Estratégia Militares

Aula 01 – Álgebra Elementar

IME 2021

Professor Victor So

Sumário

Apresentação

Olá.

Nessa aula iniciaremos o estudo da álgebra. Estudaremos conceitos de números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Também veremos desigualdades e princípio da indução.

Não teremos muitas questões do ITA nem do IME nesses assuntos, mas veremos mais adiante que eles servirão como base para conseguirmos aprofundar a matéria no nível que a prova cobra. É muito importante que você entenda cada conceito e resolva muitos exercícios para fixação, pois elas o ajudarão a resolver os exercícios mais avançados.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

FALE COMIGO

/victorso   /profvictorso   /profvictorso

1. Expressão, Equação e Inequação

Antes de aprofundarmos nosso estudo na Matemática, vamos primeiro esclarecer alguns termos matemáticos, elas serão usadas bastante ao decorrer do curso. Se você já se sente confortável com esses termos, pule para o próximo capítulo.

Você sabe a diferença entre expressão, equação e inequação?

Vamos primeiro relembrar o que é uma expressão. Uma expressão, no estudo da Matemática, pode ser classificada em aritmética ou algébrica. Veja os exemplos:

Expressão aritmética:

$$1 \cdot 2 + 4 - 1$$

Expressão algébrica:

$$a^2 + 2bc$$

Reparou na diferença?

Antes de responder, vamos relembrar. Uma expressão é apenas um modo de representar um número na Matemática, então 1 pode ser uma expressão, $2 + 3$ pode ser uma expressão e $a + b$ também. A diferença entre as duas expressões do exemplo é que na aritmética trabalhamos apenas com números enquanto na álgebra incluímos também as letras do alfabeto.

Na aritmética, temos bem definido os valores do que queremos calcular. Então, se eu dissesse $1 + 1$, você responderia "2", certo? E se no lugar dessa expressão eu usasse letras, por exemplo, $a + b$, o que você responderia? Provavelmente você me diria "não sei".

Sabe a vantagem de se usar letras no lugar de números? Quando, substituímos os números pelas letras, conseguimos generalizar os resultados matemáticos. Por exemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{41}{28}$$

O que fizemos foi aplicar o MMC entre 4 e 7 e somar as frações. Na álgebra, poderíamos generalizar esse cálculo dessa forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Agora, vamos ver o que é uma equação. Basicamente a diferença entre equação e expressão é o uso do sinal $=$. Estabelecemos uma relação entre duas expressões.

Uma equação aritmética é uma sentença fechada que pode ser classificada em verdadeira ou falsa, lembra da aula de Noções de Lógica?

Exemplo:

$$2 + 7 = 5$$

Isso é um exemplo de equação aritmética cujo valor lógico é falso.

Agora, veja um exemplo de equação algébrica:

$$a + b = 25$$

Uma equação algébrica é uma sentença aberta. Não conseguimos descobrir seu valor lógico diretamente. Mas podemos calcular o valor da incógnita dependendo da situação, por exemplo:

$$x + 1 = 5$$

Nesse caso, podemos calcular o valor de x:

$$x + 1 = 5$$
$$x + 1 - 1 = 5 - 1$$
$$x = 4$$

Por último, vamos ver o que é uma inequação. Diferentemente da equação, na inequação usamos os sinais de desigualdade. Podemos também ter uma inequação aritmética e algébrica, as mesmas definições para as equações também valem para as inequações. Veja um exemplo de inequação aritmética:

$$2 + 3 < 1$$

Isso é uma sentença fechada, cujo valor lógico é falso. Pois, está dizendo $2 + 3$ é menor $(<)$ que 1.

Na álgebra:

$$a + b < 10$$

Agora que esclarecemos esses termos, vamos continuar à aula.

2. Conjunto dos Números Naturais $(\mathbb{N})$

Vamos estudar um breve histórico dos números naturais.

Os números naturais foram criados para ajudar o homem a contar. A contagem, antes dos primórdios da civilização, era baseada na contagem “um”, “dois” e “muitos”. Os primeiros seres humanos apenas conheciam o número 1 e o 2, acima disso eles classificavam os números como “muitos”. Com o desenvolvimento da civilização, a necessidade de se melhorar o processo de contagem levou ao surgimento dos números naturais $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Apesar disso, o conhecimento que se tinha dos números naturais era muito vago, não existia nada que descrevesse precisamente o conjunto. Em 1889, o matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) estabeleceu quatro axiomas conhecidos como axiomas de Peano. (Axiomas são verdades universalmente aceitas. Elas são inquestionáveis, funcionam como uma lei.) Vejamos os quatro axiomas:

a) Todo número natural tem um único sucessor.

b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

c) Existe um único número natural, chamado “um” e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.

d) Seja X um conjunto de números naturais, se $1 \in X$ e o sucessor de todo elemento de X pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Todas as propriedades e teoremas relativos aos números naturais são deduzidos através desses axiomas.

Veja que a essência dos números naturais reside na palavra "sucessor". Perceba também que na época o número 0 não foi incluído como um número natural. Há controvérsias a respeito de incluir o 0 ou não no conjunto dos números naturais, alguns autores consideram que $0 \in \mathbb{N}$ e outros não. Caso não seja fornecido a informação na prova, devemos usar o bom senso e fazer suposições. Normalmente, as bancas consideram o 0 um número natural.

2.1. Princípio da Indução Finita

O último axioma de Peano é conhecido como axioma da Indução. Um princípio que decorre dela é o **Princípio da Indução Finita (PIF)**, também conhecido como **Recorrência**. Ela serve para provar proposições através de uma demonstração por indução.

O PIF diz que:
Uma propriedade $P(n)$ relativa aos números naturais $n \geq n_0$ é válida se, e somente se, satisfazer as seguintes condições:
I) $P(n_0)$ é válida. Para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.
II) Para $K \in \mathbb{N}$, se $P(K)$ é válida, então $P(K+1)$ também é válida.

O PIF demonstra que se a propriedade é válida para algum $K \in \mathbb{N}$ e, também, é válida para o seu sucessor, então ela será válida para todo número natural, já que K é um termo generalizado do conjunto dos números naturais.

Vamos ver na prática como esse princípio pode ser aplicado.

1. Demonstre $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2, n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

Como devemos ler essa questão:

A primeira parte $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n+1)$ é um somatório, onde cada termo do somatório é um número natural da forma $n(3n+1)$.

Ele diz que somando termos da forma $n(3n+1)$ com $n \in \mathbb{N}$, teremos como resultado $n(n+1)^2$. Então se $n = 4$, deveremos ter uma soma até $n(3n+1) = 4 \cdot (3 \cdot 4 + 1) = 4 \cdot 13$. A soma será $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 13$.

Outro exemplo, se $n = 1$ a soma será até $n(3n + 1) = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) = 1 \cdot 4$. Assim, a soma seria apenas o valor $1 \cdot 4$. Perceba que o somatório terá n termos, para $n = 1$ temos apenas 1 termo no somatório.

Vamos demonstrar usando PIF:

I) Precisamos verificar se a equação é válida, para isso vamos fazer $n = 1$ e encontrar o resultado de $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$. Vamos calcular o membro à direita da igualdade:

$$n(n + 1)^2 = 1 \cdot (1 + 1)^2 = 1 \cdot 2^2 = 1 \cdot 4 = 4$$

A segunda parte da igualdade nos mostra que substituindo $n = 1$ na expressão, obtemos como resultado o valor 4.

Vamos calcular agora o valor do somatório e verificar se é verdadeira a proposição.

O somatório terá apenas 1 termo para $n = 1$:

$$n(3n + 1) = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) = 1 \cdot 4 = 4$$

Assim, a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

II) Vamos generalizar o resultado para $n = K, K \in \mathbb{N}$. Para isso, substituímos $n = K$ na equação.

Hipótese (H): Para algum $K \in \mathbb{N}$, temos válida a propriedade.

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + K(3K + 1) = K(K + 1)^2$$

Tese (T): Se a propriedade é válida para $K \in \mathbb{N}$, ela será válida para $K + 1$. Assim, substituindo $n = K + 1$ na equação:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K + 1)[3(K + 1) + 1] = (K + 1)[(K + 1) + 1]^2$$

Desenvolvendo a equação:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K + 1)[3(K + 1) + 1] = (K + 1)[(K + 1) + 1]^2$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K + 1)[3K + 3 + 1] = (K + 1)(K + 2)^2$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K + 1)(3K + 4) = (K + 1)(K + 2)^2$$

Repare nos termos coloridos, esses são os termos que foram desenvolvidos.

Não se assuste com essa equação gigantesca. Veremos mais adiante assuntos que facilitarão o seu entendimento e também resolveremos bastante exercícios para você consolidar o conhecimento.

Para demonstrar a propriedade usando PIF, devemos usar a nossa hipótese e tentar chegar à tese. Primeiro escrevemos a nossa hipótese:

$$(H) \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + K(3K + 1) = K(K + 1)^2$$

Agora, devemos usar essa equação e tentar chegar à tese:

$$(T) \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K + 1)(3K + 4) = (K + 1)(K + 2)^2$$

Como vamos fazer isso?

Observe os somatórios de (H) e (T):

$$(H) \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + K(3K + 1)$$

$$(T) \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots K(3K + 1) + (K + 1)(3K + 4)$$

A única diferença entre esses somatórios é a presença do termo $(K + 1)(3K + 4)$ em (T).

Então vamos somar $(K + 1)(3K + 4)$ nos dois lados da igualdade de (H).

Escrevendo a equação de (H):

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + K(3K + 1) = K(K + 1)^2$$

Somando $(K + 1)(3K + 4)$ nos dois lados da equação:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + K(3K + 1) + (K + 1)(3K + 4) =$$
$$K(K + 1)^2 + (K + 1)(3K + 4)$$

Vamos resolver o lado direito da equação:

$$K(K+1)^2 + (K+1)(3K+4)$$
$$K(K+1)(K+1) + (K+1)(3K+4)$$

Colocando $(K+1)$ em evidência:

$$K(K+1)(K+1) + (K+1)(3K+4)$$
$$(K+1)[K(K+1) + (3K+4)]$$
$$(K+1)[K^2 + K + 3K + 4]$$
$$(K+1)[K^2 + 4K + 4]$$

Fatorando o termo $K^2 + 4K + 4$:

$$(K+1)(K+2)^2$$

Assim, encontramos através da hipótese a seguinte igualdade:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K+1)(3K+4) = (K+1)(K+2)^2$$

Essa é a tese. Logo, acabamos de demonstrar por PIF que a propriedade é válida, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Calma, aluno(a). Coloquei esse exercício na teoria para você ver na prática como usamos o PIF. Ela será muito útil para provar propriedades de alguns assuntos que veremos durante o curso. Quando estudarmos técnicas de fatoração, você conseguirá facilmente usar o PIF.

2.2. Adição e Multiplicação

Os números naturais possuem duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação. Através dos axiomas de Peano, podemos provar as propriedades abaixo. Considere $a, b, c \in \mathbb{N}$.

a) Associativa:

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$
$$(ab)c = a(bc)$$

Quando encontramos números entre parênteses com o mesmo operador na expressão, podemos trocar os elementos dentro dos parênteses. Essas expressões poderiam também ser escritas sem os parênteses.

Exemplo:

$$1+2+5 = (1+2)+5 = 1+(2+5) = 8$$
$$2 \cdot 3 \cdot 4 = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 24$$

b) Comutativa:

$$a+b = b+a$$
$$ab = ba$$

A propriedade da comutativa diz que a ordem dos fatores não altera o produto e a soma. Então podemos simplesmente trocar os números de lugar que o resultado será o mesmo.

c) Distributiva

$$a(b+c) = ab + ac$$

Essa propriedade é conhecida como a “técnica do chuveirinho”. Veja:

$$a(b+c) = ab + ac$$

d) Elemento neutro da adição:

$$a + 0 = a$$

e) Elemento neutro da multiplicação:

$$a \cdot 1 = a$$

2.3. Desigualdades

Para finalizarmos o estudo do conjunto dos números naturais, vamos estudar as propriedades de desigualdades. Vamos usar os seguintes sinais:

$=$ para representar o sinal de igual

$>$ para representar o sinal de maior

$<$ para representar o sinal de menor

$\leq$ para representar o sinal de menor ou igual

$\geq$ para representar o sinal de maior ou igual

Um bizu para memorizar esses sinais: a flecha sempre aponta para o menor número.

Exemplos:

I) $1 < 3$

Lê-se 1 é menor que 3. Perceba a flecha “ $<$ ” apontando para o número 1.

II) $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$

III) $9 > 8 > 7 > 6 > 5 > 4 > 3 > 2 > 1$

Vamos definir os números $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Temos as seguintes propriedades de desigualdade:

a) Transitividade:

$$a < b \ e \ b < c \rightarrow a < c$$

Se a é menor que b e b é menor que c, decorre que a é menor que c.

Exemplo:

$$1 < 5 \; e \; 5 < 7 \rightarrow 1 < 7$$

b) Tricotomia

$$a < b \; ou \; a = b \; ou \; a > b$$

Essa propriedade diz sobre as únicas três possibilidades da relação de desigualdade.

Vamos analisar as relações de desigualdade entre 10 e 2.

As únicas possibilidades são:

1) $10 < 2$? Não.

2) $10 = 2$? Não.

3) $10 > 2$? Sim.

c) Monotonicidade: se $a < b$ e $c > 0$

$$a + c < b + c$$

$$ac < bc$$

Essa propriedade nos diz que é permitido somar ou multiplicar os dois lados da desigualdade por um número natural maior que zero sem alterá-lo.

Exemplo:

$$1 < 5$$

$$1 + 3 < 5 + 3 \Rightarrow 4 < 8$$

$$1 \cdot 3 < 5 \cdot 3 \Rightarrow 3 < 15$$

TOME NOTA!

Essas propriedades são válidas para os números naturais! Veremos mais adiante que no conjunto dos inteiros, podemos modificar algumas desigualdades.

3. Conjunto dos Números Inteiros $(\mathbb{Z})$

A diferença entre os números inteiros dos números naturais é a presença de números negativos. As propriedades estudadas no tópico dos números naturais podem ser provadas também para os inteiros.

3.1. Propriedades

3.1.1. Soma e Multiplicação

Seja $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

a) Comutativa

$$a + b = b + a$$
$$ab = ba$$

b) Associativa

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a(bc) = (ab)c$$

c) Distributiva

$$a(b + c) = ab + ac$$

d) Elemento neutro da soma

$$a + 0 = a$$

e) Elemento neutro da multiplicação

$$a \cdot 1 = a$$

f) Elemento simétrico

$$x + a = 0 \Rightarrow x = -a$$

$-a$ é denominado simétrico do número a.

g) Se $c \neq 0$:

$$ac = bc \Rightarrow a = b$$

Essa propriedade é conhecida como lei do corte, veja:

$$ac = bc \Rightarrow a\cancel{c} = b\cancel{c} \Rightarrow a = b$$

h) $a \cdot 0 = 0$

i) $(-a)b = -ab$

j) $(-a)(-b) = ab$

k) $ab = 0 \rightarrow a = 0 \; ou \; b = 0$

2. Calcule:
a) $3 + 6$
b) $(-4) + 5$
c) $1 + (-3)$
d) $(-3) + (-7)$
e) $3 \cdot 4$
f) $(-3) \cdot 5$
g) $(-2)(-3)$
h) $4 \cdot (-2)$
i) $3 + (-6) + 1 + (-3)$
j) $3 - (-4)$
k) $-4 - (3)$
l) $(-1) - (-3)$
m) $3 + 2 \cdot (-2)$
n) $0 \cdot (-2)$
o) $4 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) - (-2)$

Resolução:

Vamos usar esse exercício para nos acostumarmos com as notações matemáticas. Tente resolver esses cálculos diretamente nesse formato.

a) $3 + 6 = 9$
b) $(-4) + 5 = -4 + 5 = 5 - 4 = 1$
c) $1 + (-3) = 1 - 3 = -2$
d) $(-3) + (-7) = -3 - 7 = -10$
e) $3 \cdot 4 = 12$
f) $(-3) \cdot 5 = -15$
g) $(-2)(-3) = 6$ (Atenção! Multiplicação de dois números negativos resulta em um número positivo conforme a propriedade (j) $(-a)(-b) = ab$).
h) $4 \cdot (-2) = -8$
i) $3 + (-6) + 1 + (-3) = 3 - 6 + 1 - 3 = 3 + 1 - 6 - 3 = 4 - 9 = -5$
j) $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$
k) $-4 - (3) = -4 - 3 = -7$
l) $(-1) - (-3) - 1 + 3 = 3 - 1 = 2$

m) $3 + 2 \cdot (-2) = 3 - 4 = -1$
n) $0 \cdot (-2) = 0$ (elemento neutro da multiplicação)
o) $4 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) - (-2) = 4 - 6 - 9 + 2 = 4 + 2 - 6 - 9 = 6 - 15 = -9$
Gabarito: a) 9 b) 1 c) -2 d) -10 e) 12 f) -15 g) 6 h) -8
i) -5 j) 7 k) -7 l) 2 m) -1 n) 0 o) -9

3.1.2. Desigualdades

a) Tricotomia dos Inteiros

$$a \in \mathbb{Z} \rightarrow a > 0 \text{ } ou \text{ } a = 0 \text{ } ou \text{ } a < 0$$

b) Translação

$$\text{Se } a \geq b \text{ e } c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + c \geq b + c$$

Essa propriedade é válida também para outros sinais de desigualdade.

c) Se $a > b$ e $c > 0$

$$ac > bc$$

Essa propriedade é válida também para outros sinais de desigualdade com uma restrição. Devemos ter $c > 0$, isto é, c deve ser positivo.

d) Se $a > b$ e $c < 0$

$$ac < bc$$

Atenção! Essa propriedade modifica os sinais de desigualdade! Quando multiplicamos ambos os lados por um termo c negativo, trocamos a desigualdade: o maior ($>$) troca para o menor ($<$) e o menor ($<$) troca para o maior ($>$).

e) Transitividade

$$\begin{cases} a \geq b \\ c \geq d \end{cases} \rightarrow a + c \geq b + d$$

Demonstração:

Usando a propriedade da translação:

$$a \geq b \xrightarrow{+c} a + c \geq b + c$$

$$c \geq d \xrightarrow{+b} b + c \geq b + d$$

Desse modo:

$$a + c \geq b + c \geq b + d$$

$$a + c \geq b + d$$

3. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) as afirmações:
a) $-3 < -1$
b) $-5 > -2$
c) $-5 \geq -2$
d) $-5 \leq -2$
e) $1 \geq 1$

Resolução:

a) V.

Sabemos que $3 > 1$. Vamos definir $c = -1$ e usar a propriedade

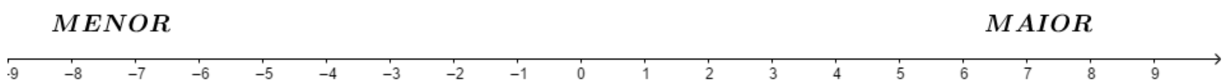
$$(d)\ a > b\ e\ c < 0 \rightarrow ac < bc$$

Multiplicando a inequação $3 > 1$ por -1, temos:

$$3 \cdot (-1) < 1 \cdot (-1)$$
$$-3 < -1$$

Perceba que os inteiros negativos são menores quanto mais se afastam do zero!

Veja a ordem dos números inteiros:



Quanto mais para a direita o número estiver, maior ele será. Quanto mais para a esquerda o número estiver, menor ele será. Lembre a ordem dos números! Ela será necessária quando analisarmos intervalos de solução de uma equação.

b) F.

-5 está mais a esquerda de -2, logo $-5 < -2$.

c) F.

Essa afirmação diz que -5 é maior ou igual a -2. Como ele não é nem maior e nem igual, a assertiva é falsa.

d) V.

Essa afirmação diz que -5 é menor ou igual a -2. Sabemos que -5 não é igual a -2, mas -5 é menor do que -2. Logo, ela é verdadeira.

Atenção! Quando temos $\leq$, analisamos as duas possibilidades. Lembra da lógica das proposições? $Maior\ ou\ igual$ será verdadeira quando qualquer uma das proposições for verdadeira!

e) V.

1 não é maior que 1, mas 1 é igual a 1! Logo, essa afirmação é verdadeira.

Gabarito: a) V. b) F. c) F. d) V. e) V.

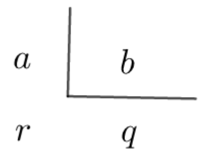
3.2. Divisibilidade

Na divisão de um inteiro a pelo inteiro b podemos escrever a seguinte equação, considerando $b > 0$:

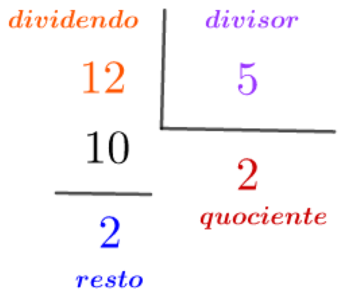
$$a = bq + r$$

q é chamado de quociente e r é chamado de resto.

Você provavelmente aprendeu no ensino fundamental da seguinte forma:



Vamos a um exemplo, dividiremos 12 por 5:



Essa operação também poderia ser representada da seguinte forma:

$$12 = 5 \cdot 2 + 2$$

Acostume-se a escrever as operações de divisão e multiplicação dessa forma.

Dizemos que um número inteiro a é divisível por b quando $r = 0$.

Assim, temos a seguinte propriedade para a divisível por b:

$$a = b \cdot q$$

Veja que se a é divisível por b, então b será um fator de a.

Também poderíamos escrever:

$$a \vdots b$$

Lê-se: a é divisível por b.

"$\vdots$" significa "é divisível por".

Ou:

$$b|a$$

Lê-se b divide a.

Exemplos:

1) $10 = 5 \cdot 2$

Podemos afirmar que 10 é divisível por 2 ou por 5, visto que o resto é nulo. Também é válido:

$$10 \vdots 5 \; e \; 10 \vdots 2$$

2) $27 = 9 \cdot 3$

27 é divisível por 9 ou por 3.

Divisibilidade por 2

Um número é divisível por 2 quando ele é par.

Exemplo:

4 é divisível por 2, pois 4 é par.

Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos é múltiplo de 3.

Exemplo:

312 é divisível por 3, pois $3 + 1 + 2 = 6$. 6 é divisível por 3.

Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 quando ele termina em 0 ou 5.

Exemplo:

20 é divisível por 5, pois termina em 0.

4. (OBMEP) Qual dos números abaixo é divisível por 2 e 3?

a) 334
b) 335
c) 336
d) 337
e) 338

Resolução:

A questão pede os números divisíveis por 2 e 3. Então, devemos ter um número que seja múltiplo de 2 e 3 ao mesmo tempo, ou seja, supondo x o nosso número, ele terá a forma:

$$x = 2 \cdot 3 \cdot y$$

y pode ser qualquer número que satisfaça a igualdade.

Primeiro, vamos encontrar os divisíveis por 2. Para ser divisível por 2, ele deve ser par.

Analisando as alternativas, apenas a (a), (c) e (e) satisfazem essa condição.

Agora vamos analisar os múltiplos de 3 dessas que são divisíveis por 2. Devemos somar os algarismos desses números e verificar qual é múltiplo de 3.

Vamos somar os algarismos dos números de (a), (c) e (e):

a) $334 \Rightarrow 3 + 3 + 4 = 10$

c) $336 \Rightarrow 3 + 3 + 6 = 12$

e) $338 \Rightarrow 3 + 3 + 8 = 14$

Desses números, o único que é divisível por 3 é 336, pois a soma de seus algarismos resulta em 12 que é divisível por 3. Logo, o nosso gabarito é a letra (c).

Gabarito: “c”.

5. Prove que $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 6, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

Escrevendo 6 em fatores primos obtemos:

$$6 = 2 \cdot 3$$

Para provar que a expressão é divisível por 6, devemos provar que ela é divisível pelos seus fatores 2 e 3.

A divisibilidade por 2 pode ser feita alterando a forma de n como múltiplo de 2 e tentando isolar o 2 na expressão.

Para isso, vamos escrever n em função de 2 para incluir todos os números naturais nesse formato.

Lembre! Qualquer número pode ser escrito como:

$$a = bq + r$$

a é o dividendo, b o divisor, q o quociente e r o resto.

Então se fizermos $n = 2q + r$, podemos representar todos os naturais nesse formato alterando o valor de r. Note que nesse caso r só pode assumir os valores 0 ou 1. r sempre será menor que o divisor.

Perceba que $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, n pode receber os valores $(0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ que são todos números pares dos naturais.

$n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, n$ pode receber os valores $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$. Esses são todos os números ímpares dos naturais.

Então se alterarmos a forma de n de forma a incluir todos os números naturais, podemos provar a sua divisibilidade por 2.

Assim, vamos substituir $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, na expressão e ver se encontramos o fator 2:

$$n(n+1)(n+2)$$
$$n = 2k$$
$$2k(2k+1)(2k+2)$$

Perceba o fator 2 na expressão, logo para $n = 2k$ ela é divisível por 2.

Fazendo $n = 2k + 1$:

$$(2k+1)\big((2k+1)+1\big)\big((2k+1)+2\big)$$
$$(2k+1)(2k+2)(2k+3)$$
$$(2k+1)[2(k+1)](2k+3)$$
$$2(2k+1)(k+1)(2k+3)$$

Novamente conseguimos encontrar 2 na expressão, logo para $n = 2k + 1$ ela também é divisível por 2. Ela é divisível por 2 para $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$ que podem representar todos os números naturais.

Portanto, conseguimos provar que $n(n + 1)(n + 2)$ é divisível por 2.

Agora vamos provar que $n(n + 1)(n + 2)$ é divisível por 3.

Usando a mesma ideia da divisibilidade por 2, podemos modelar n de forma que o fator 3 apareça na expressão.

Temos que provar três casos:

$$n = 3k, n = 3k + 1 \; e \; n = 3k + 2$$

Vamos substituir n e isolar o fator 3 na expressão para cada caso.

1) $n = 3k$

$$n(n + 1)(n + 2)$$
$$3k(3k + 1)(3k + 2)$$

2) $n = 3k + 1$

$$n(n + 1)(n + 2)$$
$$(3k + 1)\big((3k + 1) + 1\big)\big((3k + 1) + 2\big)$$
$$(3k + 1)(3k + 2)(3k + 3)$$
$$(3k + 1)(3k + 2)[3(k + 1)]$$
$$3(3k + 1)(3k + 2)(k + 1)$$

3) $n = 3k + 2$

$$n(n + 1)(n + 2)$$
$$(3k + 2)\big((3k + 2) + 1\big)\big((3k + 2) + 2\big)$$
$$(3k + 2)(3k + 3)(3k + 4)$$
$$(3k + 2)[3(k + 1)](3k + 4)$$
$$3(3k + 2)(k + 1)(3k + 4)$$

Conseguimos isolar o fator 3 para todos os casos descritos.

Logo, a expressão $n(n + 1)(n + 2)$ também é divisível por 3.

Essa expressão é divisível por 2 e 3, como eles são números primos, ela será divisível pelos dois ao mesmo tempo.

$$\therefore n(n + 1)(n + 2) \vdots 6$$

3.3. Números Primos

Um número $p \in \mathbb{N}$ é primo se, e somente se, satisfazer as seguintes condições:

1) $p \neq 0 \; e \; p \neq 1$

2) p somente pode ser divisível por 1 e por p

Desse modo, podemos ver que os números $2, 3, 5, 7, 11$ satisfazem essas condições.

HORA DE PRATICAR!

6. Verifique se o número 93 é primo.

Resolução:

Para saber se um número é primo, devemos fazer a seguinte pergunta:

O número 93 é divisível por algum outro número sem ser ele mesmo e o número 1?

Analisando o número 93, vemos que ele não é primo já que ele pode ser dividido por 3:

$$93 = 31 \cdot 3$$

Note que 31 e 3 são números primos, pois eles não são divisíveis por outros números além do 1 e eles mesmos.

3.4. Decomposição em fatores primos

Todo número natural maior que 1 pode ser decomposto em um ou mais fatores primos. Esse processo é chamado de fatoração.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$. Para fatorar n, devemos seguir os seguintes passos:

1) Dividir n pelo menor divisor primo

2) Dividir o quociente resultante pelo menor divisor primo e repetir a operação até obter um quociente igual a 1.

Exemplo:

Vamos fatorar o número 40. O menor primo que divide 40 é 2:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & \\ & \end{array}$$

O quociente obtido é 20. Então devemos dividir esse número pelo menor divisor primo. Repetimos a operação e dividimos o quociente por 2:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & \end{array}$$

Novamente, repetimos a operação:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & \end{array}$$

Agora, o quociente é 5. O menor primo que divide 5 é ele mesmo:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Finalmente, obtemos o quociente unitário. Logo, a fatoração de 40 é:

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$$

3.4.1. Quantidade de divisores de um número

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$. Se a fatoração de n é:

$$n = x^a \cdot y^b \cdot z^c \cdot \ldots$$

Onde x, y, z são os números primos divisores de n e a, b, c são os coeficientes desses divisores. A quantidade de divisores $\big(Q(n)\big)$ de n é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{Q(n) = (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \cdot \ldots}}$$

O número de divisores de n é o total de combinações possíveis entre as potências dos seus fatores.

Exemplo:

Vamos calcular o número de divisores de 40.

Fatorando esse número:

$$40 = 2^3 \cdot 5^1$$

Usando a fórmula:

$$Q(40) = (3+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 = 8$$

Perceba que a quantidade de divisores de 40 são os seguintes números:

$$\left\{\underbrace{2^0, 2^1, 2^2, 2^3}_{4\ números}, \underbrace{5^0, 5^1}_{2\ números}\right\}$$

3.4.2. Produto dos divisores de um número

Se $n \in \mathbb{N}, n > 1$ e $Q(n)$ é a quantidade de divisores de n, o produto dos divisores de n é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{P(n) = \sqrt{n}^{Q(n)}}}$$

Exemplo:

Vamos calcular o produto dos divisores de 40.

