POLÍGONOS REGULARES

Já estudamos em apostilas anteriores os polígonos de forma mais abrangente, estudando sobre suas nomenclaturas, números de diagonais, soma dos ângulos e ângulos internos. Em relação aos polígonos, há uma classe especial deles chamada de **polígonos regulares**. Já demos uma pincelada nesses polígonos anteriormente, mas nesta apostila trataremos mais a fundo sobre quatro polígonos especiais: o triângulo equilátero, o quadrado, o hexágono e o octógono regular.

Antes de começarmos, vale a pena ressaltar o seguinte fato:

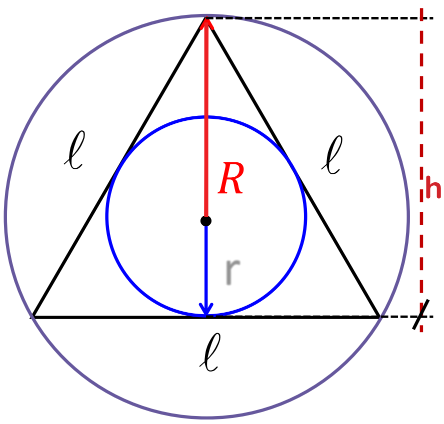
Todo polígono regular possui uma circunferência inscrita que tangencia cada um dos seus lados e uma circunferência circunscrita que toca cada um de seus vértices.

Ao decorrer do texto, r será o raio da circunferência inscrita ao polígono e R

será o raio da circunferência circunscrita ao polígono.

TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Considere um triângulo equilátero de lado l e altura h, com as circunferências inscrita e circunscrita a ele, conforme a figura abaixo.



Através da figura acima é possível retirar as seguintes relações:

- A altura é a soma do raio da circunferência inscrita com o raio da circunferência circunscrita:

$$h = r + R$$

- O **raio da circunferência inscrita** também é chamado de **apótema** (denotamos o apótema pela letra a). Sua medida corresponde à exatamente um terço da altura:

$$r = a = \frac{1}{3}h$$

- O raio da circunferência circunscrita corresponde ao que sobra da altura do triângulo, ou seja:

$$R = \frac{2}{3}h$$

- A altura do triângulo equilátero é:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Essa fórmula é deduzida da seguinte forma: observe que a altura divide o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos de hipotenusa l e catetos h e $l/_2$. Assim, podemos escrever o teorema de Pitágoras para esses triângulos retângulos:

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = l^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

- A área do triângulo equilátero é:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Essa fórmula é deduzida da seguinte forma: sabemos que a área de um triângulo pode ser obtida pelo produto da base média pela altura. Desta forma, obtemos sua área conforme abaixo:

$$A = \frac{l}{2} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

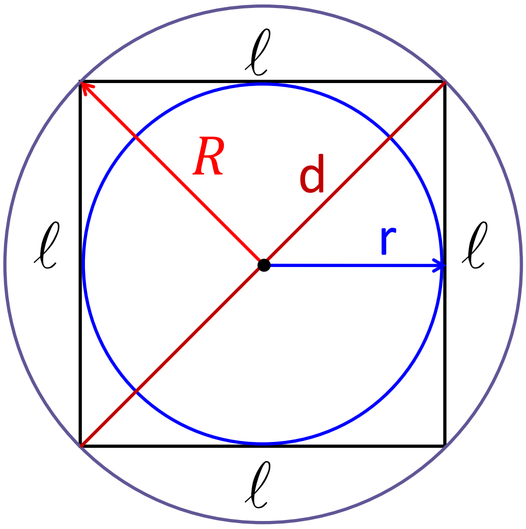
- O perímetro do triângulo equilátero é:

$$3l$$

Vamos ao segundo polígono regular: o quadrado.

QUADRADO

Considere um quadrado de lado l e diagonal d, com as circunferências inscrita e circunscrita a ele, conforme a figura abaixo.



Através da figura acima é possível retirar as seguintes relações:

- O raio da circunferência inscrita (ou apótema) corresponde à exatamente metade do lado do quadrado:

$$r = a = \frac{l}{2}$$

- A diagonal de um quadrado corresponde ao dobro do raio da circunferência circunscrita:

$$d=2R$$

- A diagonal de um quadrado também corresponde à:

$$d=l\sqrt{2}$$

Essa fórmula é deduzida da seguinte forma: observe que o quadrado é formado por dois triângulos retângulos cuja hipotenusa é a diagonal do quadrado. Os catetos de cada triângulo medem l. Escrevemos então o teorema de Pitágoras abaixo.

