2 - Logaritmos

Antes de estudarmos a função logarítmica, faremos um breve estudo sobre logaritmos.

Definição: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ (lê-se logaritmo de b na base a é igual a c, se e somente se, a elevado a c for igual a b), onde b é o logaritmando, a é a base e c é o logaritmo.

2.1 - Condição de Existência

$b > 0 \rightarrow$ logaritmando positivo

$a > 0 \rightarrow$ base positiva

$a \neq 1 \rightarrow$ base diferente de 1

Exemplos

A) $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$.

B) Calcule $\log_3 27$.

Fazemos $\log_3 27 = x \leftrightarrow 3^x = 27$, ou $3^x = 3^3$.

Logo, $x = 3$

2.2 - Igualdade de Logaritmos

Se $\log_a b = \log_a c$, então $b = c$

Observaçoes:

1ª) Quando não escrevemos a base, significa que o logaritmo é decimal, ou seja, sua base é igual a 10.

2ª) O logaritmo neperiano é aquele que possui a base igual a "*e*", onde "*e*" é o número de Euler (Leonhard Euler 1707 - 1783) e é aproximadamente igual a 2,71828..., pois é irracional. Escreve-se ln(x), ou seja, logaritmo neperiano de x.

2.3 - Consequências da Definição

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^m = m$
- $a^{\log_a b} = b$

2.4 - Propriedades dos Logaritmos (considerando satisfeitas as condiçoes de existência)

- Logaritmo de um produto: $\log_a (b \,.\, c) = \log_a b + \log_a c$
- Logaritmo de um quociente: $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- Logaritmo de uma potência: $\log_a b^m = m.\log_a b$
- Mudança de base: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n} \cdot \log_a b$

2.5 - Equaçoes Logarítmicas

São equações que apresentam a incógnita envolvida com logaritmos. Para resolvê-las, utilizaremos as propriedades dos logaritmos e aplicaremos a definição, bem como a igualdade de logaritmos.

Exemplo 1:

Resolva a equação $\log_2 (x + 3) + \log_2 (x - 4) = 3$.

$\log_2 (x + 3) + \log_2 (x - 4) = 3$

Aplicando a propriedade do logaritmo do produto, vem:

$\log_2 [(x + 3) \cdot (x - 4)] = 3$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$(x + 3) \cdot (x - 4) = 2^3 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 8 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$

$\Delta = 81$

$X_1 = 5,\ X_2 = -4$

Apesar de termos encontrado dois valores para x, consideraremos apenas o 5 como solução, pois para $x = -4$, o termo $\log_2 (x + 3)$ apresenta o logaritmando negativo, ou seja, $\log_2 (x + 3) = \log_2 (-4 + 3) = \log_2 (-1) \Rightarrow$ não existe!

Logo, **a solução é** $S = \{5\}$.

Exemplo 2:

Encontre a solução de $\log_2 (x + 3) - \log_2 (2x - 1) = 0$.

$\log_2 (x + 3) - \log_2 (2x - l) = 0$

$\log_2 (x + 3) = \log_2 (2x - 1)$

Pela igualdade de logaritmos, vem:

$(x + 3) = (2x - 1) \Rightarrow X = 4$

$S = \{4\}$

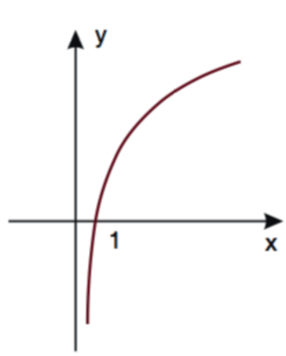
2.6 - Gráfico da Função Logarítmica

1º caso - A base do logaritmo é um número maior que 1 ($a > 1$).

Exemplo:

Vamos esboçar o gráfico de $f(x) = \log_2 x$

x	y
$\frac{1}{8}$	–3
$\frac{1}{4}$	–2
$\frac{1}{2}$	–1
1	0
2	1
4	2
8	3

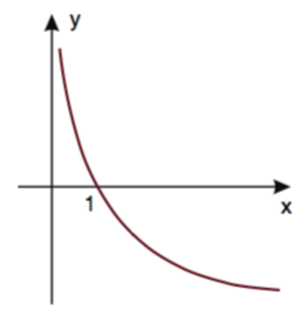


2º caso - A base do logaritmo é um número entre 0 e 1 ($0 < a < 1$).

