Livro Eletrônico

Aula 03

Matemática II p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Ismael de Paula dos Santos, Italo Marinho Sá Barreto

Aula 03: Matrizes: conceito, tipos especiais, operações e matriz inversa.

Sumário

Olá estimado aluno. É um prazer tê-lo conosco novamente neste novo trajeto para o aprendizado da matemática! Sou o professor **Italo Marinho**, formado em matemática pela UERJ; atuo no ensino de matemática e física no estado do Rio de Janeiro há 12 anos com enfoque em concursos militares. Me especializei na produção de materiais didáticos dentro do mesmo enfoque.

Hoje falaremos sobre matrizes. Esse é o início de um trio de matérias super importantes para você: matrizes, determinantes e sistemas lineares. Matrizes, na verdade, nunca caíram exclusivamente na EAM. Esse será o primeiro edital em que cai esse específico assunto.

Porém, aqui nos preparamos para tudo. Queremos que você esteja preparado para qualquer armadilha que a prova possa vir a te propor. E daí o porquê de estarmos estudando matrizes nesse momento. Veremos muitas questões de concursos similares, que acreditamos será a base a ser cobrada. Estude com afinco esse conteúdo para não sermos pegos de surpresa na hora da prova. Beleza?

Essa é uma área de estudos conhecida como *Álgebra Linear*. É assim chamada por manter como pricnipais operações a adição e a multiplicação. Veremos que quase sempre manteremos as mesmas propriedades que conhecemos sobre números reais (única exceção para a multiplicação de matrizes, um pouco mais complicada). Mas estarei aqui com você para que a aprendizagem seja suave e interessante para todos.

Resolva nossos exercícios antes de ver a solução. Mas não tenha medo de olhá-la! Não é desonra alguma, Exatas se aprende assim. Então vamos lá!

DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Razões e proporções: razão de duas grandezas, proporção e suas propriedades, escala, divisão em partes direta e inversamente proporcionais, regra de três simples e composta.*
Aula 01	*Porcentagem; Juros Simples; Juros Compostos*
Aula 02	*Sequências numéricas: Lei de formação de uma sequência. Progressões aritméticas e geométricas: termo geral, soma dos termos e propriedades.*
Aula 03	*Matrizes: conceito, tipos especiais, operações e matriz inversa.*
Aula 04	*Determinantes: conceito, resolução e propriedades.*
Aula 05	*Sistemas lineares: resolução, classificação e discussão.*
Aula 06	*Números complexos: O número "i". Conjugado e módulo de um número complexo. Representação algébrica e trigonométrica de um número complexo. Operações nas formas algébrica e trigonométrica.*
Aula 07	*Polinômios (parte 1): Função polinomial; polinômio identicamente nulo; grau de um polinômio; identidade de um polinômio, raiz de um polinômio; operações com polinômios; valor numérico de um polinômio. Divisão de polinômios, Teorema do Resto, Teorema de D'Alembert, dispositivo de Briot-Ruffini.*
Aula 08	*Polinômios (parte 2): Equações polinomiais: Definição, raízes e multiplicidade. Teorema Fundamental da Álgebra. Relações entre coeficientes e raízes. Raízes reais e complexas.*
Aula 09	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 10	*Geometria analítica: Ponto: o plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, condição de alinhamento de três pontos. Estudo da reta: equação geral e reduzida; interseção, paralelismo e perpendicularidade entre retas; distância de um ponto a uma reta; área de um triângulo.*
Aula 11	*Estudo da circunferência: equação geral e reduzida; posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e duas circunferências; tangência.*
Aula 12	*Análise combinatória: Fatorial: definição e operações. Princípio Fundamental da Contagem. Arranjos, permutações e combinações.*
Aula 13	*Probabilidade: Experimento aleatório, espaço amostral, evento. Probabilidade em espaços amostrais equiprováveis. Probabilidade da união e interseção de eventos. Probabilidade condicional. Eventos independentes.*
Aula 14	*Noções de estatística: População e amostra. Frequência absoluta e frequência relativa. Medidas de tendência central: média aritmética, média aritmética ponderada, mediana e moda.*
Aula 15	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

1.0– Matrizes: definição e operações

1.1– Definição: o que vem a ser uma matriz?

Então aqui vamos nessa nova estrada para aprendermos tudo sobre a álgebra das matrizes, o primeiro tópico da chamada *álgebra linear*.

Uma matriz é uma lista de termos organizados sob forma de linhas e colunas.

Suponha, por exemplo, que você tenha feito uma lista de todas as suas disciplinas anuais na escola, reunindo todas as médias bimestrais. Vejamos um exemplo de tabela possível:

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	9	10	10	10
Física	7	9	8	10
Química	4	10	7	8
Português	5	10	10	7
Inglês	5	6	9	8
Espanhol	10	10	10	8
História	4	5	10	8
Geografia	10	7	7	6
Ed. Física	10	10	7	6
Ed. art.	10	8	9	9

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 10 & 10 & 10 \\ 7 & 9 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 7 & 8 \\ 5 & 10 & 10 & 7 \\ 5 & 6 & 9 & 8 \\ 10 & 10 & 10 & 8 \\ 4 & 5 & 10 & 8 \\ 10 & 7 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 7 & 6 \\ 10 & 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Veja que ao lado da tabela construímos uma versão descontextualizada da mesma dentro de parênteses e com todos os seus dados reunidos em linhas e colunas. Trata-se de nossa primeira matriz.

Veja então que a matriz, ao ser construída, está inicialmente descontextualizada. E faz, na verdade, todo o sentido do mundo que o façamos assim. Antes de aprendermos a contar quantas moedas temos no bolso, aprendemos a contar de modo descontextualizado. Matrizes seguem mais ou menos o mesmo raciocínio.

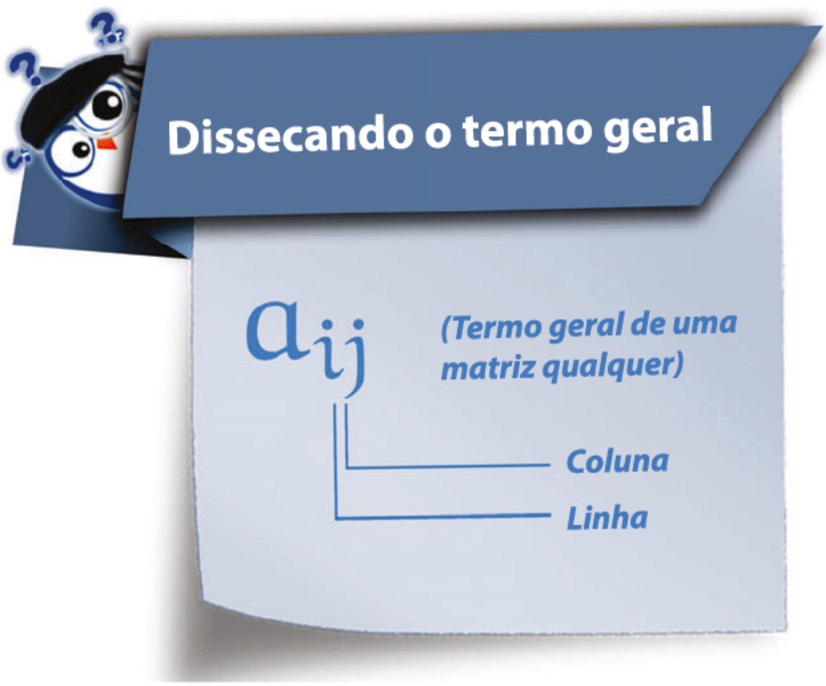
A grosso modo sim, coruja! Só se lembre sempre que elas não precisam estar contextualizadas. São simplesmente formas organizadas de termos na configuração linha-coluna. Não mais que isso. Tudo bem? E não se assuste com o assunto novo. Vamos lá!

Elemento de uma matriz

Matrizes podem ser representadas entre parênteses ou entre colchetes, tanto faz. Veja abaixo exemplos de ambas as representações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Uma matriz em geral é nomeada com uma letra maiúscula de nosso alfabeto. Um termo qualquer de uma matriz é representado pela letra minúscula da matriz correspondente, seguido por dois índices: i e j, indicando, respectivamente, a linha e a coluna em que aquele elemento se encontra.



Temos então um novo código para introduzirmos em nossas vidas: a representação do termo geral de uma matriz. É, na verdade, um código muito fácil de se lidar. Basta prestarmos atenção dos dois índices abaixo da representação. O termo a_{23} de uma matriz qualquer, por exemplo, sempre representará o elemento que se encontra em sua segunda linha e em sua terceira coluna. No caso da matriz exemplo que iniciou esse capítulo, podemos dizer que $a_{23} \quad 8$. Conseguiu verificar? Muito bem, então, podemos continuar. Vejamos agora algumas formas extras de representação de matrizes.

Representações

Matrizes possuem formas bastante específicas de serem representadas. Vejamos essas formas em detalhes:

- Uma das formas é, claro, a forma de tabela que acabamos de ver. Vejamos alguns exemplos dessa representação: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 25 & 36 & 49 & 64 \\ 81 & 100 & 121 & 144 \end{bmatrix}$.

- Outra forma muito comum é aquela em que apenas escrevemos o formato da matriz. A matriz $A \quad \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 12 & 16 \\ 17 & 18 \\ 19 & 200 \end{bmatrix}$ seria representada, por exemplo, simplesmente como $A_{4\times 2}$. Em geral a matriz é representada por $A_{m\times n}$, onde m é a quantidade de linhas e n a quantidade de colunas. No decorrer de nosso material, sempre que utilizarmos as letras m e n estaremos nos comunicando de acordo com esse código.

- Em alguns casos veremos uma matriz A ser representada pelo símbolo $A \quad [a_{ij}]$. Muita vezes veremos textos e questões colocando a ordem da matriz abaixo dos colchetes dessa notação: $[a_{ij}]_{m\times n}$.

- Uma última forma de representarmos matriz é *por regra*. Apresentamos regras para a construção de cada elemento e daí, por lógica, constrói-se a matriz. Vejamos um exemplo:

$$A_{3\times 3} \quad \begin{cases} i + j, \text{ se } i \quad j \\ i \cdot j, \text{ se } i \ / \ j \end{cases}$$

Essa é uma matriz que, da forma proposta, está perfeitamente definida. Como conseguiríamos escrevê-la de modo numérico?

Bom, primeiro, vemos que se trata de uma matriz 3×3, isto é, tem três linhas e três colunas. Então, tem o seguinte formato:

$$A \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Veja que para a_{11}, a_{22} e a_{33}, temos o caso em que $i \quad j$. Então, vale que $a_{11} \quad 1 + 1 \quad 2$, $a_{22} \quad 2 + 2 \quad 4$ e $a_{33} \quad 3 + 3 \quad 6$. Para todos os outros elementos, a regra nos diz que $i \cdot j$. Então:

$$A \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1+1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \\ 2\cdot 1 & 2+2 & 2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3+3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Conseguimos montar a forma numérica dessa matriz a partir, então, de sua forma *em regra*.

Essas são, então, as formas mais comuns de representações matriciais.

Vou te responder te propondo uma situação de prova: imagine que alguma banca te proponha alguma dessas representações de matrizes, e suponhas que caia EXATAMENTE aquela representação que você escolheu pular. E aí? Como você vai lidar com ela? No mínimo você precisará pensar um pouco antes de tirar conclusões sobre a mesma, e isso pode te consumir tempo ou mesmo te custar a questão inteira. Então, sim! Temos de reconhecer e conhecer todas essas representações de matrizes. Nada de preguiça. Uma seleção mal feita de conteúdos a estudar pode te custar os décimos de uma futura classificação em seu concurso. Beleza? Sigamos!