Resolveremos por dois métodos.

Método 1:

Descobrindo os divisores de 40:

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

Os divisores de 40 são os números formados pelas combinações dos fatores de 40. Vamos ver quantos são esses números:

$$Q(40) = (3+1)(1+1) = 8$$

A quantidade de divisores de 40 é 8.

Encontrando esses números:

Usando os fatores de cada número, temos:

$$\{1, 2, 4, 8\}$$
$$\{1, 5\}$$

Perceba que faltam 3 divisores. Podemos obtê-los combinando os fatores de 5 com os fatores de 2:

$$\{1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40\}$$

Esses são todos os divisores de 40, multiplicando-os:

$$P(40) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 = 2560000$$

Método 2:

Usando a fórmula do produto dos divisores diretamente:

$$P(40) = \sqrt{40}^{Q(40)} = \sqrt{40}^{8} = 40^4 = 2560000$$

3.5. Máximo Divisor Comum

MDC é a sigla utilizada para Máximo Divisor Comum. Ele é usado para calcular o maior divisor em comum entre dois ou mais números.

Para calculá-lo, devemos decompor os números em fatores primos e verificar qual o maior valor que divide ambos os números ao mesmo tempo. Podemos escrever do seguinte modo:

Seja a decomposição de a e b em fatores primos dados por:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$$

Onde p_i é número primo e $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ são os expoentes de p_i.

O MDC de a e b é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{mdc(a,b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot p_3^{\min\{\alpha_3,\beta_3\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}}}}$$

$\min\{\alpha_i, \beta_i\}$ é o menor valor entre α_i e β_i.

Exemplo:

Calcule o MDC de 24 e 36.

Decompondo os números, obtemos:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

O MDC é dado por:

$$p_1 = 2 \Rightarrow \min\{3,2\} = 2$$

$$p_2 = 3 \Rightarrow \min\{1,2\} = 1$$

$$mdc(24,36) = 2^{\min\{3,2\}} \cdot 3^{\min\{1,2\}} = 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

Quando encontramos dois números primos entre si, o MDC deles será 1.

$$\boxed{\boldsymbol{a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } a, b \text{ são primos entre si} \to mdc(a,b) = 1}}$$

3.5.1. Propriedades

a) $mdc(n,n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $mdc(m,n) = mdc(n,m), \forall m,n \in \mathbb{N}$ não ambos nulos

c) $mdc(n,0) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

3.5.2. Algoritmo de Euclides

O Algoritmo de Euclides pode ser usado para determinar o MDC entre dois números naturais. Ele se baseia no seguinte resultado:

Seja $a, b \in \mathbb{N}$ e $a > b > 0$.

Se $a = bq + r$ (q é quociente e r é resto), com $q, r \in \mathbb{N}$:

$$mdc(a,b) = mdc(b,r)$$

Para usar o Algoritmo para determinação do MDC, devemos fazer divisões sucessivas até que r_i seja zero. Veja:

Calcular MDC de a, b. Dividindo a por b:

$$a = bq + r_1$$

$$mdc(a, b) = mdc(b, r_1)$$

Se $r_1 = 0$, encontramos a solução:

$$mdc(a, b) = mdc(b, 0) = b$$

Se $r_1 \neq 0$, dividimos b por r_1:

$$b = r_1 q + r_2$$

$$mdc(b, r_1) = mdc(r_1, r_2)$$

Se $r_2 = 0$, temos $mdc(b, r_1) = mdc(r_1, 0) = r_1$.

Se $r_2 \neq 0$, dividimos r_1 por r_2:

$$r_1 = r_2 q + r_3$$

$$mdc(r_1, r_2) = mdc(r_2, r_3)$$

Continuamos com as divisões sucessivas até encontrar $r_i = 0$.

Dessa forma, o Algoritmo de Euclides se resume a:

$$\boxed{\boldsymbol{mdc(a, b) = mdc(b, r_1) = mdc(r_1, r_2) = \cdots = mdc(r_{n-1}, r_n) = mdc(r_n, 0) = r_n}}$$

Podemos também representar as divisões sucessivas do Algoritmo através de um diagrama. Veja:

$$mdc(a, b) = mdc(b, r_1)$$

1) Escrevemos a divisão de a por b:

a	b				

2) Encontramos o quociente dessa divisão:

	q_1				
a	b				

3) Calculamos o resto dessa divisão:

	q_1				
a	b				
r_1					

4) Se $r_1 \neq 0$, colocamos r_1 na fila do meio e repetimos os passos até encontrar $r_i = 0$:

	q_1				
a	b	r_1			
r_1					

	q_1	q_2			
a	b	r_1			
r_1					

	q_1	q_2			
a	b	r_1			
r_1	r_2				

$$\vdots$$

$$mdc(a,b) = mdc(b,r_1) = mdc(r_1,r_2) = \cdots = mdc(r_{n-1},r_n) = mdc(r_n,0) = r_n$$

	q_1	q_2			q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	...	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2			r_n	0	

O MDC será o número logo à esquerda do zero.

Perceba que a primeira linha do diagrama possui os quocientes das divisões. A segunda possui os divisores e dividendos. A terceira, o resto das divisões.

7. Calcule o MDC:
a) Entre 12 e 20
b) Entre 3 e 11
c) Entre 11352 e 40

Resolução:

a) Decomposição de 12 e 20 em fatores primos:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$
$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

Veja que o maior número que está ao mesmo tempo nas duas decomposições é 2^2.
Assim, $mdc(12, 20) = 2^2$.

b) 3 e 11 são primos entre si! Portanto:

$$mdc(3, 11) = 1$$

c) Usando o Algoritmo de Euclides:

$$mdc(11352, 40)$$
$$11352 = 40 \cdot 283 + 32$$
$$40 = 32 \cdot 1 + 8$$
$$32 = 8 \cdot 4 + 0$$

Assim, o MDC é dado pelo último resto diferente de zero:

$$mdc(11352, 40) = mdc(40, 32) = mdc(32, 8) = mdc(8, 0) = 8$$

Poderíamos ter resolvido pelo diagrama:

	283	1	4
11352	40	32	8
32	8	0	

Gabarito: a) 2^2 b) 1 c) 8

3.6. Mínimo Múltiplo Comum

MMC significa Mínimo Múltiplo Comum. Ele é o menor valor positivo em comum que conseguimos obter de dois ou mais números. Ele é usado para calcular a soma ou a subtração de números fracionários. Para dois números inteiros, podemos calculá-lo usando a seguinte fórmula:

$$\boxed{mmc(a, b) = \frac{|ab|}{mdc(a, b)}}$$

Também podemos calcular o MMC usando o seguinte método:

Seja a decomposição de a e b em fatores primos dados por:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$
$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$$

Onde p_i é número primo e $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ são os expoentes de p_i.

O MMC de a e b é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{mmc(a,b) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot p_3^{\max\{\alpha_3,\beta_3\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}}}$$

$\max\{\alpha_i, \beta_i\}$ é o maior valor entre α_i e β_i.

Outro método mais conhecido é através da fatoração simultânea, nesse método, fatoramos dois ou mais números simultaneamente e ele será visto no exemplo abaixo.

Exemplo:

Calcule o MMC de 24 e 36.

Decompondo os números, obtemos:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

Podemos usar qualquer um dos métodos para calcular o MMC. Vamos mostrar pelos 2 métodos:

Método 1:

$$mmc(a,b) = \frac{|ab|}{mdc(a,b)}$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$mdc(24,36) = 2^2 \cdot 3$$

$$mmc(24,36) = \frac{|24 \cdot 36|}{mdc(24,36)} = \frac{|2^3 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3^2|}{2^2 \cdot 3} = \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

Método 2:

$$mmc(a,b) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot p_3^{\max\{\alpha_3,\beta_3\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$p_1 = 2 \Rightarrow \max\{3, 2\} = 3$$

$$p_2 = 3 \Rightarrow \max\{1, 2\} = 2$$

$$mmc(24,36) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

Método 3: Fatoração simultânea

Inicialmente, alinhamos os números 36 e 24 e dividimos pelo menor fator primo possível (não é necessário que esse fator esteja presente em ambos os números):

$$\begin{array}{r|l} 36, 24 & 2 \\ 18, 12 & \end{array}$$

Repetimos o procedimento com a próxima linha até que a linha obtida tenha apenas o número 1.

$$\begin{array}{r|l} 36, 24 & 2 \\ 18, 12 & 2 \\ 9, 6 & 2 \\ 9, 3 & 3 \\ 3, 1 & 3 \\ 1, 1 & \end{array}$$

O MMC será igual ao produto entre os números primos do lado direito:

$$mmc(36, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

Perceba as duas barras “| |” no produto ab. $|ab|$ é o módulo do número ab. Quando usamos ela no número ab, estamos dizendo que queremos apenas o valor absoluto do inteiro, isto é, o valor positivo do número. Estudaremos melhor esse assunto na aula de Módulos.

Exemplo de módulos:

$$|-3| = 3$$
$$|5| = 5$$

8. Calcule o MMC de:

a) 12 e 35

b) 4 e 8

Resolução:

a) 12 e 35

Vamos decompor os números 12 e 35.

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$
$$35 = 5 \cdot 7$$

Note que esses números não possuem nenhum número primo em comum, logo $mdc(12, 35) = 1$.

O MMC será dado por:

$$mmc(12, 35) = \frac{|12 \cdot 35|}{mdc(12,35)} = \frac{12 \cdot 35}{1} = 12 \cdot 35$$

b) 4 e 8

Decomposição de 4 e 8:

$$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$
$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$
$$mmc(4, 8) = 2^{\max\{2,3\}} = 2^3 = 8$$

3.7. Congruências Lineares

Esse assunto pode simplificar a resolução de questões difíceis dos vestibulares do IME. Não iremos nos aprofundar muito no tema para manter o foco no vestibular. Apenas veremos a sua aplicabilidade.

Vejamos a sua definição:

Seja $a, b \in \mathbb{Z}$. a é congruente a b módulo n quando a dividido por n deixa o mesmo resto da divisão de b por n. A sua notação usual é dada por:

$$a \equiv b \ (mod\ n)$$

Lê-se a é congruente a b módulo n.

Exemplos:

$$15 \equiv 1 \ (mod\ 7)$$

1 é o resto da divisão de 15 por 7: $15 = 7 \cdot 2 + 1$

$$31 \equiv 3 \ (mod\ 4)$$

3 é o resto da divisão de 31 por 4: $31 = 4 \cdot 7 + 3$

Perceba que na prática, podemos usar a congruência para representar o resto de uma divisão.

$$31 \equiv 11\ (mod\ 4)$$

31 e 11 possuem o mesmo resto quando divididos por 4:

$$31 = 4 \cdot 7 + 3$$

$$11 = 4 \cdot 2 + 3$$

$$31 \equiv -1\ (mod\ 4)$$

Perceba que na teoria da congruência podemos trabalhar com restos negativos:

$$31 = 4 \cdot 8 - 1$$

3.7.1. Propriedades

Para $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$:

I) Adição:

$$\begin{cases} a \equiv b\ (mod\ n) \\ c \equiv d\ (mod\ n) \end{cases} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d\ (mod\ n)$$

II) Multiplicação:

$$\begin{cases} a \equiv b\ (mod\ n) \\ c \equiv d\ (mod\ n) \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd\ (mod\ n)$$

Para $k \in \mathbb{Z}$:

III) Adição de uma constante:

$$a \equiv b\ (mod\ n) \Rightarrow a \pm k \equiv b \pm k\ (mod\ n)$$

IV) Multiplicação de uma constante:

$$a \equiv b\ (mod\ n) \Rightarrow ak \equiv bk\ (mod\ n)$$

V) Potência:

Seja $m \in \mathbb{N}$:

$$a \equiv b\ (mod\ n) \Rightarrow a^m \equiv b^m\ (mod\ n)$$

Demonstração:

I) $a \pm c \equiv b \pm d\ (mod\ n)$

$$a \equiv b\ (mod\ n) \Rightarrow a = nx + b, x \in \mathbb{Z}$$

$$c \equiv d\ (mod\ n) \Rightarrow c = ny + d, y \in \mathbb{Z}$$

Somando e subtraindo as duas expressões:

$$a \pm c = (x \pm y)n + (b \pm d)$$

Usando a definição de congruência:

$$a \pm c \equiv b \pm d\ (mod\ n)$$

II) $ac \equiv bd\ (mod\ n)$

$$a \equiv b\ (mod\ n) \Rightarrow a = nx + b, x \in \mathbb{Z}$$

$$c \equiv d\ (mod\ n) \Rightarrow c = ny + d, y \in \mathbb{Z}$$

Multiplicando as duas expressões:

$$ac = n^2xy + nxd + nyb + bd$$

$$ac = n(nxy + xd + yb) + bd$$

$$\Rightarrow ac \equiv bd \ (mod \ n)$$

III) $a \pm k \equiv b \pm k \ (mod \ n)$

$$a \equiv b \ (mod \ n) \Rightarrow a = nx + b, x \in \mathbb{Z}$$

Somando e subtraindo $k \in \mathbb{Z}$ na expressão:

$$a \pm k = nx + b \pm k$$

$$\Rightarrow \ a \pm k \equiv b \pm k \ (mod \ n)$$

IV) $a \equiv b \ (mod \ n) \Rightarrow ak \equiv bk \ (mod \ n)$

$$a \equiv b \ (mod \ n) \Rightarrow a = nx + b, x \in \mathbb{Z}$$

Multiplicando $k \in \mathbb{Z}$ na expressão:

$$ak = (nx + b)k$$

$$ak = n(xk) + bk$$

$$\Rightarrow ak \equiv bk \ (mod \ n)$$

V) $a \equiv b \ (mod \ n) \Rightarrow a^m \equiv b^m \ (mod \ n)$

Vamos usar a propriedade (II) e provar por PIF.

1) Testando para $m = 1$:

$$a^1 \equiv b^1 \ (mod \ n) \Rightarrow a \equiv b \ (mod \ n)$$

É válida para $m = 1$.

2) Suponha que a propriedade é válida para $k \in \mathbb{N}$:

$$a^k \equiv b^k \ (mod \ n)$$

Da definição de congruência:

$$a \equiv b \ (mod \ n)$$

Usando a propriedade (II):

$$ac \equiv bd \ (mod \ n)$$

$$a^k a \equiv b^k b \ (mod \ n)$$

$$a^{k+1} \equiv b^{k+1} \ (mod \ n)$$

Logo, a propriedade é válida para $k + 1$.

Disso, concluímos que a propriedade é válida $\forall m \in \mathbb{N}$.

3.7.2. Teorema de Fermat

Seja $a \in \mathbb{N}$ e p um número primo que não divide a:

$$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$$

Demonstração:

Vamos usar a propriedade (II) para provar esse teorema:

$$\begin{cases} a \equiv b\ (mod\ n) \\ c \equiv d\ (mod\ n) \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd\ (mod\ n)$$

Podemos escrever as seguintes congruências lineares:

$$a \equiv r_1\ (mod\ p)$$

$$2a \equiv r_2\ (mod\ p)$$

$$3a \equiv r_3\ (mod\ p)$$

$$\vdots$$

$$(p-2)a \equiv r_{p-2}\ (mod\ p)$$

$$(p-1)a \equiv r_{p-1}\ (mod\ p)$$

Vamos provar que $r_i \neq r_j$ para $i, j \in [1, p-1]$, isto é, todos os restos acima possuem valores diferentes. Assim, todos os múltiplos de a acima devem ser incongruentes entre si, dois a dois.

Suponha que existam dois múltiplos de a congruentes entre si módulo p. Desse modo:

Para $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}$ e $n, m \in [1, p-1]$:

$$na \equiv ma\ (mod\ p)$$

Usando a propriedade:

$$a \equiv b\ (mod\ n) \Rightarrow a \pm k \equiv b \pm k\ (mod\ n)$$

Temos:

$$na - ma \equiv ma - ma (mod\ p)$$

$$na - ma \equiv 0 (mod\ p)$$

$$(n-m)a \equiv 0 (mod\ p)$$

Como p não divide a:

$$n - m \equiv 0 (mod\ p)$$

$$\Rightarrow n \equiv m (mod\ p)$$

$n, m < p$:

$$\Rightarrow n = m$$

Chegamos a um absurdo, pois pela hipótese $n \neq m$.

Logo, os números $(a, 2a, \dots, (p-1)a)$ são incongruentes entre si, dois a dois.

Os possíveis valores do resto da divisão de a por p pertencem ao conjunto:

$$\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$$

Então, usando a propriedade (II) e multiplicando todas as congruências, obtemos:

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_{p-1}\ (mod\ p)$$

Como os restos são distintos entre si, o produto dos restos pode ser reescrito da seguinte forma:

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \ldots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1)\ (mod\ p)$$

Assim:

$$a^{p-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1)\ (mod\ p)$$

Sendo p um número primo, o produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1)$ será primo com p. Logo, podemos cancelar os termos e obter:

$$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$$

3.7.3. Corolário do Teorema de Fermat

Seja $a \in \mathbb{N}$ e p um número primo:

$$a^p \equiv a\ (mod\ p)$$

Demonstração:

Devemos provar para dois casos:

1) a é primo com p

Nesse caso, basta usar o Teorema de Fermat e aplicar a propriedade da multiplicação de uma constante:

$$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$$
$$a^{p-1}a \equiv 1 \cdot a\ (mod\ p)$$
$$\Rightarrow a^p \equiv a\ (mod\ p)$$

2) $a = pk, k \in \mathbb{Z}$

$$a \equiv 0\ (mod\ p)$$

Usando a propriedade:

$$a \equiv b\ (mod\ n) \Rightarrow a^n \equiv b^n\ (mod\ n)$$

Temos:

$$a^p \equiv 0^p\ (mod\ p)$$
$$a^p \equiv 0\ (mod\ p)$$

Como ambos possuem o resto nulo:

$$a^p \equiv a\ (mod\ p)$$

9. Complete as lacunas abaixo:

a) $21 \equiv (\ \ ) \ (mod\ 5)$

b) $34 \equiv (\ \ ) \ (mod\ 7)$

c) $-64 \equiv (\ \ ) \ (mod\ 3)$

d) $-11 \equiv (\ \ ) \ (mod\ 5)$

e) $1021 \equiv (\ \ ) \ (mod\ 2)$

f) $7589 \equiv (\ \ ) \ (mod\ 15)$

Resolução:

a) $21 \equiv 1\ (mod\ 5)$

$$21 = 5 \cdot 4 + 1$$

b) $34 \equiv 6\ (mod\ 7)$

$$34 = 7 \cdot 4 + 6$$

Também poderia ser:

$$34 = 7 \cdot 5 - 1 \Rightarrow 34 \equiv -1\ (mod\ 7)$$

c) $-64 \equiv -1\ (mod\ 3)$

$$-64 = 3 \cdot (-21) - 1$$

d) $-11 \equiv -1\ (mod\ 5)$

$$-11 = 5 \cdot (-2) - 1$$

e) $1021 \equiv 1\ (mod\ 2)$

$$1021 = 2 \cdot 510 + 1$$

f) $7589 \equiv 14\ (mod\ 15)$

$$7589 = 15 \cdot 505 + 14$$

10. Calcular o resto da divisão de $(1006^{1006} + 1004^{1004})^{1005}$ por 5.

Resolução:

Podemos usar a propriedade (V):

$$a \equiv b\ (mod\ n) \Rightarrow a^n \equiv b^n\ (mod\ n)$$
$$(1006^{1006} + 1004^{1004})^{1005} \equiv ((1)^{1006} + (-1)^{1004})^{1005}\ (mod\ 5)$$
$$((1)^{1006} + (-1)^{1004})^{1005} = (1+1)^{1005} = 2^{1005}$$
$$\Rightarrow (1006^{1006} + 1004^{1004})^{1005} \equiv 2^{1005}\ (mod\ 5)$$

Vamos fatorar 2^{1005} de modo que apareça algum fator que facilite o nosso cálculo:

$$2^{1005} = 2 \cdot 2^{1004} = 2 \cdot 2^{4\cdot 251} = 2 \cdot (2^4)^{251}$$

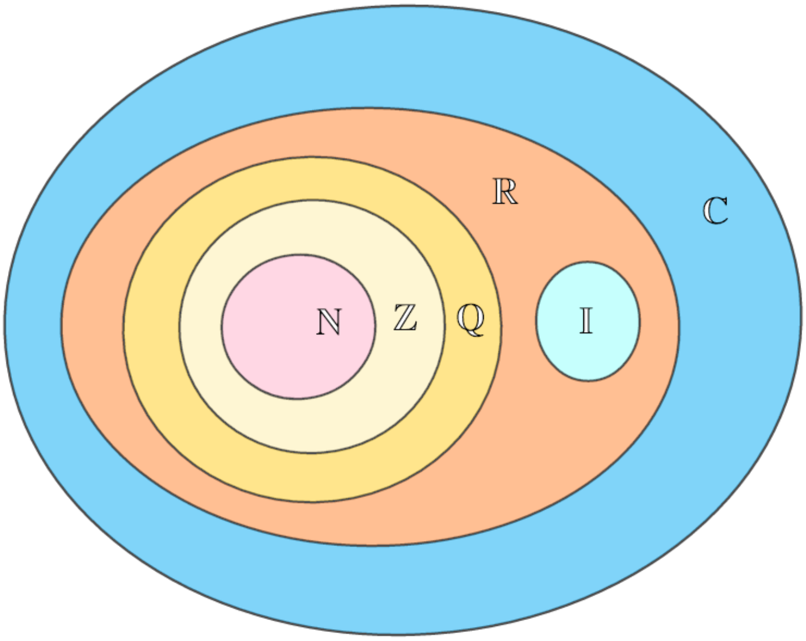
Perceba que $2^4 = 16 \equiv 1\ (mod\ 5)$. Desse modo, temos:

$$2^{1005} = 2 \cdot (2^4)^{251}$$
$$2 \cdot (2^4)^{251} \equiv 2 \cdot (1)^{251}\ (mod\ 5)$$
$$2 \cdot (2^4)^{251} \equiv 2\ (mod\ 5)$$
$$\therefore (1006^{1006} + 1004^{1004})^{1005} \equiv 2\ (mod\ 5)$$

O resto da divisão é 2.

4. Conjunto dos Números Reais $(\mathbb{R})$

O conjunto dos números reais é o conjunto mais usado nos vestibulares. Vamos relembrar quais números estão contidos nesse conjunto com o Diagrama de Venn-Euler:



Os números reais, representados por $\mathbb{R}$, formam o segundo maior conjunto dos conjuntos numéricos. Veja que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

O conjunto dos reais é formado pelo conjunto dos racionais e o conjunto dos irracionais. Vamos estudar mais a fundo cada um deles.

4.1. Conjunto dos Números Racionais $(\mathbb{Q})$

O conjunto dos racionais inclui todos os números inteiros e os números fracionários. Os números fracionários são números que não podem ser representados no conjunto dos inteiros. Eles são da forma:

$$a \in \mathbb{Z}\ e\ b \in \mathbb{Z}^*, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

a é chamado de numerador e b é o denominador.

$\frac{a}{b}$ é dito irredutível quando a, b forem primos.

Vamos ver as operações e as propriedades desse conjunto.

4.1.1. Operações dos racionais

Se $a, c \in \mathbb{Z}\ e\ b, d \in \mathbb{Z}^*$, temos:

a) Igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

b) Adição

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

O bizu para decorar essa fórmula é lembrar que o resultado dessa soma será o produto dos denominadores. A partir daí, podemos raciocinar dessa forma:

Primeiro, vamos relembrar que podemos escrever uma expressão algébrica de diversas maneiras, contando que o resultado não se altere!

Por exemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a\cancel{c}}{b\cancel{c}} = \frac{a}{b}$$

Nesse exemplo, multiplicamos o numerador e o denominador por um número c e depois simplificamos a fração e obtemos novamente $\frac{a}{b}$. Repare que essa operação não alterou o valor da expressão!

Usando essa ideia, vamos generalizar a soma de frações para números genéricos.

Seja $a, b \in \mathbb{Z}\ e\ c, d \in \mathbb{Z}^*$, vamos calcular $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

Vamos igualar os denominadores multiplicando os denominadores b e d. Obtemos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\quad}{bd}$$

Precisamos que os denominadores de cada fração seja bd. Observe a primeira fração:

$$\frac{a}{b}$$

Se modificarmos o denominador dessa fração, devemos ajustar o numerador para que o resultado da expressão continue o mesmo. Veja:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} = \frac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}} = \frac{a}{b}$$

Então, podemos escrever $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$, pois isso não altera seu valor. Usando o mesmo raciocínio para a segunda fração, obtemos:

$$\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

Note que os denominadores se igualaram!

Agora podemos somar as frações:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

c) Multiplicação

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

4.1.2. Propriedades

Se $a, c, e \in \mathbb{Z}\ e\ b, d, f\ \in \mathbb{Z}^{*}$:

a) Associativa

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$
$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

b) Comutativa

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

c) Elemento neutro da adição

$$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$$

d) Elemento simétrico

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$$

e) Elemento neutro da multiplicação

$$\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$$

f) Distributiva

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$$

4.1.3. Dízima periódica e Fração geratriz

Dizemos que um número é uma dízima periódica quando os seus algarismos após a vírgula se repetem. Essa repetição pode ser em grupo ou não. Exemplos:

a) $0{,}3333\ldots$

b) $0{,}121212\ldots$

c) $1{,}48278278\ldots$

Os **algarismos que se repetem** são chamados de **período**. No exemplo acima:

a) 3 é o período de $0{,}333\ldots$

b) 12 é o período de $0{,}1212\ldots$

c) 278 é o período de $1{,}48278278\ldots$

Repare que nem sempre o algarismo logo após a vírgula pertence ao período, nesses casos, temos uma dízima periódica composta. Caso o período se inicie logo após a vírgula, temos uma dízima periódica simples.

$$0{,}1212\ldots \rightarrow \textit{dízima periódica simples}$$

$$1{,}48278278\ldots \rightarrow \textit{dízima periódica composta}$$

A **parte decimal que não se repete** é chamada de **antiperíodo**, então, 48 é o antiperíodo do número $1{,}48278278\ldots$

Podemos usar as reticências para indicar a repetição dos números, mas também podemos escrevê-los usando uma barra acima do período. Veja:

$$0{,}121212\ldots = 0{,}\overline{12}$$

$$1{,}48278278\ldots = 1{,}48\overline{278}$$

Toda dízima periódica pode ser escrita na forma fracionária. Para encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica, podemos proceder da seguinte forma, tomemos o exemplo:

$$x = 1{,}2636363\ldots$$

Inicialmente, devemos identificar o período e o antiperíodo da dízima. Nesse caso, temos 63 como período e 2 como antiperíodo. Agora, devemos multiplicar o número por 10^n, sendo n a quantidade de algarismos do antiperíodo, então, multiplicaremos por 10^1:

$$10x = 12{,}6363\ldots$$

O próximo passo é multiplicar o número obtido por 10^m, sendo m a quantidade de algarismos do período. Assim, temos $m = 2$, logo:

$$10^2 \cdot 10x = 10^2 \cdot 12{,}6363\ldots$$

$$1000x = 1263{,}6363\ldots$$

Agora, calculamos $1000x - 10x$:

$$1000x - 10x = 1263{,}6363\ldots - 12{,}6363\ldots$$

$$990x = 1251$$

$$\therefore x = \frac{1251}{990}$$

Há um método mais prático para encontrar esse número. Veja:

$$x = 1{,}2636363 \ldots$$

Devemos identificar a parte inteira, o antiperíodo e o período da dízima:

$$parte\ inteira = 1$$

$$antiperíodo = 2$$

$$período = 63$$

Agora, devemos verificar o número de algarismos do antiperíodo e do período:

$$antiperíodo = 2 \to 1\ algarismo$$

$$período = 63 \to 2\ algarismos$$

O numerador da fração geratriz será composto pela parte inteira, o antiperíodo e o período subtraído da parte inteira com o antiperíodo. E para o denominador, devemos seguir a seguinte regra:

1) Para cada algarismo do período, inserimos um "9" no denominador.

2) Para cada algarismo do antiperíodo, inserimos um "0" no final do denominador.

Assim, temos:

$$1{,}26363 \ldots = \frac{numerador}{denominador} = \frac{1263 - 12}{990} = \frac{1251}{990}$$

4.2. Conjunto dos Números Irracionais $(\mathbb{I})$

O conjunto dos números irracionais inclui os números que não podem ser representados pelos racionais. Eles podem ser algébricos ou transcendentes. Podemos classificá-los como algébricos quando forem raízes de equações algébricas de coeficientes inteiros, por exemplo, $x^2 - 2 = 0$. Caso contrário, serão números transcendentes, os exemplos mais famosos desses números são o número de Neper $(e = 2{,}718281828459 \ldots)$ e o número pi $(\pi = 3{,}141592 \ldots)$.

Definição:

Se $\boldsymbol{x}$ é um número irracional, então ele não poderá ser escrito como uma fração de irredutível.

Perceba que por essa definição, não podemos escrever um número irracional x como

$$x = \frac{p}{q}$$

Em que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si.

Podemos também encontrar números irracionais através dessa definição:

Se p é um número primo, inteiro e positivo, então $\sqrt{p}$ é irracional.

Por que essa relação é válida?