$$l^2+l^2=d^2$$

$$d^2=2l^2 \Rightarrow d=l\sqrt{2}$$

- O raio da circunferência circunscrita corresponde à exatamente metade da diagonal:

$$R = \frac{d}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

- A área do quadrado é o produto da base pela altura:

$$A=l.l=l^2$$

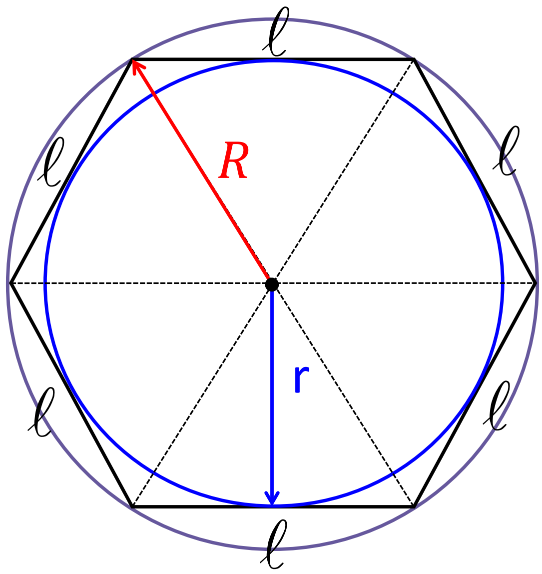
- O perímetro do quadrado é:

$$4l$$

Agora, vamos aprender sobre o hexágono regular.

HEXÁGONO REGULAR

Considere um hexágono regular de lado l com as circunferências inscrita e circunscrita a ele, conforme a figura abaixo.



Através da figura acima é possível retirar as seguintes relações:

- O hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros. Logo, o lado do hexágono também é o lado dos triângulos equiláteros.

- O raio da circunferência circunscrita corresponde ao lado do hexágono regular:

$$R=l$$

- Cada triângulo equilátero possui uma altura que corresponde ao raio da circunferência inscrita. Como já sabemos quanto vale a altura do triângulo equilátero, conseguimos deduzir o valor desse raio (que também é o apótema do hexágono regular):

$$r = a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

- A diagonal menor do hexágono regular corresponde ao dobro do raio da circunferência inscrita:

$$d=2r=l\sqrt{3}$$

- A diagonal maior do hexágono corresponde ao dobro do raio da circunferência circunscrita:

$$d=2R$$

- A área do hexágono regular é a soma das áreas dos 6 triângulos equiláteros que o formam. Como já conhecemos qual é a área de um triângulo equilátero, basta multiplicar por 6 e temos a área do hexágono regular:

$$A = 6\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

- O perímetro do hexágono regular é:

$$6l$$

Vamos praticar estas ideias.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um hexágono regular possui uma área de $6\sqrt{3}$ m². Quanto vale o seu apótema?

Solução:

Percebe-se que, para achar o apótema de um hexágono regular, precisamos apenas descobrir quanto vale um de seus lados (já que todos são congruentes). Também sabemos que a área do hexágono regular é definida como abaixo:

$$A = 6\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

Logo, calculamos o valor de l:

$$6\sqrt{3} = 6\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$l^2=4$$

$$l=2\ m$$

Com o valor de $l=2\ m$, podemos descobrir quanto vale o apótema desse hexágono regular:

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

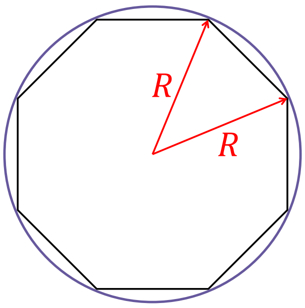
$$a = \sqrt{3}\, m$$

Assim, o apótema desse hexágono regular vale $\sqrt{3}\ m$.

Por fim, o último polígono regular que falaremos é o octógono regular. Este polígono possui 8 lados congruentes e é formado por oito triângulos isósceles.

OCTÓGONO REGULAR

Considere um otógono regular de lado l com a circunferência circunscrita a ele, conforme a figura abaixo.

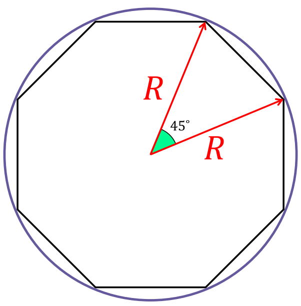


Como já sabemos, o ângulo central de um polígono regular depende apenas do seu número de lados, como explicitado abaixo:

$$a_{central} = \frac{360°}{n}$$

Assim, para um octógono regular, basta substituir n por 8 para termos o valor de seu ângulo central:

$$a_{central} = \frac{360°}{8} = 45°$$



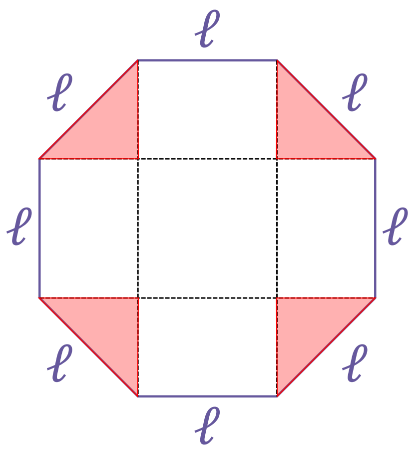
Como ilustrado na imagem acima, cada um dos triângulos que formam o octógono regular possui uma área que pode ser calculada da seguinte forma:

$$A = \frac{1}{2} R.R.sen45°$$

Consequentemente, a área do octógono regular será simplesmente a soma das áreas dos 8 triângulos isósceles:

$$A_{oct} = 8 \cdot A = 2\sqrt{2}.R^2$$

Esta é a área do octógono regular em função do valor do raio da circunferência circunscrita. Entretanto, também é possível obtermos uma fórmula para sua área em função do valor dos próprios lados do octógono! Para isso, através de 4 segmentos de reta vamos dividir o octógono regular, conforme mostrado a seguir.