1.2– Operações fundamentais

Faremos agora considerações sobre a *álgebra* das matrizes. Falaremos sobre quatro operações, essencialmente: adição/subtração, multiplicação por escalar, multiplicação e inversão (que não é bem uma operação, mas sim uma transformação).

Está bem comunicativa hoje, não é, coruja? Sinal que está estudando e com empenho em passar. Mas sim, matrizes podem ser operadas e são operadas *quase* que como os números reais o são. Digo *quase* porque a multiplicação de matrizes possui propriedades um pouco distintas daquelas que os números reais possuem. Por exemplo, nos números reais a ordem dos fatores não altera o produto, correto? Em matrizes, nem sempre isso é verdade. Aliás, quase nunca será verdade. Mas a adição e a subtração são bem parecidas mesmo. Vejamos a seguir.

Adição e subtração

Duas matrizes nem sempre podem ser somadas. Para que possam, é necessário que possuam as mesmas *ordens*. Então, se uma matriz A tem ordem $m \times n$, para que possa ser "somável" a uma outra matriz B é necessário que B também seja da ordem $m \times n$. Quando isso acontece dizemos que as matrizes A e B são *compatíveis com a adição*[1]. Vejamos duas matrizes compatíveis com a adição:

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, B \quad \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \\ \pi & 9 \end{pmatrix}.$$

Ambas as matrizes acima são da ordem 3×2 e, portanto, são compatíveis com a adição. E como fazemos para somá-las? Basta adicionar cada elemtno a_{ij} com seu correspondente b_{ij}. Para as matrizes que criamos, a soma ficaria assim:

$$\begin{aligned} A + B \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \\ \pi & 9 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + (-3) \\ 4 + 1 & 6 + 4 \\ 8 + \pi & 10 + 9 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 10 \\ 8 + \pi & 19 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 10 \\ 8 + \pi & 19 \end{pmatrix}$ é, então, a matriz-soma das matrizes A e B.

A soma de duas matrizes A e B possui as seguintes propriedades:

- *Fechamento:* Se duas matrizes A e B são da ordem $m \times n$, isto é, são compatíveis com a adição, então a matriz $A + B$ também será da ordem $m \times n$.
- *Comutativa:* $A + B \quad B + A$.
- *Associativa:* $(A + B) + C \quad A + (B + C)$.

[1]Alguns textos não utilizam o termo "compatível", preferem utilizar o termo "conformável"; diríamos então que tais duas matrizes são conformáveis com a adição.

- *Elemento neutro:* Existe uma matriz chamada *matriz nula*[2], matriz com todos os seus elementos nulos que possui a mesma ordem de A. Essa matriz, quando somada com a matriz A, resulta na própria matriz.
- *Matriz oposta:* Existe uma matriz $-A$ que, quando somada com a matriz A, resulta na matriz nula apresentada no tópico anterior.

Não há mistérios também quanto à multiplicação de matrizes. Vamos novamente uilizar nossas duas matrizes A e B anteriores para que possamos nos tranquilizar quanto a essa operação:

$$
\begin{aligned}
A - B \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \\ \pi & 9 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2-(-3) \\ 4-1 & 6-4 \\ 8-\pi & 10-9 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 8-\pi & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Veja que, novamente, basta subtrair cada elemento da matriz A pelos seus correspondentes na matriz B.

A representação algébrica da soma de matrizes é:

$$[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} \qquad [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

Nenhum, nenhum, coruja! De fato, somar matrizes é muito fácil. É só somar cada elemento com o seu correspondente, sem maiores complicações. A próxima operação também não complica em nada. É tão trivial quanto essa que acabamos de ver. A possível dificuldade, talvez, seja com a *multiplicação de matrizes*, um pouco diferente da multiplicação entre números reais. Mas com calma e paciência *tiraremos de letra*, certo? Sigamos então.

[2] Veremos mais sobre ela na seção de classificações de matrizes.

Multiplicação por escalar

Multiplicar uma matriz por um escalar é multiplicar uma matriz por um *número real*. Representaremos esse número por λ (letra grega "lambda"). Então daqui em diante, $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizarei também variações de λ com índices, como λ_1, λ_2. Serão números reais da mesma forma. Vejamos então como funciona o produto de uma matriz por um número real, isto é, por um escalar.

Para multiplicarmos uma matriz por λ, basta multiplicar *cada elemento da matriz* por λ. Simples assim. Vejamos uma situação assim:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & 8 & 18 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 \\ -2 & 16 & 36 \end{pmatrix}.$$

A forma algébrica de escrevermos a multiplicação de uma matriz A por um escalar a_{ij} é:

$$\lambda \cdot [a_{ij}]_{m\times n} \quad [\lambda \cdot a_{ij}]_{m\times n}.$$

A multiplicação por escalar comporta as seguintes propriedades:

- *Associativa:* $(\lambda_1\lambda_2)A \quad \lambda_1(\lambda_2 A)$.
- *Distributividade escalar:* $\lambda \cdot (A + B) \quad \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.
- *Distributividade matricial:* $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A \quad \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot A$.
- *Produto por -1:* $(-1) \cdot A \quad -A$.
- *Produto por 0:* $0 \cdot A \quad$ matriz nula.
- *Produto por 1:* $1 \cdot A \quad A$.

Com isso fica claro então que a subtração que vimos agora há pouco, isto é, a operação $A - B$ nada mais é que $A + (-B)$, isto é, a soma de A pelo oposto (ou simétrico) de B.

Vamos agora à multiplicação de matrizes. Aqui, precisaremos de bastante calma. Não é a coisa mais simples do mundo.

Multiplicação de matrizes

Começarei com um exemplo simples, uma situação problema. Imagine que uma empresa possua duas confeitarias chamadas de A e B, que fabricam três tipos de bolos chamados de 1, 2 e 3. As vendas de bolos destas confeitarias, por semana, estão apresentadas na tabela que segue:

Confeitaria	Bolo tipo 1	Bolo tipo 2	Bolo tipo 3
A	50 unidades	30 unidades	25 unidades
B	20 unidades	20 unidades	40 unidades

Para a fabricação destes bolos, são necessários materiais conforme a seguinte tabela:

Bolo	Farinha	Acúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Tipo 1	$500\,\text{g}$	$200\,\text{g}$	$500\,\text{mL}$	$150\,\text{g}$	4
Tipo 2	$400\,\text{g}$	$100\,\text{g}$	$300\,\text{mL}$	$250\,\text{g}$	5
Tipo 3	$450\,\text{g}$	$150\,\text{g}$	$600\,\text{mL}$	$0\,\text{g}$	6

Que quantidade destes materiais cada confeitaria deverá receber semanalmente para atender às demandas?

E aí? Você consegue resolver esse exercício? tente resolvê-lo, antes de continuarmos. Vou dar uma ajuda para você. tente preencher a tabela abaixo de acordo com as respostas que for encontrando. Vou deixá-la em branco para ir te ajudando. Mas olha: é pra tentar mesmo. Fará toda a diferença se já tiver tentado preenchê-la. E se não conseguir, não tem problema. basta tentar.

Confeitaria	Farinha	Acúcar	Leite	Manteiga	Ovos
A					
B					

Vou começar, no próximo parágrafo, a solução desse problema. Se ainda estiver tentando ou nem começou, pare agora mesmo, tente, e só depois retorne à leitura. Bom, vamos então à solução.

Vamos entender o que estamos tentando calcular. Vamos tentar, por exemplo, inicialmente, descobrir quantos gramas de farinha a confeitaria A recebeu. Há três tipos de bolos confeitados por A: tipo 1, tipo 2 e tipo 3. Foram 50 unidades do bolo tipo 1, que consome $500\,\text{g}$ de farinha; 30 unidades do bolo tipo 2, que consome $400\,\text{g}$ de farinha; e 25 unidades de bolo tipo 3, que consome $450\,\text{g}$ de farinha. Então, o total de farinha consumido pela confeitaria A será:

$$\underbrace{50\cdot 500}_{\text{50 unidades com 500 g cada}} + \underbrace{30\cdot 400}_{\text{30 unidades com 400 g cada}} + \underbrace{25\cdot 450}_{\text{25 unidades com 450 g cada}} \qquad \underbrace{48250\,\text{g}}_{\text{Total de farinha produzida por } A}$$

.

Bom, então já conseguimos completar um dos espaços da tabela, correto? Seria o caso:

Confeitaria	Farinha	Acúcar	Leite	Manteiga	Ovos
A	48250				
B					

Perceba então qual foi a operação que fizemos para encontrarmos esse valor: pegamos cada elemento da primeira linha da primeira tabela e multiplicamos pela primeira coluna da segunda tabela.

Para facilitarmos as coisas, transformarei cada uma dessas tabelas em matrizes, assim como fizemos no início desse capítulo. Façamos isso então:

Confeitaria	Bolo tipo 1	Bolo tipo 2	Bolo tipo 3
A	50 unidades	30 unidades	25 unidades
B	20 unidades	20 unidades	40 unidades

$$\rightarrow X \qquad \begin{pmatrix} 50 & 30 & 25 \\ 20 & 20 & 40 \end{pmatrix}$$

Criamos então a matriz X, que é a matriz que nos diz as unidades de produção. Agora criaremos a matriz Y, com a quantidade específica de cada produto:

Bolo	Farinha	Acúcar	Leite	Manteiga	Ovos
Tipo 1	$500\,g$	$200\,g$	$500\,mL$	$150\,g$	4
Tipo 2	$400\,g$	$100\,g$	$300\,mL$	$250\,g$	5
Tipo 3	$450\,g$	$150\,g$	$600\,mL$	$0\,g$	6

$$\rightarrow Y \qquad \begin{pmatrix} 500 & 200 & 500 & 150 & 4 \\ 400 & 100 & 300 & 250 & 5 \\ 450 & 150 & 600 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Eis uma visão melhor de que linha e que coluna multiplicamos para obtermos o resultado 48250:

$$\begin{pmatrix} \boxed{50 \quad 30 \quad 25} \\ 20 \quad 20 \quad 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 500 \\ 400 \\ 450 \end{matrix}} & \begin{matrix} 200 & 500 & 150 & 4 \\ 100 & 300 & 250 & 5 \\ 150 & 600 & 0 & 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Perceba então que se quiséssemos, agora, descobrir a quantidade de açúcar consumida pela confeitaria A, bastaria multiplicarmos a mesma linha pela coluna seguinte:

$$\begin{pmatrix} \boxed{50 \quad 30 \quad 25} \\ 20 \quad 20 \quad 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 500 \\ 400 \\ 450 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 200 \\ 100 \\ 150 \end{matrix}} & \begin{matrix} 500 & 150 & 4 \\ 300 & 250 & 5 \\ 600 & 0 & 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Veja mais esse cálculo, para fixarmos bastante o conteúdo:

$$\underbrace{50 \cdot 200}_{\text{50 unidades com 200 g cada}} + \underbrace{30 \cdot 100}_{\text{30 unidades com 100 g cada}} + \underbrace{25 \cdot 150}_{\text{25 unidades com 150 g cada}} \qquad \underbrace{16750\,g}_{\text{Total de açúcar produzido por } A}$$

.