Se p é um número primo, então ele não pode ser escrito como fator de outros números além dele mesmo. Então, não podemos escrever $p = q^2$ $(q \in \mathbb{Q})$ para torná-lo um número racional $(\sqrt{p} = \sqrt{q^2} = q \in \mathbb{Q})$.

Exemplos de números irracionais algébricos:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623 \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075 \ldots$$

$$\sqrt{5} = 2{,}2360679774 \ldots$$

$$\sqrt{7} = 2{,}6457513110 \ldots$$

Em algumas questões será necessário calcular o valor numérico dos números irracionais para fazer comparações com os números reais, então vale a pena decorar o valor dos seguintes números:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4$$

$$\sqrt{3} \approx 1{,}7$$

$$\sqrt{5} \approx 2{,}2$$

$$\sqrt{7} \approx 2{,}6$$

4.2.1. Redução ao Absurdo

Antes de continuar, vamos aprender um método muito útil para provar proposições.

O método da Redução ao Absurdo é usado para provar a veracidade de uma proposição.

A Redução ao Absurdo fundamenta-se no princípio do terceiro excluído (uma proposição ou é verdadeira ou é falsa) e no princípio da não-contradição (uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo).

Se queremos provar que uma proposição p é verdadeira usando o método da redução ao absurdo, devemos supor que $\neg p$ é verdadeira e, utilizando as definições e teorias envolvidas, tentamos chegar a um absurdo (ou contradição). Desse modo, se a negação da proposição é falsa (sendo uma contradição), então a própria proposição é verdadeira.

Vamos ver na prática sua aplicação:

11. Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.
Resolução:

Demonstração pelo método da redução ao absurdo:

Para provar pelo método da redução ao absurdo, devemos mostrar que a partir de uma afirmação chegamos a uma contradição.

Supondo que $\sqrt{2}$ seja racional, então ele poderá ser escrito como um número racional da forma irredutível $\frac{b}{a}$, a, b primos entre si e positivos.

$$\sqrt{2} = \frac{b}{a}$$

Aplicando a igualdade dos racionais:

$$\sqrt{2}a = b$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e desenvolvendo:

$$\left(\sqrt{2}a\right)^2 = b^2$$
$$\sqrt{2}^2 a^2 = b^2$$
$$2a^2 = b^2$$

$2a^2$ é um número par, então pela igualdade b^2 deve ser um número par.

$$b^2 \text{ é } par \Rightarrow b \text{ é } par$$

Logo, podemos escrever $b = 2c$.

Substituindo $b = 2c$ na equação:

$$2a^2 = b^2$$
$$2a^2 = (2c)^2 = 4c^2$$
$$a^2 = 2c^2$$

a^2 pode ser escrito como múltiplo de 2, logo ele é par.

$$a^2 \text{ é } par \Rightarrow a \text{ é } par$$

Absurdo! a e b não podem ser pares ao mesmo tempo, pois ambos são primos entre si.

$$\therefore \sqrt{2} \text{ é irracional}$$

12. Se a^2 é par, então a é par.
Resolução:

Vamos supor que a não seja par, ou seja, a é ímpar.

Se a é ímpar, podemos escrever:

$$a = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

Elevando a ao quadrado, obtemos:

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$2k^2 + 2k$ é um inteiro, então vamos definir:

$$2k^2 + 2k = \beta \in \mathbb{Z}$$

Substituindo em a^2:

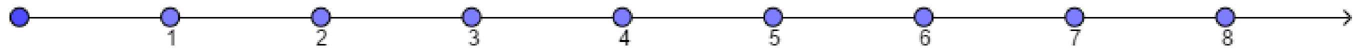
$$a^2 = 2\beta + 1$$

Como $\beta \in \mathbb{Z}$, então a^2 é ímpar. Mas da hipótese inicial, a^2 é par. Logo, chegamos a um absurdo.

Disso, concluímos que a é par.

4.3. Reta Real

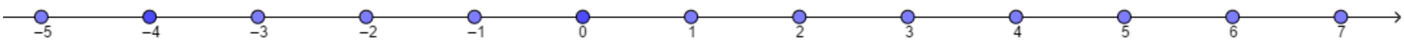
4.3.1. Reta dos Naturais



Os números naturais podem ser representados ao longo de uma reta. Sabemos que os números naturais são os números $0, 1, 2, 3, \ldots$ Então se escrevermos todos os números naturais ao longo da reta, teremos os pontos distribuídos conforme a figura acima. Apenas esses pontos serão elementos do conjunto dos naturais.

Perceba que os números estão organizados de forma crescente, quanto mais a direita maior o número natural.

4.3.2. Reta dos Inteiros



A reta dos números inteiros é semelhante à reta dos naturais e incluem também os números inteiros negativos. Ela está representada na figura acima. Esses números são também pontos ao longo da reta.

Note a ordenação dos números inteiros.

4.3.3. Reta dos Reais

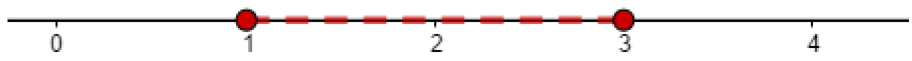
O conjunto dos números reais inclui todos os números racionais e irracionais. Esses números, quando escritos ao longo de uma reta, preenchem a sua totalidade. Assim, qualquer ponto que nós escolhermos ao longo da reta estará presente no conjunto dos reais. Essa reta é chamada de reta real ou reta numérica.

Os números estão ordenados ao longo da reta.

Podemos escolher um intervalo ao longo da reta com essa notação:

$$[1, 3] = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$$

Graficamente:



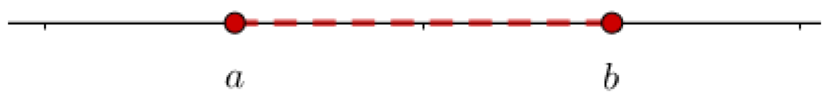
O pontilhado em vermelho representa o nosso intervalo.

Podemos ter quatro casos de intervalos diferentes:

1) Intervalo fechado nas extremidades

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b]$$

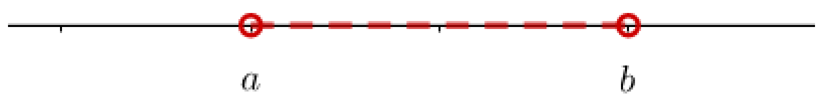
Chamamos de intervalo fechado quando os valores da extremidade pertencerem ao conjunto. Usualmente, representamos o intervalo fechado com um ponto fechado:



2) Intervalo aberto nas extremidades

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

No intervalo aberto nas extremidades, os elementos da extremidade não pertencem ao conjunto. Essas extremidades são representadas com um ponto aberto:



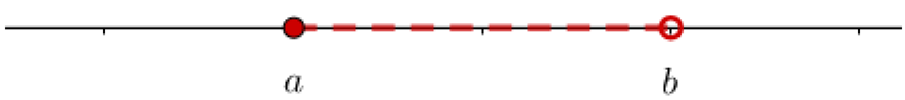
O intervalo aberto também pode ser representado pelos parênteses:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

3) Intervalo aberto à direita ou fechado à esquerda

$$[a,b) = [a,b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

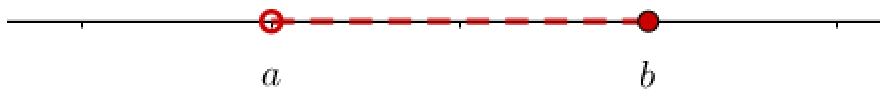
Nesse caso, o intervalo é aberto à direita $\rightarrow b$ não pertence ao conjunto e a pertence ao conjunto.



4) Intervalo aberto à esquerda ou fechado à direita

$$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

Situação análoga ao caso acima, a não pertence ao conjunto e b pertence.



4.4. Potenciação

Veremos esse assunto com mais detalhes na aula de Potenciação e Radiciação. Por hora, basta saber a sua definição:

$$a \in \mathbb{R} \; e \; n \in \mathbb{N}^*, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Exemplos:

1) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

2) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

3) $2^2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 125 = 500$

4) $(abc)^3 = a^3 b^3 c^3$

5) $(ab)^2 = a^2 b^2$

6) $a^6 = (a^2)^3 = (a^3)^2$

a^2 é lido como a elevado ao quadrado.

a^3 é lido como a elevado ao cubo.

4.5. Radiciação

Também estudaremos esse assunto na aula de Potenciação e Radiciação. Vamos ver sua definição:

$$a \in \mathbb{R} \; e \; n \in \mathbb{N}^*, a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Para essa aula, vamos usar apenas $n = 2$.

$\sqrt{a}$ é dito raiz quadrada de a

4.5.1. Operações usuais

a) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

b) $\sqrt{a}\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}} = a$

c) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

d) $\sqrt{a+b}^2 = a + b$

e) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

4.6. Desigualdades para o Conjunto dos Reais

1) Tricotomia dos Reais

$$a \in \mathbb{R} \rightarrow (a < 0\ ou\ a = 0\ ou\ a > 0)$$

2) Translação

$$a \geq b\ e\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a + c \geq b + c$$

3) Produto da desigualdade

$$a \geq b\ e\ c \geq 0 \rightarrow ac \geq bc$$
$$a \geq b\ e\ c \leq 0 \rightarrow ac \leq bc$$

4) Inversa

$$a \geq b\ e\ ab > 0 \rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$$

5) Transitividade

$$a \geq b\ e\ b \geq c \rightarrow a \geq c$$

6) Soma da desigualdade

$$a \geq b\ e\ c \geq d \rightarrow a + c \geq b + d$$

7) Potenciação

$$a \geq b\ e\ a, b > 0 \rightarrow a^2 \geq b^2$$

4.7. Sistemas de Numeração

O sistema de numeração que estamos acostumados é o sistema de numeração decimal ou de base 10. Com esse sistema, podemos escrever os números em função das potências de 10. Desse modo, cada algarismo de um número na base 10 deve pertencer ao conjunto $\{0,1,2,3,\dots,8,9\}$. Veja os exemplos:

$$357 = 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

$$1048 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

$$15 = 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

$$1{,}15 = 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

$$-5{,}2 = -(5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1})$$

4.7.1. Sistema de numeração na base b

Podemos representar os números usando outros tipos de base.

Seja b a base de um sistema de numeração e $b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$. Podemos representar os números usando a seguinte sequência de símbolos:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots)_b$$

Onde a_i representa o algarismo do número. Esse algarismo deve pertencer ao conjunto $\{0,1,2,\dots,b-1\}$.

Um detalhe que devemos nos atentar é caso $b > 10$, os algarismos (a_i) acima ou igual a 10 devem ser substituídos por letras maiúsculas do alfabeto:

$$A = 10$$

$$B = 11$$

$$C = 12$$

$$\vdots$$

Como o sistema de numeração usual é o decimal, representamos os números nessa base sem os parênteses e o subíndice b. Veja:

$$\pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots \equiv \pm(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots)_{10}$$

Para representar os negativos, basta inserir o sinal negativo na frente do maior algarismo.

Vamos ver alguns sistemas de numeração.

4.7.2. Sistema binário

Esse é o sistema de numeração na base 2. O sistema binário é usado na computação para representar os bits. Os números na base 2 são conhecidos como números binários. Cada algarismo de um número binário pode assumir os valores 0 ou 1. Exemplo de números binários:

$$(10101{,}101)_2$$

$$(111{,}111)_2$$

4.7.3. Sistema octal

Sistema de numeração na base 8. Os algarismos devem pertencer ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Exemplo:

$$(7103{,}25)_8$$

4.7.4. Sistema hexadecimal

Sistema de numeração na base 16. Perceba que nesse caso, os algarismos podem ser maiores ou iguais a 10. Dessa forma, os algarismos devem pertencer ao conjunto:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

Exemplos:

$$F5A4$$

$$100FFF$$

$$ABCDEF123$$

Lembrando que nesse caso: $A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15$.

4.8. Mudança de Base

4.8.1. Mudança na base b para base decimal

Para converter um número na base b para a base decimal, basta expandir o número da seguinte forma:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots)_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \cdots$$

Exemplos:

$$(13{,}2)_4 = 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^{-1} = 7{,}5$$

$$(ACF)_{16} = 10 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 2767$$

4.8.2. Mudança na base decimal para base b

Agora queremos converter um número na base decimal para a base b, isto é, devemos encontrar o caminho inverso da conversão acima.

Seja $(X)_{10}$ a representação de um número na base decimal. Então:

$$(X)_{10} = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots)_b$$

Queremos encontrar os algarismos a_i. Vamos separar os dígitos de X em parte inteira e parte fracionária.

Definindo X_i como a parte inteira de X e X_f como a parte fracionária, temos:

$$X_i = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$
$$X_f = \frac{a_{-1}}{b^1} + \frac{a_{-2}}{b^2} + \frac{a_{-3}}{b^3} + \cdots$$

Para encontrar X_i, usamos o método conhecido como divisões sucessivas e encontramos a parte inteira de X. Veja:

$$X_i = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

Dividindo a equação por b, encontramos:

$$\frac{X_i}{b} = a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \cdots + a_1 + \frac{a_0}{b}$$

a_0 é o resto da divisão de X_i por b e $a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \cdots + a_1$ é um número inteiro.

Se dividirmos o número $a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \cdots + a_1$ por b novamente, encontramos a_1. E assim repetimos essa operação até encontrarmos todos os dígitos.

Na prática, dividimos o número X_i por b sucessivamente até que o quociente das divisões sucessivas seja zero.

Para encontrar X_f, usamos o método multiplicações sucessivas. Veja:

$$X_f = \frac{a_{-1}}{b^1} + \frac{a_{-2}}{b^2} + \frac{a_{-3}}{b^3} + \cdots$$

Multiplicando a equação por b:

$$X_f b = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{b^1} + \frac{a_{-3}}{b^2} + \cdots$$

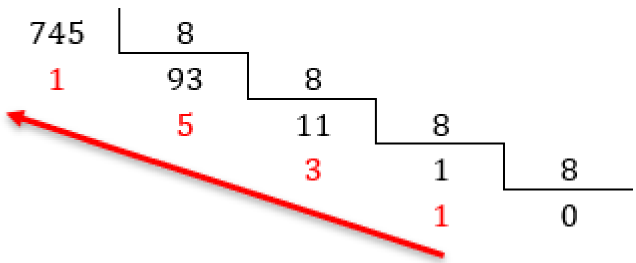
Dessa forma, a_{-1} torna-se a parte inteira da operação acima e $\frac{a_{-2}}{b^1} + \frac{a_{-3}}{b^2} + \cdots$ é a parte fracionária. Se multiplicarmos essa parte fracionária por b, encontramos a_{-2}. Repetimos essa operação até encontrar todos os dígitos fracionários.

Na prática, multiplicamos X_f por b até que não haja mais parte fracionária.

Exemplo:

Vamos transformar o número $745{,}5$ na base decimal para a base 8.

Inicialmente, separamos a parte inteira da parte fracionária e calculamos cada uma separadamente. Para a parte inteira, dividimos o número 745 por 8 e obtemos a parte inteira na base 8:



Devemos escrever a parte inteira de acordo com a ordem indicada pela seta:

$$(745)_{10} = (1351)_8$$

Para a parte fracionária, devemos multiplicar esse número por 8 sucessivamente. Os números inteiros obtidos serão os algarismos da parte fracionária:

$$0{,}5 \cdot 8 = 4 \Rightarrow a_{-1} = 4$$

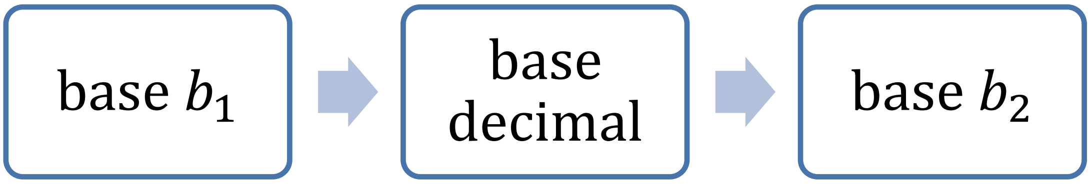
Assim, o número 745,5 na base 8 é:

$$745{,}5 = (1351{,}4)_8$$

4.8.3. Mudança na base b_1 para a base b_2

Para converter um número na base b_1 para a base b_2, devemos primeiro converter o número para a base decimal e depois convertemos o decimal resultante para a base b_2.

Devemos seguir o seguinte esquema:



Quando as bases forem potências de um mesmo número primo, podemos usar o método do reagrupamento para mudar as bases. Exemplo:

Converter $(1010101111)_2$ para a base 16:

Nesse caso, devemos ver quantos algarismos binários são necessários para representar o maior algarismo hexadecimal. O maior é $F = 15 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1111$.

Vemos que precisamos de 4 algarismos binários. Então, devemos separar o número na base 2 em blocos de 4 algarismos:

$$(1010101111)_2 = (10.1010.1111)_2 = (0010.1010.1111)_2$$

Perceba que completamos o bloco mais à esquerda com zeros, isso deverá ser feito quando faltar números nesse bloco.

Os algarismos na base 16 serão a conversão de cada bloco em decimal. Veja:

$$0010 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2$$

$$1010 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10 = A$$

$$1111 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 15 = F$$

Dessa forma:

$$(1010101111)_2 = (2AF)_{16}$$

13. Obtenha a representação na base 4 do número $(10101{,}01)_2$

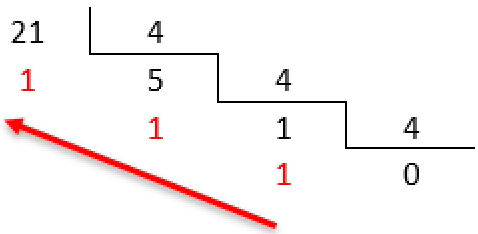
Resolução:

Convertendo para decimal:

$(10101{,}01)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 21{,}25$

21,25 é fracionário, então devemos dividir em parte inteira e parte fracionária.

Convertendo 21,25 para a base 4:



Efetuamos a divisão sucessiva de 21 por 4. Os maiores algarismos são os restos mais a direita dessa divisão conforme a seta. Assim:

$$21 = 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$$

Poderíamos ter escrito 21 diretamente em função das potências de 4 já que ele é um número pequeno.

Caso o número fosse maior, seria mais viável dividir desse modo para encontrar os algarismos da parte inteira.

Agora, encontrando os algarismos fracionários:

$$0{,}25 \cdot 4 = 1$$

Como não temos mais fração no resultado dessa multiplicação, podemos escrever:

$$0{,}25 = 1 \cdot 4^{-1}$$

Portanto:

$$(10101{,}01)_2 = (111{,}1)_4$$

5. Produto Notável e Fatoração

Uma expressão algébrica pode ser escrita de diversas maneiras. Vamos tomar $x^2 + 2x + 1$ como exemplo:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1) = (x+1)^2$$

O processo de escrever $x^2 + 2x + 1$ como $(x+1)^2$ é chamado de fatoração e o processo inverso, isto é, escrever $(x+1)^2$ como $x^2 + 2x + 1$, é chamado de produto notável.

Produto notável

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Fatoração

A fatoração será muito útil durante a resolução de várias questões dos vestibulares e conhecer os produtos notáveis farão com que você ganhe tempo na hora de resolver as questões. Quando vemos, por exemplo, $(a+2)^2$, podemos aplicar diretamente a fórmula do quadrado da soma de dois termos e escrever $(a+2)^2 = a^2 + 2a \cdot 2 + 2^2$.

Aprenderemos a demonstrar os principais produtos notáveis e fatorações. É importante que você decore alguns deles, mas caso esqueça, você pode desenvolver as expressões aplicando a propriedade da distributiva e encontrar suas fórmulas.

a) $a(x+y) = ax + ay$

b) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

c) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

d) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

e) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

f) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

g) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

h) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

i) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

j) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$

k) $a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a+b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \cdots - b^{2m-1}a + b^{2m})$

Demonstração:

a) $a(x+y) = ax + ay$

O primeiro produto notável pode ser encontrado aplicando a propriedade da distributiva diretamente (técnica do "chuveirinho").

$$a(x+y) = ax + ay$$

b) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2$ lê-se a mais b elevado ao quadrado ou a mais b elevado a 2.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

Vamos aplicar a distributiva em a e b:

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

c) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Situação análoga à (b), a única diferença é a presença do sinal negativo em b. Aplicando a distributiva:

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

d) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Distributiva:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

e) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$(a+b)^3$ lê-se a mais b elevado ao cubo.

Podemos escrever $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$ e, assim, usar o produto notável

$$(b)\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

na expressão:

$$(a+b)^2(a+b)$$
$$(a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$
$$(a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3)$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Colocando $3ab$ em evidência:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

f) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

Situação análoga à letra (e):

$$(a-b)^3$$
$$(a-b)^2(a-b)$$

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$
$$(a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3)$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Vamos colocar $-3ab$ em evidência:

$$a^3 - 3ab(a - b) - b^3$$
$$a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

g) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Vamos manipular a expressão $a^3 + b^3$:

$$a^3 + b^3$$

Somando e subtraindo os termos $a^2b\ e\ ab^2$ da expressão, temos:

$$a^3 + b^3 + a^2b - a^2b + ab^2 - ab^2$$

Fatorando a expressão:

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 - a^2b - ab^2$$
$$a^2(a + b) + b^2(a + b) - ab(a + b)$$
$$(a + b)(a^2 + b^2 - ab)$$
$$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

h) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Usaremos a mesma ideia usada em (g):

$$a^3 - b^3$$
$$a^3 - b^3 + a^2b - a^2b + ab^2 - ab^2$$
$$a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 + a^2b - ab^2$$

Fatorando a expressão:

$$a^2(a - b) + b^2(a - b) + ab(a - b)$$
$$(a - b)(a^2 + b^2 + ab)$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

i) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

Vamos usar o seguinte produto notável: $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$

Somando e subtraindo os termos $3a^2b\ e\ 3ab^2$ da expressão:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3a^2b - 3a^2b + 3ab^2 - 3ab^2$$

Organizando os termos:

$$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2$$

$$(a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2) + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2$$

Fazendo $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3$:

$$(a + b)^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2$$

Fatorando os termos:

$$[(a + b)^3 + c^3] - 3ab(c + a + b)$$

Lembrando que $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, temos:

$$(a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2] - 3ab(a + b + c)$$

$$(a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$$

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

j) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$

Vamos mostrar que desenvolvendo $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$ chegamos no produto notável $a^n - b^n$.

Veja:

$$A = a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}) = a^n + a^{n-1}b + \cdots + b^{n-2}a^2 + ab^{n-1}$$

$$B = b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}) = a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^{n-1}a + b^n$$

$$A - B = a^n + a^{n-1}b + \cdots + b^{n-2}a^2 + ab^{n-1} - (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^{n-1}a + b^n)$$

Perceba que os termos em vermelho se cancelam. Desse modo, obtemos a seguinte expressão:

$$A - B = a^n - b^n$$

Também podemos escrever:

$$A - B = a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}) - b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$$

$$A - B = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$$

$$\therefore a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$$

k) $a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a + b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \cdots - b^{2m-1}a + b^{2m})$

Usando a mesma ideia da fatoração acima:

$$A = a(a^{2m} - a^{2m-1}b + a^{2m-2}b^2 - \cdots + b^{2m-2}a^2 - b^{2m-1}a + b^{2m})$$
$$= a^{2m+1} - a^{2m}b + a^{2m-1}b^2 - \cdots + b^{2m-2}a^3 - b^{2m-1}a^2 + b^{2m}a$$

$$B = b(a^{2m} - a^{2m-1}b + a^{2m-2}b^2 - \cdots + b^{2m-2}a^2 - b^{2m-1}a + b^{2m})$$
$$= a^{2m}b - a^{2m-1}b^2 + a^{2m-2}b^3 - \cdots + b^{2m-1}a^2 - b^{2m}a + b^{2m+1}$$

$$A + B$$
$$= a^{2m+1} - a^{2m}b + a^{2m-1}b^2 - \cdots + b^{2m-2}a^3 - b^{2m-1}a^2 + b^{2m}a + a^{2m}b - a^{2m-1}b^2 + a^{2m-2}b^3 - \cdots + b^{2m-1}a^2 - b^{2m}a + b^{2m+1}$$

Perceba que os termos coloridos se cancelam. Assim, obtemos:

$$A+B=a^{2m+1}+b^{2m+1}$$

Também podemos escrever:

$$A+B=a(a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^2-\cdots+b^{2m-2}a^2-b^{2m-1}a+b^{2m})+$$
$$b(a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^2-\cdots+b^{2m-2}a^2-b^{2m-1}a+b^{2m})$$
$$A+B=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^2-\cdots+b^{2m-2}a^2-b^{2m-1}a+b^{2m})$$
$$\therefore a^{2m+1}+b^{2m+1}=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^2-\cdots+b^{2m-2}a^2-b^{2m-1}a+b^{2m})$$

5.1. Fatoração usando raízes

Uma expressão pode ser escrita como uma função, por exemplo, $f(x)=ax^2+bx+c$, para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, é uma função quadrática do segundo grau na variável x. Podemos fatorar a expressão dessa função em fatores usando as raízes dessa função. Chamamos de raízes os valores de x que zeram a expressão, se α é um número real tal que $f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c=0$, então α é raiz de f. Não se preocupe se você não entendeu até aqui, veremos tudo com mais detalhes na aula de funções quadráticas, por hora, basta saber o que é uma raiz. Vejamos como fatorar uma função pelo método das raízes.

Preliminarmente, saiba que toda função polinomial de grau n, possui n raízes. Nos restringiremos ao grau $n=2$ e veremos futuramente outras fatorações na aula de polinômios. Se α e β são raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, então, podemos escrever:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

Observe na prática como essa fatoração é feita.

5.1.a) Fatore a expressão x^2-4x+3.

O primeiro passo para fatorar essa expressão é encontrar as raízes da equação

$$x^2-4x+3=0$$

Você deve se lembrar que as raízes de uma equação quadrática são dadas por:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{onde } \Delta=b^2-4ac$$

Calculemos o Δ:

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4\therefore\Delta=4$$

Assim, temos as seguintes raízes:

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm2}{2}\Rightarrow x_1=1 \text{ ou } x_2=3$$

Encontramos duas raízes distintas, 1 e 3, logo, podemos escrever:

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

5.2. Aplicação

Agora que conhecemos diversas fatorações e produtos notáveis, podemos ver na prática como usamos esses artifícios nos problemas matemáticos (isso será muito útil para acelerar os cálculos nas questões de matemática!). Vejamos alguns exemplos de aplicações.

5.2.a) Simplifique

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

Resolução:

Veja que essa expressão lembra o produto notável:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Assim, temos:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2=2-3=-1$$

5.2.b) Encontre o valor da expressão:

$$\sqrt{5999^2+5999+6000}$$

Resolução:

Note que temos um número elevado ao quadrado, logo podemos nos lembrar da fatoração:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

Manipulando a expressão dentro do radical, temos:

$$\sqrt{5999^2+5999+6000}=\sqrt{5999^2+5999+5999+1}=\sqrt{5999^2+2\cdot 5999\cdot 1+1}$$

$$=\sqrt{(5999+1)^2}=\sqrt{6000}^2=6000$$

5.2.c) Sabendo que $x+\frac{1}{x}=10$, calcule o valor de $x^2+\frac{1}{x^2}$.

Resolução:

Veja que elevando $x+\frac{1}{x}=10$ ao quadrado, obtemos:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=10^2\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=100$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=100\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=100-2=98$$

$$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=98$$

5.2.d) Sabendo que $a + b + c = 0$ e $abc = 1$, calcule

$$a^3 + b^3 + c^3$$

Resolução:

Podemos usar a seguinte fatoração

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Isolando a soma pedida, temos:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc$$

Substituindo os valores:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 0 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3 \cdot 1$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

6. Desigualdade

Vamos iniciar o estudo das desigualdades. Esse assunto pode nos ajudar a resolver diversas questões que pedem para analisar máximos e mínimos. Vejamos os principais e suas respectivas demonstrações.

6.1. Desigualdade de Cauchy

Para $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}}$$

Demonstração:

No conjunto dos reais, sabemos que qualquer número elevado ao quadrado é maior ou igual a zero. Então, podemos escrever para $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

Fazendo $a^2 = x$ e $b^2 = y$, encontramos:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

6.2. Teorema de Cauchy

Para $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n}$$

Demonstração:

Vamos provar por PIF.

Verificando a veracidade da propriedade para $n = 1$:

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \geq 1$$

Logo, é válido para $n = 1$. Agora, vamos provar a tese através da hipótese para $k \in \mathbb{N}$:

Hipótese:

$$\begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}_+^* \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k$$

Tese:

$$\begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}_+^* \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$$

Para todos os termos unitários, temos que a demonstração é imediata:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = x_{k+1} = 1 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = k + 1 \geq k + 1$$

Caso alguns termos sejam distintos, existirão termos maiores do que 1 e termos menores do que 1. Pela hipótese, temos:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k-1} \cdot (x_k \cdot x_{k+1}) = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + (x_k \cdot x_{k+1}) \geq k$$

Sem perda de generalidade, vamos supor $x_k \geq 1$ e $x_{k+1} \leq 1$. Somando $-x_k \cdot x_{k+1}$ nos dois lados da desigualdade:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + (x_k \cdot x_{k+1}) - x_k \cdot x_{k+1} \geq k - x_k \cdot x_{k+1}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} \geq k - x_k \cdot x_{k+1}$$

Somando $x_k + x_{k+1}$ nos dois lados da desigualdade acima:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k - x_k \cdot x_{k+1} + x_k + x_{k+1}$$

Agora, vamos somar $(+1 - 1)$ no lado direito da desigualdade:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k - x_k \cdot x_{k+1} + x_k + x_{k+1} + 1 - 1$$

Vamos fatorar o lado direito da desigualdade:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k + 1 - x_k \cdot x_{k+1} + x_{k+1} + x_k - 1$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k + 1 - x_{k+1}(x_k - 1) + (x_k - 1)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k + 1 + (x_k - 1)(1 - x_{k+1})$$

Da suposição inicial:

$$x_k \geq 1 \Rightarrow x_k - 1 \geq 0$$

$$x_{k+1} \leq 1 \Rightarrow 1 - x_{k+1} \geq 0$$

Portanto:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k + 1 + \underbrace{(x_k - 1)}_{\geq 0}\underbrace{(1 - x_{k+1})}_{\geq 0} \geq k + 1$$

$$\therefore x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$$

6.3. Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}$$

Demonstração:

Para $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (a_1 x + b_1)^2 \geq 0 \\ (a_2 x + b_2)^2 \geq 0 \\ \vdots \\ (a_n x + b_n)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 x^2 + 2a_1 b_1 x + b_1^2 \geq 0 \\ a_2^2 x^2 + 2a_2 b_2 x + b_2^2 \geq 0 \\ \vdots \\ a_n^2 x^2 + 2a_n b_n x + b_n^2 \geq 0 \end{cases}$$

Somando as desigualdades, temos:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)x + b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \geq 0$$

Para essa inequação ser satisfeita $\forall x$, devemos ter $\Delta \leq 0$:

$$\Delta = 4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

$$4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \leq 0$$

$$\therefore (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

6.4. Desigualdade das Médias

Preste atenção nessa desigualdade, pois ela é a mais cobrada nos vestibulares militares!

