AULA 1

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

"Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomar as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$"

Este simples princípio nos ajuda a resolver diversos problemas combinatórios, que muitas vezes achamos que não!
O segredo é muito treino e paciência na hora de tomar as decisões, daí vem a recomendação: Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar.
A resolução de um problema de contagem pode ser de quatro maneiras: Contagem Direta, Contagem Indireta, Dividindo em Casos e Contando por Recorrência. Vamos ver cada uma dessas técnicas.

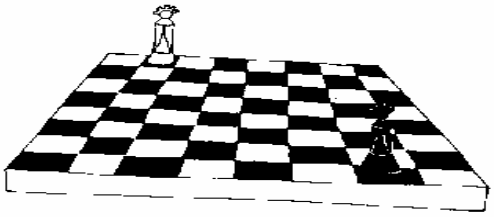
Exemplo 1. Quantos números naturais de 4 algarismos (na base 10) que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados, usando-se apenas os algarismos 2,3,4 e 5?
Solução: Temos: Ultimo algarismo temos 1 modo (tem que ser 5) o Primeiro algarismo tem 3 modos (não pode ser 5) o Segundo algarismo temos 4 modos e o Terceiro algarismo temos 4 modos. Portanto a resposta é $1 \times 3 \times 4 \times 4 = 48$

Observações:

- Este problema foi resolvido por contagem Direta.
- O primeiro algarismo não pode ser 5, pois então o número formado era maior que 5000 e o último algarismo é 5, pois o número deve ser múltiplo de 5.

Exemplo 2:

(a) De quantas maneiras podemos escolher um quadrado preto e um quadrado branco num tabuleiro de xadrez (isto é um tabuleiro 8 x 8)?
(b) De quantas maneiras podemos escolher um quadrado preto e um quadrado branco num tabuleiro de xadrez se os dois quadrados não podem pertencer à mesma linha ou coluna?



Solução: (a) O tabuleiro possui 32 quadrados brancos e 32 quadrados pretos. Para se escolher um quadrado preto existem 32 possibilidades e para a escolha de um quadrado branco temos, também, 32 possibilidades. Logo, temos 32 x 32 = 1024 maneiras distintas de se escolher um quadrado preto e um quadrado branco.
(b) Para se escolher um quadrado preto tem 32 possibilidades e para escolher um quadrado branco, diminuindo as possibilidades dos brancos na mesma linha e mesma coluna que o quadrado preto, temos 24 opções. Assim, temos 32 x 24 =768.

Observações:

- Este problema foi resolvido por contagem Direta.
- Problemas de Tabuleiros e Problemas de Pinturas são problemas muitos cobrados e servem para desenvolver muito o Raciocínio em Tecnicas de Contagem.

Exemplo 3. Quantos são os números naturais de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

Solução: Há 9 x 10 x 10 x 10 = 9000 números naturais de 4 dígitos e 9 x 9 x 8 x 7 = 4536 naturais de 4 dígitos diferentes. A resposta é 9.000 – 4.536 = 4.464.

Observações:

- Este problema foi resolvido por contagem Indireta, ou seja, contamos Todos os elementos de um conjunto, depois contamos os elemntos que não satisfazem o enunciado, depois fazemos uma subtração.
- Muitos Problemas de Escolas Militares ou Competições são resolvidos usando essa técnica de Contagem.

Exemplo 4. Quantos são os números de 5 algarismos, na base 10:

a) nos quais o algarismo 2 não figura?
b) nos quais o algarismo 2 figura?

Solução:

a) O primeiro dígito pode ser escolhido de 8 modos (não pode ser igual a 0 nem igual a 2) e cada um dos demais quatro dígitos pode ser selecionado de 9 modos (deve ser diferente de 2).
A resposta é 8 X 9^4 = 52 488.
b) A quantidade de números de 5 dígitos, com ou sem dígito 2, é 9 X 10^4 = 90 000 (pois há 9 modos de selecionar o primeiro dígito, que deve ser diferente de 0, e 10 modos de selecionar cada um dos demais 4 dígitos).
A resposta é 90 000 – 52 488 = 37 512.

