cdot \pi}}$

d) $a-b$

e) $\frac{(a+b)^{\frac{e}{\pi}}}{\pi}$

Comentários

Simplificando o sistema, temos:

$$\begin{cases} \log_x y^{\pi} + \log_y x^{e} = a \\ \dfrac{1}{\log_y x^{\pi^{-1}}} - \dfrac{1}{\log_x y^{e^{-1}}} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi \log_x y + e \log_y x = a \\ \dfrac{1}{\frac{1}{\pi}\log_y x} - \dfrac{1}{\frac{1}{e}\log_x y} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi \log_x y + e \log_y x = a \\ \pi \log_x y - e \log_y x = b \end{cases}$$

Somando as equações, encontramos:

$$2\pi \log_x y = a + b$$

$$\log_x y = \frac{a+b}{2\pi}$$

$$\frac{\log y}{\log x} = \frac{a+b}{2\pi}$$

$$\log y^{2\pi} = \log x^{a+b}$$

$$\Rightarrow y^{2\pi} = x^{a+b}$$

Subtraindo as equações:

$$2e \log_y x = a - b$$

$$2e \log x = (a-b)\log y$$

$$\log x^{2e} = \log y^{a-b}$$

$$\Rightarrow x^{2e} = y^{a-b}$$

Queremos calcular:

$$\frac{x^{a+b+2e}}{y^{a-b+2\pi}} = \frac{x^{a+b} \cdot x^{2e}}{y^{a-b} \cdot y^{2\pi}}$$

Usando as relações que encontramos, temos:

$$\frac{x^{a+b} \cdot x^{2e}}{y^{a-b} \cdot y^{2\pi}} = \frac{y^{2\pi} \cdot y^{a-b}}{y^{a-b} \cdot y^{2\pi}} = 1$$

Portanto, o gabarito é a letra a.

Gabarito: “a”.

145.(IME/2014)

Sabe-se que $y \cdot z \cdot \sqrt{z \cdot \sqrt{x}} = x \cdot y^3 \cdot z^2 = \frac{x}{z \cdot \sqrt{y \cdot z}} = e$**, em que** e **é a base dos logaritmos naturais. O valor de** $x + y + z$ **é**

a) $e^3 + e^2 + 1$

b) $e^2 + e^{-1} + e$

c) $e^3 + 1$

d) $e^3 + e^{-2} + e$

e) $e^3 + e^{-2} + e^{-1}$

Comentários

Analisando as condições de existência dos radicais, encontramos:

$$x, y, z > 0$$

Vamos usar as equações dadas para encontrar os valores de x, y, z:

$$y \cdot z \cdot \sqrt{z \cdot \sqrt{x}} = x \cdot y^3 \cdot z^2 = \frac{x}{z \cdot \sqrt{y \cdot z}} = e$$

$$\begin{cases} y \cdot z \cdot \sqrt{z \cdot \sqrt{x}} = e \\ x \cdot y^3 \cdot z^2 = e \\ \dfrac{x}{z \cdot \sqrt{y \cdot z}} = e \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} y^2 \cdot z^2 \cdot z \cdot \sqrt{x} = e^2 \\ x \cdot y^3 \cdot z^2 = e \\ \dfrac{x^2}{z^2 \cdot (y \cdot z)} = e^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4 \cdot z^6 \cdot x = e^4 \quad (I) \\ x \cdot y^3 \cdot z^2 = e \quad (II) \\ x^2 \cdot y^{-1} \cdot z^{-3} = e^2 \quad (III) \end{cases}$$

Elevando a equação (III) ao quadrado e multiplicando por (I):

$$x^4 \cdot y^{-2} \cdot z^{-6} \cdot (y^4 \cdot z^6 \cdot x) = e^4 \cdot e^4$$

$$x^5 \cdot y^2 = e^8 \quad (IV)$$

Dividindo a equação (I) pelo cubo da equação (II), temos:

$$\frac{y^4 \cdot z^6 \cdot x}{x^3 \cdot y^9 \cdot z^6} = \frac{e^4}{e^3}$$

$$x^{-2} \cdot y^{-5} = e \quad (V)$$

Elevando (IV) ao quadrado e (V) à quinta e multiplicando ambos, temos:

$$x^{10} \cdot y^4 = e^{16}$$

$$x^{-10} \cdot y^{-25} = e^5$$

$$\Rightarrow y^{-21} = e^{21}$$

$$\Rightarrow y = e^{-1}$$

Substituindo em (V):

$$x^{-2} \cdot e^{5} = e$$

$$x^{-2} = e^{-4}$$

$$\Rightarrow x = \pm e^{2}$$

Mas da condição de existência, $x > 0$. Então, $x = e^2$.