Para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{MQ \geq MA \geq MG \geq MH}$$

Onde:

$$MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \ (Média\ Quadrática)$$

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ (Média\ Aritmética)$$

$$MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \ (Média\ Geométrica)$$

$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \ (Média\ Harmônica)$$

Atenção! A igualdade entre as médias ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots$, ou seja, os termos envolvidos são iguais!

Exemplo:

6.4.a) Sabendo que $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e que $ab = 100$, calcule o mínimo valor de $a + b$ e os valores de cada uma dessas variáveis.

Resolução:

Como queremos saber o mínimo valor de $a + b$, podemos usar a expressão da média aritmética e já que temos o valor do produto ab, podemos comparar essa média com a média geométrica.

$$MA \geq MG$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

O mínimo ocorre quando $a + b = 2\sqrt{ab}$, logo:

$$a + b = 2\sqrt{100} = 2 \cdot 10 = 20 \therefore \boxed{a + b = 20}$$

Sabemos que a igualdade das médias ocorre somente quando os termos envolvidos são iguais, assim, temos:

$$a = b \Rightarrow a + b = a + a = 2a = 20 \therefore \boxed{a = b = 10}$$

Demonstração:

Vamos provar por partes.

1) $M_Q \geq M_A$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Fazendo $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 1$, temos:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)n$$

Dividindo ambos os lados por $n^2 > 0$:

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{n^2} \leq \frac{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}{n}$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

$$M_A \leq M_Q$$

$$\therefore M_Q \geq M_A$$

2) $M_A \geq M_G$

Pela definição de M_G:

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \Rightarrow M_G^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Dividindo a igualdade por M_G^n:

$$\frac{x_1}{M_G} \cdot \frac{x_2}{M_G} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{M_G} = 1$$

Usando o teorema de Cauchy:

$$\frac{x_1}{M_G} \cdot \frac{x_2}{M_G} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{M_G} = 1 \Rightarrow \frac{x_1}{M_G} + \frac{x_2}{M_G} + \cdots + \frac{x_n}{M_G} \geq n$$

Logo:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq M_G$$

$$\therefore M_A \geq M_G$$

3) $M_G \geq M_H$

Sabemos que $M_A \geq M_G$, então:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Substituindo $x_i = \frac{1}{a_i}, 0 < i < n$, temos:

$$\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}}$$

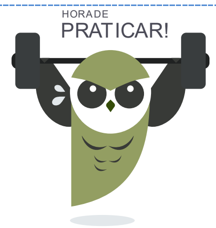
$$\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}}$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

$$\therefore M_G \geq M_H$$

Assim, provamos que:

$$M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H$$



Exercícios de Fixação

14. Demonstre para $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

Resolução:

Demonstração vista na aula teórica. Basta fazer $n = 2$ e provar:

$$M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H$$

Gabarito: Demonstração

15. Demonstre para $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Resolução:

Sabemos que qualquer diferença de números elevado ao quadrado é maior ou igual a zero, logo:

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Dividindo ambos os lados por $ab > 0$:

$$\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Gabarito: Demonstração

16. Demonstre para $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 1$:

$$(1 + a + a^2)^2 < 3(1 + a^2 + a^4)$$

Resolução:

Vamos provar por absurdo. Supondo que:

$$(1+a+a^2)^2 \geq 3(1+a^2+a^4)$$

$$a^4+a^2+1+2a^3+2a^2+2a \geq 3+3a^2+3a^4$$

$$2a^4+2-2a^3-2a \leq 0$$

$$a^4-a^3-a+1 \leq 0$$

$$a^3(a-1)-(a-1) \leq 0$$

$$(a^3-1)(a-1) \leq 0$$

$$(a-1)^2(a^2+a+1) \leq 0$$

Perceba que $f(a)=a^2+a+1>0, \forall a \in \mathbb{R}$, pois:

$$\Delta = 1^2-4=-3$$

Como $a \neq 1$, temos $a-1 \neq 0$. Desse modo:

$$\underbrace{(a-1)^2}_{>0}\underbrace{(a^2+a+1)}_{>0} \leq 0$$

O produto de dois números positivos é sempre positivo, logo, chegamos a um absurdo!

Portanto:

$$(1+a+a^2)^2 < 3(1+a^2+a^4)$$

Gabarito: Demonstração

17. Sabe-se que a média aritmética de 5 números inteiros distintos, estritamente positivos, é 16. Calcule o maior valor que um desses números pode assumir.

Resolução:

Sejam a, b, c, d, e, 5 números inteiros positivos e distintos. Então, de acordo com o enunciado:

$$\frac{a+b+c+d+e}{5}=16 \Rightarrow a+b+c+d+e=80$$

Supondo que a seja o maior inteiro positivo, temos que ele assumirá o máximo valor quando $b+c+d+e$ for mínimo. Isso acontece quando esses números são consecutivos. Supondo que b é o menor deles:

$$b+c+d+e=b+(b+1)+(b+2)+(b+3)=4b+6$$

$$\Rightarrow a+4b+6=80$$

$$a=74-4b$$

Como todos os números são estritamente positivos, vemos que o menor valor inteiro que b pode assumir é $b=1$, desse modo:

$$a=74-4$$

$$a=70$$

Gabarito: 70

18. (ITA/2002) Mostre que $\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4}$, para quaisquer x e y reais positivos.

Obs.: $C_{n,p}$ denota a combinação de n elementos tomados p a p.

Resolução:

O valor numérico de $C_{8,4}$ (esse tema será visto na aula de análise combinatória) é:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2} = 70$$

Assim, temos que provar a seguinte desigualdade:

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > 70$$

Como $MA \geq MG$, usando os termos $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$, obtemos:

$$MA \geq MG \Rightarrow \frac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$$

Somando-se 2 na desigualdade obtida e elevando à quarta potência, encontramos:

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq (2+2)^4$$

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq (4)^4$$

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 \geq 256 > 70$$

Gabarito: Demonstração

7. Lista de Questões

19. (Exercício de Fixação)

Fatore as seguintes expressões:

a) $x^2 + y^2 - 9y^2 - 2xy$

b) $x^6 - y^6$

c) $2ab - a^2 - b^2 + c^2$

d) $a^4 + b^4$

e) $x^6 + 1$

f) $x^6 - 1$
g) $x^4 + x^2 + 1$
h) $a^4 - a^3 + a^2 - 1$
i) $a^2 - 6a + 9$
j) $16a^4 - 17a^2b^2 + b^4$
k) $a^4 + 4b^4$
l) $(x+y)(a^2 - 2ab + b^2) + (x+y)^3(a-b)^3$
m) $a^5 + b^5 - ab^4 - a^4b$
n) $(x-y)^3 + (y-z)^3 - (x-z)^3$
o) $2x^{14} - 512x^6$
p) $x^6 + 3x^3 - 4$
q) $xy^2 + w(z-y) - xyz$
r) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

20. (Exercício de Fixação)

Para quais valores de $a \in \mathbb{Z}$, a fração $\frac{a^2+7}{a+3}$ é um número inteiro?

21. (Exercício de Fixação)

Simplifique:
a) $\frac{a^6+2a^3b^3+b^6}{a^6-b^6}$
b) $\frac{a^2}{a^2-1} - \frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1}$
c) $\frac{a^9-b^9}{a^3-b^3}$
d) $\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(a+c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}$

22. (Exercício de Fixação)

Prove que as seguintes afirmações são verdadeiras:
a) $(n^5 - n) \vdots 30$
b) $(2n^3 + 3n^2 + n) \vdots 6$

23. (Exercício de Fixação)

Use o PIF para demonstrar as seguintes afirmações:
a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$
d) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$
e) $n(n+1)(n+2) \vdots 6, \forall n \in \mathbb{N}$
f) $n^2 + n \vdots 2, \forall n \in \mathbb{N}$

g) $2n \geq n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

24. (AFA/2018)

Na reta dos números reais abaixo, estão representados os números m, n e p.

Analise as proposições a seguir e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).

( ) $\sqrt{\frac{m-n}{p}}$ não é um número real.

( ) $(p + m)$ pode ser um número inteiro.

( ) $\frac{p}{n}$ é, necessariamente, um número racional.

A sequência correta é

a) V-V-F

b) F-V-V

c) F-F-F

d) V-F-V

25. (AFA/2017)

Sejam os números reais

$$a = \frac{\sqrt{(-1)^2} \cdot 0{,}1222\ldots}{(1{,}2)^{-1}}$$

$b =$ comprimento de uma circunferência de raio 1

$c = \sqrt{12} \cdot \sqrt{90} \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{147}$

Sendo $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ os conjuntos numéricos, assinale a alternativa FALSA.

a) $\{a, c\} \subset \mathbb{Q}$

b) $c \in (\mathbb{Z} \cap \mathbb{N})$

c) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \supset \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}$

d) $\{a, c\} \subset (\mathbb{R} \cap \mathbb{Q})$

26. (AFA/2013)

Considere os seguintes conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e considere também os seguintes conjuntos:

$A = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z})$

$B = \mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$

$D = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N})$

Das alternativas abaixo, a que apresenta elementos que pertencem aos conjuntos $A, B\ e\ D$, nesta ordem, é

a) $-3; 0{,}5$ e $\frac{5}{2}$

b) $\sqrt{20}; \sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$

c) $-\sqrt{10};\ -5$ e 2

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}; 3$ e $2,\overline{31}$

27. (AFA/2011)

Se $\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, então

a) $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{N})$

b) α pode ser escrito na forma $\alpha = 2k, k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha \in [(\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})]$

d) $[(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{N})] \supset \alpha$

28. (Escola Naval/2018)

Quantos números inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou por 7 ?

a) 47

b) 142

c) 289

d) 333

e) 428

29. (Escola Naval/2013)

Considere uma fração cuja soma de seus termos é 7. Somando-se três unidades ao seu numerador e retirando-se três unidades de seu denominador, obtém-se a fração inversa da primeira. Qual é o denominador da nova fração?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

30. (Escola Naval/2013)

Em um certo país, o imposto de renda é taxado da maneira a seguir:

1º) se a renda bruta anual é menor que $R\$\ 10.000,00$ não é taxado;

2º) se a renda bruta anual é maior ou igual a $R\$\ 10.000,00$ e menor que $R\$\ 20.000,00$ é taxado em 10%;

3º) se a renda bruta anual é maior ou igual a $R\$\ 20.000,00$ é taxado em 20%.

A pessoa que ganhou no ano $R\$\ 17.370,00$ após ser descontado o imposto, tem duas possibilidades para o rendimento bruto. A diferença entre esses rendimentos é

a) $R\$\ 17.370,00$

b) $R\$\ 15.410,40$

c) $R\$\ 3.840,50$

d) $R\$\ 2.412,50$

e) $R\$\ 1.206,60$

31. (EFOMM/2019)

Numa equação, encontramos o valor de 884. Para chegar a esse resultado, somamos os quadrados de dois números pares, consecutivos e positivos. Determine o quociente da divisão do maior pelo menor

a) $0,87$.

b) $0,95$.

c) $1,03$.

d) $1,07$.

e) $1,10$.

32. (EFOMM/2018)

Um aluno do 1º ano da EFOMM fez compras em 5 lojas. Em cada loja, gastou metade do que possuía e pagou, após cada compra, $R\$\ 2,00$ de estacionamento. Se, após toda essa atividade, ainda ficou com $R\$\ 20,00$, a quantia que ele possuía inicialmente era de

a) $R\$\ 814,00$.

b) $R\$\ 804,00$.

c) $R\$\ 764,00$.

d) $R\$\ 714{,}00$.

e) $R\$\ 704{,}00$.

33. (EFOMM/2018)

No “Baile dos FERAS”, os organizadores notaram que a razão entre o número de homens e o número de mulheres presentes, no início do evento, era de $\frac{7}{10}$. Ao final do show, os organizadores observaram no local o aumento de 255 homens e a redução de 150 mulheres, de modo que a razão entre o número de homens e o número de mulheres presentes depois disso passou a ser $\frac{9}{10}$. Qual é o número total de pessoas que estiveram presentes em algum momento no show?

a) 3.954.

b) 3.570.

c) 3.315.

d) 1.950.

e) 1.365.

34. (EFOMM/2013)

Durante o Treinamento Físico Militar na Marinha, o uniforme usado é tênis branco, short azul e camiseta branca. Sabe-se que um determinado militar comprou um par de tênis, dois shortes e três camisetas por $R\$100{,}00$. E depois, dois pares de tênis, cinco shortes e oito camisetas por $R\$235{,}00$. Quanto, então, custaria para o militar um par de tênis, um short e uma camiseta?

a) $R\$50{,}00$.

b) $R\$55{,}00$.

c) $R\$60{,}00$.

d) $R\$65{,}00$.

e) $R\$70{,}00$.

35. (EFOMM/2009)

Qual é o número inteiro cujo produto por 9 é um número natural composto apenas pelo algarismo 1?

a) 123459

b) 1234569

c) 12345679

d) 12345789

e) 123456789

36. (CN/2002)

Se a, b e c são algarismos distintos, no sistema de numeração decimal existe um único número de dois algarismos (ab) tal que $(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2$. O valor de $(a + b + c)$ é igual a:

a) 11

b) 12

c) 13

d) 14

e) 15

37. (CN/2000)

O valor da expressão abaixo é

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27} + \frac{16}{9} \cdot (0{,}333\ldots + 1) - \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}}\right)^{\left(\frac{\sqrt{25}}{2}+3\right)}$$

a) $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

c) 0

d) 1

e) -1

38. (CN/2001)

Se $2 < x < 3$, então $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ é igual a:

a) 2

b) $\sqrt{x}$

c) $2\sqrt{x-1}$

d) $2\sqrt{x}$

e) 3

39. (CN/2002)

Se $a = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ e $b = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$, então $a + b$ é igual a:

a) $\sqrt{10}$

b) 4

c) $2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{5} + 1$

e) $\sqrt{3} + 2$

40. (CN/2011)

O número real $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ é igual a

a) $5 - \sqrt{3}$

b) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

c) $3 - \sqrt{2}$

d) $\sqrt{13 - 3\sqrt{3}}$

e) 2

41. (EEAR/2000)

Simplificando $\frac{2a^2x}{3} \cdot (a^2x^2)^{-\frac{2}{3}}$, com $a > 0$ e $x > 0$, temos

a) $\frac{2a\sqrt[3]{a^2x^2}}{3x}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{a^2x^2}}{3ax}$

c) $\frac{2x\sqrt[3]{a^2x^2}}{3a}$

d) $\frac{2\sqrt[3]{a^2x^2}}{3x}$

42. (EEAR/2001)

Efetuando $\left(-2^{\frac{3}{4}}\right)^4 - 3 \cdot (-1^5)^{\frac{2}{5}} - 5^0$, obtemos

a) 10

b) 12

c) 4

d) -12

43. (EEAR/2001)

Supondo definida em $\mathbb{R}$ a fração:

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}},$$

O seu valor é:

a) $\sqrt{a+1}$

b) $a+1$

c) $a-1$

d) a

44. (EEAR/2002)

A fração $\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}-b^{-2}}$ é igual a

a) $a^{-6}-b^{-6}$

b) $a^{-2}-b^{-2}$

c) $a^{-2}+b^{-2}$

d) a^2+b^2

45. (EEAR/2002)

O valor da expressão $\frac{\sqrt{144}\div 0,6}{2,4\cdot 10}-\frac{3}{4}\left\{2-1,5\div\left(1+\frac{1}{2}\right)\right\}$ é igual a:

a) $\frac{1}{12}$

b) $\frac{7}{12}$

c) $-\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

46. (EEAR/2002)

Se K é um número inteiro, K^2+K é necessariamente um

a) múltiplo de 2

b) múltiplo de 3

c) produto de dois números ímpares.

d) produto de dois números primos.

47. (ITA/2020)

A expansão decimal do número $100! = 100 \cdot 99 \cdots 2 \cdot 1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros, que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer, é igual a

a) 20.

b) 21.

c) 22.

d) 23.

e) 24.

48. (ITA/2020)

Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. se p ou q é irracional, então a é irracional.

II. se p e q são racionais, então a é racional.

III. se q é irracional, então p é irracional.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) todas.

49. (ITA/2020)

Dizemos que um número natural n é um cubo perfeito se existe um número natural a tal que $n = a^3$. Determine o subconjunto dos números primos que podem ser escritos como soma de dois cubos perfeitos.

50. (ITA/2019)

Um número natural n, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine n.

51. (ITA/2019/Modificada)

Considere as seguintes afirmações:

I. A soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

II. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

É(são) verdadeira(s)

52. (ITA/2019/Modificada)

Considere as seguintes afirmações:

I. Se n é um número natural, então $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$.

II. Se x é um número real e $x^3 + x + 1 = 0$, então $x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = 0$.

É (são) verdadeira(s)

53. (ITA/2018)

Se x é um número real que satisfaz $x^3 = x + 2$, então x^{10} é igual a

a) $5x^2 + 7x + 9$

b) $3x^2 + 6x + 8$

c) $13x^2 + 16x + 12$

d) $7x^2 + 5x + 9$

e) $9x^2 + 3x + 10$

54. (ITA/2017/Modificada)

Das afirmações:

I. Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de maneira única, na forma $2^{k-1}(2m-1)$, em que k e m são inteiros positivos

II. Existe um número inteiro primo p tal que $\sqrt{p}$ é um número racional

É (são) verdadeira(s)

55. (ITA/2014/Modificada)

Das afirmações:

I. Se $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

É (são) verdadeira(s):

56. (ITA/2013)

Seja $n > 6$ um inteiro positivo não divisível por 6. Se, na divisão de n^2 por 6, o quociente é um número ímpar, então o resto da divisão de n por 6 é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

57. (ITA/2012)
Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:
I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;
II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;
III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais,
É (são) sempre verdadeira(s)
a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas I e II.
e) I, II e III.

58. (ITA/2005)
O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é
a) 2499.
b) 2501.
c) 2500.
d) 3600.
e) 4900.

59. (ITA/2005)
Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:
a) $x \in]0, 2[$
b) x é racional
c) $\sqrt{2x}$ é irracional
d) x^2 é irracional
e) $x \in]2, 3[$

60. (ITA/2003)
O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:
a) 24
b) 36
c) 48
d) 54
e) 72

61. (ITA/2002)
Considere as seguintes afirmações sobre os números reais positivos:
I. Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.
II. Se $x > 4$ ou $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.

III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.
Então, destas é (são) verdadeira(s)
a) Apenas I.
b) Apenas I e II.
c) Apenas II e III.
d) Apenas I e III.
e) Todas.

62. (IME/2020)
Seja U o conjunto dos 1000 primeiros números naturais maiores que zero. Considere que zeros à esquerda são omitidos. Seja $A \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 10 tem o algarismo mais significativo igual a 1; e $B \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2. As cardinalidades de $A - B$ e de $B - A$ são, respectivamente:
a) 46 e 277
b) 45 e 275
c) 44 e 275
d) 45 e 277
e) 46 e 275
Observação:
cardinalidade de um conjunto finito é o número de elementos distintos desse conjunto.

63. (IME/2020)
O menor número natural ímpar que possui o mesmo número de divisores que 1800 está no intervalo:
a) $[1, 16000]$
b) $[16001, 17000]$
c) $[17001, 18000]$
d) $[18001, 19000]$
e) $[19001, \infty)$

64. (IME/2020)
Um inteiro positivo é escrito em cada uma das seis faces de um cubo. Para cada vértice, é calculado o produto dos números escritos nas três faces adjacentes. Se a soma desses produtos é 1105, a soma dos seis números das faces é:
a) 22
b) 35
c) 40
d) 42
e) 50

65. (IME/2019)
Aristeu e seu irmão nasceram nos séculos XX e XXI, respectivamente. Neste ano, 2018, os dois já fizeram aniversário e a idade de cada um deles é a soma dos três últimos dígitos do ano de seu respectivo nascimento. Qual é a soma das idades dos dois irmãos?

a) 23
b) 26
c) 29
d) 32
e) 39

66. (IME/2018)
Se X e Y são números naturais tais que $X^2 - Y^2 = 2017$, o valor de $X^2 + Y^2$ é:
a) 2008010
b) 2012061
c) 2034145
d) 2044145
e) 2052061

67. (IME/2018)
Determine todos os números primos p, q e r tais que $35p + 11pq + qr = pqr$.

68. (IME/2018)
A soma dos algarismos de X com a soma dos quadrados dos algarismos de X é igual a X. Sabe-se que X é um número natural positivo. O menor X possível está no intervalo:
a) $(0, 25]$
b) $(25, 50]$
c) $(50, 75]$
d) $(75, 100]$
e) $(100, 125]$

69. (IME/2018)
Seja x um número natural maior que 2. Se a representação de um numeral N na base x é 1041 e na base $x - 1$ é 1431, então a sua representação na base binária é:
a) 10001111
b) 11011011
c) 11100111
d) 11011110
e) 11110001

70. (IME/2016)
Sabendo-se que m e n são inteiros positivos tais que $3^m + 14400 = n^2$, determine o resto da divisão de $m + n$ por 5.
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

e) 4

71. (IME/2016)
Seja a equação $n^2 - 7m^2 = (5m - 2n)^2 + 49$. Determine todos os pares inteiros (m, n) que satisfazem a esta equação.

72. (IME/2015)
Quantos restos diferentes são possíveis da divisão de n^2 por 11, sendo n um número natural?
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

73. (IME/2012)
Sejam r e $s \in \mathbb{Z}$ (inteiro). Prove que $(2r + 3s)$ é múltiplo de 17 se e somente se $(9r + 5s)$ é múltiplo de 17.

74. (IME/2010)
Seja a equação $p^n + 144 = q^2$, onde n e q são números inteiros positivos e p é um número primo. Determine os possíveis valores de n, p e q.

75. (IME/2001)
Provar que para qualquer número inteiro k, os números k e k^5 terminam sempre com o mesmo algarismo das unidades.

8. Gabarito

19. a) $(x - 4y)(x + 2y)$
b) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$
c) $(c - a + b)(c + a - b)$
d) $\left(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab\right)\left(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab\right)$
e) $(x^2 + 1)\left(x^2 + 1 - \sqrt{3}x\right)\left(x^2 + 1 + \sqrt{3}x\right)$
f) $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
g) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
h) $(a - 1)(a^3 + a + 1)$
i) $(a - 3)^2$

j) $(4a-b)(4a+b)(a-b)(a+b)$
k) $[(a-b)^2+b^2][(a+b)^2+b^2]$
l) $(x+y)(a-b)^2[1+(x+y)^2(a-b)]$
m) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)^2$
n) $3(y-z)(x-y)(z-x)$
o) $2x^6(x-2)(x+2)(x^2+4)\left(x^2+4-\sqrt{8}x\right)\left(x^2+4+\sqrt{8}x\right)$
p) $(x^3+4)(x-1)(x^2+x+1)$
q) $(z-y)(-xy+w)$
r) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

20. $a \in \{-19,-11,-7,-5,-4,-2,-1,1,5,13\}$
21. a) $\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$
b) $\frac{a(a-2)}{(a-1)(a+1)}$
c) $a^6+a^3b^3+b^6$
d) -1
22. Demonstração.
23. Prova por PIF.
24. a
25. c
26. d
27. b
28. e
29. b
30. d
31. e
32. c
33. c
34. d
35. c
36. d
37. c
38. a
39. d
40. b
41. d
42. c
43. d
44. c
45. a
46. a
47. e
48. c
49. $S=\{2\}$.
50. $n=285714$
51. I e II.

52. I.
53. c
54. I. V II. F
55. I. F II. F
56. c
57. e
58. b
59. b
60. c
61. d
62. e
63. c
64. b
65. d
66. c
67. $(p, q, r) = (17,7,17)\ e\ (p, q, r) = (19,5,19)$
68. d
69. e
70. e
71. $(m, n) \in \{(37, 99\}; (-37, -99); (13,51); (-13, -51); (7,21); (-7, -21)\}$
72. d
73. Demonstração
74. $(p, n, q) \in \{(5, 2, 13); (2, 8, 20); (3, 4, 15)\}$
75. Demonstração

9. Lista de Questões Resolvidas e Comentadas

19. (Exercício de Fixação)

Fatore as seguintes expressões:

a) $x^2 + y^2 - 9y^2 - 2xy$
b) $x^6 - y^6$
c) $2ab - a^2 - b^2 + c^2$
d) $a^4 + b^4$
e) $x^6 + 1$
f) $x^6 - 1$
g) $x^4 + x^2 + 1$
h) $a^4 - a^3 + a^2 - 1$
i) $a^2 - 6a + 9$
j) $16a^4 - 17a^2b^2 + b^4$
k) $a^4 + 4b^4$
l) $(x + y)(a^2 - 2ab + b^2) + (x + y)^3(a - b)^3$
m) $a^5 + b^5 - ab^4 - a^4b$
n) $(x - y)^3 + (y - z)^3 - (x - z)^3$
o) $2x^{14} - 512x^6$

p) $x^6 + 3x^3 - 4$
q) $xy^2 + w(z - y) - xyz$
r) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Comentários

a) $x^2 + y^2 - 9y^2 - 2xy$

Organizando os termos:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 9y^2$$
$$(x^2 - 2xy + y^2) - 9y^2$$
$$(x - y)^2 - 9y^2$$

Vamos usar $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$[(x - y) - 3y][(x - y) + 3y]$$
$$(x - y - 3y)(x - y + 3y)$$
$$(x - 4y)(x + 2y)$$

b) $x^6 - y^6$

Vamos usar $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$:

$$(x^2 - y^2)[(x^2)^2 + x^2y^2 + (y^2)^2]$$
$$(x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$$
$$(x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - x^2y^2)$$
$$(x - y)(x + y)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2)$$
$$(x - y)(x + y)[(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2]$$
$$(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$$

c) $2ab - a^2 - b^2 + c^2$

Vamos organizar os termos:

$$c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$
$$c^2 - (a - b)^2$$
$$[c - (a - b)][c + (a - b)]$$
$$(c - a + b)(c + a - b)$$

d) $a^4 + b^4$

$$a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2$$
$$(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - \left(\sqrt{2}ab\right)^2$$
$$(a^2 + b^2)^2 - \left(\sqrt{2}ab\right)^2$$
$$(a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$$

e) $x^6 + 1$

Note que $x^6 + 1 = x^6 + 1^6$. Sabendo que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, temos:

$$x^6 + 1^6$$
$$(x^2)^3 + (1^2)^3$$
$$(x^2 + 1^2)((x^2)^2 - x^2 1^2 + (1^2)^2)$$
$$(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$
$$(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1 - 2x^2 + 2x^2)$$
$$(x^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2)$$
$$(x^2 + 1)[(x^2 + 1)^2 - 3x^2]$$

$$(x^2+1)\left[(x^2+1)^2-(\sqrt{3}x)^2\right]$$
$$(x^2+1)\left(x^2+1-\sqrt{3}x\right)\left(x^2+1+\sqrt{3}x\right)$$

f) x^6-1

Vamos fatorar usando: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$x^6-1^6$$
$$(x^2)^3-(1^2)^3$$
$$(x^2-1^2)((x^2)^2+x^2 1^2+(1^2)^2)$$
$$(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$$
$$(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1+x^2-x^2)$$
$$(x-1)(x+1)(x^4+2x^2+1-x^2)$$
$$(x-1)(x+1)[(x^2+1)^2-x^2]$$
$$(x-1)(x+1)(x^2+1-x)(x^2+1+x)$$
$$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

g) x^4+x^2+1

$$x^4+x^2+1+x^2-x^2$$
$$x^4+2x^2+1-x^2$$
$$(x^2+1)^2-x^2$$
$$(x^2+1-x)(x^2+1+x)$$
$$(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

h) $a^4-a^3+a^2-1$

$$a^3(a-1)+(a-1)(a+1)$$
$$(a-1)[a^3+(a+1)]$$
$$(a-1)(a^3+a+1)$$

i) a^2-6a+9

$$(a-3)^2$$

j) $16a^4-17a^2b^2+b^4$

$$16a^4-16a^2b^2-a^2b^2+b^4$$
$$16a^2(a^2-b^2)-b^2(a^2-b^2)$$
$$(16a^2-b^2)(a^2-b^2)$$
$$(4a-b)(4a+b)(a-b)(a+b)$$

k) a^4+4b^4

$$a^4+4b^4+4a^2b^2-4a^2b^2$$
$$(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$$
$$(a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)$$
$$[(a-b)^2+b^2][(a+b)^2+b^2]$$

l) $(x+y)(a^2-2ab+b^2)+(x+y)^3(a-b)^3$

$$(x+y)(a-b)^2+(x+y)^3(a-b)^3$$
$$(x+y)(a-b)^2[1+(x+y)^2(a-b)]$$

m) $a^5+b^5-ab^4-a^4b$

$$a^5-ab^4+b^5-a^4b$$
$$a(a^4-b^4)+b(b^4-a^4)$$
$$a(a^4-b^4)-b(a^4-b^4)$$
$$(a^4-b^4)(a-b)$$
$$(a^2+b^2)(a^2-b^2)(a-b)$$
$$(a^2+b^2)(a+b)(a-b)(a-b)$$
$$(a^2+b^2)(a+b)(a-b)^2$$

n) $(x-y)^3+(y-z)^3-(x-z)^3$

$$(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$$
$$(y-z)^3=y^3-z^3-3yz(y-z)$$
$$(x-z)^3=x^3-z^3-3xz(x-z)$$
$$(x-y)^3+(y-z)^3-(x-z)^3$$
$$\left(x^3-y^3-3xy(x-y)\right)+\left(y^3-z^3-3yz(y-z)\right)-\left(x^3-z^3-3xz(x-z)\right)$$
$$x^3-y^3-3x^2y+3xy^2+y^3-z^3-3y^2z+3yz^2-(x^3-z^3-3x^2z+3xz^2)$$
$$x^3-y^3-3x^2y+3xy^2+y^3-z^3-3y^2z+3yz^2-x^3+z^3+3x^2z-3xz^2$$
$$-3x^2y+3xy^2-3y^2z+3yz^2+3x^2z-3xz^2$$
$$3(-x^2y+xy^2-y^2z+yz^2+x^2z-xz^2)$$
$$3(-x^2y+x^2z+xy^2-xz^2-y^2z+yz^2)$$
$$3[-x^2(y-z)+x(y^2-z^2)-yz(y-z)]$$
$$3[-x^2(y-z)+x(y-z)(y+z)-yz(y-z)]$$
$$3(y-z)[-x^2+x(y+z)-yz]$$
$$3(y-z)(-x^2+xy+xz-yz)$$
$$3(y-z)[-x(x-y)+z(x-y)]$$
$$3(y-z)(x-y)(z-x)$$