Observações:

- Este problema foi resolvido por contagem Indireta, ou seja, contamos Todos os elementos de um conjunto, depois contamos os elemntos que não satisfazem o enunciado, depois fazemos uma subtração.
- Muitos Problemas de Escolas Militares ou Competições são resolvidos usando essa técnica de Contagem.

Exemplo 5. Quantos são os inteiros positivos, menores que 1 000 que tem seus dígitos no conjunto {1, 2, 3 }?

Solução: Olhando para a quantidade de algarismos dos números menores que 1000, vemos que eles podem possui:

1º Caso) Números de Um algarismo: Só podem ser 1, 2 ou 3. Logo três possibilidades.

2º Caso) Números de Dois algarismos: 3 possibilidades para as dezenas e 3 nas unidades.

Logo 3 x 3 = 9 possibilidades.

3º Caso) Números de Três algarismos: 3 possibilidades para as centenas, 3 para as dezenas e 3 para as unidades: 3 x 3 x 3 = 27 possibilidades.

Logo o total de números procurados são: 27 + 9 + 3 = 39 casos.

Observações:

- Este problema foi resolvido por Usando Divisão em Casos. Muitas vezes, se torna mais simples dividir um problema em vários casos e depois somar todas as quantidades encontradas.
- Muitos Problemas de Escolas Militares ou Competições são resolvidos usando essa técnica de Contagem.

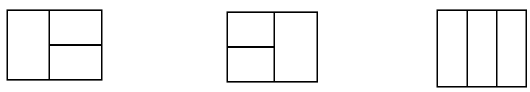
Exemplo 6. O código morse usa "palavra" contendo de 1 a 4 "letras", as "letras" sendo ponto e traço. Quantos "palavras" existem no código Morse?

Solução: Como há 2 palavras de uma letra, fica 2 x 2 = 4 palavras de duas letras, 2 x 2 x 2 = 8 palavras de três letras e 2 x 2 x 2 x 2= 16 palavras de 4 letras. A resposta é 2 + 4 + 8 + 16 = 30.

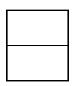
Observações:

- Este problema foi resolvido por Usando Divisão em Casos. Muitas vezes, se torna mais simples dividir um problema em vários casos e depois somar todas as quantidades encontradas.
- Muitos Problemas de Escolas Militares ou Competições são resolvidos usando essa técnica de Contagem.

Exemplo 7. Determine o número de maneiras de preencher um tabuleiro 2 x n com domínio 1 x 2.
Solução: Por exemplo, para $n = 3$, temos as seguintes três maneiras.



Denotemos por a_n o número de maneiras de preencher um tabuleiro 2 x n com dominós 1 x 2. Veja que $a_1 = 1, a_2 = 2$. Agora, se $n \geq 3$, podemos colocar o primeiro dominó "**em pé**" e daí precisamos preencher um tabuleiro $2x(n-1)$, o que pode ser feito que a_{n-1} maneiras; ou podemos colocar dois dominós "**deitados**"



e daí precisamos preencher um tabuleiro 2x$(n-2)$.
O que pode ser feito de a_{n-2} maneiras. Assim:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3.$$

Utilizando os dois valores inicias, $a_1 = 1, a_2 = 2$ e a relação de recorrência acima, podemos calcular a_n para qualquer valor de n.

Observações:

- Este problema foi resolvido Usando Recorrência, ou seja, definimos a_n e encontramos uma relação entre os termos anteriores da sequência.
- Muitos Problemas de Escolas Militares ou Competições são resolvidos usando essa técnica de Contagem.

Observações finais:

- Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.
- Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisões.
- Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar

PROBLEMAS DE APRENDIZAGEM 1

1.Considere o número $N = 2^4 \cdot 3^5$, responda o que se pede:

a)Quantos divisores positivos N possui?

b)Quantos desses divisores são pares?

c)Quantos desses divisores são divisíveis por 6?

