OBJETIVO

ITA
Matemática

9

MÓDULO 33

Funções I

1. **(OPM)** – Seja f uma função dada por: f(1) = 17 e

$f(n) = \dfrac{n}{f(n-1)}$, para n natural, maior que 1. Calcule o produto f(1) . f(2) . f(3) . … . f(8).

2. **(OBM)** – Seja $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Quantas soluções têm a equação f(f(f(…f(x)))) = 2, na qual f é aplicada 2001 vezes?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 2001 e) 2^{2001}

3. Considere a função assim definida:
* f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$
* $f(n) = 0$, se o algarismo das unidades de n for 3
* $f(10) = 0$
* $f(n \,.\, m) = f(n) + f(m)$

a) Calcular f(2).
b) Calcular f(1991) e f(2008)
c) Calcular f(n)

4. **(FUVEST-2006)** – Uma função f satisfaz a identidade $f(ax) = af(x)$ para todos os números reais a e x. Além disso, sabe-se que $f(4) = 2$. Considere ainda a função $g(x) = f(x - 1) + 1$ para todo o número real x.
a) Calcule g(3).
b) Determine f(x), para todo x real.
c) Resolva a equação $g(x) = 8$.

MÓDULO 34

Funções I

1. **(OBM)** – Seja f: $\mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$, uma função tal que $f(x)f(y) - f(xy) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$, quaisquer que sejam os reais não nulos x e y.

a) Calcule f(1)

b) Encontre uma fórmula para f(x)

2. **(ITA)** – Sejam três funções f, u, v: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que: $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = f(x) + \dfrac{1}{f(x)}$ para todo x não nulo e $(u(x))^2 + (v(x))^2 = 1$ para todo x real. Sabendo-se que x_0 é um número real tal que $u(x_0) \cdot v(x_0) \neq 0$ e $f\left(\dfrac{1}{u(x_0)} \cdot \dfrac{1}{v(x_0)}\right) = 2$, o valor de $f\left(\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}\right)$ é:

a) –1 b) 1 c) 2 d) $\dfrac{1}{2}$ e) –2

3. **(IME-2007)** – Seja f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\sum\limits_{k=0}^{n} f(k) = 2008 \dfrac{(n+1)}{(n+2)}$, onde $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ são, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o dos números reais. Determine o valor numérico de $\dfrac{1}{f(2006)}$.

MÓDULO 35

Funções I

1. **(ITA)** – O conjunto de todos os valores de m para os quais a função

$$f(x) = \frac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+1)x + (m^2+2)}}$$

está definida e é não negativa para todo x real é:

a) $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{7}{4}\right[$ b) $\left]\dfrac{1}{4}, \infty\right[$ c) $\left]0, \dfrac{7}{4}\right[$

d) $\left]-\infty, \dfrac{1}{4}\right]$ e) $\left]\dfrac{1}{4}, \dfrac{7}{4}\right[$

2. **(OBM)** – Para todo n natural, definimos a função f por:

$f(n) = \dfrac{n}{2}$ se n é par, $f(n) = 3n + 1$ se n é ímpar. O número de soluções da equação $f(f(f(n))) = 16$ é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

3. Seja f: $\mathbb{R} - \{0; 1\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$f(x) = \dfrac{x - 1}{x}$.

Definindo $f_1(x) = f(x)$ e $f_n(x) = f(f(...f(x)...))$, em que f comparece n vezes $(n > 1)$, obtenha
$f_1(x) \,.\, f_2(x) \,.\, f_3(x)...f_{30}(x)$

MÓDULO 36

Funções I

1. A função f associa a cada real x o menor elemento do conjunto $\left\{x + 1; \dfrac{15 - x}{2}; \dfrac{2x + 5}{3}\right\}$. O valor máximo de f(x) é:

a) 1 b) 3 c) $\dfrac{15}{2}$ d) $\dfrac{16}{3}$ e) 5

2. Sejam f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que
$g(x) = 1 - x$ e $f(x) = 2f(2 - x) = (x - 1)^3$, para todo x e $\mathbb{R}$.