Completamos então mais um elemento da tabela final:

Confeitaria	Farinha	Acúcar	Leite	Manteiga	Ovos
A	48250	16750			
B					

A operação que estamos fazendo é justamente a forma de *multiplicarmos matrizes*. Multiplicamos cada linha da matriz X pelas colunas da matriz Y.

É claro que não continuarei fazendo isso para cada elemento, mas faremos a seguir um resumo de todos os cálculos restantes. Preencherei o restante da tabela com variáveis gerais de matrizes:

Confeitaria	Farinha	Acúcar	Leite	Manteiga	Ovos
A	48250	16750	c_{13}	c_{14}	c_{15}
B	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}

Já encontramos que $c_{11} \quad 48250$ e c_{12}. encontraremos agora o restante dos elementos:

$$\begin{aligned}
c_{13} &\quad 50 \cdot 500 + 30 \cdot 300 + 25 \cdot 600 \quad 49000. \\
c_{14} &\quad 50 \cdot 150 + 30 \cdot 250 + 25 \cdot 0 \quad 15000. \\
c_{15} &\quad 50 \cdot 4 + 30 \cdot 5 + 25 \cdot 6 \quad 500. \\
c_{21} &\quad 20 \cdot 500 + 20 \cdot 400 + 40 \cdot 450 \quad 36000. \\
c_{22} &\quad 20 \cdot 200 + 20 \cdot 100 + 40 \cdot 150 \quad 12000. \\
c_{23} &\quad 20 \cdot 500 + 20 \cdot 300 + 40 \cdot 600 \quad 40000. \\
c_{24} &\quad 20 \cdot 150 + 20 \cdot 250 + 40 \cdot 0 \quad 8000. \\
c_{25} &\quad 20 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 40 \cdot 6 \quad 420.
\end{aligned}$$

A tabela final fica, então:

Confeitaria	Farinha	Acúcar	Leite	Manteiga	Ovos
A	48250	16750	49000	15000	500
B	36000	12000	40000	8000	420

Dizemos então que:

$$\begin{pmatrix} 50 & 30 & 25 \\ 20 & 20 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 & 200 & 500 & 150 & 4 \\ 400 & 100 & 300 & 250 & 5 \\ 450 & 150 & 600 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 48250 & 16750 & 49000 & 15000 & 500 \\ 36000 & 12000 & 40000 & 8000 & 420 \end{pmatrix}.$$

Veja então que a multiplicação das linhas da matriz X com as colunas da matriz Y resultou imediatamente no procurado: as quantidades de cada produto. Daí a motivação do porquê definimos a multiplicação de matrizes dessa forma tão curiosa. Treinaremos bastante essa forma de multiplicação nos exercícios.

Está ficando muito abusada, hein. Mas sim, Há muitas questões sobre isso, haha. Muitas questões. Teremos bastante exercícios para treinarmos e para nos avaliarmos. Não se preocupe quanto a isso, coruja! Agora vamos especificar um pouco mais a multiplicação de matrizes. Preste bastante atenção, ainda não acabamos com essa parte. Na sequência veremos que nem todas as matrizes podem ser multiplicadas. Apenas se atenderem uma restrição super específica que falaremos bastante. Vamos lá!

Compatibilidade da multiplicação de matrizes

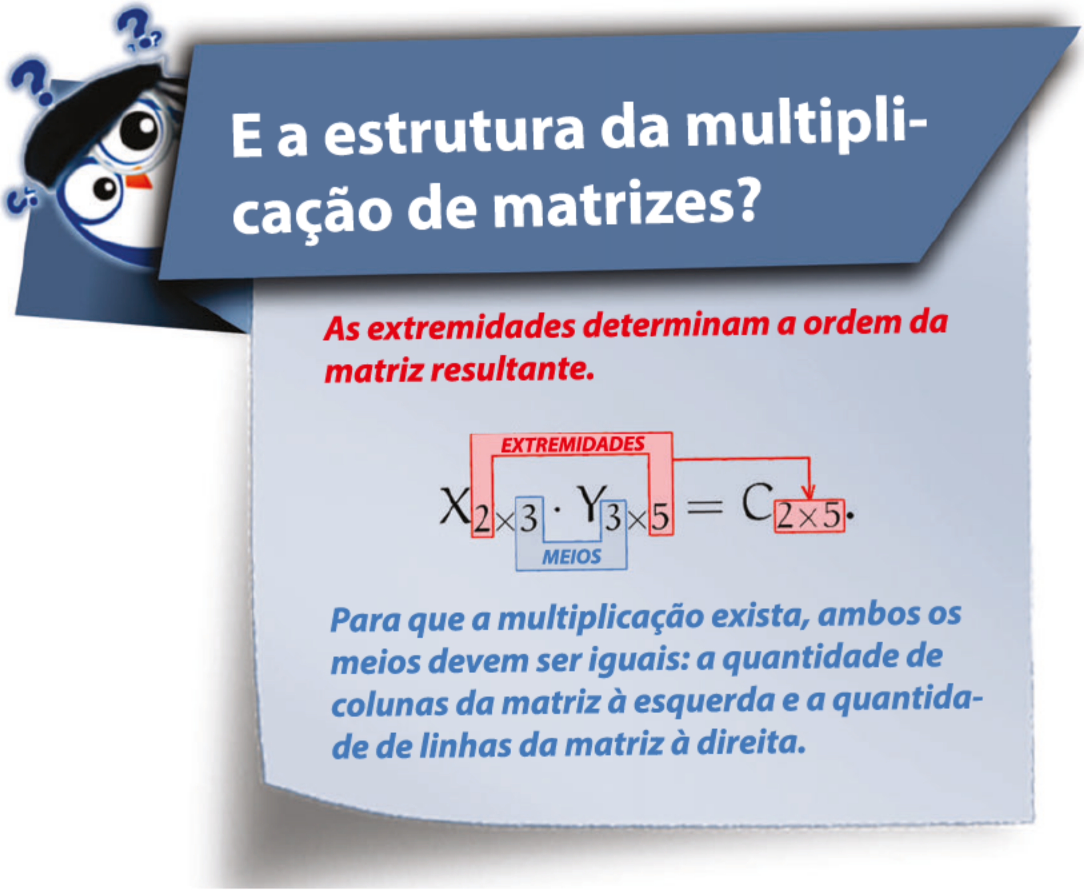
Nem todas as matrizes podem ser multiplicadas. As duas matrizes do início dessa seção, porém, puderam. Vamos dar uma olhada nelas:

$$\begin{pmatrix} 50 & 30 & 25 \\ 20 & 20 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 & 200 & 500 & 150 & 4 \\ 400 & 100 & 300 & 250 & 5 \\ 450 & 150 & 600 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 48250 & 16750 & 49000 & 15000 & 500 \\ 36000 & 12000 & 40000 & 8000 & 420 \end{pmatrix}.$$

Então, multiplicamos a matriz X pela matriz Y encontrando a matriz C, isto é, $X \cdot Y \quad C$.
Mas veja também que X tem ordem 2×3, Y tem ordem 3×5 e C tem ordem 2×5, isto é:

$$X_{2\times3} \cdot Y_{3\times5} \quad C_{2\times5}.$$

Exatamente! Veremos a seguir um resumo super didático e bem explicado de como podemos verificar se duas matrizes podem ou não ser multiplicadas. Mas não é apenas isso que ele faz. Além de dizer se a multiplicação existe ele também te diz *a ordem da matriz resultante*! Tudo em um truque único, muito útil para exames militares. E tudo fica muito mais claro se você tiver entendido bem o nosso exemplo sobre as confeitarias. A motivação da multiplicação de matrizes vem desses tipos de problemas, então, dê uma relida caso ache que tenha ficado algo em aberto na sua cabeça. Bom, vamos lá!



Veja então que ao montar uma multiplicação do tipo:

$$A_{m\times n} \times B_{p\times q}$$

temos n e p como *meios* e temos m e q como *extremidades*. Para que a multiplicação ocorra, devemos ter $n \quad p$, isto é, os meios devem ser iguais.

A matriz resultado terá a mesma ordem que as extremidades, isto é, $m \times q$. Daí o porquê de:

$$X_{2\times3} \cdot Y_{3\times5} \quad C_{2\times5}.$$

Perceba que se tentássemos efetuar $Y \cdot X$, enfrentaríamos um problema. Veja:

$$Y_{3\times5} \cdot X_{2\times3}.$$

Agora os meios não são mais iguais, pois $5 \;/\; 2$. Daí, agora, a multiplicação não é mais possível. Daí o porquê de, na multiplicação de matrizes, nem sempre termos que a ordem dos fatores não altera o produto. Nesse caso inegavelmente altera o produto, até porque ele para de existir.

Vejamos alguns exemplos de exercícios.

(EEAR-2003) QUESTÃO 1

Dadas as matrizes $A \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $A \cdot B - B \cdot A$ é igual a:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

R: Façamos as contas:

$$A \cdot B - B \cdot A \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) \\ (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gabarito: C

(EEAR-2004) QUESTÃO 2

Seja B uma matriz. Se $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot B \quad \begin{pmatrix} 18 \\ -23 \end{pmatrix}$, então o elemento b_{21} da matriz B é

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

R: Não sabemos a ordem da matriz B ainda. Digamos que seja $m \times n$. Então, vemos que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \cdot \underbrace{B}_{m\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 18 \\ -23 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

Para que a multiplicação seja possível, é necessário que o número de colunas de B seja igual ao número de linhas da matriz 2×2. Então $m = 2$. Visto que a matriz resultante foi da ordem 2×1, temos que $n = 1$. Então B é da ordem 2×1. Agora, façamos os cálculos para encontrá-la:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 18 \\ -23 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -5x - 2y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 18 \\ -23 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alinhando o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ -5x - 2y = -23 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 2 e a segunda por 3:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 36 \\ -15x - 6y = -69 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos:

$$\begin{aligned} 4x - 15x &= 36 - 69 \\ -11x &= -33 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Daí, substituindo na primeira equação do sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \\ 2 \cdot 3 + 3y &= 18 \\ 6 + 3y &= 18 \\ 3y &= 12 \\ y &= 4. \end{aligned}$$

O elemento b_{21} da matriz B é, portanto, 4.

Gabarito: D

Propriedades da multiplicação de matrizes

Vejamos então algumas das propriedades que envolvem a multiplicação de matrizes.

- *Associativavidade matricial:* $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- *Distributividade à direita:* $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- *Distributividade à esquerda:* $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- *Associatividade escalar:* $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B$, com $\lambda \in \mathbb{R}$;
- *Elemento neutro:* existe uma matriz, chamada de *matriz identidade* (estudá-la-emos em breve), identificada por I, tal que: $A \cdot I = I \cdot A = A$.

Que excelente pergunta, coruja! Assumo que na sua pergunta, A e B sejam matrizes, certo? Pois é, não podemos mais fazer isso. A *lei do corte* não é mais sempre verdadeira. Pode acontecer? Pode. Vai acontecer sempre? Não necessariamente.

Aí uma pergunta que você pode fazer é: *tem mais alguma restrição?* Pois é, tem sim. Há duas. Uma delas eu já lhes havia dito, a comutatividade. Não podemos mais dizer que acontece $A \cdot B = B \cdot A$. Outra coisa é o seguinte. Imagina que $A \cdot B = 0$, sendo 0 aqui a matriz nula. Não necessariamente teremos A ou B nulas. Veja um exemplo abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veja que temos duas matrizes não-nulas que, ao serem multiplicadas, geraram uma matriz nula.

Bom. Agora sim podemos começar a classificar as matrizes. Vamos ver todos os tipos de matrizes importantes para o nossos estudos. Vamos então!