2.Considere o conjunto $A = \{100,101, \dots ,999\}$

a)Quantos elementos A possui?

b)Quantos elementos de A, possuem os três algarismos distintos?

c)Quantos são os números de três algarismos que possuem pelo menos dois algarismos iguais?

d)Quantos elementos de A, são pares e possuem os três algarismos distintos?

3.De quantos modos se pode colocar na tabela abaixo duas letras A, duas letras B e duas letras C, uma em cada casa, de modo que não haja letras iguais na mesma coluna?

4.Determine o número de funções $f: \{1,2,3, \dots ,2018\} \to \{1,2\}$.

De modo que $f(1) + f(2) + \cdots + f(2018)$ seja ímpar.

5.Seja A um conjunto com n elementos. Determine, em função de n:

a)O número de subconjuntos de A.

b)O número de subconjuntos de A com dois elementos.

c)O número de subconjuntos de A com Três elementos.

6.De quantas maneiras podemos colocar, em cada espaço abaixo, um entre os algarismos 4, 5, 6, 7, 8, 9, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfazem a dupla desigualdade?

_ _ **>** _ _ **>** _ _

7.(LUÍS FARIAS/2009) Quantos são os números de três algarismos múltiplos de três, de modo que o algarismo das unidades deixe resto um quando dividido por três?

8.Um número de quatro dígitos é dito *paladino* se é múltiplo de 9 e nenhum de seus dígitos é nulo. Quantos números paladinos existem?

9.Suponha que você vai subir uma escada com 10 degraus. De quantas maneiras distintas você pode subir tal escada se a cada passo podemos subir 1 ou 2 degraus?

10. Quantas são as sequências de 11 dígitos, usando apenas os dígitos 1 e 2, tais que não ocorram dois 1's consecutivos?

11. Determine o número de pares ordenados $(x, y)\ com\ , 1 \le x < y \le 100$ de modo que

$$i^x + i^y \in \mathbb{R}, onde\ i = \sqrt{-1}\,.$$

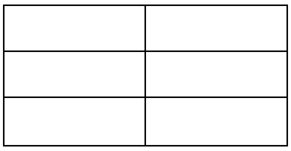
12.(OBM) Quantos números inteiros entre 10 e 1000 possuem seus dígitos em ordem estritamente crescente? (Por exemplo, 47 e 126 são números deste tipo; 52 e 566 não).

13. Quantas são as sequências de 10 termos, pertencentes a {0,1,2} que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?

14. Quantos são os subcontuntos de dois $\{a,b\}$ elemntos de $\{1,2,3,\ldots,1000\}$ de modo que $a.b$ é divível por 5.

15. Quantas são as triplas ordenadas de inteiros positivos (a,b,c) com $a,b,c < 10\ e\ a\cdot b\cdot c$ divisível por 20.

16.(LUÍS FARIAS/2008) Considere 6 carros $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ carros com a mesma letra são da mesma equipe. De quantos modos podemos colocá-los nos 6 espaços da figura abaixo de modo que em cada lugar fique somente um carro e carros da mesma equipe não podem estar emparelhados.



17. Em um tabuleiro de 5 filas e 3 colunas, deseja-se pintar de azul 6 casas de modo que, em cada coluna existam exatamente duas casas pintadas e em cada fila exista ao menos uma casa pintada. De quantas maneiras pode-se fazer isto?

18. Quantos são os subconjuntos de três elementos $\{a,b,c\}$ de inteiros positivos de modo que $a\cdot b\cdot c = 2310$?

19. Qual a quantidade de números inteiros positivos de oito algarismos, formados somente pelos algarismos 1,2 e 3 nos quais, cada um destes algarismos aparece pelo menos uma vez?

20. Um número de quatro dígitos é dito *peroba* se possui pelo menos dois dígitos vizinhos com a mesma paridade. Quantos números *perobas* existem?

PROBLEMAS DE FIXAÇÃO 1

1.Quantos números menores que 30 000 que possuem 5 algarismos distintos e pertencentes ao conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} ?

2.Quantos inteiros há entre 1000 e 9999 cujos algarismos são distintos?