Então f[g(x)] é igual a
a) $(x - 1)^3$ b $(1 - x)^3$ c) x^3 d) x e) $2 - x$

3. Considere duas funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $2.f(x) = 3x - g(x)$ e $2.g(x) = x + 6 - 2.f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O ponto P de intersecção dos gráficos de f e g:
a) pertence ao semieixo positivo das abscissas.
b) pertence ao semieixo positivo das ordenadas.
c) pertence a bissetriz do primeiro quadrante.
d) pertence a bissetriz do segundo quadrante.
e) pertence a bissetriz do terceiro quadrante.

■ MÓDULO 33

1. **(ITA)** – Seja a função f : ℝ → ℝ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{se } x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{a}{x}\,\text{sen}\,x & \text{se } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

onde a > 0 é uma constante. Considere $k = \{y \in R;\ f(y) = 0\}$. Qual o valor de a, sabendo-se que $f(f(\frac{\pi}{2})) \in k$?

a) π/4 b) π/2 c) π d) $\pi^2/2$ e) π^2

2. **(ITA)** – Os valores de α, 0 < α < π e $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, para os quais a função f : ℝ → ℝ dada por: $f(x) = 4x^2 - 4x - tg^2\,\alpha$ assume seu valor mínimo igual a – 4, são:

a) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{2\pi}{5}$ c) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{7}$ e $\frac{2\pi}{7}$ e) $\frac{2\pi}{5}$ e $\frac{3\pi}{5}$

■ MÓDULO 34

1. **(IME)** – Dada a função $f(x) = \dfrac{(156^x + 156^{-x})}{2}$, demonstre que:

f(x + y) + f(x – y) = 2 f(x) f(y)

2. **(IME)** – Seja f: ℝ → ℝ, onde ℝ é o conjunto dos números reais, tal que $\begin{cases} f(4) = 5 \\ f(x+4) = f(x) \,.\, f(4) \end{cases}$. O valor de f(– 4) é:

a) $-\frac{4}{5}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $-\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{4}{5}$

■ MÓDULO 35

1. **(ITA)** – O domínio D da função

$$f(x) = \ell n \left[\frac{\sqrt{\pi x^2 - (1 + \pi^2)\,x + \pi}}{-2x^2 + 3\pi x} \right]$$

é o conjunto

a) D = {x e ℝ : 0 < x < 3π/2}
b) D = {x e ℝ : x < 1/π ou x > π}
c) D = {x e ℝ : 0 < x ≤ 1/π ou x ≥ π}
d) D = {x e ℝ : x > 0}
e) D = {x e ℝ : 0 < x < 1/π ou π < x < 3π/2}

2. **(IME)** – Considere os conjuntos A = {(1, 2), (1, 3), (2, 3)} e B = {1, 2, 3, 4, 5}, e seja a função f : A → B tal que:

f(x, y) = x + y

É possível afirmar que f é uma função:

a) injetora b) sobrejetora c) bijetora
d) par e) ímpar

■ MÓDULO 36

1. **(ITA)** – Seja f : ℝ → ℝ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ se } x \leq 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } 0 < x < 1 \\ \ell n\, x, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Se D é um subconjunto não vazio de ℝ, tal que f: D → ℝ é injetora, então:

a) D = ℝ e f(D) = [–1, + ∞[
b) D =] –∞, 1] ∪] e, + ∞ [e f(D) =] –1, +∞[
c) D = [0, + ∞[e f(D) =]–1, +∞[
d) D = [0,e] e f(D) = [–1, 1]
e) n. d. a.

Notação: f(D) = {y, ∈ ℝ : y = f(x), x ∈ D} e ℓn x denota o logaritmo neperiano de x.

Observação: Esta questão pode ser resolvida graficamente.

2. **(ITA)** – Considere a função y = f(x), definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$, para cada x real.

Sobre esta função, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) y = f(x) é uma função par.
b) y = f(x) é uma função ímpar.
c) f(x) ≥ 0 para todo real x.
d) f(x) ≤ 0 para todo real x.
e) f(x) tem o mesmo sinal de x, para todo real x ≠ 0.

■ MÓDULO 33

1) a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{\frac{\pi}{2}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi}$

b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi} < \frac{\pi}{2}$, pois $a > 0$

c) Como $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \in k, f\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$ e $a > 0$, temos:

$a \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \left(\pi - \frac{2a}{\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\pi^2}{2}$

Resposta: D

2) O minimante de f é $x = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$

Se o valor mínimo de f é – 4 então:

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - \text{tg}^2\,\alpha = -4 \Leftrightarrow \text{tg}^2\,\alpha = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{3}$

Se $0 < \alpha < \pi$ então $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

Resposta: C

■ MÓDULO 34

1) Considerando uma função f do tipo $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$, como $0 < a \neq 1$.