2.0– Classificações de matrizes e cálculo de matriz inversa

2.1– Classificações de matrizes

Vamos agora às classificações de matrizes (que são em grande número, então, sinta-se livre para fazer resumos por conta própria, além do que te daremos em seguida).

Durante a nossa lista de classificações, deixemos claro que m representará a quantidade de linhas da matriz e n a quantidade de colunas. Tasmbém é importante lembrarmos que a forma geral do termo de uma matriz é a_{ij}, com i representando a linha a que pertence aquele elemento, e j representando a coluna. Vamos lá então. Antes de qualquer coisa, demos uma olhada na forma geral de uma matriz qualquer:

$$A_{m\times n} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Acima vemos uma forma super famosa de uma matriz qualquer: a sua forma geral. Veja que há $m \cdot n$ elementos dentro dessa matriz (visto que ela possui m linhas e n colunas). É a partir dessa matriz que começaremos a falar sobre as classificações mais importantes de matrizes. Sigamos!

Matrizes retangulares

São matrizes em que a quantidade de linhas é diferente da quantidade de colunas (isto é, em que $m \;/\; n$). Vejamos alguns exemplos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}_{m=2,n=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{m=3,n=2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 28 & 35 & 42 \end{pmatrix}}_{m=2,n=3}.$$

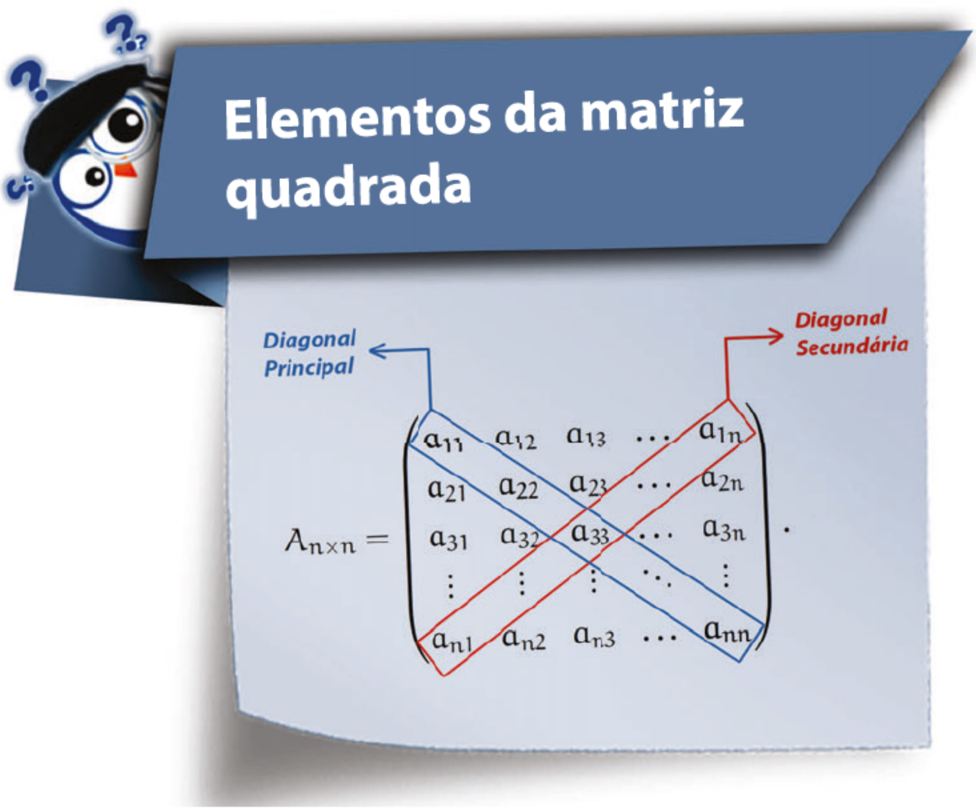
As matrizes retangulares são matrizes que *não são quadradas*. Veremos a seguir o que vem a ser uma matriz quadrada.

Matrizes quadradas

São matrizes em que a quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas (isto é, em que m n). Vejamos alguns exemplos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}}_{m=1,n=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{m=3,n=3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}}_{m=2,n=2}.$$

Essa é a matriz mais importante de nossos estudos. Por exemplo, para que duas matrizes comutem, elas têm de ser quadradas. Matrizes quadradas também são as únicas às quais é possível associar um número muito importante chamado de *determinante*. Também são muito importantes em sistemas lineares. Enfim, são muito importantes e deveras simples de se entenderem. De tão importantes que são, têm até alguns nomes especiais associados a elas. Vejamos.



Esses elementos são exclusivos das matrizes quadradas, não se esqueçam disso.

Muitas vezes quando quisermos nos referir a uma matriz quadrada $A_{n\times n}$, escreveremos simplesmente A_n. Também é comum ouvirmos: matriz de ordem n; isso quer dizer uma matriz quadrada de ordem n.

Há ainda uma última definição importante para matrizes. A soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada é chamado de *traço* da matriz, e escrevemos, para o traço de uma matriz A: $\text{tr}(A)$. No caso da matriz geral acima, temos:

$$\boxed{\text{tr}(A) \quad a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}}$$

O traço de uma matriz é uma grandeza que, por ora, não terá aplicação maior que aquela de calcular o próprio traço. Posteriormente, quando estudarmos probabilidade, veremos algumas utilidades dessa grandeza.

Há, percebeu, coruja? Pois é, é verdade sim. Olha um exemplo de uma matriz quadrada 4×4 aqui:

$$A_4 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Veja que os elementos da diagonal principal dessa matriz são: a_{11}, a_{22}, a_{33} e a_{44}. Em todos eles temos $i \quad j$, vê? Muito boa a observação. E a diagonal secundária? Consegue ver um padrão? Vou expor os termos aqui, tente achar um padrão: a_{14}, a_{23}, a_{32} e a_{41}. E aí? Conseguiu achar um padrão?

O padrão é que, na diagonal secundária, sempre teremos $1 + j$ uma unidade superior à ordem da matriz. Quer ver? Vamos lá, sabemos que a matriz usada no exemplo é uma matriz de ordem 4, correto? Agora observe cada termo da diagonal secundária:

$$\begin{aligned} a_{14} &\to i + j \quad 1 + 4 \quad 5; \\ a_{23} &\to i + j \quad 2 + 3 \quad 5; \\ a_{32} &\to i + j \quad 3 + 2 \quad 5; \\ a_{41} &\to i + j \quad 4 + 1 \quad 5. \end{aligned}$$

Veja que 5 é justamente *uma unidade superior* que a ordem dessa matriz, que é 4. Isso sempre vai acontecer com qualquer matriz quadrada. De qualquer forma, excelente percepção, corujinha!

O que acabamos de constatar com a perspicácia de nossa coruja é que as diagonais principal e secundária podem ser definidas em termos de i e j. Façamos um pequeno resumo dessas definições:

Definições algébricas das diagonais

$i = j$: o elemento pertencerá à diagonal principal.

$i + j = n + 1$: o elemento pertencerá à diagonal secundária.

Essas álgebras vêm cada vez sendo mais cobradas em questões de concursos militares. Cuidado porém, nem toda matriz tem diagonal principal ou secundárias, *apenas as matrizes quadradas*. Isso tem de ficar sempre bem claro. Se uma matriz qualquer, portanto, for quadrada de ordem n, qualquer elemento em que i j pertencerá à diagonal principal, da mesma forma que se $i + j$ $n + 1$, pertencerá à diagonal secundária. tranquilo? De boas? Então vamos para a próxima matriz, partiu? Sigamos então, jovem, sem medo. Veremos agora uma sequência de matrizes quadradas importantes.

Matrizes diagonais

Uma matriz será dita *diagonal* quando todo e qualquer elemento fora da diagonal principal for nulo. Nada impede que os elementos da própria diagonal também sejam todos nulos, mas não é necessário. Veja, portanto que, para que uma matriz seja diagonal ela deve ser quadrada, já que apenas matrizes quadradas têm diagonal principal. Uma forma algébrica de definirmos uma matriz diagonal é:

> Uma matriz $[a_{ij}]$ é escalar se a_{ij} 0 para i / j.

Veja que como i j é a condição para que um elemento faça parte da diagonal principal de uma matriz, i / j é justamente a definição para que um elemento não faça parte dessa diagonal.

Vejamos alguns exemplos de matrizes diagonais:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Perceba que qualquer elemento fora das diagonais principais dessas matrizes é nulo, daí cada uma dessas matrizes recebe a classificação de matriz diagonal.

Matrizes escalares

Uma matriz será dita *escalar* quando for uma matriz diagonal com os elementos da diagonal principal constantes. Perceba então que tudo o que falamos sobre as matrizes diagonais há pouco cabe aqui, porém com essa restrição extra. Uma forma algébrica de definirmos uma matriz escalar é:

$$\text{Uma matriz } [a_{ij}] \text{ é escalar se } \begin{cases} a_{ij} \quad 0 \text{ para } i \; / \; j; \\ a_{ij} \quad k \text{ para } i \quad j, \text{ com } k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vejamos alguns exemplos de matrizes escalares:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Perceba que qualquer elemento fora das diagonais principais dessas matrizes é nulo; além disso, os termos da diagonal principal são constantes, isto é, todos iguais, daí cada uma dessas matrizes recebe a classificação de matriz escalar. Na ordem, acima, tivemos: $k \quad -4$, $k \quad \pi$, $k \quad 0$ e $k \quad \sqrt{2}$.

Quando, então, for mencionado algo como: considere uma matriz escalar A com $k \quad 7$ de ordem 5, já conseguimos visualizar a matriz da seguinte forma:

$$A \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Matrizes identidades

Uma *matriz identidade* é uma matriz escalar com $k \quad 1$. Uma forma algébrica de defini-la é:

Uma matriz $[a_{ij}]$ é uma matriz identidade se $\begin{cases} a_{ij} \quad 0 \text{ para } i \;/\; j; \\ a_{ij} \quad 1 \text{ para } i \quad j. \end{cases}$

A matriz identidade, identificada por I ou I_n, sendo n a sua ordem, é como se fosse o número 1 nos números reais sob aspectos multiplicativos. Assim como multiplicar um número real por 1 faz o número retornar, multiplicar uma matriz pela matriz identidade gera a própria matriz inicial.

Já ouviu falar no delta de Kronecker?

O delta de Kronecker, identificado pelo símbolo δ_{ij} também é uma forma de caracterizarmos uma matriz identidade. Veja abaixo a definição do delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ para } i \neq j; \\ 1 \text{ para } i = j. \end{cases}$$

O *delta de Kronecker*, detalhado ao lado, é um escalar que varia conforme os dois índices que estão em sua escrita. Por exemplo, δ_{12} vale 0, pois $1 \;/\; 2$. Podemos, portanto, definir uma matriz identidade I como: $I_n \quad [a_{ij}]_{n \times n}$ tal que $a_{ij} \quad \delta_{ij}$. Veja um exemplo de como isso funciona. Só lembrando, estudante, essa não é a parte mais importante dessa matéria; porém, cada vez mais fica difícil de sermos seletivos quanto ao que estudarmos, vista a larga concorrência qualificada que um estudante tem de enfrentar. Nossa estratégia sempre será passarmos por todos os detalhes que poderiam vir a nos surpreender em concursos, a fim de que, na hora, não nos surpreeenda tanto quanto seria caso nada tivéssemos visto sobre o assunto. Beleza? Bom, vamos ao exemplo: considere uma matriz $I_{2\times2}$, e vamos tentar construí-la como fizemos acima, usando o delta de Kronecker:

$$I_2 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$$

Mas veja que, segundo o que vimos no quadro acima:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &\quad 1, \text{ visto que } i \quad j; \\ \delta_{12} &\quad 0, \text{ visto que } i \;/\; j; \\ \delta_{21} &\quad 0, \text{ visto que } i \;/\; j; \\ \delta_{22} &\quad 1, \text{ visto que } i \quad j. \end{aligned}$$

Daí, portanto:

$$I_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vejamos alguns exemplos de matrizes identidades:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriz triangular inferior

É toda matriz quadrada em que todos os termos "acima" da diagonal principal são nulos. Mais algebricamente falando:

Uma matriz será dita triangular inferior se: $a_{ij} \quad 0$ para $i < j$.