3.Em uma banca de 5 exemplares iguais da revista A, 6 exemplares iguais da revista B e 10 exemplares iguais de revista C. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca é possível formar?

4.Quantos números diferentes podem ser formados multiplicando alguns (ou todos) dos números 1, 5, 6, 7, 7, 9, 9, 9?

5.O total de números formados com algarismos distintos maiores do que 50000 e menores do que 90000 e que são divisíveis por 5 é?

6.Em uma lanchonete, os sorvetes são divididos em três grupos: o vermelho, com 5 sabores; o amarelo, com 3 sabores; e o verde, com 2 sabores. Pode-se pedir uma casquinha com 1, 2 ou 3 bolas, mas cada casquinha não pode conter 2 bolas de um mesmo grupo. O número de maneiras distintas de se pedir uma casquinha é?

7.Na convenção de um partido para lançamento da candidatura de uma chapa ao governo de certo estado havia 3 possíveis candidatos a governador, sendo dois homens e uma mulher, e 6 possíveis candidatos a vice-governador, sendo quatro homens e duas mulheres. Ficou estabelecido que a chapa governador/vice-governador seria formada por duas pessoas de sexos opostos. Sabendo que os nove candidatos são distintos, o número de maneiras possíveis de se formar a chapa é ?

8.Considere o número $n = 2^5\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7^6$. Quantos divisores positivos possuem n? Quantos são pares? Quantos são quadrados perfeitos? Cubos perfeitos? Quantos são múltiplos de 6?

9.No senado federal, o distrito federal e os 26 estados da federação têm três representantes cada. Deve-se formar uma comissão de modo que todos os estados e o distrito federal estejam representados por 1 ou 2 senadores. De quantos modos essa comissão pode ser formada?

10. Existem 10 cadeiras numeradas de 1 até 10. De quantas formas duas pessoas podem se sentar, devendo haver ao menos uma cadeira entre elas?

11. Um vagão de um metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferências. De quantos modos os passageiros podem se sentar, respeitando-se as preferências?

12. De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?

13. Qual quantidade de números inteiros compreendidos entre 30000 e 65000 que podemos formar utilizando somente os algarismos 2, 3,4,6 e 7 de modo que não figurem algarismos repetidos?

14. Considere os números inteiros maiores que 64000 que possuem 5 algarismos todos distintos e que não contêm os dígitos 3 e 8. Qual a quantidade desses números?

15.(AMERICAN MATHEMATICS COMPETITIONS) Quantos números existem de quatro dígitos, $N = \overline{abcd}$ que satisfazem simultaneamente as condições?

$i)\ 4000 < N < 6000$ $ii)\ N$ é múltiplo de 5
$iii)\ 3 \leq b < c \leq 6$

16.(OBM) Escrevendo todos os números inteiros de 100 a 999, quantas vezes escrevemos o algarismo 5?

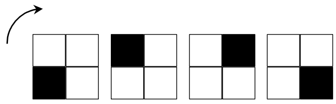
17.(AMERICAN INVITATIONAL MATHEMATICS EXAMINATION) Quantos são os inteiros pares entre 4000 e 7000 que possuem quatro dígitos distintos?

18.(AMERICAN INVITATIONAL MATHEMATICS EXAMINATION) Quantos são os números de três dígitos (na base 10), existem de modo que o algarismo das dezenas é média aritmética dos outros dois?

19.(AMERICAN INVITATIONAL MATHEMATICS EXAMINATION) Os números 1447, 1005, 1231,1889 possuem uma propriedade em comum. Todos eles possuem quatro dígitos e o primeiro algarismo é 1 e possuem exatamente dois dígitos iguais. Quantos desses números existem?

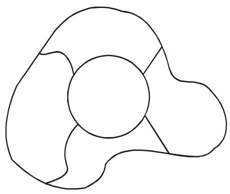
20.(OBM) Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. Por exemplo, ao mostrar 00:00 sabemos que é meia-noite e ao mostrar 23:59 sabemos que falta um minuto para meia-noite. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?
De quantos modos diferentes é possível colorir as casas de um tabuleiro 2 × 2 de branco ou preto de modo que não existam dois tabuleiros que coincidam por rotação?