Note que os triângulos formados "nas pontas" do octógono são retângulos (pois ele é formado por dois segmentos de reta perpendiculares e pelo lado do octógono) e isósceles (pois os dois ângulos agudos são congruentes). Desta maneira, podemos escrever o teorema de Pitágoras para esses triângulos retângulos, adotando l como a hipotenusa e x como o valor dos catetos:

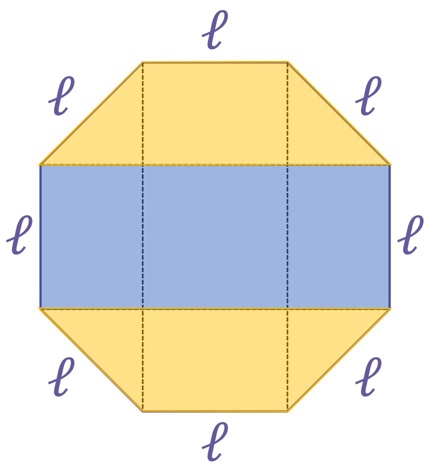
$$x^2 + x^2 = l^2$$

$$2x^2 = l^2$$

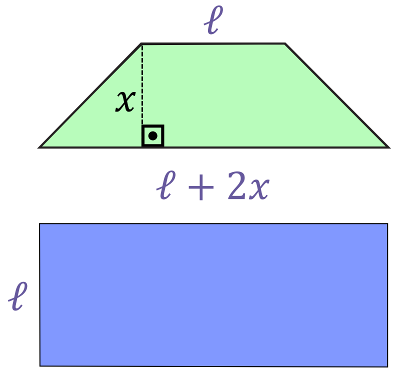
$$x^2 = \frac{l^2}{2}$$

$$x = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{2} \qquad (1)$$

Agora, observe na imagem abaixo que o octógono é formado por um retângulo (no meio) e dois trapézios (superior e inferior).



A figura abaixo mostra estes dois objetos, com suas respectivas medidas no octógono.



Assim, temos que a área do octógono regular pode ser calculada a partir do seguinte:

$$A_{oct} = 2.A_{trapézio} + A_{retângulo}$$

$$A_{oct} = 2.\frac{(l + l + 2x)}{2}.x + l.(l + 2x)$$

$$A_{oct} = (2l + 2x)x + l.(l + 2x)$$

$$A_{oct} = 2x^2 + 2lx + 2lx + l^2$$

$$A_{oct} = 2x^2 + 4lx + l^2$$

E substituindo (1) no valor de x, temos:

$$A_{oct} = 2.\left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4l.\left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right) + l^2$$

$$A_{oct} = l^2 + (2\sqrt{2}).l^2 + l^2$$

$$A_{oct} = 2l^2.(1 + \sqrt{2})$$

Por fim, vale ressaltar que o perímetro do octógono regular é $8l$.

Vamos fixar as ideias!

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um octógono regular possui lados de comprimento $\sqrt{\frac{1}{(1+\sqrt{2})}}$ cm. Encontre quanto vale a área do círculo delimitado pela circunferência circunscrita ao octógono.

Solução: Primeiramente, note que precisamos encontrar o raio da circunferência circunscrita ao octógono regular para acharmos a área do círculo. Temos que o raio possui a mesma medida do lado de um dos triângulos isósceles do octógono. Começamos a resolução escrevendo quanto vale a área do octógono em função do lado, pois sabemos quanto mede o lado:

$$A_{oct} = 2l^2.(1 + \sqrt{2})$$

$$A_{oct} = 2\left(\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{2}})}}\right)^{\mathbf{2}}.(1 + \sqrt{2})$$

$$A_{oct} = 2.\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{2}})}.(1 + \sqrt{2})$$

$$A_{oct} = 2\ cm^2$$

Assim, podemos calcular quanto vale o quadrado do raio da circunferência circunscrita:

$$8.A_{tri} = A_{oct} = 2\sqrt{2}.R^2$$

$$2\sqrt{2}.R^2 = 2$$

$$\sqrt{2}.R^2 = 1$$

$$R^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por fim, calculamos a área do círculo:

$$A_{círc} = \pi . R^2$$

$$A_{círc} = \pi . \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A_{círc} = \pi . \frac{\sqrt{2}}{2} \; cm^2$$

Assim, a área procurada é de $\pi . \frac{\sqrt{2}}{2} \; cm^2$.

Finalizamos assim o estudo dos polígonos regulares.

ANOTAÇÕES

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@biologiatotaloficial
@Prof_jubilut
biologiajubilut