Há um modo mais rápido de resolver esse problema, veja:

$$(x-y)^3+(y-z)^3\underbrace{-(x-z)^3}_{+[-(x-z)]^3}=(x-y)^3+(y-z)^3+(-x+z)^3$$

Note que se fizermos $a=x-y, b=y-z$ e $c=-x+z$, obtemos:

$$a+b+c=x-y+y-z-x+z=0$$

Assim, podemos usar a seguinte fatoração:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

Dado que $a+b+c=0$, temos:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$
$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

Portanto:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(-x+z)^3=3(x-y)(y-z)(-x+z)$$

o) $2x^{14}-512x^6$

$$2x^6(x^8-256)$$
$$2x^6(x^8-2^8)$$
$$2x^6(x^4-2^4)(x^4+2^4)$$
$$2x^6(x^2-2^2)(x^2+2^2)(x^4+2^4)$$

$$2x^6(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$$
$$2x^6(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16+8x^2-8x^2)$$
$$2x^6(x-2)(x+2)(x^2+4)\left[(x^2+4)^2-\left(\sqrt{8}x\right)^2\right]$$
$$2x^6(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^2+4-\sqrt{8}x)(x^2+4+\sqrt{8}x)$$

p) x^6+3x^3-4

$$x^6+3x^3-4+x^3-x^3$$
$$x^6-x^3+4x^3-4$$
$$x^3(x^3-1)+4(x^3-1)$$
$$(x^3+4)(x^3-1)$$
$$(x^3+4)(x-1)(x^2+x+1)$$

q) $xy^2+w(z-y)-xyz$

$$-xyz+xy^2+w(z-y)$$
$$-xy(z-y)+w(z-y)$$
$$(z-y)(-xy+w)$$

r) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc+3a^2b-3a^2b+3ab^2-3ab^2$$
$$(a+b)^3+c^3-3abc-3a^2b-3ab^2$$
$$(a+b)^3+c^3-3ab(c+a+b)$$
$$(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)$$
$$(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$$
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

Gabarito: a) $(\boldsymbol{x-4y})(\boldsymbol{x+2y})$
b) $(\boldsymbol{x-y})(\boldsymbol{x+y})(\boldsymbol{x^2+y^2-xy})(\boldsymbol{x^2+y^2+xy})$
c) $(\boldsymbol{c-a+b})(\boldsymbol{c+a-b})$
d) $\left(\boldsymbol{a^2+b^2-\sqrt{2}ab}\right)\left(\boldsymbol{a^2+b^2+\sqrt{2}ab}\right)$
e) $(\boldsymbol{x^2+1})\left(\boldsymbol{x^2+1-\sqrt{3}x}\right)\left(\boldsymbol{x^2+1+\sqrt{3}x}\right)$
f) $(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x+1})(\boldsymbol{x^2-x+1})(\boldsymbol{x^2+x+1})$
g) $(\boldsymbol{x^2-x+1})(\boldsymbol{x^2+x+1})$
h) $(\boldsymbol{a-1})(\boldsymbol{a^3+a+1})$**i)** $(\boldsymbol{a-3})^2$
j) $(\boldsymbol{4a-b})(\boldsymbol{4a+b})(\boldsymbol{a-b})(\boldsymbol{a+b})$
k) $[(\boldsymbol{a-b})^2+\boldsymbol{b^2}][(\boldsymbol{a+b})^2+\boldsymbol{b^2}]$
l) $(\boldsymbol{x+y})(\boldsymbol{a-b})^2[\boldsymbol{1}+(\boldsymbol{x+y})^2(\boldsymbol{a-b})]$
m) $(\boldsymbol{a^2+b^2})(\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{a-b})^2$
n) $\boldsymbol{3}(\boldsymbol{y-z})(\boldsymbol{x-y})(\boldsymbol{z-x})$
o) $\boldsymbol{2x^6}(\boldsymbol{x-2})(\boldsymbol{x+2})(\boldsymbol{x^2+4})\left(\boldsymbol{x^2+4-\sqrt{8}x}\right)\left(\boldsymbol{x^2+4+\sqrt{8}x}\right)$
p) $(\boldsymbol{x^3+4})(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x^2+x+1})$
q) $(\boldsymbol{z-y})(\boldsymbol{-xy+w})$
r) $(\boldsymbol{a+b+c})(\boldsymbol{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc})$

---

20. (Exercício de Fixação)

Para quais valores de $a \in \mathbb{Z}$, a fração $\frac{a^2+7}{a+3}$ é um número inteiro?

Comentários

Devemos simplificar a fração para encontrar um número que seja mais fácil de ser analisado.

Vamos tentar remover o termo a^2 do numerador da fração.

Para isso, podemos modelar o numerador para aparecer $(a+3)^2$ e, assim, simplificamos com o denominador $(a+3)$:

Vamos ver os termos que aparecem em $(a+3)^2$:

$$(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$$

Assim, precisamos adicionar $6a + 9$ no numerador:

$$\frac{a^2 + 7 + (6a+9) - (6a+9)}{a+3}$$

Organizando os termos:

$$\frac{a^2 + 6a + 9 - 6a - 9 + 7}{a+3}$$

$$\frac{(a^2 + 6a + 9) - 6a - 2}{a+3}$$

Fatorando $a^2 + 6a + 9$:

$$\frac{(a+3)^2 - (6a+2)}{a+3}$$

Simplificando:

$$a + 3 - \frac{(6a+2)}{a+3}$$

Podemos usar a mesma ideia para remover o elemento $6a$ da fração, vamos multiplicar $(a+3)$ por 6:

$$6(a+3) = 6a + 18$$

Devemos adicionar 18 no numerador:

$$a + 3 - \frac{(6a + 2 + 18 - 18)}{a+3}$$

$$a + 3 - \frac{(6a + 18 - 16)}{a+3}$$

$$a + 3 - \frac{[6(a+3) - 16]}{a+3}$$

Simplificando $a + 3$:

$$a + 3 - 6 - \frac{(-16)}{a+3}$$

$$a - 3 + \frac{16}{a+3}$$

Logo, precisamos encontrar os valores de a inteiros que tornem $\frac{16}{a+3}$ um número inteiro.

16 deve ser divisível por $a + 3$.

Vamos fatorar 16:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Os valores inteiros que dividem 16 são os números positivos e negativos que podem ser formados pelos fatores de 16: $\pm 1\ (2^0), \pm 2\ (2^1), \pm 4\ (2^2), \pm 8\ (2^3), \pm 16\ (2^4)$.

Para descobrir os valores de a, devemos igualar $a+3$ a $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$. Vamos usar a tabela:

$a+3$	a
1	-2
-1	-4
2	-1
-2	-5
4	1
-4	-7
8	5
-8	-11
16	13
-16	-19

∴Os valores de a que satisfazem as condições do problema estão listados na coluna a.

Gabarito: $\boldsymbol{a = \{-19, -11, -7, -5, -4, -2, -1, 1, 5, 13\}}$

---

21. (Fixação)

Simplifique:

a) $\frac{a^6+2a^3b^3+b^6}{a^6-b^6}$

b) $\frac{a^2}{a^2-1} - \frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1}$

c) $\frac{a^9-b^9}{a^3-b^3}$

d) $\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(a+c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}$

Comentários

a) $\frac{a^6+2a^3b^3+b^6}{a^6-b^6}$

$$a \neq b$$
$$\frac{a^6+2a^3b^3+b^6}{a^6-b^6}$$
$$\frac{[(a^3)^2+2a^3b^3+(b^3)^2]}{[(a^3)^2-(b^3)^2]}$$
$$\frac{(a^3+b^3)^2}{(a^3-b^3)(a^3+b^3)}$$
$$\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$$
$$\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

b) $\frac{a^2}{a^2-1}-\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}$

$$a \neq \pm 1$$
$$\frac{a^2}{a^2-1}-\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}$$
$$\frac{a^2-a(a+1)+a(a-1)}{a^2-1}$$
$$\frac{a^2-a^2-a+a^2-a}{(a-1)(a+1)}$$
$$\frac{a^2-2a}{(a-1)(a+1)}$$
$$\frac{a(a-2)}{(a-1)(a+1)}$$

c) $\frac{a^9-b^9}{a^3-b^3}$

$$a \neq b$$
$$\frac{a^9-b^9}{a^3-b^3}$$
$$\frac{(a^3-b^3)(a^6+a^3b^3+b^6)}{(a^3-b^3)}$$
$$a^6+a^3b^3+b^6$$

d) $\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(a+c)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}$

$$\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(a+c)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}$$
$$\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(a+c)}{(b-c)(-1)(a-b)}+\frac{c(a+b)}{(-1)(a-c)(-1)(b-c)}$$
$$\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}-\frac{b(a+c)}{(b-c)(a-b)}+\frac{c(a+b)}{(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{a(b+c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}-\frac{b(a+c)(a-c)}{(b-c)(a-b)(a-c)}+\frac{c(a+b)(a-b)}{(a-c)(b-c)(a-b)}$$
$$\frac{a(b+c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}-\frac{b(a+c)(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}+\frac{c(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{a(b^2-c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}-\frac{b(a^2-c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}+\frac{c(a^2-b^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{a(b^2-c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}+\frac{b(c^2-a^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}+\frac{c(a^2-b^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{ab^2-ac^2+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{ab^2-ac^2+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{ab^2-b^2c-ac^2+a^2c+bc^2-a^2b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{b^2(a-c)-ac(c-a)+b(c^2-a^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{b^2(a-c)+ac(a-c)-b(a^2-c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{b^2(a-c)+ac(a-c)-b(a-c)(a+c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{(a-c)[b^2+ac-b(a+c)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{(a-c)[b^2+ac-ab-bc]}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{(a-c)(-ab+b^2+ac-bc)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{(a-c)[(-b)(a-b)+c(a-b)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{(a-c)(a-b)(c-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$\frac{c-b}{b-c}$$
$$\frac{(-1)(b-c)}{b-c}=-1$$

Gabarito: a) $\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$ **b)** $\frac{a(a-2)}{(a-1)(a+1)}$ **c)** $a^6+a^3b^3+b^6$ **d)** -1

---

22. (Fixação)

Prove que as seguintes afirmações são verdadeiras:

a) $(n^5-n)\ \vdots\ 30$

b) $(2n^3+3n^2+n)\ \vdots\ 6$

Comentários

a) $(n^5-n)\ \vdots\ 30$

Para provar que $(n^5 - n)$ é divisível por 30, devemos provar que ele é divisível por 2, 3 e 5, já que $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
Vamos fatorar $(n^5 - n)$:

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

Então, devemos provar que $n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ é divisível por 2, 3 e 5.
Vamos analisar sua divisibilidade por 2. Devemos provar que para $n = 2k$ e $n = 2k + 1$, ele é divisível por 2. Para isso, vamos substituir $n = 2k\ e\ n = 2k + 1$ e fazer surgir o fator 2 na expressão.

$$n = 2k$$
$$n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$
$$2k(2k-1)(2k+1)((2k)^2+1)$$

Perceba a presença do fator 2 na expressão.

$$n = 2k + 1$$
$$n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$
$$(2k+1)\big((2k+1)-1\big)\big((2k+1)+1\big)((2k+1)^2+1)$$
$$(2k+1)(2k)(2k+2)((2k+1)^2+1)$$

Agora, vamos analisar sua divisibilidade por 3. Devemos substituir $n = 3k, n = 3k + 1, n = 3k + 2$ e encontrar o fator 3 na expressão.

$$n = 3k$$
$$n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$
$$3k(3k-1)(3k+1)((3k)^2+1)$$

$$n = 3k + 1$$
$$n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$
$$(3k+1)\big((3k+1)-1\big)\big((3k+1)+1\big)((3k+1)^2+1)$$
$$(3k+1)(3k)(3k+2)((3k+1)^2+1)$$

$$n = 3k + 2$$
$$n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$
$$(3k+2)\big((3k+2)-1\big)\big((3k+2)+1\big)((3k+2)^2+1)$$
$$(3k+2)(3k+1)(3k+3)((3k+2)^2+1)$$
$$(3k+2)(3k+1)3(k+1)((3k+2)^2+1)$$

Por último, falta analisar sua divisibilidade por 5. Vamos substituir $n = 5k, n = 5k + 1, n = 5k + 2, n = 5k + 3$ e $n = 5k + 4$ e encontrar o fator 5 na expressão.

$$n = 5k$$
$$n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$
$$5k(5k-1)(5k+1)((5k)^2+1)$$

$$n = 5k + 1$$
$$n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

$$(5k+1)\big((5k+1)-1\big)\big((5k+1)+1\big)((5k+1)^2+1)$$
$$(5k+1)(5k)(5k+2)((5k+1)^2+1)$$

$$n=5k+2$$
$$n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$
$$(5k+2)\big((5k+2)-1\big)\big((5k+2)+1\big)((5k+2)^2+1)$$
$$(5k+2)(5k+1)(5k+3)((5k)^2+20k+4+1)$$
$$(5k+2)(5k+1)(5k+3)(25k^2+20k+5)$$
$$(5k+2)(5k+1)(5k+3)5(5k^2+4k+1)$$

$$n=5k+3$$
$$n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$
$$(5k+3)\big((5k+3)-1\big)\big((5k+3)+1\big)((5k+3)^2+1)$$
$$(5k+3)(5k+2)(5k+4)((5k)^2+30k+9+1)$$
$$(5k+3)(5k+2)(5k+4)(25k^2+30k+10)$$
$$(5k+3)(5k+2)(5k+4)5(5k^2+6k+2)$$

$$n=5k+4$$
$$n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$
$$(5k+4)\big((5k+4)-1\big)\big((5k+4)+1\big)((5k+4)^2+1)$$
$$(5k+4)(5k+3)(5k+5)((5k+4)^2+1)$$
$$(5k+4)(5k+3)5(k+1)((5k+4)^2+1)$$

Fizemos surgir os fatores $2, 3$ e 5 na expressão, logo ela é divisível pelos três ao mesmo tempo:

$$(n^5-n) \vdots 2\cdot 3\cdot 5$$
$$\therefore (n^5-n) \vdots 30$$

b) $(2n^3+3n^2+n) \vdots 6$

Para provar que essa expressão é divisível por 6, devemos provar sua divisibilidade para 2 e 3.

Primeiro, vamos fatorar a expressão $2n^3+3n^2+n$:

$$2n^3+3n^2+n$$
$$n(2n^2+3n+1)$$
$$n(2n^2+2n+n+1)$$
$$n[2n(n+1)+(n+1)]$$
$$n(2n+1)(n+1)$$

Agora, iremos analisar sua divisibilidade por 2.

$$n=2k$$
$$n(2n+1)(n+1)$$
$$2k(2(2k)+1)(2k+1)$$

$$n=2k+1$$
$$n(2n+1)(n+1)$$

$$(2k+1)(2(2k+1)+1)\big((2k+1)+1\big)$$
$$(2k+1)(4k+2+1)(2k+2)$$
$$(2k+1)(4k+3)2(k+1)$$

Por último, vamos analisar sua divisibilidade por 3.

$$n=3k$$
$$n(2n+1)(n+1)$$
$$3k(2(3k)+1)(3k+1)$$

$$n=3k+1$$
$$n(2n+1)(n+1)$$
$$(3k+1)(2(3k+1)+1)\big((3k+1)+1\big)$$
$$(3k+1)(6k+2+1)(3k+2)$$
$$(3k+1)(6k+3)(3k+2)$$
$$(3k+1)3(2k+1)(3k+2)$$

$$n=3k+2$$
$$n(2n+1)(n+1)$$
$$(3k+2)(2(3k+2)+1)\big((3k+2)+1\big)$$
$$(3k+2)(6k+4+1)(3k+3)$$
$$(3k+2)(6k+5)3(k+1)$$

Gabarito: Demonstração.

---

23. (Fixação)

Use o PIF para demonstrar as seguintes afirmações:

a) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

b) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

c) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \forall n\in\mathbb{N}^*$

d) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right], \forall n\in\mathbb{N}^*$

e) $n(n+1)(n+2)\ \vdots\ 6, \forall n\in\mathbb{N}$

f) $n^2+n\ \vdots\ 2, \forall n\in\mathbb{N}$

g) $2n\geq n+1, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Comentários

a) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Para provar por PIF, devemos seguir duas etapas:

1) $P(n_0)$ é válida. Para algum $n_0\in\mathbb{N}$.

2) Para $K\in\mathbb{N}$, se $P(K)$ é válida, então $P(K+1)$ também é válida.

Vamos verificar a primeira etapa:

1) $n=1\Rightarrow 1=1\cdot\frac{1+1}{2}=1$, logo a equação é válida para $n=1$.

2) Vamos supor válida para $k\in\mathbb{N}$:

Hipótese: $k\in\mathbb{N}, 1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

Então, devemos provar que é válida também para $k+1$:

Tese: $1+2+3+\cdots+k+1=\frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Para provar a teste, vamos usar a hipótese e somar $k+1$ nos dois lados da igualdade:

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

Vamos fatorar o lado direito da igualdade e ver se chegamos à tese:

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Essa é a nossa tese.

Partindo da hipótese válida para $k\in\mathbb{N}$, provamos que ela também é válida para $k+1$.

b) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Vamos primeiro verificar a validade da propriedade.

1) $n=1\Rightarrow 1^2=1\cdot\frac{(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{2\cdot 3}{6}=1$

Generalizando o resultado, vamos criar nossa hipótese e a tese.

2) Hipótese: Para $k\in\mathbb{N}$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ é válida.

Tese: Também é válida para $k+1\in\mathbb{N}\Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Da hipótese, temos:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Somando $(k+1)^2$ em ambos os lados da equação:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

Vamos simplificar $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+4k+3k+6)}{6}$$

$$\frac{(k+1)\left(2k(k+2)+3(k+2)\right)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\therefore 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Essa é a nossa tese, logo está provada por indução que ela é válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

1) $n=1 \Rightarrow 1^3=\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 \Rightarrow 1=1$

2) Hipótese: Para $k \in \mathbb{N}$, $1^3+2^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ é válida.

Tese: Também é válida para $k+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$

Da hipótese, temos:

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

Somando $(k+1)^3$ nos dois lados da equação:

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$

Vamos simplificar $\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$:

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4(k+1)^3}{4}$$

$$\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$\frac{(k+1)^2\left(k^2+4(k+1)\right)}{4}$$

$$\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

$$\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$\therefore 1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

Essa é a nossa tese, portanto está provada por indução.

d) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

1) $n=1 \Rightarrow \frac{1}{1(1+1)(1+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(1+1)(1+2)}\right]$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{12}\right)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

2) Hipótese: Para $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

Tese: Para $k+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right]$

Da hipótese, temos:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

Somando $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ nos dois lados da equação:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

Vamos simplificar $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{(k+3)}{2(k+1)(k+2)(k+3)}+\frac{2}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{-(k+3)+2}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{-k-3+2}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{-k-1}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{-(k+1)}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{-1}{2(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$\therefore \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right]$$

Essa é a nossa tese, logo está provada por indução.

e) $n(n+1)(n+2) \vdots 6$

1) $n=0 \Rightarrow 0(0+1)(0+2)=0 \vdots 6$, logo é válida para $n=0$.

2) Hipótese: $k \in \mathbb{N} \Rightarrow k(k+1)(k+2) \vdots 6$ é válida.

Tese: $k+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow (k+1)(k+2)(k+3) \vdots 6$

$$(k+1)(k+2)(k+3)$$

Aplicando a distributiva no termo $(k+3)$:

$$k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)$$

Pela hipótese, $k(k+1)(k+2)$ é divisível por 6.

Resta provar que $3(k+1)(k+2)$ é divisível por 6. Para isso, precisamos provar que ela é divisível por 2 e por 3. Já sabemos que ela é divisível por 3 devido à presença do fator 3 na expressão. Então, devemos provar que ela é divisível por 2.

Perceba que $(k+1)(k+2)$ é o produto de dois números consecutivos. Esse produto será resultado de um número par multiplicado por um número ímpar. Nos números pares sempre teremos a presença do fator 2. Logo, esse produto é divisível por 2.

$$3(k+1)(k+2) \vdots 6$$

$\therefore (k+1)(k+2)(k+3) \vdots 6$ também é válida

Portanto está provada a propriedade por indução.

f) $n^2 + n \vdots 2$

Vamos fatorar $n^2 + n$.

$$n^2 + n = n(n+1)$$

1) $n = 0 \Rightarrow 0(0+1) = 0 \vdots 2$, a propriedade é válida para $n = 0$.

2) Hipótese: $k \in \mathbb{N}$, $k(k+1) \vdots 2$ é válida.

Tese: $k+1 \in \mathbb{N}$, $(k+1)(k+2) \vdots 2$ também é válida.

Vamos analisar $(k+1)(k+2)$:

$$(k+1)(k+2) = (k+1)k + (k+1)2$$
$$k(k+1) + 2(k+1)$$

$2(k+1)$ é divisível por 2 já que possui 2 como fator.

$k(k+1)$ é divisível por 2 pela hipótese.

Portanto $(k+1)(k+2)$ é divisível por 2. Está provada a propriedade por indução.

g) $2n \geq n + 1$

1) $n = 1 \Rightarrow 2 \geq 2$. Logo, ela é válida para $n = 1$.

2) Hipótese: $k \in \mathbb{N}$, $2k \geq k + 1$ é válida para k.

Tese: $2(k+1) \geq k + 2$ é válida para $k + 1$.

Da hipótese, temos:

$$2k \geq k + 1$$

Pela propriedade da translação, podemos somar 1 nos dois lados da desigualdade:

$$2k + 1 \geq k + 1 + 1$$
$$2k + 1 \geq k + 2$$

Mas $2(k+1) = 2k + 2 > 2k + 1$

Pela propriedade da transitividade:

$$2(k+1) > 2k + 1 \; e \; 2k + 1 \geq k + 2 \rightarrow 2(k+1) \geq k + 2$$

$\therefore$Da hipótese chegamos à tese e está provada a indução.

Gabarito: Prova por PIF.

24. (AFA/2018)

Na reta dos números reais abaixo, estão representados os números m, n e p.

Analise as proposições a seguir e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).

( ) $\sqrt{\frac{m-n}{p}}$ não é um número real.

( ) $(p+m)$ pode ser um número inteiro.

( ) $\frac{p}{n}$ é, necessariamente, um número racional.

A sequência correta é

a) V-V-F

b) F-V-V

c) F-F-F

d) V-F-V

Comentários

Analisando cada proposição:

I. $\sqrt{\frac{m-n}{p}}$ não é um número real.

Pela reta dos reais, podemos ver que $m < n$, logo:

$$m - n < 0$$

Como $1 < p < 2$, temos que p é positivo, ou seja,

$$\sqrt{\frac{m-n}{p}} \text{ é raiz quadrada de um número negativo}$$

Assim, esse número não é real. Portanto, verdadeira.

II. $(p+m)$ pode ser um número inteiro.

Podemos supor $m = -1{,}2$ e $p = 1{,}2$ e, assim, $p + m = 1{,}2 - 1{,}2 = 0 \in \mathbb{Z}$. Logo, proposição verdadeira.

III. $\frac{p}{n}$ é, necessariamente, um número racional.

Podemos supor $p = \sqrt{2}$ e $n = -0{,}2$ e, assim,

$$\frac{p}{n} = \frac{\sqrt{2}}{-0{,}2} = -5\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

Logo, esse número pode ser irracional. Portanto, falsa.

Gabarito: “a”

---

25. (AFA/2017)

Sejam os números reais

$$a = \frac{\sqrt{(-1)^2} \cdot 0{,}1222\ldots}{(1{,}2)^{-1}}$$

$b =$ comprimento de uma circunferência de raio 1

$c = \sqrt{12} \cdot \sqrt{90} \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{147}$

Sendo $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ os conjuntos numéricos, assinale a alternativa FALSA.

a) $\{a, c\} \subset \mathbb{Q}$

b) $c \in (\mathbb{Z} \cap \mathbb{N})$

c) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \supset \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}$

d) $\{a, c\} \subset (\mathbb{R} \cap \mathbb{Q})$

Comentários

Calculando o valor numérico de a, b, c, obtemos:

$$a = \frac{\sqrt{(-1)^2} \cdot 0{,}1222\ldots}{(1{,}2)^{-1}} = \frac{\sqrt{1} \cdot \left(\frac{12-1}{90}\right)}{\left(\frac{12}{10}\right)^{-1}} = \frac{\left(\frac{11}{90}\right)}{\frac{10}{12}} = \frac{11}{90} \cdot \frac{12}{10} = \frac{11}{90} \cdot \frac{6}{5} = \frac{11}{15} \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{75}$$

O comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi R$, sendo R o raio da circunferência (ainda veremos na aula de geometria plana). Assim, temos:

$$b = 2\pi R = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

$$c = \sqrt{12} \cdot \sqrt{90} \cdot \sqrt{160} \cdot \sqrt{147} = \sqrt{3 \cdot 4} \cdot \sqrt{9 \cdot 10} \cdot \sqrt{16 \cdot 10} \cdot \sqrt{49 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow c = 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 4\sqrt{10} \cdot 7\sqrt{3} = 168 \cdot \sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{10}^2 = 168 \cdot 3 \cdot 10 = 5040$$

Analisando as alternativas:

a) $a = 11/75$ e $c = 5040$ são números racionais, logo, verdadeira.

b) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, como $c = 5040 \in \mathbb{N}$, temos alternativa verdadeira.

c) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é o conjunto dos irracionais e apenas b é irracional, logo, alternativa falsa.

d) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, como $a, c \in \mathbb{Q}$, temos alternativa verdadeira.

Gabarito: "c"

---

26. (AFA/2013)

Considere os seguintes conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e considere também os seguintes conjuntos:

$A = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z})$

$B = \mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$

$D = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N})$

Das alternativas abaixo, a que apresenta elementos que pertencem aos conjuntos $A, B\ e\ D$, nesta ordem, é

a) $-3; 0{,}5$ e $\frac{5}{2}$

b) $\sqrt{20}; \sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$

c) $-\sqrt{10};\ -5$ e 2

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}; 3$ e $2,\overline{31}$

Comentários

Vamos simplificar os conjuntos:

$$A = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) - (\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}) = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) - \mathbb{Z}$$

Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, temos:

$$A = \mathbb{I}$$

Logo, A é o conjunto dos irracionais.

$$B = \mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - \mathbb{N}) = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}_-$$

B é o conjunto dos racionais menos os inteiros negativos.

$$D = (\mathbb{N} \cup \mathbb{I}) \cup (\mathbb{Q} - \mathbb{N})$$

D pode possuir números naturais, números irracionais ou números racionais não naturais.

Analisando as alternativas:

a) $-3 \notin A$, pois -3 é racional, logo, falsa.

b) $\sqrt{10} \notin B$, pois $\sqrt{10}$ é irracional, logo, falsa.

c) $2 \notin D$, pois 2 é um número natural, logo, falsa.

d) $\frac{\sqrt{3}}{2} \in A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ é irracional}\right)$

$3 \in B$ (3 é racional positivo)

$2,\overline{31} \in D$ $\left(2,\overline{31} \text{ é racional, pois é dízima periódica}\right)$, logo, verdadeira.