21.(OBM) As 4 colorações a seguir são consideradas iguais por coincidirem por rotação.

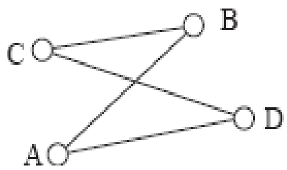


De quantos modos diferentes é possível colorir as casas de um tabuleiro 2 × 2 de branco ou preto de modo que não existam dois tabuleiros que coincidam por rotação?

22.(OBM) O desenho ao lado mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. Deseja-se colorir esse mapa com as cores verde, azul e amarela, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?



23.(AMERICAN MATHEMATICS COMPETITIONS) Temos 4 cores para pintar os pontos da figura abaixo. De quantos modos podemos fazer isto, se não podemos ter segmentos com dois vértices opostos da mesma cor?



24.A Figura 2.3 mostra um mapa com 4 países

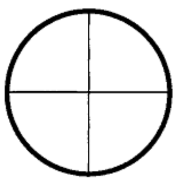


Fig 2.3

a)De quantos modos esse mapa pode ser colorido (cada país com uma cor, países com uma linha fronteira comum não podem ter a mesma cor) se dispomos de λ cores diferentes?

b)Qual o menor valor de λ que permite colorir o mapa?

25.(OBMEP) Quantos são os números ímpares, de cinco algarismos, nos quais a soma dos algarismos das unidades e das dezenas é 16 e a soma de todos os algarismos é um múltiplo de 5?

26.(OBMEP) O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e tres pares, sendo um deles o zero. Quantos números possuem exatamente essas características?

27.(OBM) Quantos números de 1 até 1983, podem ser escritos como soma de duas ou mais potências distintas de 3?

28.(OCM) Quantos valores diferentes podemos obter, multiplicando dois elementos distintos do conjunto {4,8,9,16,27,32,64,81,243} ?

29. Determine a quantidade de subconjuntos de $\{1,2,3,..,10\}$ que não possuem números consecutivos.

30. Quantas são as sequências de 10 termos, todos pertencentes a $\{A, B\}$ que possuem uma quantidade ímpar de termos iguais a A?

31. Quantas são as sequências de 10 termos, todos pertencentes a $\{A, B, C\}$ que possuem uma quantidade ímpar de termos iguais a A?

32. No basquete existem cestas de 1,2 e 3 pontos. De quantos modos distintos Hortência pode marcar 15 pontos?

33.(OBM) Os vértices de um decágono regular convexo **ABC...J** devem ser pintados usando-se apenas as cores verde, amarela e azul. De quantos modos isso pode ser feito se os vértices adjacentes não podem receber a mesma cor?

34.(OBM) Quantos subconjuntos {*a*, *b*, *c*} de três elementos distintos de {1, 2, 3, …, 100} são tais que *b* é a média aritmética de *a* e *c* (*a* < *b* < *c*)?

35.(AMERICAN INVITATIONAL MATHEMATICS EXAMINATION) De quantos modos podemos pintar as casas de um tabuleiro 2x2010, usando somente três cores, cada casa do tabuleiro só pode ser pintada de uma cor, e casas vizinhas não podem ter a mesma cor? (casas vizinhas são as casas com um lado comum).

36.(AMERICAN MATHEMATICS COMPETITIONS) Quantos são os números ímpares, que possuem três dígitos que são divisíveis por 3 e não possuem o algarismo 3 em sua representação?

37.(AMERICAN MATHEMATICS COMPETITIONS) Quantos são os números de três algarismos que não são divisíveis por 5, de modo que o algarismo da centena é igual ao algarismos das unidades, e a soma dos três algarismos é menor que 20?

38.(AMERICAN MATHEMATICS COMPETITIONS) Quantos divisores positivos de 10^{99} que são múltiplos de 10^{88}?