Substituindo x e y na equação (II):

$$x \cdot y^3 \cdot z^2 = e \qquad (II)$$

$$e^2 \cdot e^{-3} \cdot z^2 = e$$

$$z^2 = e^2$$

$$\Rightarrow z = e$$

Portanto, a soma pedida é dada por:

$$x + y + z = e^2 + e^{-1} + e$$

Encontramos a resposta na letra b.

Gabarito: "b".

---

146. (IME/2014)

Resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \dfrac{y}{x} \\ 2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^y \end{cases}$$

Comentários

Das condições de existência iniciais, temos:

Dos radicais:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

Do logaritmo:

$$\frac{y}{x} > 0$$

Fazendo a intersecção entre eles:

$$\Rightarrow x, y > 0$$

Analisando a primeira equação:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \frac{y}{x}$$

Se $x > y$, temos $\frac{y}{x} < 1$ e consequentemente $\log_3 \frac{y}{x} < 0$.

$$x > y \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$$

$$\log_3 \frac{y}{x} < 0$$

Nesse caso, é impossível ter valores de x e y que satisfaçam as condições acima.

Se $x < y$:

$$\frac{y}{x} > 1 \Rightarrow \log_3 \frac{y}{x} > 0$$

$$x < y \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} < 0$$

Também temos um sistema impossível.

Portanto a única solução é $x = y$:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0 = \log_3 1$$

Substituindo $x = y$ na segunda equação, temos:

$$2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^x$$

$$4 \cdot 2^x + (2^3)^x = 5 \cdot (2^2)^x$$

Fazendo $2^x = z$, temos:

$$4z + z^3 = 5z^2$$

$$z^3 - 5z^2 + 4z = 0$$

$$z(z^2 - 5z + 4) = 0$$

$$z(z-4)(z-1) = 0$$

Dessa forma, encontramos as raízes:

$$z = 0 \; ou \; z = 4 \; ou \; z = 1$$

$$z = 0 \Rightarrow 2^x = 0 \Rightarrow impossível$$

$$z = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

$$z = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0 \text{ (impossível, pois } x > 0)$$

Portanto, a única solução é $x = y = 2$.

Gabarito: $\boldsymbol{x = y = 2}$

147.(IME/2014)

Qual é o menor número?

a) $\pi \cdot 8!$

b) 9^9

c) $2^{2^{2^2}}$

d) 3^{3^3}

e) $2^{13} \cdot 5^3$

Comentários

Ainda não estudamos fatorial, mas o número $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$.

Vamos comparar os números:

$$\pi \cdot 8! = \pi \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \pi \cdot 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$9^9 = (3^2)^9 = 3^{18}$$

$$2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}$$

$$3^{3^3} = 3^{27}$$

$$2^{13} \cdot 5^3$$

Analisando os valores acima, temos:

$$2^{16} < 3^{18} < 3^{27}$$

$$2^{13} \cdot (2^2)^3 < 2^{13} \cdot 5^3 < 3^{13} \cdot 5^3 = 3^{13} \cdot 125 < 3^{13} \cdot 3^5 = 3^{18}$$

$$2^{16} < 2^{19} < 2^{13} \cdot 5^3 < 3^{18}$$

Dessa forma:

$$2^{16} < 2^{13} \cdot 5^3 < 3^{18} < 3^{27}$$

Resta saber se $\pi \cdot 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ é menor que 2^{16}:

Testando $2^{16} < \pi \cdot 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$:

$$2^{16} < \pi \cdot 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2^9 < \pi \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2^3 \cdot 2^6 < 3^2 \cdot \pi \cdot 35$$

$$8 \cdot 64 < 9 \cdot 105 < 9 \cdot \pi \cdot 35$$

A desigualdade acima é verdadeira, logo o menor número é 2^{16}. Encontramos o gabarito na letra c.

Gabarito: "c".