Gabarito: “d”

---

27. (AFA/2011)

Se $\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, então

a) $\alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{N})$

b) α pode ser escrito na forma $\alpha = 2k, k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha \in [(\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})]$

d) $[(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{N})] \supset \alpha$

Comentários

Simplificando a expressão:

$$\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$$

$$\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(2^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}^{\,2}\right)}$$

$$\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4-\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

$$\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2-\sqrt{2}^{\,2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Analisando as alternativas:

a) $2 \in \mathbb{N}$, logo $\alpha \notin (\mathbb{R} - \mathbb{N})$. Falsa.

b) $\alpha = 2$, logo pode ser escrito na forma $2k, k \in \mathbb{Z}$. Verdadeira.

c) $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in \mathbb{Q}$, logo, $\alpha \notin [(\mathbb{Q} - \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})]$. Falsa.

d) Como $\alpha = 2 \in \mathbb{N}$, temos que $[(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{N})] \not\supset \alpha$. Falsa.

Gabarito: “b”

---

28. (Escola Naval/2018)

Quantos números inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou por 7 ?

a) 47

b) 142

c) 289

d) 333

e) 428

Comentários

Seja A e B o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 3 e por 7, respectivamente. Assim, queremos saber o número de elementos de $A \cup B$ e pelo princípio da inclusão e exclusão, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

A quantidade de números inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 3 é

$$n(A) = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$$

A quantidade de números inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 7 é

$$n(B) = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$$

A quantidade de números inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 3 e 7, ou seja, 21 é

$$n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 47$$

Portanto, $n(A \cup B)$ é

$$n(A \cup B) = 333 + 142 - 47 = 428$$

Gabarito: "e".

---

29. (Escola Naval/2013)

Considere uma fração cuja soma de seus termos é 7. Somando-se três unidades ao seu numerador e retirando-se três unidades de seu denominador, obtém-se a fração inversa da primeira. Qual é o denominador da nova fração?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários

De acordo com o enunciado, temos:

$$x = \frac{a}{b}$$

$$a + b = 7 \Rightarrow a = 7 - b \ \ (eq. I)$$

$$\frac{a+3}{b-3} = \frac{b}{a} \Rightarrow a(a+3) = b(b-3) \ \ (eq. II)$$

Substituindo a $eq. I$ na $eq. II$:

$$(7-b)(7-b+3) = b(b-3)$$

$$(7-b)(10-b) = b(b-3)$$

$$70 - 17b + b^2 = b^2 - 3b$$

$$70 = 14b \therefore \boxed{b = 5}$$

$$a = 7 - b = 7 - 5 = 2 \therefore \boxed{a = 2}$$

Portanto, o denominador da nova fração é $a = 2$.

Gabarito: "b".

---

30. (Escola Naval/2013)

Em um certo país, o imposto de renda é taxado da maneira a seguir:

1º) se a renda bruta anual é menor que $R\$ \ 10.000,00$ não é taxado;

2º) se a renda bruta anual é maior ou igual a $R\$ \ 10.000,00$ e menor que $R\$ \ 20.000,00$ é taxado em 10%;

3º) se a renda bruta anual é maior ou igual a $R\$ \ 20.000,00$ é taxado em 20%.

A pessoa que ganhou no ano $R\$ \ 17.370,00$ após ser descontado o imposto, tem duas possibilidades para o rendimento bruto. A diferença entre esses rendimentos é

a) $R\$ \ 17.370,00$

b) $R\$ \ 15.410,40$

c) $R\$ \ 3.840,50$

d) $R\$ \ 2.412,50$

e) $R\$ \ 1.206,60$

Comentários

As duas possibilidades para o rendimento são:

a) renda bruta anual x entre 10000 e 20000

Nesse caso, temos:

$$x - 10\%x = 17370 \Rightarrow x - \frac{10}{100}x = 17370 \Rightarrow x - 0{,}1x = 17370 \Rightarrow 0{,}9x = 17370$$

$$\therefore x = \frac{17370}{0{,}9} = 19300$$

b) renda bruta anual y maior ou igual a 20000

$$y - 20\%y = 17370 \Rightarrow y - \frac{20}{100}y = 17370 \Rightarrow 0{,}8y = 17370$$

$$\therefore y = 21712{,}50$$

Fazendo $y - x$:

$$y - x = 21712{,}50 - 19300 = 2412{,}50$$

Gabarito: "d"

---

31. (EFOMM/2019)

Numa equação, encontramos o valor de 884. Para chegar a esse resultado, somamos os quadrados de dois números pares, consecutivos e positivos. Determine o quociente da divisão do maior pelo menor

a) $0{,}87$.

b) $0{,}95$.

c) 1,03.

d) 1,07.

e) 1,10.

Comentários

Sejam x e $x+2$ os dois números pares, consecutivos e positivos. Somando os quadrados desses números e igualando a 884, obtemos:

$$x^2+(x+2)^2=884$$

$$x^2+x^2+4x+4=884$$

$$2x^2+4x+4-884=0$$

$$2x^2+4x-880=0$$

$$\Rightarrow x^2+2x-440=0$$

Resolvendo a equação e encontrando as raízes:

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1\cdot(-440)=4+1760=1764$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{1764}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 42}{2}\Rightarrow x_1=20\ ou\ x_2=-22$$

Como x é um número positivo, a única possibilidade é $x=20$. Assim, quociente da divisão do maior pelo menor é

$$\frac{22}{20}=\frac{11}{10}=1{,}1$$

Gabarito: "e".

---

32. (EFOMM/2018)

Um aluno do 1º ano da EFOMM fez compras em 5 lojas. Em cada loja, gastou metade do que possuía e pagou, após cada compra, $R\$\ 2{,}00$ de estacionamento. Se, após toda essa atividade, ainda ficou com $R\$\ 20{,}00$, a quantia que ele possuía inicialmente era de

a) $R\$\ 814{,}00$.

b) $R\$\ 804{,}00$.

c) $R\$\ 764{,}00$.

d) $R\$\ 714{,}00$.

e) $R\$\ 704{,}00$.

Comentários

O bizu nessa questão é fazer o processo inverso das compras. Usando os 20 reais que sobraram após todas as compras, somamos a esse valor R$ 2,00 e dobramos o valor obtido para saber quanto ele tinha antes de entrar na quinta loja, repetimos esse procedimento até se chegar no valor antes da primeira loja.

$$loja\ 5:(20+2)\cdot 2=44$$

$$loja\ 4: (44 + 2) \cdot 2 = 92$$
$$loja\ 3: (92 + 2) \cdot 2 = 188$$
$$loja\ 2: (188 + 2) \cdot 2 = 380$$
$$loja\ 1: (380 + 2) \cdot 2 = 764$$

Gabarito: "c"

33. (EFOMM/2018)

No "Baile dos FERAS", os organizadores notaram que a razão entre o número de homens e o número de mulheres presentes, no início do evento, era de $\frac{7}{10}$. Ao final do show, os organizadores observaram no local o aumento de 255 homens e a redução de 150 mulheres, de modo que a razão entre o número de homens e o número de mulheres presentes depois disso passou a ser $\frac{9}{10}$. Qual é o número total de pessoas que estiveram presentes em algum momento no show?

a) 3.954.

b) 3.570.

c) 3.315.

d) 1.950.

e) 1.365.

Comentários

Sejam h e m o número de homens e mulheres, respectivamente. De acordo com o enunciado:

Início do evento:

$$\frac{h}{m} = \frac{7}{10} \Rightarrow 10h = 7m \ \ (I)$$

Final do evento:

$$\frac{h + 255}{m - 150} = \frac{9}{10} \Rightarrow 10h + 2550 = 9m - 1350 \Rightarrow 10h = 9m - 3900 \ \ (II)$$

Usando (I) em (II):

$$7m = 9m - 3900 \Rightarrow 9m - 7m = 3900 \Rightarrow 2m = 3900 \Rightarrow m = 1950$$
$$\Rightarrow 10h = 7 \cdot 1950 \Rightarrow h = 1365$$

No início do evento, tínhamos $h + m = 1365 + 1950 = 3315$ pessoas.

No final do evento, tínhamos $(h + 255) + (m - 150) = 1365 + 255 + 1950 - 150 = 3420$ pessoas.

Gabarito: "c"

34. (EFOMM/2013)

Durante o Treinamento Físico Militar na Marinha, o uniforme usado é tênis branco, short azul e camiseta branca. Sabe-se que um determinado militar comprou um par de tênis, dois shortes e três camisetas por $R\$100{,}00$. E depois, dois pares de tênis, cinco shortes e oito camisetas por $R\$235{,}00$. Quanto, então, custaria para o militar um par de tênis, um short e uma camiseta?

a) $R\$50{,}00$.

b) $R\$55{,}00$.

c) $R\$60{,}00$.

d) $R\$65{,}00$.

e) $R\$70{,}00$.

Comentários

Sejam t, s, c o preço de um tênis branco, um short e uma camiseta branca, respectivamente. Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} t + 2s + 3c = 100 \\ 2t + 5s + 8c = 235 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + 2s = 100 - 3c \\ 2t + 5s = 235 - 8c \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -2:

$$\Rightarrow \begin{cases} -2t - 4s = -200 + 6c \\ \ \ 2t + 5s = 235 - 8c \end{cases}$$

Somando as duas equações para obter s:

$$s = 35 - 2c$$

Usando a primeira equação para obter t:

$$t = 100 - 3c - 2s = 100 - 3c - 2 \cdot (35 - 2c) = 30 + c$$

O preço de um par de tênis, um short e uma camiseta branca é:

$$t + s + c = (30 + c) + (35 - 2c) + c = 65$$

Gabarito: “d”

---

35. (EFOMM/2009)

Qual é o número inteiro cujo produto por 9 é um número natural composto apenas pelo algarismo 1?

a) 123459

b) 1234569

c) 12345679

d) 12345789

e) 123456789

Comentários

Queremos encontrar x tal que $x \cdot 9 = 11111\ldots$, para isso, podemos tomar o número natural composto apenas pelo algarismo 1 e dividí-lo por 9:

$$x = \frac{11111\ldots}{9}$$

Como não sabemos quantos algarismos 1 temos, devemos inserir o algarismo 1 e efetuar as divisões até obtermos um resto nulo, dessa forma:

$$\begin{array}{l|l}
11111111\ldots & 9 \\ \hline
-9 & 12345679 \\
\ \ 21 & \\
-18 & \\
\ \ \ 31 & \\
\ -27 & \\
\ \ \ \ 41 & \\
\ \ -36 & \\
\ \ \ \ \ 51 & \\
\ \ \ -45 & \\
\ \ \ \ \ \ 61 & \\
\ \ \ \ -54 & \\
\ \ \ \ \ \ \ 71 & \\
\ \ \ \ \ -63 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 81 & \\
\ \ \ \ \ \ -81 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 &
\end{array}$$

Portanto, o quociente encontrado é $x = 12345679$.

Gabarito: "c"

---

36. (CN/2002)

Se a, b e c são algarismos distintos, no sistema de numeração decimal existe um único número de dois algarismos (ab) tal que $(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2$. O valor de $(a + b + c)$ é igual a:

a) 11

b) 12

c) 13

d) 14

e) 15

Comentários

Como estamos trabalhando com o sistema de numeração decimal, podemos escrever:

$$(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2$$

$$(a \cdot 10 + b)^2 - (b \cdot 10 + a)^2 = (c \cdot 10 + c)^2$$
$$100a^2 + 20ab + b^2 - (100b^2 + 20ab + a^2) = (11c)^2$$
$$100a^2 + 20ab + b^2 - 100b^2 - 20ab - a^2 = 121c^2$$
$$99a^2 - 99b^2 = 121c^2$$
$$99(a^2 - b^2) = 121c^2$$
$$9(a^2 - b^2) = 11c^2$$

Sendo a, b, c algarismos distintos do sistema decimal, temos $a, b, c \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Para a equação acima, devemos ter:

$$c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$
$$a^2 - b^2 = 11 \Rightarrow a^2 = 11 + b^2$$

Agora devemos testar as possibilidades e verificar qual valor de b implica em $a^2 = 11 + b^2$ ser um quadrado perfeito:

b	$11 + b^2$
1	12
2	15
4	27
5	36
6	47
7	60
8	75
9	100

Das possibilidades acima, apenas $b = 5$ e $b = 9$ tornam a^2 um quadrado perfeito. Perceba que se $b = 9$, temos $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$ e como a é um algarismo decimal, isso é impossível. Logo, devemos ter $b = 5$ e $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$. A soma pedida é

$$a + b + c = 6 + 5 + 3 = 14$$

Gabarito: "d"

---

37. (CN/2000)

O valor da expressão abaixo é

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27} + \frac{16}{9} \cdot (0{,}333\ldots + 1) - \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}}\right)^{\left(\frac{\sqrt{25}}{2}+3\right)}$$

a) $\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

c) 0

d) 1

e) -1

Comentários

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{16}{9}\cdot(0{,}333\ldots+1)-\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}}\right)^{\left(\frac{\sqrt{25}}{2}+3\right)}=\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{16}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}}\right)^{\left(\frac{5}{2}+3\right)}$$

$$=\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{16}{9}\cdot\left(\frac{1+3}{3}\right)-\frac{16}{9}}\right)^{\left(\frac{5+6}{2}\right)}=\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{16}{9}\cdot\frac{4}{3}-\frac{16}{9}}\right)^{\left(\frac{11}{2}\right)}$$

$$=\left(\sqrt[3]{-\frac{16}{27}+\frac{64}{27}-\frac{16}{9}}\right)^{\left(\frac{11}{2}\right)}=\left(\sqrt[3]{\frac{48}{27}-\frac{48}{27}}\right)^{\left(\frac{11}{2}\right)}=0$$

Gabarito: “c”

---

38. (CN/2001)

Se $2<x<3$, então $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ é igual a:

a) 2

b) $\sqrt{x}$

c) $2\sqrt{x-1}$

d) $2\sqrt{x}$

e) 3

Comentários

Fazendo $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ e elevando y ao quadrado:

$$y^2=\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2$$

$$y^2=\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\right)^2-2\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\cdot\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\left(\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2$$

$$y^2=x+2\sqrt{x-1}-2\sqrt{\left(x+2\sqrt{x-1}\right)\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}+x-2\sqrt{x-1}$$

$$y^2 = 2x - 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)}$$

$$y^2 = 2x - 2\sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

$$y^2 = 2x - 2\sqrt{(x-2)^2}$$

$$y^2 = 2x - 2|x-2|$$

Como $x \in]2,3[$, temos que $x - 2 > 0$, logo:

$$y^2 = 2x - 2(x-2) = 2x - 2x + 4 = 4$$

$$\therefore y = \pm 2$$

Gabarito: "a"

---

39. (CN/2002)

Se $a = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ e $b = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$, então $a + b$ é igual a:

a) $\sqrt{10}$

b) 4

c) $2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{5} + 1$

e) $\sqrt{3} + 2$

Comentários

Seja $x = a + b$. Assim, temos:

$$x = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Elevando x ao quadrado e simplificando:

$$x^2 = \left(\sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\right)^2 + 2\sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \left(\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\right)^2$$

$$x^2 = 4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{\left(4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)\left(4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)} + 4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$x^2 = 8 + 2\sqrt{16 - \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)^2} = 8 + 2\sqrt{16 - \left(10 + 2\sqrt{5}\right)}$$

$$x^2 = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{5 + 1 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{\sqrt{5}^2 + (-1)^2 - 2\sqrt{5}}$$

$$x^2 = 8 + 2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$$

$$x^2 = 8 + 2\left(\sqrt{5}-1\right) = 6 + 2\sqrt{5} = \left(\sqrt{5}+1\right)^2$$

$$\therefore x = \sqrt{5}+1$$

Gabarito: “d”

---

40. (CN/2011)

O número real $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ é igual a

a) $5-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

c) $3-\sqrt{2}$

d) $\sqrt{13-3\sqrt{3}}$

e) 2

Comentários

Note que nas alternativas não temos a raiz cúbica, vamos usar a seguinte fatoração para simplificar o número dado:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a(a^2+3b^2) + b(3a^2+b^2)$$

Temos que descobrir a e b tal que $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(a+b)^3} = a+b$. Assim, temos:

$$26-15\sqrt{3} = (a+b)^3 = a(a^2+3b^2) + b(3a^2+b^2)$$

Para termos o fator $\sqrt{3}$ na expressão, devemos ter $b = \pm\sqrt{3}$. Perceba que $(3a^2+b^2)$ sempre será um número positivo, assim, devemos ter $b = -\sqrt{3}$. Substituindo:

$$26-15\sqrt{3} = a\left(a^2+3\left(-\sqrt{3}\right)^2\right) - \sqrt{3}\left(3a^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2\right) = a(a^2+9) - \sqrt{3}(3a^2+3)$$

Igualando os termos:

$$\begin{cases} 26 = a(a^2+9) \\ -15\sqrt{3} = -\sqrt{3}(3a^2+3) \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação:

$$-15\sqrt{3} = -\sqrt{3}(3a^2+3) \Rightarrow 15 = 3a^2+3 \Rightarrow 12 = 3a^2 \Rightarrow 4 = a^2 \Rightarrow a = \pm 2$$

Novamente, como na equação $26 = a(a^2+9)$ temos que (a^2+9) é um número positivo, devemos ter $a = 2$. Logo, testando esse valor:

$$26 = 2(2^2+9) = 2(4+9) = 26\ (verdadeiro)$$

Portanto, temos:

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(a+b)^3} = a+b = 2-\sqrt{3}$$

Analisando as alternativas, não encontramos esse valor. Então, vamos tentar escrevê-lo dentro de um radical:

$$2-\sqrt{3}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

Esse valor está na alternativa b.

Gabarito: "b"

---

41. (EEAR/2000)

Simplificando $\frac{2a^2x}{3}\cdot(a^2x^2)^{-\frac{2}{3}}$, com $a>0$ e $x>0$, temos

a) $\frac{2a\sqrt[3]{a^2x^2}}{3x}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{a^2x^2}}{3ax}$

c) $\frac{2x\sqrt[3]{a^2x^2}}{3a}$

d) $\frac{2\sqrt[3]{a^2x^2}}{3x}$

Comentários

$$\frac{2a^2x}{3}\cdot(a^2x^2)^{-\frac{2}{3}}=\frac{2a^2x}{3}\cdot\frac{1}{(a^2x^2)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2a^2x}{3}\cdot\frac{1}{a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}}=\frac{2}{3}\cdot a^{\left(2-\frac{4}{3}\right)}\cdot x^{\left(1-\frac{4}{3}\right)}=\frac{2}{3}\cdot a^{\frac{6-4}{3}}\cdot x^{\frac{3-4}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{3\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2\sqrt[3]{a^2x^2}}{3x}$$

Gabarito: "d"

---

42. (EEAR/2001)

Efetuando $\left(-2^{\frac{3}{4}}\right)^4-3\cdot(-1^5)^{\frac{2}{5}}-5^0$, obtemos

a) 10

b) 12

c) 4

d) -12

Comentários

Cuidado! Potências de expoente par serão sempre positivas!

$$\left(-2^{\frac{3}{4}}\right)^4-3\cdot(-1^5)^{\frac{2}{5}}-5^0=2^3-3\cdot(-1)^2-1=8-3-1=8-4=4$$

Gabarito: "c"

---

43. (EEAR/2001)

Supondo definida em $\mathbb{R}$ a fração:

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}},$$

O seu valor é:

a) $\sqrt{a+1}$

b) $a+1$

c) $a-1$

d) a

Comentários

Vamos simplificar a expressão:

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^2-\sqrt{a}^2}\cdot\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}\cdot\sqrt{a+1}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^2-a}\cdot\cancel{\sqrt{a+1}}}{\sqrt{a-1}\cdot\cancel{\sqrt{a+1}}}$$

$$=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\cancel{\sqrt{a-1}}}{\cancel{\sqrt{a-1}}}=\sqrt{a}^2=a$$

Gabarito: "d"

---

44. (EEAR/2002)

A fração $\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}-b^{-2}}$ é igual a

a) $a^{-6}-b^{-6}$

b) $a^{-2}-b^{-2}$

c) $a^{-2}+b^{-2}$

d) a^2+b^2

Comentários

Simplificando a expressão:

$$\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}-b^{-2}}=\frac{\cancel{(a^{-2}-b^{-2})}(a^{-2}+b^{-2})}{\cancel{a^{-2}-b^{-2}}}=a^{-2}+b^{-2}$$

Gabarito: "c"

---

45. (EEAR/2002)

O valor da expressão $\frac{\sqrt{144}\div 0{,}6}{2{,}4\cdot 10}-\frac{3}{4}\left\{2-1{,}5\div\left(1+\frac{1}{2}\right)\right\}$ é igual a:

a) $\frac{1}{12}$

b) $\frac{7}{12}$

c) $-\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

Comentários

Simplificando a expressão:

$$\frac{\sqrt{144} \div 0{,}6}{2{,}4 \cdot 10} - \frac{3}{4}\left\{2 - 1{,}5 \div \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{12 \div 0{,}6}{2{,}4 \cdot 10} - \frac{3}{4}\left\{2 - 1{,}5 \div \left(\frac{2+1}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{20}{2{,}4 \cdot 10} - \frac{3}{4}\left\{2 - 1{,}5 \div \left(\frac{3}{2}\right)\right\} = \frac{20}{24} - \frac{3}{4}\{2 - 1{,}5 \div (1{,}5)\}$$

$$= \frac{20}{24} - \frac{3}{4}\{2 - 1\} = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{20 - 18}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

Gabarito: "a"

---

46. (EEAR/2002)

Se K é um número inteiro, $K^2 + K$ é necessariamente um

a) múltiplo de 2

b) múltiplo de 3

c) produto de dois números ímpares.

d) produto de dois números primos.

Comentários

$$K^2 + K = K \cdot (K + 1)$$

Como K é um número inteiro, temos que para qualquer valor de K sempre haverá um número par entre os fatores de $K^2 + K$ já que K e $K + 1$ são números inteiros consecutivos. Assim, $K^2 + K$ é necessariamente um múltiplo de 2.

Gabarito: "a"

---

47. (ITA/2020)

A expansão decimal do número $100! = 100 \cdot 99 \cdots 2 \cdot 1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros, que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer, é igual a

a) 20.

b) 21.

c) 22.

d) 23.

e) 24.

Comentários

Seja a fatoração em primos, única pelo teorema fundamental da álgebra, de $100!$:

$$100! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \ldots \cdot 97^z$$

Mas $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$.

Dado um número inteiro positivo N, a quantidade de zeros em seu final é igual ao número de vezes em que se pode dividir por 10 e continuar com um inteiro positivo. A cada divisão, diminui-se uma unidade dos expoentes de 2 e de 5. Logo, é possível dividir por 10 $\min\{a, c\}$ vezes.

Acontece que em m!, para todo inteiro positivo m, temos sempre que o expoente de 5 é menor ou igual ao expoente de 2, isto é, $c \leq a$. Logo, $\min\{a, c\} = c$. O problema agora é descobrir o expoente de 5 em 100!

Contemos as contribuições de cada $k \in \{1,2, \ldots, 99, 100\}$.

Cada múltiplo de 5 contribui com pelo menos um fator 5.

Cada múltiplo de $5^2 = 25$ contribui com um fator 5 extra.

Não existem múltiplos de 5^l com $l \geq 3$.

Temos $\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 20 + 4 = 24$ zeros no fim de $100!$.

Gabarito: "e".

---

48. (ITA/2020)

Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. se p ou q é irracional, então a é irracional.

II. se p e q são racionais, então a é racional.

III. se q é irracional, então p é irracional.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) todas.

Comentários

I. Temos da afirmação $(p \in \mathbb{I}) \vee (q \in \mathbb{I}) \rightarrow a \in \mathbb{I}$. Usando sua contrapositiva:

$$\sim(a \in \mathbb{I}) \rightarrow \sim[(p \in \mathbb{I}) \vee (q \in \mathbb{I})]$$

$$\sim(a \in \mathbb{I}) \rightarrow \sim(p \in \mathbb{I}) \wedge \sim(q \in \mathbb{I})$$

$$a \in \mathbb{Q} \rightarrow (p \in \mathbb{Q}) \wedge (q \in \mathbb{Q})$$

Assim, temos que verificar se $a \in \mathbb{Q}$ implica que $p \in \mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{Q}$. Como $a \in \mathbb{Q}$, temos $a^2 \in \mathbb{Q}$ e $a^3 \in \mathbb{Q}$, logo, $p = a + a^2 \in \mathbb{Q}$ e $q = a + a^3 \in \mathbb{Q}$. Portanto, afirmação verdadeira.

II. Multiplicando-se p por a, temos:

$$ap = a^2 + a^3$$

Podemos escrever a^2 e a^3 como:

$$p = a + a^2 \Rightarrow a^2 = p - a$$

$$q = a + a^3 \Rightarrow a^3 = q - a$$

Substituindo em ap:

$$ap = p - a + q - a \Rightarrow ap + 2a = p + q \Rightarrow (p + 2)a = p + q$$

Para $p \neq -2$:

$$a = \frac{p + q}{p + 2}$$

Se $p, q \in \mathbb{Q}$, temos que $\frac{p+q}{p+2} \in \mathbb{Q}$, logo, $a \in \mathbb{Q}$.

Para $p = -2$:

$$-2 = a + a^2 \Rightarrow a^2 + a + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

Portanto, $a \notin \mathbb{R}$, logo, não é possível.

Concluímos que a afirmação é verdadeira.

III. Tomemos o seguinte contraexemplo:

$$a = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$q = a(1 + a^2) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$q = \left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}\right)\left(1 + 3 + \frac{1}{4} - \sqrt{3}\right) = \frac{(2\sqrt{3} - 1)(17 - 4\sqrt{3})}{8} = \frac{34\sqrt{3} - 17 - 24 + 4\sqrt{3}}{8}$$

$$q = \frac{38\sqrt{3} - 41}{8} \in \mathbb{I}$$

$$p = a(1 + a) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \in \mathbb{Q}$$

Portanto, afirmação falsa.

Gabarito: “c”.

---

49. (ITA/2020)

Dizemos que um número natural n é um cubo perfeito se existe um número natural a tal que $n = a^3$. Determine o subconjunto dos números primos que podem ser escritos como soma de dois cubos perfeitos.

Comentários

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a^3 + b^3 = p$, com p primo. Assim, temos:

$$p = \underbrace{a^3 + b^3}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{(a + b)}_{\in \mathbb{N}}\underbrace{(a^2 - ab + b^2)}_{\in \mathbb{N}}$$

Como p é primo, temos duas possibilidades para os fatores:

I) $a + b = 1$ e $a^2 - ab + b^2 = p$

Como $a, b \in \mathbb{N}$, temos de $a + b = 1$ que as soluções são:

$$a = 1 \text{ e } b = 0 \text{ ou } a = 0 \text{ e } b = 1$$

Substituindo $a = 1$ e $b = 0$ na equação $a^2 - ab + b^2 = p$:

$$1^2 = p \Rightarrow p = 1$$

Como 1 não é primo, temos que esses valores de a e b não convém, analogamente para $a = 0$ e $b = 1$. Assim, devemos analisar o segundo caso.

II) $a + b = p$ e $a^2 - ab + b^2 = 1$

Fazendo $a = p - b$, temos:

$$(p - b)^2 - (p - b)b + b^2 = 1$$

$$p^2 - 2pb + b^2 - pb + b^2 + b^2 = 1$$

$$p^2 - 3bp + 3b^2 - 1 = 0$$

Analisando o discriminante:

$$\Delta = (3b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3b^2 - 1) = 4 - 3b^2$$

Como p é a soma de dois naturais, temos que p também é natural, logo devemos ter $\Delta \geq 0$:

$$4 - 3b^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 \leq \frac{4}{3}$$

Como $b \in \mathbb{N}$, a única possibilidade é $b = 1$.

Encontrando as raízes para p:

$$p = \frac{3b \pm \sqrt{4 - 3b^2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2 \; ou \; 1$$

Como 1 não é primo, temos $p = 2$.

Para esse valor de p:

$$a + b = p \Rightarrow a + 1 = 2 \therefore a = 1$$

Portanto, o subconjunto dos números primos que satisfazem ao problema é $S = \{2\}$.

Gabarito: $S = \{2\}$.

---

50. (ITA/2019)

Um número natural n, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine n.

Comentários

Se n está na base 10 e possui 6 dígitos, sendo 2 o primeiro, podemos escrever:

$$n = 2 \cdot 10^5 + \underbrace{a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0}_{x}$$

Chamando de x o número formado por $a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0$, temos:

$$n = 2 \cdot 10^5 + x$$

Fazendo a mudança de ordem conforme o enunciado, obtemos um novo número natural m:

$$m = 10 \cdot x + 2$$

A questão diz que $m = 3n$, logo:

$$10x + 2 = 3(2 \cdot 10^5 + x) \Rightarrow 7x = 2(3 \cdot 10^5 - 1) \Rightarrow x = \frac{599998}{7} = 85714$$

Então, n é dado por:

$$n = 2 \cdot 10^5 + 85714$$

$$\boxed{n = 285714}$$

Gabarito: $n = 285714$

---

51. (ITA/2019/Modificada)

Considere as seguintes afirmações:

I. A soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

II. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

É(são) verdadeira(s)

Comentários

I. Verdadeira.

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Vamos tomar os inteiros consecutivos $(a-1, a, a+1)$, a soma dos seus cubos resulta:

$$(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3$$
$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$
$$3a^3 + 6a$$
$$3a(a^2 + 2)$$

Devemos provar que para qualquer $a \in \mathbb{Z}$, o valor $3a(a^2+2)$ é divisível por 9.