Veja por exemplo a matriz abaixo:

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Quais são os termos que, nessa matriz, satisfazem $i < j$? São, claro os termos: a_{12}, a_{13} e a_{23}. Veja que esses termos são todos nulos, logo, trata-se de uma matriz triangular inferior.

Ela recebe esse nome porque forma-se um "triângulo" de números abaixo dos zeros, ou seja, na região inferior da matriz.

Vejamos mais alguns exemplos de matrizes triangulares inferiores:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & \pi & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -17 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Matriz triangular superior

É toda matriz quadrada em que todos os termos "abaixo" da diagonal principal são nulos. Mais algebricamente falando:

Uma matriz será dita triangular superior se: $a_{ij} \quad 0$ para $i > j$.

Veja por exemplo a matriz abaixo:

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Quais são os termos que, nessa matriz, satisfazem $i > j$? São, claro os termos: a_{21}, a_{31} e a_{32}. Veja que esses termos são todos nulos, logo, trata-se de uma matriz triangular superior.

Ela recebe esse nome porque forma-se um "triângulo" de números abaixo dos zeros, ou seja, na região superior da matriz. Na nossa teoria de determinantes (próxima aula), veremos uma propriedade super importantes das matrizes triangulares.

Vejamos mais alguns exemplos de matrizes triangulares superiores:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -1 & 18 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -17 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & -\pi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Matriz linha

É toda matriz em que $m \quad 1$, isto é, que possua apenas uma linha.

Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & \sqrt{5} & \pi & 2 \end{pmatrix}.$$

Matriz coluna

É toda matriz em que $n \quad 1$, isto é, que possua apenas uma coluna.

Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Matriz transposta

Vamos então falar da impotantíssima transposição de matrizes.

Não é bem uma classificação, mas sim uma *operação*. A transposição de matrizes é uma operação que transforma uma matriz em outra, trocando as suas linhas com as suas colunas. A transposta de uma matriz A é identificada por A^t ou A^T (ambos já apareceram em concursos diversos). Vejamos um exemplo. Considere a matriz $A \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Agora veja o cálculo de A^t, isto é, a transposta da matriz A, exposta acima:

$$A^t \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Perceba então que a primeira linha da matriz A tornou-se a primeira coluna da matriz A^t, assim como a segunda linha da matriz A também virou a segunda coluna de A^t.

Veja abaixo a representação algébrica da transposição:

A transposta de $[a_{ij}]_{m\times n}$ é $[a_{ji}]_{n\times m}$.

Aqui vão algumas propriedades importantes da transposição de matrizes:

- A transposta da transposta de uma matriz é igual à própria matriz, ou seja: $(A^t)^t \quad A$.
- A transposta de uma matriz triangular superior é uma matriz triangular inferior, e vice-versa. Veja:

$$A \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz triangular superior}}, \text{ então:} A^t \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz triangular inferior}}$$

- A transposta de uma matriz quadrada de ordem n também é uma matriz quadrada de ordem n. Veja um exemplo:

$$A \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz quadrada de ordem 3}}, \text{ então, } A^t \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 7 & 17 \\ 3 & 11 & 19 \\ 5 & 13 & 23 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz quadrada de ordem 3}} .$$

- A transposta de uma matriz linha é uma matriz coluna, e vice versa.
- Sobre a transposta da soma de duas matrizes:

$$\boxed{(A \pm B)^t \quad A^t \pm B^t.}$$

- Quanto à multiplicação por escalar:

$$\boxed{(k \cdot A)^t \quad k \cdot A^t, \text{ com } k \in \mathbb{R}.}$$

- É possível demonstrar o seguinte fato sobre a transposta do produto de duas matrizes:

$$\boxed{(A \cdot B)^t \quad B^t \cdot A^t.}$$

- O traço de uma matriz sempre coincidirá com o traço de sua transposta. Algebricamente:

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) \quad \mathrm{tr}(A^t).}$$

Isso acontece porque quando transpomos uma matriz, trocamos as linhas com as colunas, isto é, trocamos i por j. Mas acontece que existem elementos em que $i \quad j$, que são os elementos da diagonal principal. Esses elementos não se alteram na transposição e como o traço de uma matriz é a soma desses elementos, ele também não se alterará na transposição.

- Escrevemos A^p, com p natural, para designarmos o produto $\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{p \text{ fatores}}$. Usamos essa notação somente quando A é uma matriz quadrada. Acerca disso, vale a associatividade entre a potência e a transposição, isto é:

$$\boxed{(A^p)^t \quad (A^t)^p.}$$

Matriz simétrica

Uma matriz será dita simétrica quando for igual à sua transposta. A definição fica, então, algebricamente, da seguinte forma:

$$\boxed{\text{Uma matriz } A \text{ será dita simétrica quando } A^t \quad A.}$$

Isso implica que qualquer matriz simétrica necessariamente tem de ser quadrada. Consegue ver o porquê? É porqque suponha que A tenha ordem $m \times n$. Então A^t será da ordem $n \times m$. Como, para ser simétrica, $A \quad A^t$, então $m \quad n$ e daí a matriz é quadrada.

Vejamos um exemplo de matriz simétrica. Observe a matriz $A \quad \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 4 & 12 & -3 \\ 1 & -3 & \pi \end{pmatrix}$. Ao calcularmos a transposta de A encontramos $A^t \quad \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 4 & 12 & -3 \\ 1 & -3 & \pi \end{pmatrix}$, que volta a ser exatamente a matriz original, A.

Matriz antissimétrica

Uma matriz será dita antissimétrica quando for igual ao oposto de sua transposta. A definição fica, então, algebricamente, da seguinte forma:

> Uma matriz A será dita simétrica quando $A^t \quad -A$.

Isso implica que qualquer matriz antissimétrica, assim como as matrizes simétricas, necessariamente tem de ser quadrada. Mesmas razões anteriores. Um outro fato curioso: a diagonal principa de uma matriz antissimétrica é toda nula. Vejamos um exemplo de matriz antissimétrica.

Observe a matriz $A \quad \begin{pmatrix} 0 & -7 & \sqrt{2} \\ 7 & 0 & -5 \\ -\sqrt{2} & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Ao calcularmos a transposta de A encontramos A^t $\begin{pmatrix} 0 & 7 & -\sqrt{2} \\ -7 & 0 & 5 \\ \sqrt{2} & -5 & 0 \end{pmatrix}$, que é uma matriz exatamente oposta à original.

Matriz nula

É qualquer matriz em que todos os elementos sejam nulos. Algebricamente:

> Uma matriz será nula quando $a_{ij} \quad 0$.

Abaixo, falarei de mais alguns tipos de matrizes, certamente *menos importantes*. Falaremos delas por quês de completude, mas são raras em nossos atuais concursos.

Matrizes comutativas

Duas matrizes A e B serão ditas comutativas quando $A \cdot B \quad B \cdot A$. Veja abaixo um exemplo.

Suponha que $A \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B \quad \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. Façamos os cálculos de $A \cdot B$:

$$
\begin{aligned}
A \cdot B \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 12 + 3 \cdot 9 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 1 \cdot 12 + 4 \cdot 9 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 14 & 51 \\ 17 & 48 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Agora, calculemos $B \cdot A$:

$$
\begin{aligned}
B \cdot A \quad & \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 12 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 12 \cdot 4 \\ 4 \cdot 2 + 9 \cdot 1 & 4 \cdot 3 + 9 \cdot \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 14 & 51 \\ 17 & 48 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Veja que $A \cdot B \quad B \cdot A$, e, portanto, esse par de matrizes é comutativo.

Matrizes anticomutativas

São matrizes A e B tais que $A \cdot B \quad -B \cdot A$.

Matrizes involutivas

Uma matriz será dita involutiva quando $A^2 \quad I$, isto é, quando o seu quadrado foi igual à matriz identidade. Veja abaixo um exemplo.

Seja $A \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{pmatrix}$. Calculemos A^2:

$$
\begin{aligned}
A^2 \quad & \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 15 & -4 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + (-1) \cdot 15 & 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-4) \\ 15 \cdot 4 + (-4) \cdot 15 & 15 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-4) \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Matriz nilpotente

Uma matriz será dita nilpotente quando $A^p \quad 0$ para algum p natural, onde 0 é uma matriz nula. O menor p para o qual isso acontece é chamado de *índice* da matriz nilpotente. Vejamos um exemplo.

Seja $A \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Não efetuarei aqui, mas pode-se verificar que:

$$A \cdot A \quad A^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Agora façamos A^3:

$$A^3 \quad A \cdot A^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opa, conseguimos uma matriz nula. Então a matriz A é uma matriz nilpotente de índice 3, pois foi necessário elevá-la ao cubo para anulá-la.

Olha, coruja, isso depende do quão que você está disposta a se entregar e cometer seus sacrifícios pessoais. É claro que teremos que nos sacrificar para podermos alcançar nossos sonhos. Esses sacrifícios vêm em forma de: privações pessoais como celular, saídas com amigos, certos lazeres que nos afastam da nossa verdadeira fonte de bom futuro, etc. Você está disposta a deixar isso para trás? Se estiver, minha resposta é sim. Se não, minha resposta é que vai ser muito difícil pra você, é necessário que nossos estudos sejam nossa prioridade. Beleza? Sigamos então!

2.2– MATRIZ INVERSA

Finalizaremos nossos estudos falando sobre a inversa de uma matriz. Esse assunto será retomado quando falarmos de determinantes na próxima aula. Hoje, porém falaremos desse tema estritamente do ponto de vista matricial. Vamos direto, então, à definição.

Definição

A inversa de uma matriz A é uma matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} \quad A^{-1} \cdot A \quad I$.

Vamos direto para um exemplo de cálculo de matriz inversa.

QUESTÃO 3

Considere a matriz $A \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule a inversa da matriz A, isto é, calcule A^{-1}.