39.(OLIMPÍADA AUSTRALIANA) Considere os números de dez algarismos, sendo eles 1,2 ou 3, de modo que dois algarismos vizinhos diferem de 1. Quantos números assim formados existem?(Um exemplo de número: 1212321232).

40.(THE HARVARD-MIT TOURNAMENT) Quantas são as sequências formadas por cinco inteiros positivos da forma: (a, b, c, d, e) que satisfazem a dupla desigualdade: $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \leq a + b + c + d + e \leq 10$?

GABARITO

1) 240	**11) 43200**	**21) 6**	**31) 2391484**
2) 4536	**12) 460800**	**22) 6**	**32) 5768**
3) 461	**13) 66**	**23) 84**	**33) 1026**
4) 48	**14) 2160**	**24) ***	**34) 2450**
5) 2352	**15) 24**	**25) 360**	**35)) 2.3^{2010}**
6) 71	**16) 280**	**26) 540**	**36) 96**
7) 8	**17) 728**	**27) 120**	**37) 60**
8) 840;700;72;24.	**18) 45**	**28) 32**	**38) 144**
9) 6^{27}	**19) 432**	**29) 144**	**39) 64**
10) 72	**20) 105**	**30) 512**	**40) 116**

24) a) λ.(λ - 1).($λ^2$ - 3 λ + 3) b) 2.

SUGESTÕES E/OU RESOLUÇÕES

1) Solução:
Se os números são menores que 30000, então com os algarismos envolvidos a dezena de milhar não pode ser 3, 4 ou 5 pois os demais formariam um número maior que o limite informado. A dezena de milhar será, então 1 ou 2.

1ª escolha	2ª escolha	3ª escolha	4ª escolha	5ª escolha
2 possib.	5 possib.	4 possib.	3 possib.	2 possib.

Logo as possibilidades são: 2 x 5 x 4 x 3 x 2 = 240.

2) Solução:
O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (não pode 0); o segundo, de 9 modos (não pode ser igual ao primeiro); o terceiro, de 8 modos (deve ser diferente dos dois primeiros); o último, de 7 modos (deve ser diferente dos anteriores). A resposta é: $9x\ 9\ x\ 8\ x\ 7\ =\ 4.536$.

3) Solução:
Devemos decidir quantos exemplares de cada revista devem ser postos na coleção. Há 6 possibilidades para a revista A (0, 1, 2, 3, 4 ou 5 exemplares), 7 para a revista B e 11 para a revista C. O número de coleções é 6 x 7 x 11 = 462, e o número de coleções não vazias é 461.

4) Solução:
Note, inicialmente, que podemos imaginar o fator 1 presente em todos os produtos. Devemos escolher quantos fatores 5 são usados no produto (0 ou 1), quantos fatores 6 (0 ou 1), quantos fatores 7 (0, 1 ou 2) e quantos fatores 9 (0, 1, 2 ou 3). A resposta é 2 x 2 x 3 x 4 = 48.

9) Solução:
Se os senadores amazonenses são A, B e C, O Amazonas pode ser representado de 6 modos diferentes (A,B,C,AB,AC OU BC); analogicamente , o Acre pode ser representado de 6 modos diferentes, etc. Logo a resposta é 6^{27}.

11) Solução: O número de modos de acomodar os passageiros que pretendem sentar de frente é 5 x 4 x 3 x 2 = 120; o número de modos de acomodar os passageiros que pretendem sentar de costas é 5 x 4 x 3 = 60; o número de modos de acomodar os demais passageiros é 3 x 2 x 1 = 6. A resposta é 120 x 60 x 6 = 43 200.