$a)$ $a = 3k, k \in \mathbb{Z}$. Valores $(0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots, \pm 3k)$

$$3a(a^2 + 2)$$
$$3(3k)((3k)^2 + 2)$$
$$9k(9k^2 + 2) \text{ é divisível por } 9$$

$b)$ $a = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Valores $(1, 4, 7, 10, \dots, 3k+1)$ e $(-2, -5, -8, \dots, -3k+1)$

$$3a(a^2 + 2)$$
$$3(3k+1)((3k+1)^2 + 2)$$
$$3(3k+1)(9k^2 + 6k + 1 + 2)$$
$$9(3k+1)(3k^2 + 2k + 1) \text{ é divisível por } 9$$

$c)$ $a = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$. Valores $(2, 5, 8, \dots, 3k+1)$ e $(-1, -4, -7, \dots, -3k+1)$

$$3a(a^2+2)$$
$$3(3k+2)((3k+2)^2+2)$$
$$3(3k+2)(9k^2+12k+4+2)$$
$$9(3k+2)(3k^2+4k+2) \text{ é divisível por 9}$$

II. Verdadeira.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

Gabarito: "I e II".

---

52. (ITA/2019/Modificada)

Considere as seguintes afirmações:

III. Se n é um número natural, então $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$.

IV. Se x é um número real e $x^3 + x + 1 = 0$, então $x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = 0$.

É (são) verdadeira(s)

Comentários

I. Verdadeira.

Devemos supor $n \neq 0$, pois caso contrário $\frac{1}{2n}$ não poderia ser calculado.

Não foi fornecido a informação na prova sobre o 0 ser ou não um número natural. Abaixo as notações da prova de Matemática de 2019:

MATEMÁTICA

Notações

$\mathbb{R}$	: conjunto dos números reais
i	: unidade imaginária $i^2 = -1$
$\det(M)$	: determinante da matriz M
M^{-1}	: inversa da matriz M
M^T	: transposta da matriz M
AB	: segmento de reta de extremidades nos pontos A e B
$[a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Na prova de 2008, o ITA considerou $0 \in \mathbb{N}$. Veja:

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$		i	: unidade imaginária; $i^2 = -1$
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros		$\|z\|$	: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais		$\bar{z}$	: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos		$\mathrm{Re}\, z$	: parte real de $z \in \mathbb{C}$
$\emptyset$: conjunto vazio		$\mathrm{Im}\, z$	: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$		I	: matriz identidade
$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$		A^{-1}	: inversa da matriz inversível A
$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}$		A^t	: transposta da matriz A
$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \le b\}$		$\det A$	: determinante da matriz A
$A - B = \{x \in A;\ x \notin B\}$		A^C	: complementar de A

$\mathcal{P}(A)$: coleção de todos os subconjuntos de A

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B

$\widehat{AB}$: arco de circunferência de extremidades A e B

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos ortogonais.

Por isso, devemos sempre ler as notações fornecidas na prova antes de resolver as questões. No caso da prova de 2019, como a informação não foi fornecida, fizemos a suposição de que $n \neq 0$.

Note que:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} > \cdots > \frac{1}{2n}$$

Então:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$$
$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$$
$$\frac{1}{n+3} > \frac{1}{2n}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

Somando todas essas relações, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\ termos} \ge \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\ vezes}$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \ge \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

II. Errada.

Vamos manipular a equação $x^3 + x + 1 = 0$ e tentar chegar à $x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = 0$.

$$x^3 + x + 1 = 0$$

Dividindo a equação por x:

$$\frac{x^3}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 0$$

Simplificando:

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x} = 0$$

Isolando os termos $x^2 + \frac{1}{x}$:

$$x^2 + \frac{1}{x} = -1$$

Somando $\frac{1}{x^6}$ nos dois lados da equação:

$$x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = -1 + \frac{1}{x^6}$$

O problema diz que $x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = 0$, então:

$$-1 + \frac{1}{x^6} = 0 \Rightarrow x^6 = 1, x = \pm 1 \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

Mas para $x = \pm 1$, $x^3 + x + 1 \neq 0$

Logo, a assertiva está errada.

Gabarito: "I".

---

53. (ITA/2018)

Se x é um número real que satisfaz $x^3 = x + 2$, então x^{10} é igual a

a) $5x^2 + 7x + 9$

b) $3x^2 + 6x + 8$

c) $13x^2 + 16x + 12$

d) $7x^2 + 5x + 9$

e) $9x^2 + 3x + 10$

Comentários

Vamos elevar $x^3 = x + 2$ ao cubo usando o produto notável:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(x^3)^3 = (x+2)^3$$

$$x^9 = x^3 + 2^3 + 6x(x+2)$$

$$x^9 = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$$

$$x^9 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Multiplicando os dois lados da equação por x para obter x^{10}:

$$x^9 x = (x^3 + 6x^2 + 12x + 8)x$$

$$x^{10} = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$$

Vamos simplificar a equação, fazendo $x^3 = x + 2$ dado no enunciado:

$$x^{10} = x(x^3) + 6x^3 + 12x^2 + 8x$$

$$x^{10} = x(x+2) + 6(x+2) + 12x^2 + 8x$$

$$x^{10} = x^2 + 2x + 6x + 12 + 12x^2 + 8x$$

$$x^{10} = (x^2 + 12x^2) + (2x + 6x + 8x) + 12$$

$$x^{10} = 13x^2 + 16x + 12$$

Gabarito: "c".

---

54. (ITA/2017/Modificada)

Das afirmações:
I. Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de maneira única, na forma $2^{k-1}(2m-1)$, em que k e m são inteiros positivos
II. Existe um número inteiro primo p tal que $\sqrt{p}$ é um número racional
É (são) verdadeira(s)

Comentários

I. Suponha $n \in \mathbb{Z}_+$, $n = 2^{k-1}(2m-1)$ com $k, m \in \mathbb{Z}_+$.

Vamos analisar os fatores de n.

$$n = \underbrace{2^{k-1}}_{par}\left(\underbrace{2m-1}_{ímpar}\right)$$

Perceba que temos dois fatores em n, um par e um ímpar.

2^{k-1} pode assumir os valores: $(1, 2, 4, \dots)$, ele é a parte par.

$2m-1$ pode assumir os valores: $(1, 3, 5, 7, \dots)$. Ele é a parte ímpar, pois $2m$ é um número par e subtraindo 1 deste número, temos um número ímpar.

Note que podemos representar todos os números inteiros positivos nesse formato de número.

Para representar números pares, fazemos $k \neq 1$ e obtemos múltiplos de 2: $n = 2^{k-1}(2m-1)$.

Para os ímpares, fazemos $k = 1$ e obtemos números ímpares: $n = 2^0(2m-1) = 2m - 1$.

∴Verdadeira.

II. Pela definição de número irracional, sabemos que se p é primo então $\sqrt{p}$ é irracional.

∴Falsa.

Gabarito: I. V II. F

---

55. (ITA/2014/Modificada)

Das afirmações:
I. Se $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
É (são) verdadeira(s):

Comentários

I. $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \to x + y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

A afirmação diz que se x e y são irracionais, a $x + y$ também será.

Vamos supor $x = 1 + \sqrt{2}$ e $y = 1 - \sqrt{2}$, ambos são irracionais.

Somando os dois, temos:

$$x + y = \left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right) = 2 \in \mathbb{Q}$$
$$x + y \text{ é racional}$$

∴Falsa.

II. $x \in \mathbb{Q}\ e\ y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \to xy \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Vamos tomar $x = 0 \in \mathbb{Q}$ e $y = \sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então xy será:

$$xy = 0 \cdot \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$$
$$xy \text{ é um número racional}$$

∴Falsa

Gabarito: I. F e II. F

---

56. (ITA/2013)

Seja $n > 6$ um inteiro positivo não divisível por 6. Se, na divisão de n^2 por 6, o quociente é um número ímpar, então o resto da divisão de n por 6 é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Comentários

n é um inteiro positivo não divisível por 6, então podemos escrever:

$$n = 6q + r, r \in [1, 5]$$

r é o resto da divisão de n por 6

Na divisão de n^2 por 6, o quociente é um número ímpar. Vamos elevar o nosso n ao quadrado e analisar o quociente:

$$n^2 = (6q + r)^2 = 36q^2 + 12qr + r^2 = 6(6q^2 + 2qr) + r^2$$

Vamos reescrever r^2:

$$r^2 = 6q' + r'$$

q' é o quociente da divisão de r^2 por 6 e r' é o resto dessa divisão.

$$n^2 = 6(6q^2 + 2qr) + r^2$$
$$n^2 = 6(6q^2 + 2qr) + 6q' + r'$$
$$n^2 = 6(6q^2 + 2qr + q') + r'$$

O nosso quociente da divisão de n^2 por 6 é:

$$6q^2 + 2qr + q' = 2q(3q + r) + q'$$

O quociente é um número ímpar, isso implica que q' é ímpar já que $2q(3q + r)$ é um número par.

Das condições de $r \in [1, 5]$:

$$r = 1 \Rightarrow r^2 = 1$$
$$r^2 = 6q' + r' \Rightarrow 1 = 6q' + r' \Rightarrow q' = 0\ e\ r' = 1$$

$$r = 2 \Rightarrow r^2 = 4$$
$$r^2 = 6q' + r' \Rightarrow 4 = 6q' + r' \Rightarrow q' = 0\ e\ r' = 4$$

$$r = 3 \Rightarrow r^2 = 9$$
$$r^2 = 6q' + r' \Rightarrow 9 = 6q' + r' \Rightarrow q' = 1\ e\ r' = 3$$

$$r = 4 \Rightarrow r^2 = 16$$
$$r^2 = 6q' + r' \Rightarrow 16 = 6q' + r' \Rightarrow q' = 2\ e\ r' = 4$$

$$r = 5 \Rightarrow r^2 = 25$$
$$r^2 = 6q' + r' \Rightarrow 25 = 6q' + r' \Rightarrow q' = 4\ e\ r' = 1$$

Como q' é ímpar $\rightarrow q' = 1 \rightarrow r = 3$.

Gabarito: “c”.

57. (ITA/2012)

Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;

II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;

III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais,

É (são) sempre verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e II.

e) I, II e III.

Comentários

I. $r_1 - r_2$ é racional.

Se r_1 é racional, então $r_1 - r_2$ é racional $\rightarrow r_2$ é racional.

Se r_2 é racional, então $r_1 - r_2$ é racional $\rightarrow r_1$ é racional.

Logo, r_1 e r_2 são racionais.

$$r_1 + r_2 + r_3 \text{ é racional} \rightarrow r_3 \text{ é racional.}$$

$\therefore$Verdadeira.

II. r_3 é racional

$$(r_1 + r_2) + r_3 \text{ é racional} \rightarrow (r_1 + r_2) \text{ é racional}$$

$\therefore$Verdadeira.

III. Da II sabemos que $r_1 + r_2$ é racional e do enunciado $r_1 - r_2$ é racional.

Vamos somar as duas expressões:

$$(r_1 + r_2) + (r_1 - r_2) = 2r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{(r_1 + r_2) + (r_1 - r_2)}{2}$$

r_1 é a soma de dois números racionais, logo ele também é racional.

Subtraindo as duas expressões:

$$(r_1 + r_2) - (r_1 - r_2) = 2r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{(r_1 + r_2) - (r_1 - r_2)}{2}$$

r_2 é a subtração de dois números racionais, portanto ele é racional.

$\therefore$Verdadeira.

Gabarito: “e”.

---

58. (ITA/2005)

O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é

a) 2499.

b) 2501.

c) 2500.

d) 3600.

e) 4900.

Comentários

A questão pede o menor inteiro positivo n tal que $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0{,}01$.

$$\boldsymbol{\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0,01}$$

$$\boldsymbol{\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < \frac{1}{100} \Rightarrow 100 < \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}}$$

Podemos escrever $\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$ de outra forma:

$$\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}$$
$$\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n}^2-\sqrt{n-1^2}\right)}$$
$$\frac{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(n-(n-1)\right)}$$
$$(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$$
$$100<\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$$
$$\sqrt{n}+\sqrt{n-1}>100$$

Note que:

$$\sqrt{n}>\sqrt{n-1}\Rightarrow\sqrt{n}+\sqrt{n}>\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\Rightarrow 2\sqrt{n}>\sqrt{n-1}+\sqrt{n}$$
$$2\sqrt{n}>\sqrt{n-1}+\sqrt{n}>100$$
$$2\sqrt{n}>100\Rightarrow\sqrt{n}>50$$

Para essa inequação, podemos elevar ambos os lados ao quadrado sem alterar a desigualdade:

$$n>2500$$

Como n é um número inteiro e positivo, o menor valor que ele pode assumir é $n=2501$.

Gabarito: "b".

---

59. (ITA/2005)

Sobre o número $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}$ é correto afirmar que:

a) $x\in\,]0,2[$

b) x é racional

c) $\sqrt{2x}$ é irracional

d) x^2 é irracional

e) $x\in\,]2,3[$

Comentários

Vamos fatorar o número x:

$$x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}$$
$$\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}+\sqrt{3}$$
$$\sqrt{2^2-2\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2}+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{3}$$
$$\left(2-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=2$$

$\therefore x$ é racional.

Gabarito: "b".

---

60. (ITA/2003)

O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

a) 24
b) 36
c) 48
d) 54
e) 72

Comentários

A questão pede os divisores de 17640 que são divisíveis por 3. Vamos fatorar o número 17640:

17640	2
8820	2
4410	2
2205	3
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

Podemos escrever:

$$17640=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 7$$

O número de divisores será dado pela quantidade de números diferentes que podemos formar com os fatores de 17640 e que possuem o 3 como fator.

Neste caso, já que temos dois fatores 3, podemos formar números divisíveis por 3 e também por 9 (3^2). Então, já temos 2 casos diferentes.

Os números podem possuir 2, 4 (2^2) e 8 (2^3) como fatores ou também podem não possuir o 2 como fator. Logo, são 4 possibilidades nesse caso.

Eles podem possuir o 5 como fator e também podem não possuir. Assim, são 2 possibilidades.

Por fim, podemos ter 7 e 7^2 como fator ou também podemos não o ter. Neste caso, temos 3 possibilidades.

Devemos multiplicar as possibilidades para cada número e, desse modo, calcular a quantidade:

$$n = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 48 \text{ números divisíveis por 3}$$

Gabarito: "c".

---

61. (ITA/2002)

Considere as seguintes afirmações sobre os números reais positivos:

I. Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.

II. Se $x > 4$ ou $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.

III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.

Então, destas é (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas I e II.

c) Apenas II e III.

d) Apenas I e III.

e) Todas.

Comentários

I. Temos duas inequações com o conectivo "e", vamos verificar se a desigualdade é verdadeira:

$$x > 4 \Rightarrow x^2 > 16$$
$$y < 2 \Rightarrow -y > -2 \Rightarrow -2y > -4$$

Como a condição é $x > 4$ e $y < 2$, podemos somar as duas inequações. Assim, obtemos:

$$x^2 - 2y > 12$$

∴Verdadeira.

II. A diferença nessa afirmação é a presença do conectivo "ou". Essa afirmação diz que qualquer uma das proposições podem ser válidas para que $x^2 - 2y > 12$.Provamos na afirmação acima que as duas condições devem ser satisfeitas ao mesmo tempo para que a consequência seja verdadeira.

∴Falsa.

III. $x^2 < 1$

$$y^2 > 2 \Rightarrow y < -\sqrt{2} \; ou \; y > \sqrt{2}$$

Vamos usar $y > \sqrt{2}$

$$y > \sqrt{2} \Rightarrow -y < -\sqrt{2} \Rightarrow -2y < -2\sqrt{2}$$

Somando as duas inequações:

$$x^2 - 2y < 1 - 2\sqrt{2}$$

Note que $2\sqrt{2} \cong 2 \cdot 1{,}4 = 2{,}8 \Rightarrow 1 < 2\sqrt{2}$

Portanto:

$$1 - 2\sqrt{2} < 0$$
$$x^2 - 2y < 1 - 2\sqrt{2} < 0$$
$$x^2 - 2y < 0$$

∴Verdadeira.

Gabarito: "d".

---

62. (IME/2020)

Seja U o conjunto dos 1000 primeiros números naturais maiores que zero. Considere que zeros à esquerda são omitidos. Seja $A \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 10 tem o algarismo mais significativo igual a 1; e $B \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2. As cardinalidades de $A - B$ e de $B - A$ são, respectivamente:

a) 46 e 277
b) 45 e 275
c) 44 e 275
d) 45 e 277
e) 46 e 275

Observação:
cardinalidade de um conjunto finito é o número de elementos distintos desse conjunto.

Comentários

Para resolver essa questão, devemos encontrar os elementos de cada conjunto. O enunciado diz que A e B são subconjuntos de $U = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$. Para A, temos que o algarismo mais significativo dos seus elementos na base decimal é 1, logo, os elementos de A são:

$$\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{10, \dots, 19} \\ \mathbf{100, \dots, 199} \\ \mathbf{1000} \end{array} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = \left\{1,\ \underbrace{10, \dots, 19}_{10\ elementos},\ \underbrace{100, \dots, 199}_{100\ elementos}, 1000\right\}}}$$

A cardinalidade do conjunto $\boldsymbol{A}$ é:

$$\boxed{\boldsymbol{n(A) = 1 + 10 + 100 + 1 = 112}}$$

Vamos analisar o conjunto $\boldsymbol{B}$. Ele é formado pelos números cuja representação na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2, desse modo, temos que os elementos de $\boldsymbol{B}$ são (lembrando que um número na base 4 pode ter como algarismos $\mathbf{0, 1, 2, 3}$):

$$\boldsymbol{B = \left\{\begin{array}{c} (2)_4 \\ (20)_4, (21)_4, (22)_4, (23)_4 \\ (200)_4, \dots, (233)_4 \\ (2000)_4, \dots, (2333)_4 \\ (20000)_4, \dots, (23333)_4 \end{array}\right\}}$$

Perceba que $\boldsymbol{(20000)_4 = 2 \cdot 4^4 = 512}$ e $\boldsymbol{(200000)_4 = 2 \cdot 4^5 = 2048 > 1000}$.

Para analisarmos a cardinalidade das diferenças de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, vamos converter os números de $\boldsymbol{B}$ e escrevê-los na base decimal:

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{(2)_4 \Rightarrow 2} \\ \boldsymbol{\underbrace{(20)_4}_{2\cdot 4=8}, (21)_4, (22)_4, \underbrace{(23)_4}_{(30)_4-1=3\cdot 4-1=11} \Rightarrow 8, \dots, 11} \\ \boldsymbol{\underbrace{(200)_4}_{2\cdot 4^2=32}, \dots, \underbrace{(233)_4}_{(300)_4=3\cdot 4^2-1=47} \Rightarrow 32, \dots, 47} \\ \boldsymbol{\underbrace{(2000)_4}_{2\cdot 4^3=128}, \dots, \underbrace{(2333)_4}_{(3000)_4-1=3\cdot 4^3-1=191} \Rightarrow 128, \dots, 191} \\ \boldsymbol{\underbrace{(20000)_4}_{2\cdot 4^4=512}, \dots, \underbrace{(23333)_4}_{(30000)_4-1=3\cdot 4^2-1=767} \Rightarrow 512, \dots, 767} \end{array}$$

Assim, o conjunto $\boldsymbol{B}$ é dado por:

$$\boxed{B = \left\{2, \underbrace{8, \dots, 11}_{4\ elementos}, \underbrace{32, \dots, 47}_{16\ elementos}, \underbrace{128, \dots, 191}_{64\ elementos}, \underbrace{512, \dots, 767}_{256\ elementos}\right\}}$$

$$\Rightarrow \boxed{n(B) = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 = 341}$$

Resta analisar os elementos da intersecção dos conjuntos. Fazendo a intersecção de A com B:

$$A \cap B = \left\{10, 11, \underbrace{128, \dots, 191}_{64\ elementos}\right\}$$

$$\boxed{n(A \cap B) = 66}$$

Portanto, as cardinalidades das diferenças são dadas por:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 112 - 66 = 46$$

$$n(B - A) = 341 - 66 = 275$$

Gabarito: “e”.

---

63. (IME/2020)

O menor número natural ímpar que possui o mesmo número de divisores que 1800 está no intervalo:

a) $[1, 16000]$

b) $[16001, 17000]$

c) $[17001, 18000]$

d) $[18001, 19000]$

e) $[19001, \infty)$

Comentários

Inicialmente, vamos calcular o número de divisores de 1800. Para isso, vamos fatorá-lo:

1800	2
900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

O número de divisores de 1800 é dado pelo produto dos expoentes dos seus fatores somado a 1:

$$n_D = (3+1)(2+1)(2+1) = 36$$

Assim, temos 36 divisores para o número 1800. O menor número natural ímpar que possui 36 divisores é da forma (lembrando que 2 não pode ser um fator desse número para que ele seja ímpar):

$$I = 3^a \cdot 5^b \cdot 7^c \cdot 11^d \cdot \ldots$$

Ela deve satisfazer:

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)\ldots = 36$$

Vamos fatorar o número 36 e ver as possibilidades:

$$36 = \begin{cases} 36 \cdot 1 \\ 18 \cdot 2 \\ 9 \cdot 4 \\ 3 \cdot 12 \\ 3 \cdot 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \\ 6 \cdot 6 \\ 2 \cdot 3 \cdot 6 \end{cases}$$

Analisaremos apenas as possibilidades em azul, pois as possibilidades em vermelho gerarão números muito grandes. Para que tenhamos o menor ímpar, os menores fatores devem receber os maiores expoentes, logo:

$$3 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 21$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

$$2 \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 27$$

Note que o menor número é $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 17325$.

Gabarito: “c”.

---

64. (IME/2020)

Um inteiro positivo é escrito em cada uma das seis faces de um cubo. Para cada vértice, é calculado o produto dos números escritos nas três faces adjacentes. Se a soma desses produtos é 1105, a soma dos seis números das faces é:

a) 22

b) 35

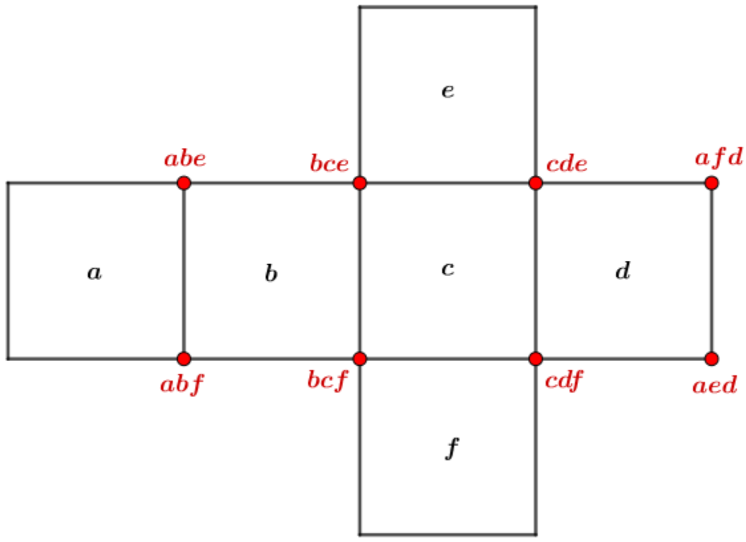
c) 40

d) 42

e) 50

Comentários

Vamos usar um cubo planificado para o problema dado. Para as condições do problema, temos:



O enunciado diz que:

$$abe + abf + bce + bcf + cde + cdf + afd + aed = 1105$$

Fatorando:

$$ab(e+f) + bc(e+f) + cd(e+f) + ad(e+f) = 1105$$
$$(e+f)(ab+bc+cd+ad) = 1105$$
$$(e+f)\big(b(a+c) + d(a+c)\big) = 1105$$
$$(e+f)(a+c)(b+d) = 1105$$

Temos um produto de três números inteiros positivos que resulta no número 1105. Note que:

$$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$$

$\mathbf{1105}$ é o produto de três números primos. Como $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_+$, temos que as somas $e+f, a+c, b+d$ não podem resultar em 1, logo, cada número deve assumir um dos números primos. Podemos ter:

$$e + f = 5$$
$$b + d = 13$$
$$a + c = 17$$

A questão pede:

$$a + b + c + d + e + f = 5 + 13 + 17 = 35$$

Gabarito: "b".

---

65. (IME/2019)

Aristeu e seu irmão nasceram nos séculos XX e XXI, respectivamente. Neste ano, 2018, os dois já fizeram aniversário e a idade de cada um deles é a soma dos três últimos dígitos do ano de seu respectivo nascimento. Qual é a soma das idades dos dois irmãos?

a) 23

b) 26

c) 29
d) 32
e) 39

Comentários

Vamos analisar o enunciado. Aristeu nasceu no século XX, então, ele nasceu entre 1901 e 2000. Seu irmão nasceu no século XXI, logo, ele nasceu entre 2001 e 2100. Se no ano de 2018, os dois já fizeram aniversário e a idade de cada um deles é a soma dos últimos dígitos do ano de seu respectivo nascimento, podemos fazer as seguintes deduções:

1) A maior idade que Aristeu pode ter é 27 anos (nascimento em $1\underbrace{999}_{9+9+9=27}$)

Nesse caso, Aristeu teria 19 anos no ano de 2018. Desse modo, ele nasceu antes de 1999. Para descobrir essa idade, podemos dizer que ele nasceu no ano de $1999 - x$ e, assim, temos:

Soma dos três últimos algarismos para $x \in [0; 9]$ e $x \in \mathbb{N}$:

$$1999 - x \to 9 + 9 + 9 - x = 27 - x \text{ anos}$$

Idade desde o nascimento $1999 - x$ até 2018:

$$19 + x \text{ anos}$$

Igualando essas idades, descobrimos x:

$$27 - x = 19 + x$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Logo, ele nasceu no ano de 1995 (completa 23 anos até 2018 e a soma dos algarismos é $9 + 9 + 5 = 23$).

Usando o mesmo raciocínio, vamos calcular a idade do seu irmão. Já que ambos fizeram aniversário, vamos supor que seu irmão nasceu em 2017:

2) Seu irmão nasceu em 2017

Soma dos três últimos algarismos:

$$2017 \to 0 + 1 + 7 = 8 \text{ anos}$$

Mas, até 2018, ele terá apenas 1 ano. Logo, ele nasceu em $2017 - y$.

Para $y \in [0; 7]$ e $y \in \mathbb{N}$:

Soma dos três últimos algarismos:

$$2017 - y \to 0 + 1 + 7 - y = 8 - y \text{ anos}$$

Idade desde o nascimento $2017 - y$ até 2018:

$$1 + y \text{ anos}$$

Igualando as idades:

$$8 - y = 1 + y$$

$$2y = 7$$

$$y = 3{,}5$$

y deve ser um número inteiro, então, seu irmão nasceu antes de 2010. Vamos supor que ele tenha nascido em $2009 - y$:

Para $y \in [0; 9]$ e $y \in \mathbb{N}$:

Soma dos algarismos:

$$0 + 0 + 9 - y = 9 - y$$

Idade até 2018:

$$9 + y$$

Igualando as idades, vemos que $y = 0$ e, assim, seu irmão nasceu em 2009 e tem 9 anos.

Portanto, a soma da idade deles é:

$$\boxed{23 + 9 = 32}$$

*Observações: A resolução deste exercício está longa apenas para que você entenda o raciocínio. Na hora da prova, bastaria que você encontrasse um ano que satisfizesse as condições do problema (soma dos três últimos algarismos do ano de nascimento = idade até o ano de 2018).

Gabarito: "d".

---

66. (IME/2018)

Se X e Y são números naturais tais que $X^2 - Y^2 = 2017$, o valor de $X^2 + Y^2$ é:

a) 2008010

b) 2012061

c) 2034145

d) 2044145

e) 2052061

Comentários

Do enunciado, temos:

$$X^2 - Y^2 = 2017$$

Vamos fatorar a equação:

$$(X - Y)(X + Y) = 2017$$

Analisando o número 2017, podemos perceber que ele é um número primo. Então, ele é divisível por 1 e por ele mesmo. Vamos analisar o produto $(X - Y)(X + Y)$:

$$X, Y \in \mathbb{N} \Rightarrow X - Y < X + Y$$

A expressão $(X - Y)(X + Y)$ é um produto de fatores naturais e como 2017 é primo, podemos afirmar que esse produto possuirá a forma:

$$(X - Y)(X + Y) = 1 \cdot 2017$$

Então, podemos escrever:

$$X - Y = 1$$

$$X + Y = 2017$$

Somando as duas equações, encontramos X:

$$2X = 2018 \Rightarrow X = 1009$$

E Y:

$$X - Y = 1 \Rightarrow Y = X - 1 \Rightarrow Y = 1008$$

Com os valores de X e Y, vamos encontrar o valor da expressão pedida:

$$X^2 + Y^2 = 1009^2 + 1008^2 = 1018081 + 1016064 = 2034145$$

$$\therefore X^2 + Y^2 = 2034145$$

Gabarito: "c".

---

67. (IME/2018)

Determine todos os números primos p, q e r tais que $35p + 11pq + qr = pqr$.

Comentários

Considerando $p, q, r \in \mathbb{N}$.