R: O processo é o seguinte. Primeiro, entendamos o que significa $A \cdot A^{-1} \quad I$. A matriz A é, claro, a matriz que se deseja calcular a inversa. A matriz A^{-1} é a inversa; por fim, I é a matriz identidade. Como não conhecemos a matriz A^{-1}, vamos tratá-la com incógnitas:

$$A^{-1} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Daí, a partir de $A \cdot A^{-1} \quad I$, temos:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5a + 2c & 5b + 2d \\ 7a + 3c & 7b + 3d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Isso nos traz dois sistemas. Resolverei ambos simultaneamente para ganharmos tempo:

$$\begin{cases} 5a + 2c \quad 1 \\ 7a + 3c \quad 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5b + 2d \quad 0 \\ 7b + 3d \quad 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a + 6c \quad 3 \\ -14a - 6c \quad 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 15b + 6d \quad 0 \\ -14b - 6d \quad -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 15a - 14a &\quad 3 \\ a &\quad 3 \\ 7a + 3c &\quad 0 \\ 7 \cdot 3 + 3c &\quad 0 \\ 21 + 3c &\quad 0 \\ 3c &\quad -21 \\ c &\quad -7 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 15b - 14b &\quad -2 \\ b &\quad -2 \\ 5b + 2d &\quad 0 \\ 5 \cdot (-2) + 2d &\quad 0 \\ -10 + 2d &\quad 0 \\ 2d &\quad 10 \\ d &\quad 5. \end{aligned}$$

Concluímos então que $A^{-1} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}.$

Perceba que, de fato, ao efetuarmos o cálculo $A \cdot A^{-1}$ (ou $A^{-1} \cdot A$, tanto faz, pois uma matriz e a sua inversa serão sempre comutativas) sempre resultará na *matriz identidade*.

Propriedades da matriz inversa

- Nem sempre existirá a inversa de uma matriz A. Para, porém, verificarmos se uma matriz possui ou não inversa, precisaremos utilizar um conceito que só veremos na próxima aula, o conceito de *determinantes*. Veremos que uma matriz qualquer terá inversa sempre que seu determinante for não-nulo. Quando uma matriz não possui inversa, ela é chamada de *matriz singular*. Caso contrário, isto é, caso a matriz admita inversa, será dita uma *matriz não-singular*. Nos itens que seguem, vamos supor que todas as matrizes sejam não singulares.
- A^{-1} é única, isto é, se existir, não há ambiguidades.
- É possível demonstrarmos o seguinte fato acerca da inversa do produto de duas matrizes:

$$\boxed{(A \cdot B)^{-1} \quad B^{-1} \cdot A^{-1}.}$$

- A inversa da inversa de uma matriz é a própria matriz.

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} \quad A.}$$

- A transposição e a inversão de matrizes são associativas, isto é:

$$\boxed{(A^t)^{-1} \quad (A^{-1})^t.}$$

- Sobre a multiplicação por escalar, é possível demonstrarmos que:

$$\boxed{(k \cdot A)^{-1} \quad \frac{1}{k} \cdot A^{-1}.}$$

- Quando a inversa de uma matriz é igual à sua transposta dizemos que a matriz é *ortogonal*. Segue um exemplo de matriz singular: $A \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (verifique que ela é, de fato, ortogonal).
- Se $A \cdot B \quad I$, então $B \cdot A \quad I$. Ainda, temos que $A \quad B^{-1}$ e $B \quad A^{-1}$.
- Se $A \cdot B \quad C$, então $A \quad C \cdot B^{-1}$ e $B \quad A^{-1} \cdot C$.
- Se A e B comutam, então A^{-1} e B^{-1} também comutam.

E agora, jovem, é hora de exercitarmos!!! Vamos começar a resolver questões. Você não verá, claro, questões sobre tudo o que já vimos aqui (pelos motivos apresentados no início de nosso livro eletrônico). Portanto, é dever seu fazer resumo das classificações de matrizes e rever todo o nosso conteúdo diversas vezes. Faça resumos organizados, com boa vontade. Isso é essencial. Partiu então? Vamos lá, exercícios!

QUESTÕES COMENTADAS

(EEAR-2001) QUESTÃO 4

Na resolução da equação matricial $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, o valor de $x + y + z$ é

(a) -2
(b) 1
(c) -1
(d) 0

R: Pegamos inicialmente a primeira linha da matriz à esquerda e multiplicamo-na pela primeira coluna da matriz à direita (veja que essa coluna é única, visto que se trata de uma matriz-coluna):

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 0} \\ 4 \quad -1 \quad 1 \\ 0 \quad -3 \quad 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A primeira linha se torna então:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x + (-1) \cdot y + 0 \cdot z \\ \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x - y \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Claro então que a segunda linha será formada pelo produto da primeira linha da matriz à esquerda com a primeira coluna da matriz à direita, assim como a terceira linha:

$$\begin{pmatrix} 1\cdot x+(-1)\cdot y+0\cdot z \\ 4\cdot x+(-1)\cdot y+1\cdot z \\ 0\cdot x+(-3)\cdot y+0\cdot z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x-y \\ 4x-y+z \\ -3y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Veja então a formação de um sistema de equações:

$$\begin{cases} x-y \quad 1 \\ 4x-y+z \quad 2 \\ -3y \quad 0 \end{cases}$$

Da última equação:

$$\begin{aligned} -3y &\quad 0 \\ y &\quad 0. \end{aligned}$$

Agora, à primeira equação:

$$\begin{aligned} x-y &\quad 1 \\ x-0 &\quad 1 \\ x &\quad 1. \end{aligned}$$

Por fim, à segunda equação:

$$\begin{aligned} 4x-y+z &\quad 2 \\ 4\cdot 1-0+z &\quad 2 \\ 4+z &\quad 2 \\ z &\quad 2-4 \\ z &\quad -2. \end{aligned}$$

Portanto $x+y+z \quad 1+0+(-2) \quad -1.$

Gabarito: C

(EEAR-2002) QUESTÃO 5

O par (x, y), solução da equação matricial $\begin{pmatrix} x & -4 \\ x^2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 2x-4 \\ x^3+y^2 & 8 \end{pmatrix}$ é

(a) $(6, \pm\sqrt{3})$
(b) $(\pm\sqrt{5}, -2)$
(c) $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, -5\right)$
(d) $\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{5}\right)$

R: Façamos os cálculos:

$$\begin{pmatrix} x & -4 \\ x^2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \cdot x + (-4) \cdot y & x \cdot 2 + (-4) \cdot 1 \\ x^2 \cdot x + y \cdot y & x^2 \cdot 2 + y \cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x^2 - 4y & 2x - 4 \\ x^3 + y^2 & 2x^2 + y \end{pmatrix}$$

O problema nos diz o resultado desse produto. Comparemos com esse resultado:

$$\begin{pmatrix} x^2 - 4y & 2x - 4 \\ x^3 + y^2 & 2x^2 + y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 2x - 4 \\ x^3 + y^2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Por comparação obtemos que:

$$\begin{cases} x^2 - 4y \quad 13 \\ 2x^2 + y \quad 8 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação toda por -2, temos:

$$\begin{cases} -2x^2 + 8y \quad -26 \\ 2x^2 + y \quad 8 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$\begin{aligned} 9y &\quad -26 + 8 \\ 9y &\quad -18 \\ y &\quad -2. \end{aligned}$$

Perceba que só essa informação já é suficiente para matarmos a questão, correto? A única opção possível é a B. Mas encontremos x também:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x^2 + y &\quad 8 \\ 2 \cdot x^2 + (-2) &\quad 8 \\ 2 \cdot x^2 &\quad 8 + 2 \\ 2 \cdot x^2 &\quad 10 \\ x^2 &\quad 5 \\ x &\quad \pm\sqrt{5}. \end{aligned}$$

A solução é, então: $(\pm\sqrt{5}, -2)$.

Gabarito: B

(EEAR-2002) QUESTÃO 6

O elemento $X_{3,2}$ da matriz solução da equação matricial $3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 16 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ é

(a) 0
(b) -2
(c) 3
(d) 1

R: Basta resolvermos a equação:

$$3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 16 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot X \quad \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 16 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot X \quad \begin{bmatrix} 10-1 & 4-1 \\ 2-2 & 16-4 \\ 0-6 & 8-8 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot X \quad \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 12 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X \quad \begin{bmatrix} \frac{9}{3} & \frac{3}{3} \\ \frac{0}{3} & \frac{12}{3} \\ \frac{-6}{3} & \frac{0}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vemos então que o elemento $X_{3,2}$ é o elemento 0.

Gabarito: A

(EEAR-2002) QUESTÃO 7

Dadas as matrizes $A \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, o elemento c_{12} da matriz $C \quad A \cdot B$ é

(a) -17
(b) 7
(c) -3
(d) 3

R: Não precisamos de fato resolver a multiplicação. Basta nos recordarmos de que:

$$\begin{aligned} c_{12} &\quad a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ &\quad 5 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 \\ &\quad -5 + 0 - 12 \\ &\quad -17. \end{aligned}$$

Gabarito: A

(EEAR-2003) QUESTÃO 8

Sendo $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, os valores de x e y na matriz acima são, respectivamente,

(a) 3 e -3
(b) -3 e 3
(c) $\frac{9}{2}$ e -3
(d) -3 e $\frac{9}{2}$

R: Efetuando a multiplicação:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} &\quad \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + x \cdot (-5) \\ y \cdot 4 + (-3) \cdot (-5) \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 8 - 5x \\ 4y + 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

O problema nos informa que esse resultado é igual a $\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$; logo:

$$\begin{cases} 8 - 5x \quad -7 \\ 4y + 15 \quad 3 \end{cases}$$

Da primeira equação:

$$\begin{aligned} 8-5x &\quad -7 \\ -5x &\quad -7-8 \\ -5x &\quad -15 \\ x &\quad 3. \end{aligned}$$

Da segunda equação:

$$\begin{aligned} 4y+15 &\quad 3 \\ 4y &\quad 3-15 \\ 4y &\quad -12 \\ y &\quad -3. \end{aligned}$$

Os valores de x e y são, então, respectivamente, 3 e -3.

Gabarito: A

(EEAR-2004) QUESTÃO 9

Considere as matrizes $A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, e $B \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Então $AB + C$ é igual a

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

R: Montemos o cálculo pedido:

$$AB + C \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 2+0\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gabarito: B

(EEAR-2005) QUESTÃO 10

$A \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B \quad \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são duas matrizes que comutam se, e somente se,

(a) $x \quad 2$ e $y \quad 1.$
(b) $x \quad 1$ e $y \quad 2.$
(c) $x \quad 1.$
(d) $x \quad 2.$

R: Para que duas matrizes A e B comutem, basta que $A\cdot B \quad B\cdot A$. Então, armemos os cálculos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot x+2\cdot 0 & 1\cdot y+2\cdot 1 \\ 0\cdot x+1\cdot 0 & 0\cdot y+1\cdot 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x\cdot 1+y\cdot 0 & x\cdot 2+y\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 2+1\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & 2x+y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vemos então que para que as matrizes sejam iguais basta que $y+2 \quad 2x+y$. Desenvolvendo:

$$y+2 \quad 2x+y$$
$$2 \quad 2x$$
$$x \quad 1.$$

Basta então $x \quad 1$.

Gabarito: C

(EEAR-2005) QUESTÃO 11

Sabendo-se que $M+N \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $M-N \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz N é igual a:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

R: Basta resolvermos o sistema. Não fique com preconceitos só porque o sistema envolve matrizes; o raciocínio é inteiramente análogo. Veja:

$$\begin{cases} M+N \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ M-N \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Multiplique a segunda linha por -1:

$$\begin{cases} M+N \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ -M+N \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Agora some ambas as equações:

$$\begin{aligned} N+N & \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 2N & \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ N & \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Gabarito: C

(EEAR-2005) QUESTÃO 12

Sendo A uma matriz 3×4 e B uma matriz $N\times M$, coloque V (Verdadeira) ou F (Falsa) nas afirmações a seguir:

- ( ) Existe $A+B$ se, e somente se, $N \quad 4$ e $M \quad 3$.
- ( ) Existe $A \cdot B$ se, e somente se, $N \quad 4$ e $M \quad 3$.
- ( ) Existem $A \cdot B$ e $B \cdot A$ se, e somente se, $N \quad 4$ e $M \quad 3$.
- ( ) $A+B \quad B+A$ se, e somente se, $A \quad B$.
- ( ) $A \cdot B \quad B \cdot A$ se, e somente se, $A \quad B$.