---

148. (IME/2013)

Considere a equação $\log_{3x} \frac{3}{x} + (\log_3 x)^2 = 1$. **A soma dos quadrados das soluções reais dessa equação está contida no intervalo**

a) $[0, 5)$

b) $[5, 10)$

c) $[10, 15)$

d) $[15, 20)$

e) $[20, \infty)$

Comentários

Inicialmente, devemos verificar a condição de existência:

$$x > 0$$

Simplificando a equação, obtemos:

$$\log_{3x}\frac{3}{x}+(\log_3 x)^2=1$$

$$\frac{\log_3\left(\frac{3}{x}\right)}{\log_3 3x}+(\log_3 x)^2=1$$

$$\frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x}+(\log_3 x)^2=1$$

Substituindo $\log_3 x=y$:

$$\frac{1-y}{1+y}+y^2=1$$

$$\frac{(1-y)+y^2(y+1)}{1+y}=1$$

$$1-y+y^3+y^2=1+y$$

$$y^3+y^2-2y=0$$

$$y(y^2+y-2)=0$$

$$y(y+2)(y-1)=0$$

Encontrando as raízes da equação, temos:

$$y_1=0\Rightarrow\log_3 x_1=0\Rightarrow x_1=3^0=1$$

$$y_2=-2\Rightarrow\log_3 x_2=-2\Rightarrow x_2=\frac{1}{9}$$

$$y_3=1\Rightarrow\log_3 x_3=1\Rightarrow x_3=3$$

O problema pede a soma dos quadrados das soluções, então:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1^2+\frac{1}{9^2}+3^2=1+\frac{1}{81}+9=10+\frac{1}{81}$$

Analisando as alternativas, encontramos:

$$10<10+\frac{1}{81}<15$$

$$\Rightarrow 10+\frac{1}{81}\subset[10,15)$$

O que nos leva à alternativa c.

Gabarito: “c”.

149.(IME/2012)

Se $\log_{10}2=x$ e $\log_{10}3=y$, então $\log_5 18$ vale:

a) $\frac{x+2y}{1-x}$

b) $\frac{x+y}{1-x}$

c) $\frac{2x+y}{1+x}$

d) $\frac{x+2y}{1+x}$

e) $\frac{3x+2y}{(1-x)}$

Comentários

Vamos manipular $\log_5 18$ de modo a obter os fatores $\log 2$ e $\log 3$. Mudando a base e fatorando os números:

$$\log_5 18 = \frac{\log 2 \cdot 3^2}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{(\log 2 + 2\log 3)}{1 - \log 2}$$

Substituindo $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$:

$$\Rightarrow \log_5 18 = \frac{x + 2y}{1 - x}$$

Dessa forma, encontramos o gabarito na letra a.

Gabarito: "a".

150.(IME/2010)

Seja $f(x) = |3 - \log(x)|, x \in \mathbb{R}$. Sendo n um número inteiro positivo, a desigualdade

$$\left|\frac{f(x)}{4}\right| + \left|\frac{2f(x)}{12}\right| + \left|\frac{4f(x)}{36}\right| + \cdots + \left|\frac{2^{n-3}f(x)}{3^{n-1}}\right| + \cdots \le \frac{9}{4}$$

Somente é possível se:

Obs.: log **representa a função logarítmica na base 10.**

a) $0 \le x \le 10^6$

b) $10^{-6} \le x \le 10^8$

c) $10^3 \le x \le 10^6$

d) $10^0 \le x \le 10^6$

e) $10^{-6} \le x \le 10^6$

Comentários

Vamos verificar a desigualdade para vermos se encontramos alguma relação para f:

$$\left|\frac{f(x)}{4}\right| + \left|\frac{2f(x)}{12}\right| + \left|\frac{4f(x)}{36}\right| + \cdots + \left|\frac{2^{n-3}f(x)}{3^{n-1}}\right| + \cdots \le \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{4}|f(x)| + \frac{2}{12}|f(x)| + \frac{4}{36}|f(x)| + \cdots + \frac{2^{n-3}}{3^{n-1}}|f(x)| + \cdots \le \frac{9}{4}$$

$$|f(x)|\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{12} + \frac{4}{36} + \cdots + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots\right) \le \frac{9}{4}$$

O número em vermelho é a soma de uma PG infinita de razão $2/3$ e $a_1 = 1/4$. Desse modo, podemos usar a fórmula da soma infinita da PG:

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow |f(x)|\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{12}+\frac{4}{36}+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\cdots\right)\leq\frac{9}{4}$$

$$|f(x)|\frac{3}{4}\leq\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow |f(x)|\leq 3$$

$$\Rightarrow -3\leq f(x)\leq 3$$

Substituindo $f(x)=|3-\log x|$, temos:

$$-3\leq|3-\log x|\leq 3$$

Das propriedades do módulo, sabemos que $|3-\log x|\geq 0$.