$f(x + y) + f(x - y) = \frac{a^{x+y} + a^{-(x+y)}}{2} + \frac{a^{x-y} + a^{-(x-y)}}{2} =$

$= \frac{a^x \cdot a^y + a^{-x} \cdot a^{-y} + a^x \cdot a^{-y} + a^{-x} \cdot a^y}{2} =$

$= \frac{a^x \cdot (a^y + a^{-y}) + a^{-x} \cdot (a^y + a^{-y})}{2} =$

$= \frac{(a^y + a^{-y}) \cdot (a^x \cdot + a^{-x})}{2} = 2. \frac{(a^x \cdot + a^{-x})}{2} \cdot \frac{(a^y + a^{-y})}{2} =$

$= 2 \cdot f(x) \cdot f(y)$

Se a igualdade é válida para qualquer valor real de a, com $0 < a \neq 1$, é válida também para $a = 156$, demonstrando a igualdade proposta.

Resposta: Demonstração.

2) $f(x + 4) = f(x) \cdot f(4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(0 + 4) = f(0)\, f(4) \Leftrightarrow 5 = f(0) \cdot 5 \Leftrightarrow f(0) = 1$

$f(-4 + 4) = f(-4) \cdot f(4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(0) = = f(-4) \cdot f(4) \Leftrightarrow 1 = f(-4) \cdot 5 \Leftrightarrow f(-4) = \frac{1}{5}$

Resposta: D

■ MÓDULO 35

1) $f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{\pi x^2 - (1 + \pi^2)\, x + \pi}}{-2x^2 + 3\pi x} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x^2 - (1 + \pi^2)\, x + \pi > 0 \\ \text{e} \\ -2x^2 + 3\pi x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x < 1/\pi \text{ ou } x > \pi) \\ \text{e} \\ 0 < x < 3\pi/2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

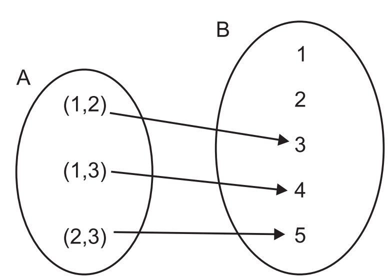
$\Leftrightarrow \boxed{0 < x < 1/\pi \text{ ou } \pi < x < 3\pi/2}$

Resposta: E

2) $f(1, 2) = 1 + 2 = 3$

$f(1, 3) = 1 + 3 = 4$

$f(2, 3) = 2 + 3 = 5$



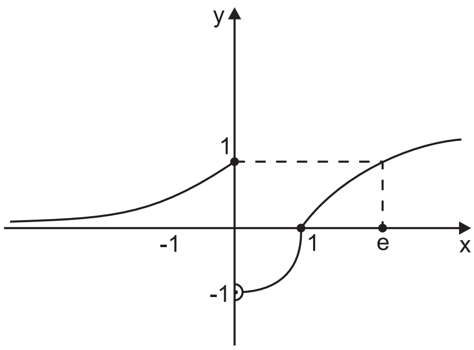
Pelo diagrama de flechas ao lado, tem-se que a função e injetora, mas não é sobrejetora.

Resposta: A

■ MÓDULO 36

1) O gráfico de função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x, \text{ se } x \le 0 \\ x^2 - 1, \text{ se } 0 < x < 1 \\ \ell n\, x, \text{ se } x > 1 \end{cases} \quad \text{é:}$$



Nos intervalos $\mathbb{R}$, $[0, +\infty[$ e $[0, e]$ a função f não é injetora, pois $f(0) = f(e) = 1$.
Observemos, pelo gráfico, que $\forall\ y \in]-1, +\infty[$, existe um único $x \in]-\infty, 1] \cup]e, +\infty[$ tal que $f(x) = y$.
Assim, f é injetora no intervalo
$D =]-\infty, 1] \cup]e, +\infty[$ e $f(D) =]-1, +\infty[$
Resposta: B

2) Considerando que:
1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x = x(x^2 - 2x + 5)$
2) $x^2 - 2x + 5 > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}$,
conclui-se que f(x) tem o mesmo sinal de x, para todo real $x \neq 0$.
Resposta: E