Assinale a alternativa que contém a sequência correta:

(a) V - V - V - V - V
(b) F - V - F - V - F
(c) F - F - V - F - F
(d) V - V - V - F - V

R: Comentemos afirmação por afirmação, levando sempre em conta as ordens das matrizes: $A_{3\times4}$ e $B_{N\times M}$:

- Para existir $A_{3\times4}+B_{N\times M}$, temos de ter os correspondentes iguais, isto é, $N \quad 3$ e $M \quad 4$. Logo, afirmativa falsa.

- Para existir $A_{3\times4} \cdot B_{N\times M}$, basta que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B, isto é, $N \quad 4$. A condição "se, e somente se" imposta peca, portanto, por excesso. Não é necessário que $M \quad 3$, apenas que $N \quad 4$. Afirmativa falsa, portanto.
- Para que exista $A_{3\times4} \cdot B_{N\times M}$, basta que $N \quad 4$. Para que exista $B_{N\times M} \cdot A_{3\times4}$, basta que $M \quad 3$. Logo, de fato, para que comutem, basta que $N \quad 4$ e $M \quad 3$. Afirmativa verdadeira.
- Afirmativa falsa. $A + B \quad B + A$ independentemente de quaisquer condições. Logo, não é condição nem necessária e nem suficiente para que ocorra a igualdade. De uma forma mais simples: o fato de duas matrizes comutarem pela adição não implica em que sejam iguais.
- Afirmativa falsa. Veja que, por exemplo, $A \cdot A^{-1} \quad A^{-1} \cdot A$, mas não necessariamente teremos $A \quad A^{-1}$.

Gabarito: C

(EEAR-2006) QUESTÃO 13

Se $B \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de $A \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, então $x - y$ é:

(a) 2
(b) 1
(c) -1
(d) 0

R: Como B é a matriz inversa de A, então o produto das duas deverá ser igual à matriz identidade 2×2. Logo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \\ x \cdot 1 + y \cdot 1 & x \cdot 2 + y \cdot 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x + y & 2x + 4y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conseguimos então montar o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x+y \quad 0 \\ 2x+4y \quad 1 \end{cases}$$

Daqui, poderíamos simplesmente multiplicar a equação superior por 3 e a interior por -1:

$$\begin{cases} 3x+3y \quad 0 \\ -2x+-4y \quad -1 \end{cases}$$

Daí basta somar as duas equações:

$$x-y \quad -1.$$

E aí está, nossa resposta. Poderíamos também resolver o sistema, sem problemas.

Gabarito: C

(EEAR-2006) QUESTÃO 14

Sendo $A \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $B \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, a soma dos elementos da 1ª linha de $A \cdot B$ é

(a) 22.
(b) 30.
(c) 46.
(d) 58.

R: Façamos então a conta até finalizarmos a primeira linha de $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2\cdot 4+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 5+(-1)\cdot 0 & 2\cdot 3+(-1)\cdot 3 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 3 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

A soma desses elementos é: $9+10+3 \quad 22.$

Gabarito: A

(EEAR-2006) QUESTÃO 15

Sendo $A \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B \quad \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, a soma dos elementos da 2ª linha de $(A-B)^t$ é igual a:

(a) -4.
(b) -2.
(c) 2.
(d) 4.

R: Façamos então $A-B$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculando, assim, a transposta:

$$(A-B)^t \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Assim, a soma dos elementos da segunda linha de $(A-B)^t$ é: $-2-2 \quad -4$.

Gabarito: A

(EEAR-2007) QUESTÃO 16

Sejam as matrizes $A \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Se A^t e B^t são as matrizes transpostas de A e de B, respectivamente, então $A^t + B^t$ é igual a

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

R: Veja que $A^t \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B^t \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Temos então que $A^t + B^t$ é igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Gabarito: A

(EEAR-2008) QUESTÃO 17

Sejam as matrizes $A \quad \begin{pmatrix} 4 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B \quad \begin{pmatrix} b \\ 2 \end{pmatrix}$. Se $A \cdot B$ é uma matriz nula 2×1, como $a + b$ é

(a) -1

(b) 0

(c) 1

(d) 2

R: Basta armarmos a conta e depois resolvermos para a e B:

$$\begin{pmatrix} 4 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4b + 2a \\ 2b - 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí concluímos que:

$$\begin{cases} 4b + 2a \quad 0 \\ 2b - 2 \quad 0 \end{cases}$$

Da última equação, temos:

$$\begin{aligned} 2b - 2 &= 0 \\ 2b &= 2 \\ b &= 1. \end{aligned}$$

Da primeira equação:

$$\begin{aligned} 4b + 2a &= 0 \\ 4 \cdot 1 + 2a &= 0 \\ 4 + 2a &= 0 \\ 2a &= -4 \\ a &= -2. \end{aligned}$$

Daí temos que $a + b = -2 + 1 = -1$.

Gabarito: A

(EEAR-2008) QUESTÃO 18

A soma dos elementos da diagonal principal da matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} i^2 \text{ se } i \neq j \\ i + j \text{ se } i = j \end{cases}$ é um número

(a) múltiplo de 3.
(b) múltiplo de 5.
(c) divisor de 16.
(d) divisor de 121.

R: A diagonal principal de uma matriz será formada por aqueles elementos em que $i = j$, são eles: a_{11}, a_{22} e a_{33}. A regra dada no diz que se $i = j$ então $a_{ij} = i + j$. Então: $a_{11} = 1 + 1 = 2$, $a_{22} = 2 + 2 = 4$ e $a_{33} = 3 + 3 = 6$ e, com isso, a soma desses elementos se torna: $2 + 4 + 6 = 12$. Visto que 12 é um múltiplo de 3, temos a opção A como gabarito.

Gabarito: A

(EEAR-2009) QUESTÃO 19

Seja $A^{-1} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ a matriz inversa de $A \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sabendo que $A \cdot A^{-1} \quad I_2$, o valor de x é:

(a) 3
(b) 2
(c) 1
(d) 0

R: Basta multiplicarmos as duas matrizes e igualarmos à identidade, visto que uma é a inversa da outra:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + x \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + x \cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 + x & -1 + 2x \end{pmatrix}$$

Essa matriz resultante deverá ser igual à identidade. Portanto, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 + x & -1 + 2x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
E daí, temos $-1 + x \quad 0$, ou seja, $x \quad 1$.

Gabarito: C

(EEAR-2009) QUESTÃO 20

Se $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, então o valor de $x + y$ é:

(a) 4
(b) 5

(c) 6

(d) 7

R: Efetuando a multiplicação:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ x-y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} 2x+y \quad 6 \\ x-y \quad 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$2x+x \quad 6+0$$
$$3x \quad 6$$
$$x \quad 2.$$

Daí, visto que $x-y \quad 0$, temos $x \quad y$ e portanto $y \quad 2$. Conclui-se então que $x+y \quad 2+2 \quad 4$.

Gabarito: A

(EEAR-2010) QUESTÃO 21

Seja a matriz $A \quad (a_{ij})_{2\times2}$ tal que $a_{ij} \quad \begin{cases} 0, \text{ se } i \quad j \\ i+j, \text{ se } i \;/\; j \end{cases}$. A soma dos elementos de A é

(a) 4.

(b) 5.

(c) 6.

(d) 7.

R: A matriz é, de forma geral, a seguinte:

$$A \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Nos casos de a_{11} e a_{22}, temos $i \quad j$. Então $a_{11} \quad 0$ e $a_{22} \quad 0$ também. Já a_{12} e a_{21} são tais que $i\ /\ j$; logo $a_{12} \quad 1+2 \quad 3$ e $a_{21} \quad 2+1 \quad 3$. Assim a soma de seus elementos será: $0+0+3+3 \quad 6$.

Gabarito: C

(EEAR-2010) QUESTÃO 22

Sejam as matrizes $A_{m\times 3}$, $B_{p\times q}$ e $C_{5\times 3}$. Se $A \cdot B \quad C$, então $m+p+q$ é igual a

(a) 10.
(b) 11.
(c) 12.
(d) 13.

R: Observemos a operação feita:

$$\underbrace{A}_{m\times 3} \cdot \underbrace{B}_{p\times q} \quad \underbrace{C}_{5\times 3}$$

Para que a multiplicação exista, devemos ter $p \quad 3$. E para que a matriz C seja de fato da ordem 5×3, devemos ter $m \quad 5$ e $q \quad 3$. Daí então temos: $m+p+q \quad 5+3+3 \quad 11$.

Gabarito: B

(EEAR-2011) QUESTÃO 23

Seja $P \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e P^t a matriz transposta de P. A matriz $Q \quad P \cdot P^t$ é

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

R: Visto que $P \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos que $P^t \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Façamos agora o cálculo requerido:

$$\begin{aligned} Q \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Gabarito: B

(EEAR-2012) QUESTÃO 24

Na matriz $A \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \ldots & 2 & 1 \\ 5 & \ldots & 3 \end{bmatrix}$ faltam 2 elementos. Se nessa matriz $a_{ij} \quad 2i - j$, a soma dos elementos que faltam é

(a) 4.
(b) 5.
(c) 6.
(d) 7.

R: Os elementos que estão faltando são a_{21} e a_{32}. Visto que $a_{ij} \quad 2i - j$, temos que $a_{21} \quad 2 \cdot 2 - 1 \quad 3$, e $a_{32} \quad 2 \cdot 3 - 2 \quad 6 - 2 \quad 4$. Daí, a soma de ambos os elementos resulta em: $3 + 4 \quad 7$.

Gabarito: D

(EEAR-2013) QUESTÃO 25

Sejam as matrizes $A \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. A soma dos elementos de $A \cdot B$ é

(a) 0.
(b) 1.
(c) 2.
(d) 3.

R: Façamos os cálculos (a essa altura você já deve ter percebido como as questões estão ficando repetitivas; isso é normal. Esse é um assunto extremamente mecânico. É importante que repitamos a mesma seção diversas vezes):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A soma dos elementos dessa matriz é, então: $0 + 2 + (-1) + 0 \quad 1$.

Gabarito: B

(EEAR-2014) QUESTÃO 26

Seja a matriz $A \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$. A matriz $X \quad \frac{1}{2}A$ tem como soma de seus elementos o valor

(a) 7.
(b) 5.
(c) 4.
(d) 1.

R: Basta fazermos as contas:

$$X \quad \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$X \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A soma dos elementos será, então, igual a: $2 + 1 + (-3) + 1 \quad 1$.

Gabarito: D

(EEAR-2015) QUESTÃO 27

Seja a matriz $A \quad (a_{ij})_{2\times 2}$ tal que $a_{ij} \quad |i^2 - j^2|$. A soma dos elementos de A é igual a

(a) 3.
(b) 6.
(c) 9.
(d) 12.

R: Montemos a matriz generalizada e façamos os cálculos:

$$A \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} |1^2 - 1^2| & |1^2 - 2^2| \\ |2^2 - 1^2| & |2^2 - 2^2| \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

A soma de seus elementos é, portanto: $0 + 3 + 0 + 3 \quad 6$.