A questão nos dá uma equação e pede para encontrar 3 variáveis. Vamos tentar encontrar alguma relação com a equação dada:

$$35p + 11pq + qr = pqr$$

Perceba a presença do número p na equação:

$$35p + 11pq + qr = pqr$$

Vamos dividir a equação por p:

$$\frac{35p + 11pq + qr}{p} = \frac{pqr}{p}$$

$$35 + 11q + \frac{qr}{p} = qr$$

$$\frac{qr}{p} = qr - 35 - 11q$$

O enunciado pede para encontrar p, q, r primos. Analisando a expressão $qr - 35 - 11q$, vemos que se trata de um número inteiro. Desse modo, podemos afirmar que $\frac{qr}{p}$ também deve ser inteiro. Assim:

$$p | qr$$

p deve dividir qr

Sendo todos primos, temos apenas duas possibilidades:

1) $p = q$

2) $p = r$

Vamos testar as possibilidades:

1) $p = q$:

$$35p + 11pq + qr = pqr$$

$$35q + 11q^2 + qr = q^2 r$$

$$q(35 + 11q + r) = q(qr)$$

$q \neq 0$, pois q é primo.

$$35 + 11q + r = qr$$

$$r + 35 = qr - 11q$$

$$r + 35 = q(r - 11)$$

Dessa equação, temos 2 possibilidades:

*Ainda não vimos como resolver equações racionais, veremos na aula de funções racionais. Por enquanto saiba que antes de isolar q, devemos considerar a possibilidade de $r - 11$ ser zero.

$$r - 11 = 0$$

Ou

$$q = \frac{r + 35}{r - 11}$$

Se $r - 11 = 0$:

$$r = 11$$

Para a equação ser verdadeira, $q(r - 11) = r + 35 = 0$:

$$r = -35 \neq 11$$

Desse modo $r \neq 11$:

$$q = \frac{r + 35}{r - 11}$$

$$q = \frac{r - 11 + 46}{r - 11} = 1 + \frac{46}{r - 11}$$

$q\ primo \Rightarrow r - 11$ divide 46

Como q é primo natural, $\frac{46}{r-11}$ deve ser positivo (caso contrário, $1 + \frac{46}{r-11}$ seria negativo).

Assim, $r - 11$ é positivo e deve pertencer ao conjunto de divisores de 46:

$$r - 11 \in \{1, 2, 23, 46\}$$

Possibilidades:

$$r - 11 = 1 \Leftrightarrow r = 12\ não\ é\ primo$$

$$r - 11 = 2 \Leftrightarrow r = 13\ é\ primo$$

$$r - 11 = 23 \Leftrightarrow r = 34\ não\ é\ primo$$

$$r - 11 = 46 \Leftrightarrow r = 57\ não\ é\ primo$$

Assim, a única possibilidade é $r = 13$. Substituindo na equação abaixo:

$$q = \frac{r + 35}{r - 11}$$

$$q = \frac{13+35}{13-11} = \frac{48}{2} = 24\ não\ é\ primo$$

Portanto, não temos solução para o caro $p = q$. Vamos tentar a outra possibilidade.

2) $p = r$:

$$35p + 11pq + qr = pqr$$
$$35r + 11qr + qr = qr^2$$
$$r(35 + 12q) = (qr)r$$

$r \neq 0$, pois r é primo.

$$qr = 35 + 12q$$
$$q = \frac{35}{r-12}$$
$$r - 12|35$$
$$r - 12 \in \{1, 5, 7, 35\}$$
$$r - 12 = 1 \Leftrightarrow r = 13\ é\ primo$$
$$r - 12 = 5 \Leftrightarrow r = 17\ é\ primo$$
$$r - 12 = 7 \Leftrightarrow r = 19\ é\ primo$$
$$r - 12 = 35 \Leftrightarrow r = 47\ é\ primo$$

Testando os valores:

$$r = 13 \Rightarrow q = \frac{35}{1} = 35\ não\ é\ primo$$
$$r = 17 \Rightarrow q = \frac{35}{5} = 7\ é\ primo$$
$$r = 19 \Leftrightarrow q = \frac{35}{7} = 5\ é\ primo$$
$$r = 47 \Leftrightarrow q = \frac{35}{35} = 1\ não\ é\ primo$$

Portanto, encontramos 2 soluções:

$$(p, q, r) = (17, 7, 17)$$

e

$$(p, q, r) = (19, 5, 19)$$

Gabarito: $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = (\mathbf{17}, \mathbf{7}, \mathbf{17})\ \boldsymbol{e}\ (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = (\mathbf{19}, \mathbf{5}, \mathbf{19})$

---

68. (IME/2018)

A soma dos algarismos de X com a soma dos quadrados dos algarismos de X é igual a X. Sabe-se que X é um número natural positivo. O menor X possível está no intervalo:

a) $(0, 25]$

b) $(25, 50]$

c) $(50, 75]$

d) $(75, 100]$
e) $(100, 125]$
Comentários

Sendo $X \in \mathbb{N}_+$, podemos escrever:

$$X = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$
$$a_i \in [0, 9], i \in [0, n]$$

Do enunciado:

$$X = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2$$

Escrevendo X em função das potências decimais:

$$X = a_0 10^0 + a_1 10^1 + \cdots + a_{n-1} 10^{n-1} + a_n 10^n$$

Igualando as duas expressões de X:

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2 =$$
$$a_0 10^0 + a_1 10^1 + \cdots + a_{n-1} 10^{n-1} + a_n 10^n$$

Vamos juntar e fatorar cada algarismo de X:

$$(a_0 + a_0^2 - a_0 10^0) + (a_1 + a_1^2 - a_1 10^1) + \cdots + (a_{n-1} + a_{n-1}^2 - a_{n-1} 10^{n-1})$$
$$+ (a_n + a_n^2 - a_n 10^n) = 0$$
$$a_0(1 + a_0 - 10^0) + a_1(1 + a_1 - 10^1) + \cdots + a_{n-1}(1 + a_{n-1} - 10^{n-1}) + a_n(1 + a_n - 10^n) = 0$$

Dessa forma, encontramos as seguintes possibilidades:

$$a_0 = 0$$
$$ou$$
$$1 + a_0 - 10^0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$
$$a_1 = 0$$
$$ou$$
$$1 + a_1 - 10^1 = 0 \Rightarrow a_1 = 9$$
$$a_2 = 0$$
$$ou$$
$$1 + a_2 - 10^2 = 0 \Rightarrow a_2 = 99 \text{ (não convém)}$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = 0$$
$$ou$$
$$1 + a_{n-1} - 10^{n-1} = 0 \Rightarrow a_{n-1} = 10^{n-1} - 1 \text{ (não convém)}$$
$$a_n = 0$$
$$ou$$
$$1 + a_n - 10^n = 0 \Rightarrow a_n = 10^n - 1 \text{ (não convém)}$$

Se $X \in \mathbb{N}_+$, $X \neq 0$, a solução de X é:

$$a_1 = 9$$

$$a_0, a_2, a_3, \dots, a_n \in \{0\}$$

$$\Rightarrow X = a_1 10 = 90$$

$$X \in (75,100]$$

Gabarito: "d".

---

69. (IME/2018)

Seja x um número natural maior que 2. Se a representação de um numeral N na base x é 1041 e na base $x-1$ é 1431, então a sua representação na base binária é:

a) 10001111

b) 11011011

c) 11100111

d) 11011110

e) 11110001

Comentários

Lembrando do capítulo de mudança de base:

Um número na base b pode ser escrito no sistema decimal da seguinte forma:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

Do enunciado:

$$N_x = 1041$$

$$N_{x-1} = 1431$$

Vamos representar N no sistema decimal.

De N_x:

$$N = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 4 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 = x^3 + 4x + 1$$

De N_{x-1}:

$$N = 1 \cdot (x-1)^3 + 4 \cdot (x-1)^2 + 3 \cdot (x-1)^1 + 1 \cdot (x-1)^0 =$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 4(x^2 - 2x + 1) + 3(x-1) + 1 =$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 4x^2 - 8x + 4 + 3x - 3 + 1 =$$

$$x^3 + x^2 - 2x + 1$$

Igualando as duas expressões, obtemos:

$$x^3 + 4x + 1 = x^3 + x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-6) = 0$$

$$x = 0 \; ou \; x = 6$$

Como $x \in \mathbb{N}$ e $x > 2$:

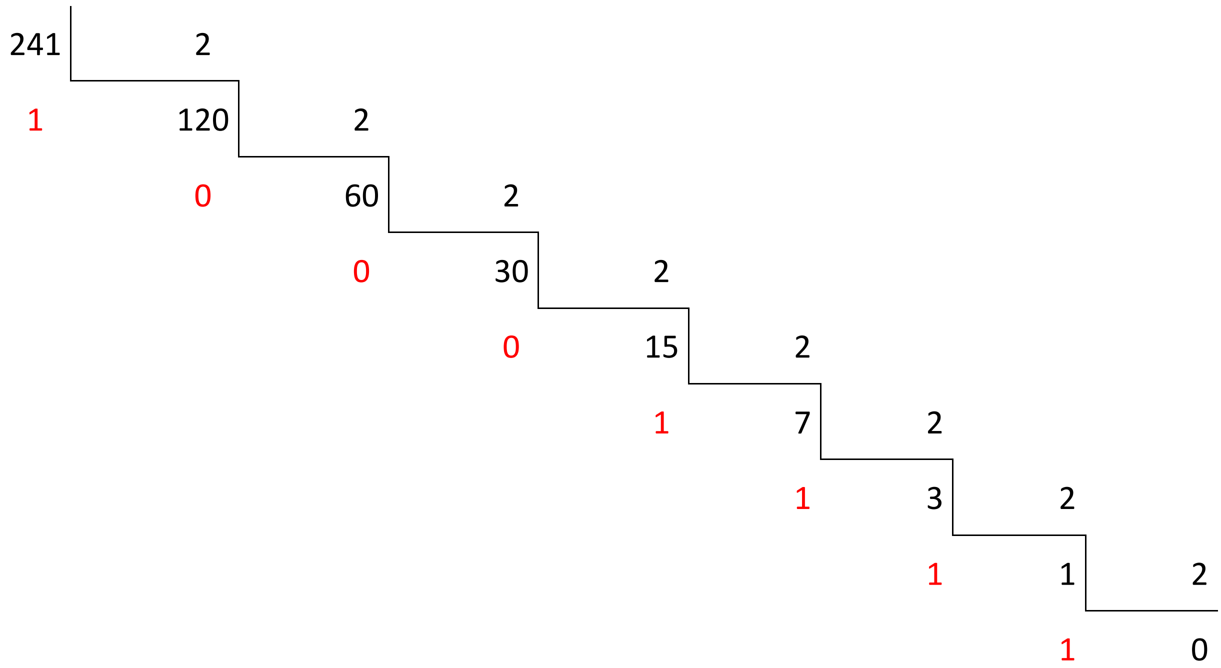
$$x = 6$$

Vamos encontrar o valor decimal de N:

$$N = x^3 + 4x + 1 = 6^3 + 4 \cdot 6 + 1 = 216 + 24 + 1 = 241$$

Para transformar N em binário, podemos dividi-lo por 2 sucessivamente ou escrevê-lo em função das potências de 2 (já que os algarismos só podem assumir os valores 1 ou 0).

Por divisão sucessiva:



$$N_2 = 11110001$$

Para escrever em função das potências de 2, podemos analisar da seguinte forma:

Vemos a maior potência que é menor ou igual ao número:

$$2^7 = 128 < 241$$

Subtraímos 1 do expoente da potência de 2 e somamos à potência acima:

$$2^6 = 64 \Rightarrow 2^7 + 2^6 = 128 + 64 = 192 < 241$$

Como o resultado continua menor que o número, seguimos somando as potências de 2 até formar o número dado:

$$2^7 + 2^6 + 2^5 = 192 + 32 = 224 < 241$$

$$2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 = 224 + 16 = 240 < 241$$

$$2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 = 240 + 8 = 248 > 241$$

Agora, a soma resultou em um número maior que 241. Devemos passar para a próxima potência e ir tentando até formar o número.

Perceba que falta apenas 1 no número, assim:

$$2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^0 = 241$$

Escrevendo 241 em função de todas as potências de 2, temos:

$$241 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$\Rightarrow 241 = (11110001)_2$$

Esse método se baseia na tentativa e erro. Funciona bem para os binários, já que os algarismos apenas assumem os valores 1 ou 0.

Gabarito: "e".

---

70. (IME/2016)

Sabendo-se que m e n são inteiros positivos tais que $3^m + 14400 = n^2$, determine o resto da divisão de $m + n$ por 5.

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários

Quando o IME nos dá uma equação e pede para encontrar os valores das variáveis, devemos tentar fatorar a equação e tentar encontrar alguma relação entre as variáveis. Vamos analisar a equação dada:

$$3^m + 14400 = n^2$$

Perceba que $14400 = 120^2$. Temos n^2 no outro lado da equação, se passarmos 120^2 para o outro lado da equação, teremos uma diferença de quadrados:

$$3^m = n^2 - 120^2$$

$$3^m = (n - 120)(n + 120)$$

Como m e n são inteiros positivos, o produto $(n - 120)(n + 120)$ será uma potência de 3 (devido à igualdade 3^m). Então, vamos escrever $n - 120$ e $n + 120$ como potências de 3:

$$n - 120 = 3^x$$

$$n + 120 = 3^y$$

$$\Rightarrow 3^m = 3^x 3^y = 3^{x+y}$$

$$m = x + y$$

Fazendo $3^y - 3^x$, encontramos:

$$3^y - 3^x = 240$$

Colocando 3^x em evidência:

$$3^x(3^{y-x} - 1) = 240$$

Temos 3^x do lado esquerdo e 240 do outro.

240 é múltiplo de 3:

$$240 = 3 \cdot 80$$

$$\Rightarrow 3^x(3^{y-x} - 1) = 3 \cdot 80$$

Como 80 não é múltiplo de 3, a única possibilidade de solução é:

$$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$
$$3^{y-x} - 1 = 80$$
$$3^{y-1} = 81 = 3^4$$
$$y - 1 = 4 \Rightarrow y = 5$$

Com isso, encontramos m:

$$m = x + y = 1 + 5 = 6$$

Substituindo na equação do problema:

$$3^6 + 14400 = n^2$$
$$n = \sqrt{729 + 14400} = \sqrt{15129} = 123$$

*Para encontrar raiz quadrada de números muito grandes, fazemos por tentativa e erro.

A questão pede o resto de $m + n$ por 5:

$$m + n = 123 + 6 = 129$$
$$129 \equiv 4 (mod\ 5)$$

Gabarito: "e".

---

71. (IME/2016)

Seja a equação $n^2 - 7m^2 = (5m - 2n)^2 + 49$. Determine todos os pares inteiros (m, n) que satisfazem a esta equação.

Comentários

Precisamos encontrar os valores de m, n. Do enunciado:

$$n^2 - 7m^2 = (5m - 2n)^2 + 49$$
$$n^2 - 7m^2 = 25m^2 - 20mn + 4n^2 + 49$$
$$n^2 - 7m^2 - 25m^2 + 20mn - 4n^2 = 49$$
$$-3n^2 + 20mn - 32m^2 = 49$$
$$\Rightarrow 3n^2 - 20mn + 32m^2 = -49$$

Vamos fatorar a expressão $3n^2 - 20mn + 32m^2$:

$$3n^2 - 12mn - 8mn + 32m^2 = 3n(n - 4m) - 8m(n - 4m) = (3n - 8m)(n - 4m)$$

Dessa forma, encontramos:

$$(3n - 8m)(n - 4m) = -49$$

Como m, n são inteiros, temos que:

$$3n - 8m \text{ é inteiro}$$
$$n - 4m \text{ é inteiro}$$

Então, esses números devem ser iguais aos divisores de -49.

Divisores de -49 pertencem ao conjunto $\{\pm 1, \pm 7, \pm 49\}$. Vamos analisar as possibilidades:

$$\begin{cases} 3n - 8m = 1 \\ n - 4m = -49 \end{cases}$$

Esse é um sistema linear com 2 equações e 2 variáveis. Estudaremos sistemas lineares em uma aula específica. Vamos resolvê-la pelo método do escalonamento. Esse método se baseia em simplificar o sistema linear através da manipulação das equações.

Vamos multiplicar a segunda equação por 2:

$$\begin{cases} 3n - 8m = 1 \ (I) \\ 2n - 8m = -98 \ (II) \end{cases}$$

Fazendo $(I) - (II)$:

$$n = 99$$

Substituindo na equação II:

$$99 - 4m = -49$$
$$4m = 148 \Rightarrow m = 37$$

Solução:

$$(m, n) = (37, 99)$$
$$\begin{cases} 3n - 8m = -1 \\ n - 4m = 49 \end{cases}$$

Resolvendo por escalonamento:

$$\begin{cases} 3n - 8m = -1 \\ 2n - 8m = 98 \end{cases}$$
$$n = -99$$
$$-99 - 4m = 49 \Rightarrow m = -37$$
$$(m, n) = (-37, -99)$$
$$\begin{cases} 3n - 8m = 49 \\ n - 4m = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n - 8m = 49 \\ 2n - 8m = -2 \end{cases}$$
$$n = 51$$
$$51 - 4m = -1 \Rightarrow m = 13$$
$$(m, n) = (13, 51)$$
$$\begin{cases} 3n - 8m = -49 \\ n - 4m = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n - 8m = -49 \\ 2n - 8m = 2 \end{cases}$$
$$n = -51$$
$$-51 - 4m = 1$$
$$m = -13$$
$$(m, n) = (-13, -51)$$
$$\begin{cases} 3n - 8m = 7 \\ n - 4m = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n - 8m = 7 \\ 2n - 8m = -14 \end{cases}$$
$$n = 21$$
$$21 - 4m = -7 \Rightarrow m = 7$$
$$(m, n) = (7, 21)$$
$$\begin{cases} 3n - 8m = -7 \\ n - 4m = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n - 8m = -7 \\ 2n - 8m = 14 \end{cases}$$
$$n = -21$$
$$-21 - 4m = 7$$
$$m = -7$$
$$(m, n) = (-7, -21)$$

Gabarito: $\boldsymbol{(m, n) \in \{(37, 99\}; (-37, -99); (13, 51); (-13, -51); (7, 21); (-7, -21)\}}$

72. (IME/2015)

Quantos restos diferentes são possíveis da divisão de n^2 por 11, sendo n um número natural?

a) 3

b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

Comentários

Vamos usar congruência.

$$n \equiv r\ (mod\ 11)$$

r é o resto da divisão de n por 11.

$$r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Usando a propriedade da potência, temos:

$$n^2 \equiv r^2\ (mod\ 11)$$

Encontrando os restos:

$r = 0$:

$$n^2 \equiv 0^2 = 0\ (mod\ 11)$$

$r = 1$:

$$n^2 \equiv 1^2 = 1\ (mod\ 11)$$

$r = 2$:

$$n^2 \equiv 2^2 = 4\ (mod\ 11)$$

$r = 3$:

$$n^2 \equiv 3^2 = 9\ (mod\ 11)$$

$r = 4$:

$$n^2 \equiv 4^2 = 16\ (mod\ 11)$$

$$16 \equiv 5\ (mod\ 11)$$

$r = 5$:

$$n^2 \equiv 5^2 = 25\ (mod\ 11)$$

$$25 \equiv 3\ (mod\ 11)$$

$r = 6$:

$$n^2 \equiv 6^2 = 36\ (mod\ 11)$$

$$36 \equiv 3\ (mod\ 11)$$

$r = 7$:

$$n^2 \equiv 7^2 = 49\ (mod\ 11)$$

$$49 \equiv 5\ (mod\ 11)$$

$r = 8$:

$$n^2 \equiv 8^2 = 64\ (mod\ 11)$$

$$64 \equiv 9 \ (mod\ 11)$$

$r = 9$:

$$n^2 \equiv 9^2 = 81 \ (mod\ 11)$$
$$81 \equiv 4 \ (mod\ 11)$$

$r = 10$:

$$n^2 \equiv 10^2 = 100 \ (mod\ 11)$$
$$100 \equiv 1 \ (mod\ 11)$$

Os diferentes valores de resto são: $0, 1, 4, 9, 5, 3$.

Gabarito: “d”.

---

73. (IME/2012)

Sejam r e $s \in \mathbb{Z}$ (inteiro). Prove que $(2r + 3s)$ é múltiplo de 17 se e somente se $(9r + 5s)$ é múltiplo de 17.

Comentários

Queremos provar:

$$17|(2r + 3s) \Leftrightarrow 17|(9r + 5s)$$

Vamos criar uma equação com as expressões $(2r + 3s)$ e $(9r + 5s)$ de tal forma que apareça algum termo múltiplo de 17.

Multiplicando a expressão $(2r + 3s)$ por 5 (coeficiente de s de $9r + 5s$):

$$5(2r + 3s) = 10r + 15s$$

Agora, multiplicando $(9r + 5s)$ por 3 (coeficiente de s de $2r + 3s$):

$$3(9r + 5s) = 27r + 15s$$

Perceba o fator 17 na segunda expressão:

$$27r + 15s = 17r + 10r + 15s$$

Podemos escrever a igualdade:

$$27r + 15s = 17r + 10s + 15s$$
$$3(9r + 5s) = 17r + 5(2r + 3s)$$

Como 3 e 5 não é múltiplo de 17, então $(9r + 5s)$ é múltiplo de 17 se, e somente se, $(2r + 3s)$ é múltiplo de 17.

Gabarito: Demonstração.

---

74. (IME/2010)

Seja a equação $p^n + 144 = q^2$, onde n e q são números inteiros positivos e p é um número primo. Determine os possíveis valores de n, p e q.

Comentários

Perceba que $144 = 12^2$. Vamos passar 144 para o lado de q^2 para fatorar a expressão:

$$p^n = q^2 - 144$$
$$p^n = q^2 - 12^2 = (q - 12)(q + 12)$$

Como $n, q \in \mathbb{Z}_+$ e p é primo, $(q-12)(q+12)$ deve ser positivo e inteiro.

Escrevendo $q-12$ e $q+12$ como potências de n:

$$q - 12 = p^x$$
$$q + 12 = p^y$$
$$q - 12 < q + 12 \Rightarrow p^x < p^y \Rightarrow x < y$$
$$p^n = p^x p^y = p^{x+y} \Rightarrow n = x + y$$

Fazendo $p^y - p^x$:

$$p^y - p^x = 24$$

Evidenciando p^x:

$$p^x(p^{y-x} - 1) = 24$$

Vamos fatorar 24 para analisar melhor a equação:

$$p^x(p^{y-x} - 1) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Como p^x é potência de primo, ele não divide $p^{y-x} - 1$. Então:

$$mdc(p^x, p^{y-x} - 1) = 1$$

Isto é, p^x e $p^{y-x} - 1$ são primos entre si.

As possibilidades são:

1) $p^x = 1 \; e \; p^{y-x} - 1 = 24$

$$p^x = 1 \Rightarrow x = 0$$
$$p^{y-x} - 1 = 24 \Rightarrow p^y = 25 \Rightarrow p = 5 \; e \; y = 2$$
$$n = x + y \Rightarrow n = 2$$
$$q - 12 = p^x \Rightarrow q = 12 + p^x$$
$$q = 12 + 5^0 \Rightarrow q = 13$$

2) $p^x = 2^3 \; e \; p^{y-x} - 1 = 3$

$$p^x = 2^3 \Rightarrow p = 2 \; e \; x = 3$$
$$p^{y-x} - 1 = 3 \Rightarrow 2^{y-3} = 2^2 \Rightarrow y = 5$$
$$n = x + y \Rightarrow n = 8$$
$$q = 12 + p^x = 12 + 2^3 \Rightarrow q = 20$$

3) $p^x = 3 \; e \; p^{y-x} = 2^3$

$$p^x = 3 \Rightarrow p = 3 \; e \; x = 1$$
$$p^{y-x} - 1 = 2^3 \Rightarrow 3^{y-1} = 9 = 3^2 \Rightarrow y = 3$$
$$n = x + y \Rightarrow n = 4$$
$$q = 12 + p^x = 12 + 3^1 \Rightarrow q = 15$$

4) $p^x = 24 \; e \; p^{y-x} = 1$

$$p^x = 24 = 8 \cdot 3$$

Não há solução nesse caso, pois 24 não é potência de primo.

Portanto, a solução do problema é dada por:

$$(p, n, q) \in \{(5, 2, 13); (2, 8, 20); (3, 4, 15)\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{(p, n, q) \in \{(5, 2, 13); (2, 8, 20); (3, 4, 15)\}}$

75. (IME/2001)

Provar que para qualquer número inteiro k, os números k e k^5 terminam sempre com o mesmo algarismo das unidades.

Comentários

Vamos provar primeiramente para os naturais.

Seja $x, a \in \mathbb{N}$ e $a \in [0, 9]$. $\forall x \in \mathbb{N}$, temos:

$$k = \pm(10x + a)$$

Perceba que $10x$ é a parte do número sem o algarismo das unidades e a é o algarismo das unidades.

$\forall k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$k^5 = [\pm(10x + a)]^5 = \pm[(10x)^5 + 5(10x)^4 + 10(10x)^3a^2 + 10(10x)^2a^3 + 5(10x)a^4 + a^5]$$

*Essa expressão poderia ser encontrada desenvolvendo a potência e simplificando ou usando diretamente o Binômio de Newton (muito útil para calcular expressões da forma $(x + y)^n$). Estudaremos esse método na aula de Análise Combinatória.

$$k^5 = \pm[10(10^4x^5 + 5 \cdot 10^3x^4 + 10 \cdot 10^2x^3a^2 + 10 \cdot 10x^2a^3 + 5xa^4) + a^5]$$

Vamos escrever $y = (10^4x^5 + 5 \cdot 10^3x^4 + 10 \cdot 10^2x^3a^2 + 10 \cdot 10x^2a^3 + 5xa^4) \in \mathbb{N}$:

$$\Rightarrow k^5 = \pm(10y + a^5)$$

Dessa forma, precisamos analisar se a^5 possui o mesmo algarismo das unidades de a.

Devemos provar para cada caso de $a \in [0, 9]$. Usando congruência:

$$a = 0 \Rightarrow a^5 = 0^5 = 0 \equiv 0(mod\ 10)$$

$$a = 1 \Rightarrow a^5 = 1^5 = 1 \equiv 1(mod\ 10)$$

$$a = 2 \Rightarrow a^5 = 2^5 = 32 \equiv 2(mod\ 10)$$

$$a = 3 \Rightarrow a^5 = 3^5 = 243 \equiv 3(mod\ 10)$$

$$a = 4 \Rightarrow a^5 = 4^5 = 1024 \equiv 4(mod\ 10)$$

$$a = 5 \Rightarrow a^5 = 5^5 = 3125 \equiv 5(mod\ 10)$$

$$a = 6 \Rightarrow a^5 = 6^5 = 7776 \equiv 6(mod\ 10)$$

$$a = 7 \Rightarrow a^5 = 7^5 = 16807 \equiv 7(mod\ 10)$$

$$a = 8 \Rightarrow a^5 = 8^5 = 32768 \equiv 8(mod\ 10)$$

$$a = 9 \Rightarrow a^5 = 9^5 = 59049 \equiv 9(mod\ 10)$$

Assim, $\forall k \in \mathbb{Z}$, k e k^5 possuem o mesmo algarismo das unidades.

Outra solução:

$\forall k \in \mathbb{Z}$, se k e k^5 tem o mesmo algarismo das unidades, podemos escrever:

$$k = 10x + a$$
$$k^5 = 10y + a$$
$$a \in [0, 9]$$

A diferença entre eles é dada por:

$$k^5 - k = 10(y - x)$$

Então, se ambos tem o mesmo algarismo das unidades, devemos provar que a diferença $k^5 - k$ é um múltiplo de 10. Para isso, basta provar que essa diferença é um múltiplo de 2 e de 5, simultaneamente.

Vamos fatorar a diferença:

$$k^5 - k = k(k^4 - 1) = k(k^2 + 1)(k^2 - 1) = k(k^2 + 1)(k + 1)(k - 1)$$
$$\Rightarrow (k^2 + 1)(k - 1)k(k + 1)$$

Note a presença de números consecutivos:

$$(k^2 + 1)(k - 1)k(k + 1)$$

Sendo $k \in \mathbb{Z}$, entre esses números consecutivos, um deles será par. Logo, essa expressão é um múltiplo de 2.

Para provar a multiplicidade por 5, podemos usar o Corolário do Teorema de Fermat:

$$a^p \equiv a \ (mod\ p)$$

Perceba que 5 é um número primo. Podemos escrever:

$$k^5 \equiv k \ (mod\ 5)$$

Dessa forma:

$$k^5 - k \equiv 0 \ (mod\ 5)$$
$$\Rightarrow k^5 - k \text{ é múltiplo de 5}$$
$$\therefore k^5 - k \text{ é par e múltiplo de 5} \Rightarrow \text{ele é múltiplo de 10}$$

Gabarito: Demonstração.

10. Considerações Finais da Aula

Chegamos ao final da nossa aula. Relembramos conceitos estudados no ensino fundamental e, também, aprofundamos o nosso conhecimento em alguns assuntos.

Nessa aula, estudamos álgebra e aritmética elementar. Quero que você se acostume com as notações matemáticas e saiba trabalhar com expressões algébricas. Isso nos ajudará a resolver e a entender as questões do nosso vestibular.

Lembre-se! Treine o maior número de exercícios que você conseguir! A minha missão é passar todo o meu conhecimento para ajudá-lo a alcançar sua aprovação no vestibular!

Eu sei que o caminho para a aprovação é árduo, mas comentarei o maior número de questões e passarei todos os bizus que precisei para minha aprovação.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

11. Referências Bibliográficas

[1] Iezzi, Gelson. Murakami, Carlos. Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções. 9. ed. Atual, 2013. 410p.

[2] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Álgebra I. 1 ed. Livraria Francisco Alves, 1974. 222p.

[3] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Carvalho, Paulo Cezar Pinto. Lima, Elon Lages. A Matemática do Ensino Médio, v. 1. 11 ed. SBM, 2016. 260p.

[4] Andreescu, Titu; Enesc, Bogdan. Mathematical Olympiad Treasures. 2 ed. Birkhauser, 2010. 253p.

[5] Gomes, Carlos. Gomes, José. Tópicos de Matemática IME-ITA-Olimpíadas. Vestseller, 2010. 205p.

146