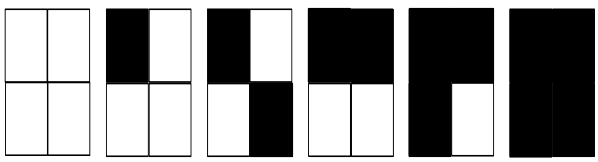
16) Solução:
Dividiremos o problema em três casos:

i)Números que possuem o 5 como algarismos das centenas
ii)Números que possuem o 5 como algarismo das dezenas
iii)Números que possuem o 5 como algarismos das unidades

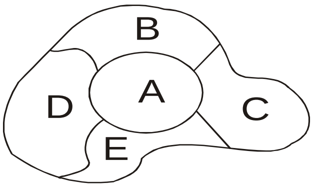
Em cada um destes números "tiramos" um 5 para nossa contagem, observe que o 555 está nos três tipos de números mas em cada um destes estamos olhando só para as unidades, dezenas ou centenas. Para (sabermos quantos números existem em i) basta vermos que temos 10 escolhas para o algarismo das dezenas e 10 escolhas para o algarismo das unidades totalizando 100 números. Para (sabermos quantos números existem em ii) temos 9 escolhas para o algarismo das centenas (não pode ser o zero) e 10 escolhas para o algarismo das unidades totalizando 90 números, de modo análogo temos 90 números em iii), e assim teremos que o 5 aparece 100+90+90=280 vezes.

20) Solução: As horas possíveis são 00, 02, 04, 06, 08, 20 e 22, totalizando 7 possibilidades. Para cada uma dessas horas, os minutos podem ser 00, 02, 04, 06, 08,..., 40, 42,..., 48, etc, num total de $3\times5=15$ possibilidades. Portanto, o número de vezes em que o relógio exibe apenas algarismos pares é $7\times15=105$.

21) Solução:
Há 6 possibilidades distintas de se colorir o tabuleiro



22) Solução: O estado A pode ser pintado de 3 formas: verde, azul ou amarelo. Para qualquer estado vizinho, por exemplo, o estado B, temos duas possibilidades e os demais estados têm suas cores determinadas (1 possibilidade). Logo, podemos colorir o mapa de 3 × 2 = 6 formas.



24) Solução:

a) Há λ modos de pintar o primeiro quadrado, λ – 1 modos de pintar o segundo quadrantes (não podemos usar a mesma cor do primeiro quadrante), λ- 1 modos de pintar o terceiro quadrante (não podemos usar a mesma cor do segundo quadrante) λ – 1 modos de pintar o quarto quadrante (não podemos usar a mesma cor do terceiro quadrante, nem a mesma cor do primeiro ; vamos abandonar esta última restrição e permitir que o quarto e o primeiro quadrantes tenham a mesma cor), o que daria λ. $(\lambda - 1)^3$ modos de colorir o mapa. Essa contagem, incorreta, inclui, indevidamente, mapas em que o primeiro e o quarto quadrante têm cores iguais. Tais mapas são em número de λ. (λ – 1).(λ - 2), pois há λ modos de escolher a cor única para o primeiro e o quarto quadrante e, depois disso, há λ – 1 modos de escolher a cor do segundo quadrante e λ – 2 modos de escolher a cor do terceiro quadrante.

A resposta $\lambda.(\lambda - 1)^3 - \lambda(\lambda - 1).(\lambda - 2) = \lambda.(\lambda - 1).[(\lambda - 1)^2 - (\lambda - 2)] = \lambda.(\lambda - 1).(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$.

b) É fácil ver que uma cor não basta a que é possível colorir o mapa com apenas duas cores, usando uma das cores nos quadrantes ímpares e a outra nos quadrantes pares.

25) Solução:

Como os números devem terminar em algarismo ímpar e a soma dos algarismos das unidades e das dezenas deve ser igual a 16, os números devem terminar em 79 ou 97 (2 possibilidades). Na casa das dezenas de milhar temos 9 possibilidades, pois os números, tendo cinco algarismos, não podem ter 0 nessa casa. Para a casa das unidades de milhar temos 10 possibilidades (todos os algarismos de 0 a 9) e, para cada uma das escolhas anteriores, podemos escolher o algarismo das centenas de duas maneiras distintas, a fim de que a soma de todos os algarismos do número seja um múltiplo de 5. Logo, há

$$2 \times 9 \times 10 \times 2 = 360 \text{ possibilidades.}$$

26) Solução:

Como se trata de um número de quatro algarismos, o algarismo 0 não pode ser colocado na unidade de milhar. Temos então 3 possibilidades para se colocar o algarismo 0. Colocado o zero sobram então três posições para se colocar o algarismo ímpar, e como há cinco algarismos ímpares, temos um total de 15 possibilidades para se colocar o algarismo ímpar no número. Colocado o algarismo 0 e o algarismo ímpar, sobram duas posições para se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos. Fazemos a escolha do primeiro algarismo par não nulo e o colocamos na primeira posição ainda não preenchida do número (há apenas 4 possibilidades de escolha: 2, 4, 6 e 8). Finalmente, preenchemos a última posição com outro número par não nulo, diferente daquele anteriormente colocado (3 possibilidades). Temos assim 12 possibilidades de se colocar os dois algarismos pares não nulos e distintos no número. Pelo Princípio Multiplicativo, o total de possibilidades é

$$3 \times 15 \times 12 = 540.$$

33) Solução: Seja a_n o número de maneiras de pintar os n vértices de um polígono regular de modo que vértices adjacentes não recebam a mesma cor. Vamos olhar a pintura no sentido horário do primeiro ao penúltimo vértice. Vamos achar a_{n+3} em função de a_{n+2} e a_{n+1}. Se o penúltimo vértice for uma cor diferente do 1º vértice, teremos somente uma cor para o último vértice e pudemos realizar tal pintura de a_{n+2} maneiras. Já se o penúltimo vértice tiver a mesma cor que o primeiro note que teremos duas cores para o vértice $n+2$ e pudemos realizar a pintura de a_{n+1} modos. Sendo assim podemos escrever $a_{n+3} = a_{n+2} + 2 \cdot a_{n+1}$, é fácil ver que: $a_1 = 0, a_2 = 0$ e $a_3 = 6$. Prosseguindo desta forma encontramos que $a_{10} = 1026$.

38) Solução:

Seja n um divisor de 10^{99} que é múltiplo de 10^{88}. Podemos escrevê-lo como $n = 10^{88} \cdot t$, sendo t inteiro positivo. Ademais, deve existir um k inteiro tal que

$$n \cdot k = 10^{99}$$
$$10^{88} \cdot t \cdot k = 10^{99}$$
$$t \cdot k = 10^{11}.$$

Logo t deve ser divisor de $10^{11} = 2^{11} \cdot 5^{11}$, ou seja, $t = 2^a \cdot 5^b$, com $0 \le a \le 11$ e $0 \le b \le 11$. Assim, precisamos contar o número de pares ordenados (a, b) com $0 \le a \le 11$ e $0 \le b \le 11$, para tal devemos obter o número de elementos resultantes do produto cartesiano

$$\{0,1,2,\ldots,11\} \times \{0,1,2,\ldots,11\},$$

e como $|\{0,1,2,\ldots,11\}| = 12$, ficaremos com $12 \cdot 12 = 144$.

39) Solução:

Podemos começar a escrever o número a partir da esquerda.

Começando com 1, o próximo algarismo só pode ser o 2; em seguida, podemos escrever 1 ou 3; o próximo, somente o 2; novamente, 1 ou 3; em seguida, somente o 2; novamente 1 ou 3; em seguida, somente o 2; mais uma vez, 1 ou 3; o último algarismo (o das unidades), somente o 2. Pelo princípio multiplicativo da contagem, podemos escrever $1\times1\times2\times1\times2\times1\times2\times1\times2\times1 = 16$ números diferentes. Começando com 3, ocorre o mesmo. Teremos, novamente, mais 16 números diferentes.

Se começarmos com o 2, o próximo é 1 ou 3; em seguida, 2, depois 1 ou 3, novamente 2, depois 1 ou 3, novamente 2, depois 1 ou 3, novamente 2, depois 1 ou 3 e, finalmente, o 1 ou 3 como algarismos das unidades. Pelo mesmo princípio, teremos $1\times2\times1\times2\times1\times2\times1\times2\times1\times2 = 32$ números diferentes. Portanto, no total teremos $16 + 16 + 32 = 64$ números assim formados.