Gabarito: B

(EEAR-2016) QUESTÃO 28

Se $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b & -1 \\ x & 2k \end{pmatrix}$ são matrizes opostas, os valores de a, b, x e k são respectivamente

(a) $1, -1, 1, 1$
(b) $1, 1, -1, -1$
(c) $1, -1, 1, -1$
(d) $-1, -1, -2, -2$

R: Se são matrizes opostas, então podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad -\begin{pmatrix} b & -1 \\ x & 2k \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -b & 1 \\ -x & -2k \end{pmatrix}.$$

Daí temos que $-b \quad 1$, isto é, $b \quad -1$; $a \quad 1$; $-x \quad -1$, isto é, $x \quad 1$ e finalmente $-2k \quad 2$, que nos traz $k \quad -1$. Seguindo a ordem pedida então: $a \quad 1$, $b \quad -1$, $x \quad 1$ e $k \quad -1$.

Gabarito: C

(EEAR-2017) QUESTÃO 29

Considere as matrizes reais $A \quad \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & y+z \end{pmatrix}$ e $B \quad \begin{pmatrix} 9 & z \\ y & -x \end{pmatrix}$. Se $A \quad B^t$, então $y+z$ é igual a

(a) 3
(b) 2
(c) 1
(d) -1

R: Armemos a equação dada:

$$\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & y+z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & z \\ y & -x \end{pmatrix}^t$$

$$\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & y+z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & y \\ z & -x \end{pmatrix}$$

Por comparação, temos $y \quad 1$ e $z \quad 2$. Daí, $y + z \quad 1 + 2 \quad 3$.

Gabarito: A

■■■(EEAR-2019) QUESTÃO 30

Dadas as matrizes $A \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, o produto $A \cdot B$ é a matrix:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

R: Basta efetuarmos o produto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Gabarito: C

(EEAR-2019) QUESTÃO 31

Considere as tabelas das lojas A e B, A $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ e B $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, em que cada elemento a_{ij} ou b_{ij} representa o número de unidades vendidas do produto i no dia j. Considerando as quantidades vendidas nas duas lojas juntas, por dia, o melhor dia de vendas foi o dia ____.

(a) 4
(b) 3
(c) 2
(d) 1

R: Os dias correspondem às colunas, correto? Então basta somarmos todas as vendas correspondentes a cada uma das colunas, levando em consideração a primeira e a segunda loja. Vejamos:

Dia	Loja A		Loja B		Total de unidades vendidas
	Produto 1	Produto 2	Produto 1	Produto 2	
1	2	4	5	3	$2+4+5+3$ 14
2	3	5	4	3	$3+5+4+3$ 15
3	4	5	4	4	$4+5+4+4$ 17
4	5	4	3	2	$5+4+3+2$ 14

Vemos então que o dia mais produtivo foi o dia 3.

Gabarito: B

Agora, vamos resolver algumas questões de nível um pouco mais acima. Vamos lá!

(ESPCEX-2001) QUESTÃO 32

Uma fábrica de doces produz bombons de nozes, coco e morango, que são vendidos acondicionados em caixas grandes ou pequenas. A tabela 1 abaixo fornece a quantidade de bombons de cada tipo que compõe as caixas grandes e pequenas, e a tabela 2 fornece a quantidade de caixas de cada tipo produzidas em cada mês do 1° trimestre de um determinado ano.

TABELA 1		
	Pequena	**Grande**
Nozes	2	5
Coco	4	8
Morango	3	7

TABELA 2			
	JAN	**FEV**	**MAR**
Pequena	150	220	130
Grande	120	150	180

Se associarmos as matrizes A $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ e B $\begin{bmatrix} 150 & 220 & 130 \\ 120 & 150 & 180 \end{bmatrix}$ às tabelas 1 e 2 respectivamente, o produto $A \cdot B$ fornecerá

(a) a produção média de bombons por caixa fabricada.
(b) a produção total de bombons por caixa fabricada.
(c) número de caixas fabricadas no trimestre.
(d) em cada coluna a produção trimestral de um tipo de bombom.
(e) a produção mensal de cada tipo de bombom.

R: Façamos o produto sugerido para tentarmos entendê-lo:

$$A \cdot B \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 150 & 220 & 130 \\ 120 & 150 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 150 + 5 \cdot 120 & 2 \cdot 220 + 5 \cdot 150 & 2 \cdot 130 + 5 \cdot 180 \\ 4 \cdot 150 + 8 \cdot 120 & 4 \cdot 220 + 8 \cdot 150 & 4 \cdot 130 + 8 \cdot 180 \\ 3 \cdot 150 + 7 \cdot 120 & 3 \cdot 220 + 7 \cdot 150 & 3 \cdot 130 + 7 \cdot 180 \end{bmatrix}$$

O que significa, por exemplo, o elemento c_{11} dessa matriz? Bom, seria $2 \cdot 150 + 5 \cdot 120$, correto? A grandeza 2 representa a quantidade de nozes em cada caixa pequena, enquanto que a grandeza 150 representa a quantidade de caixas pequenas vendidas em janeiro; logo, $2 \cdot 150 \quad 300$ representa a quantidade de nozes vendidas nas caixas pequenas em janeiro. O termo $5 \cdot 120 \quad 600$ representa a quantidade de nozes vendidas nas caixas grandes no mês de janeiro. Então, $c_{11} \quad 2 \cdot 150 + 5 \cdot 120 \quad 900$ representa a quantidade total de nozes vendidas no mês de janeiro. Podemos então, extrapolar a nossas conclusões da seguinte forma: cada termo da matriz resultante dirá a produção total de cada tipo de bombom.

Gabarito: E

■■■(ESPCEX-2002) QUESTÃO 33

As matrizes A, B e C são do tipo $r \times s$, $t \times u$ e $2 \times w$, respectivamente. Se a matriz $(A - B) \cdot C$ é do tipo 3×4, então $r + s + t + u + w$ é igual a

(a) 10
(b) 11
(c) 12
(d) 13
(e) 14

R: Montemos a equação para fazermos uma análise melhor. Direi, inicialmente, que a matriz resultante daquele produto é uma matriz D, isto é:

$$(\underbrace{A}_{r\times s} - \underbrace{B}_{t\times u}) \cdot \underbrace{C}_{2\times w} \quad \underbrace{D}_{3\times 4}.$$

Para que $A - B$ exista, as matrizes devem ser de mesmas ordens. Portanto, $r \quad t$ e $s \quad u$. Daí ambas as matrizes terão a mesma ordem e a diferença entre elas também terá a mesma. Obtemos a seguinte configuração:

$$\underbrace{(A - B)}_{r\times s} \cdot \underbrace{C}_{2\times w} \quad \underbrace{D}_{3\times 4}.$$

Para que a multiplicação exista, os meios devem ser iguais. Logo, $s \quad 2$. Como $s \quad u$, temos $u \quad 2$ também.

A matriz resultante é 3×4. Logo os extremos devem ser tais que $r \quad 3$ e $w \quad 4$. Como $r \quad t$, temos $t \quad 3$. Daí:

$$\underbrace{r}_{3}+\underbrace{s}_{2}+\underbrace{t}_{3}+\underbrace{u}_{2}+\underbrace{w}_{4} \quad 3+2+3+2+4$$
$$14.$$

Gabarito: E

(ESPCEX-2010) QUESTÃO 34

Os números das contas bancárias ou dos registros de identidade costumam ser seguidos por um ou dois dígitos, denominados dígitos verificadores, que servem para conferir sua validade e prevenir erros de digitação.

Em um grande banco, os números de todas as contas são formados por algarismos de 0 a 9, na forma $abcdef-xy$, em que a sequência $(abcdef)$ representa, nessa ordem, os algarismos do número da conta e x e y, nessa ordem, representam os dígitos verificadores.

Para obter os dígitos x e y, o sistema de processamento de dados do banco constrói as seguintes matrizes:

$$A \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad C \quad \begin{bmatrix} (a-b) \\ (c-d) \\ (e-f) \end{bmatrix}$$

Os valores de x e y são obtidos pelo resultado da operação matricial $A \cdot B \quad C$, desprezando-se o valor de z. Assim, os dígitos verificadores correspondentes à conta corrente de número 356281 são

(a) 34
(b) 41
(c) 49
(d) 51
(e) 54

R: A questão parece ser mais complicada do que de fato é. Primeiro, veja que $abcdef$ está definido, pois ele nos deu o número da conta: 356281, isto é, $a \quad 3$, $b \quad 5$, $c \quad 6$, $d \quad 2$, $e \quad 8$ e $f \quad 1$.

Efetuando a operação da forma que a questão propôs, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} (a-b) \\ (c-d) \\ (e-f) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 1 \cdot z \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z \\ 0 \cdot x + 2 \cdot y + (-1) \cdot z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3-5 \\ 6-2 \\ 8-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x - 2y + z \\ y \\ 2y - z \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Veja então de cara que $y \quad 4$. Veja também que:

$$\begin{aligned} 2y - z &\quad 7 \\ 2 \cdot 4 - z &\quad 7 \\ 8 - z &\quad 7 \\ -z &\quad 7 - 8 \\ -z &\quad -1 \\ z &\quad 1. \end{aligned}$$

E daí, finalmente:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &\quad -2 \\ x - 2\cdot 4 + 1 &\quad -2 \\ x - 8 + 1 &\quad -2 \\ x - 7 &\quad -2 \\ x &\quad -2 + 7 \\ x &\quad 5. \end{aligned}$$

Os dígitos verificadores então são: $xy \quad 54$.

Gabarito: E

(ESPCEX-2012) QUESTÃO 35

Considere as matrizes $A \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ e $B \quad \begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix}$. Se x e y são valores para os quais B é a transposta da inversa da matriz A, então o valor de $x + y$ é

(a) -1
(b) -2
(c) -3
(d) -4
(e) -5

R: Montemos a equação apresentada:

$$\begin{aligned} B &\quad (A^{-1})^t \\ B &\quad (A^t)^{-1} \\ B\cdot A^t &\quad (A^t)^{-1}\cdot A^t \\ B\cdot A^t &\quad I \end{aligned}$$

Substituamos as matrizes:

$$\begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}^t \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x+5(y+4) & x+x(y+4) \\ 3y+15 & y+3x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned} 3y+15 &\quad 0 \\ 3y &\quad -15 \\ y &\quad -5. \end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned} y+3x &\quad 1 \\ -5+3x &\quad 1 \\ 3x &\quad 6 \\ x &\quad 2. \end{aligned}$$

Portanto, $x+y \quad 2+(-5) \quad -3.$

Gabarito: C

(ESPCEX-2013) QUESTÃO 36

O elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

(a) $\frac{2}{3}$

(b) $\frac{3}{2}$
(c) 0
(d) -2
(e) $-\frac{1}{3}$

R: Abramos a equação que caracteriza a matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estamos interessados em f (elemento da segunda linha e terceira coluna). Façamos o produto das matrizes:

$$\begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Formaremos o sistema somente com as equações que possuam f, que é o nosso interesse:

$$\begin{cases} c+i \quad 0 \\ 2c+f \quad 0 \\ f+i \quad 1 \end{cases}$$

Visto que $c+i \quad 0$, temos que $i \quad -c$. O sistema fica, então:

$$\begin{cases} 2c+f \quad 0 \\ -c+f \quad 1 \end{cases}$$

Multiplicando a última equação por 2:

$$\begin{cases} 2c+f \quad 0 \\ -2c+2f \quad 2 \end{cases}$$

Somando: $3f \quad 2$ e, portanto, $f \quad \frac{2}{3}$.

Gabarito: A

2.2– Índice Remissivo