Então:

$$0\leq|3-\log x|\leq 3$$

$$\Rightarrow |3-\log x|\leq 3$$

$$-3\leq 3-\log x\leq 3$$

$$-6\leq-\log x\leq 0$$

$$0\leq\log x\leq 6$$

$$\Rightarrow 10^0\leq x\leq 10^6$$

Portanto, encontramos a resposta na letra d.

Gabarito: "d".

151.(IME/2009)

Dada a função $F:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$, com as seguintes características:

$F(0,0)=1;$

$F(n,m+1)=q\cdot F(n,m)$, **onde q é um número real diferente de zero.**

$F(n+1,0)=r+F(n,0)$, **onde r é um número real diferente de zero.**

Determine o valor de $\sum_{i=0}^{2009}F(i,i)\,,i\in\mathbb{N}$.

Comentários

$$r=\ F(k+1,0)-F(k,0)$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}r=\sum_{k=0}^{n-1}F(k+1,0)-F(k,0)$$

$$\Rightarrow nr=F(n,0)-F(0,0)$$

$$\Rightarrow F(n,0)=1+nr$$

$$F(n,k+1) = q\cdot F(n,k)$$
$$\Rightarrow F(n,m) = q^m \cdot F(n,0) = q^m \cdot (1+nr),$$

pois $(a_k) = \big(F(n,k)\big)$ forma uma progressão geométrica, para cada n fixado.

Logo, $\sum_{i=0}^{2009} F(i,i) = \sum_{i=0}^{2009} q^i \cdot (1+ir) = \sum_{i=0}^{2009} q^i + r\cdot \sum_{i=0}^{2009} i\cdot q^i$.

Para $q=1$, temos:

$$\sum_{i=0}^{2009} 1 + r\cdot \sum_{i=0}^{2009} i \;= 2010 + r\cdot \frac{2009\cdot 2010}{2} = 2.019.045\,r + 2010.$$

Para $q \neq 1$:

$$S_1 = \sum_{i=0}^{2009} q^i = \frac{q^{2010}-1}{q-1}$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{2009} i\cdot q^i \;= \sum_{i=1}^{2009} i\cdot q^i \;= \sum_{j=1}^{2009}\sum_{i=j}^{2009} q^i = \sum_{j=1}^{2009} \frac{q^{2010}-q^j}{q-1} = \frac{2009q^{2010}}{q-1} - \frac{1}{q-1}\sum_{j=1}^{2009} q^j$$
$$= \frac{2009q^{2010}}{q-1} - \frac{1}{q-1}\cdot\frac{q^{2010}-q}{q-1} = \frac{2009q^{2010}(q-1)-(q^{2010}-q)}{(q-1)^2} \Rightarrow$$
$$S_2 = \frac{(2009q-2010)q^{2010}+q}{(q-1)^2}$$

Logo,

$$\sum_{i=0}^{2009} F(i,i) = S_1 + r\cdot S_2 = \frac{q^{2010}-1}{q-1} + r\cdot\left[\frac{(2009q-2010)q^{2010}+q}{(q-1)^2}\right] \Rightarrow$$
$$\sum_{i=0}^{2009} F(i,i) = \frac{q^{2010}-1}{q-1} + r\cdot\left[\frac{(2009q-2010)q^{2010}+q}{(q-1)^2}\right]$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{q^{2010}-1}{q-1} + r\cdot\left[\frac{(2009q-2010)q^{2010}+q}{(q-1)^2}\right]}$

---

152. (IME/2007)

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, tal que:

$$\begin{cases} f(4) = 5 \\ f(x+4) = f(x)\cdot f(4) \end{cases}$$

O valor de $f(-4)$ é:

a) $-4/5$

b) $-1/4$

c) $-1/5$

d) $1/5$

e) $4/5$

Comentários

Para $x = 0$ temos:

$$f(0+4) = f(0) \cdot f(4) \Rightarrow f(0) = \frac{f(4)}{f(4)} = 1$$

Para $x = -4$:

$$f(-4+4) = f(-4) \cdot f(4) \Rightarrow f(-4) = \frac{f(0)}{f(4)}$$

Portanto:

$$f(-4) = \frac{1}{5}$$

Gabarito: "d"

---

153. (IME/2005)

Dada a função $f(x) = \frac{(156^x + 156^{-x})}{2}$, demonstre que:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

Comentários

Basta realizar as operações para verificar a identidade:

$$2 \cdot \big(f(x+y) + f(x-y)\big) = 2f(x+y) + 2f(x-y)$$

Sabemos que

$$2f(x) = 156^x + 156^{-x}$$

Assim:

$$\begin{aligned} 2f(x+y) + 2f(x-y) &= (156^{x+y} + 156^{-x-y}) + (156^{x-y} + 156^{-x+y}) \\ &= 156^x 156^y + 156^{-x} 156^{-y} + 156^x 156^{-y} + 156^{-x} 156^y \\ &= (156^x + 156^{-x})(156^y + 156^{-y}) \\ &= 2f(x) \cdot 2f(y) \\ &= 2 \cdot \big(2f(x)f(y)\big) \end{aligned}$$

Logo, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Gabarito: Demonstração.

154.(IME/2004)

Seja uma função $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, onde ▯ representa o conjunto dos números reais, tal que $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$ para a e b pertencentes ao domínio de f. Demonstre que f é uma função par.

Comentários

$$f(1) - f(-1) = f\left(\frac{1}{-1}\right) = f(-1) = f\left(\frac{-1}{1}\right) = f(-1) - f(1) \Rightarrow f(1) = f(-1)$$

$$f(a) = f\left(\frac{a}{1}\right) = f(a) - f(1) \Rightarrow f(1) = f(-1) = 0$$

$$f(-a) = f\left(\frac{a}{-1}\right) = f(a) - f(-1) = f(a) - 0 = f(a) \Rightarrow f \text{ é par.}$$

Gabarito: Demonstração.

155.(IME/1993)

Considere uma função $L: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ que satisfaz:

1. L **é crescente, isto é, para quaisquer** $0 < x < y$ **tem-se** $L(x) < L(y)$**.**

2. $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$ **para quaisquer** $x, y > 0$**.**

Mostre que:

a) $L(1) = 0$.

b) $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$ **para todo** $x > 0$.

c) $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$ **para quaisquer** $x, y > 0$.

d) $L(x^n) = nL(x)$ **para todo** $x > 0$ **e natural** n.

e) $L(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}L(x)$ **para todo** $x > 0$ **e natural** n.

f) $L(x) < 0 < L(y)$ **sempre que** $0 < x < 1 < y$.

Comentários

A banca está, basicamente, pedindo ao candidato que deduza algumas propriedades de uma das equações funcionais de Cauchy.

a) $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1) \Rightarrow L(1) = 0$.

b) $0 = L(1) = L\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.

c) $L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) - L(y)$.

d) Por indução em n. Para $n = 0$ ou $n = 1$, é imediata a validade da proposição. Suponha a validade para $n - 1$. Então:

$$L(x^n) = L(x \cdot x^{n-1}) = L(x) + L(x^{n-1}) = L(x) + (n-1) \cdot L(x) = n \cdot L(x)$$

e) Pelo item anterior, $L(y^n) = n \cdot L(y)$ para todo $y > 0$ e n natural. Tomando $y = \sqrt[n]{x}$, temos $L(x) = n \cdot L(\sqrt[n]{x}) \Rightarrow L(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}L(x)$.

f) $0 < x < 1 \Rightarrow L(x) < L(1) = 0$ e $0 < 1 < y \Rightarrow 0 = L(1) < L(y)$. Logo,

$$0 < x < 1 < y \Rightarrow L(x) < 0 < L(y)$$

Gabarito: Demonstração.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da nossa aula. Agora, você deve saber como resolver problemas envolvendo exponencial e logaritmos. O mais importante nessa aula é que você tenha entendido como aplicar as propriedades de cada um desses temas.

Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

FALE COMIGO

/profvictorso

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Dolce, Osvaldo. Murakami, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 2: Logaritmos. 10. ed. Atual, 2013. 218p.

[2] Lima, Elon Lages. Carvalho, Paulo Cezar Pinto. Wagner, Eduardo. Morgado, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio, Volume 1. 11 ed. SBM, 2016. 260p.