Exemplo:

Vamos esboçar o gráfico de $f(x) = \log_{1/2} x$

x	y
8	–3
4	–2
2	–1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3



2.7 - Inequações logarítmicas

Uma inequação logarítmica é aquela que contém pelo menos um termo que envolve logaritmo. Antes de resolvê-la, é necessário observar a condição de existência de todos os seus termos. Consideraremos dois casos.

1º caso: a base é um número maior do que 1 ($a > 1$).

Basta manter o sinal da desigualdade, pois a função é crescente. Assim, temos:

$\log_a x \geq \log_a y \Rightarrow x \geq y$ ou $\log_a x \leq \log_a y \Rightarrow x \leq y$

Exemplo:

Resolver a inequação $\log_2 (x + 3) > \log_2 4$.

$\text{Log}_2 (x + 3) > \log_2 4 \Rightarrow x + 3 > 4 \Rightarrow x > 1$

$S = \{x \in R \mid x > 1\}$

2º caso: a base é um número entre 0 e 1 ($0 < a < 1$).

Invertemos o sinal da desigualdade, pois a função é decrescente. Assim, temos:

$\log_a x > \log_a y \Rightarrow x < y$ ou $\log_a x < \log_a y \Rightarrow x > y$

Exemplo:

Resolver a inequação $\log_{1/2} (x - 5) \leq \log_{1/2} 4$.

$\log_{1/2} (x - 5) \leq \log_{1/2} 4 \Rightarrow x - 5 \geq 4 \Rightarrow x \geq 9$

$s = \{x \in R \mid x \geq 9\}$

Observação: Sempre que numa equação exponencial não conseguirmos igualar as bases, devemos tirar o logaritmo dos dois lados.

Exemplo:

$2^x = 3 \rightarrow \log 2^x = \log 3 \rightarrow x \log 2 = \log 3 \rightarrow x = \dfrac{\log 3}{\log 2}$

QUESTÕES DE LOGARÍTMOS

1. (ESPM-2014) Se $\log x + \log x^2 + \log x^3 + \log x^4 = -20$, o valor de x é

A) 10 B) 0,1 C) 100 D) 0,01 E) 1

2. (MACKENZIE-2014) Para quaisquer reais positivos A e B, o resultado da expressão $\log_A B^3 . \log_B A^2$ é

A) 10 B) 6 C) 8 D) A · B E) 12

3. (UFRGS-2014) Atribuindo para log2 o valor 0,3, então os valores de log0,2 e log20 são, respectivamente,

A) 0,7– e 3 B) 0,7– e 1,3

C) 0,3 e 1,3 D) 0,7 e 2,3

E) 0,7 e 3

4. (AMAN-2012) Na figura abaixo, dois vértices do trapézio sombreado estão no eixo x e os outros dois vértices estão sobre o gráfico da função real $f_{(x)} = \log_k x$, com $k > 0$ e $k \neq 1$. Sabe-se que o trapézio sombreado tem 30 unidades de área; assim, o valor de k+p–q é

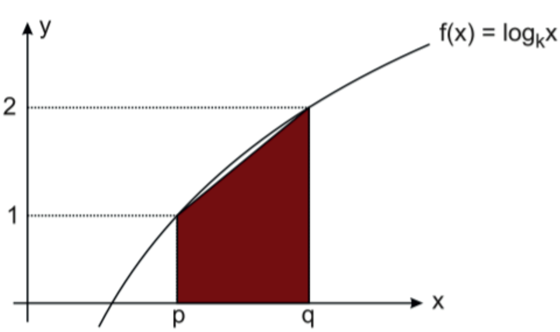


Gráfico Fora de Escala

A) –20 B) –15 C) 10

D 15 E) 20

5. (ESPM-2013) Em 1997 iniciou-se a ocupação de uma fazenda improdutiva no interior do país, dando origem a uma pequena cidade. Estima-se que a população dessa cidade tenha crescido segundo a função

$$P = 0{,}1 + \log_2 (x-1996),$$

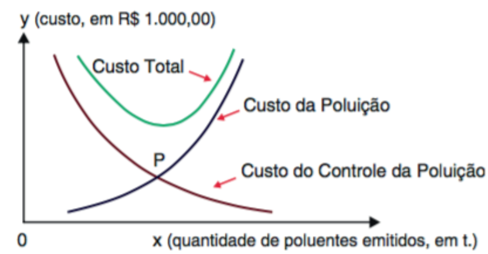
onde P é a população no ano x, em milhares de habitantes. Considerando $\sqrt{2} \equiv 1{,}4$, podemos concluir que a população dessa cidade atingiu a marca dos 3600 habitantes em meados do ano

A) 2005 B) 2002

C) 2011 D) 2007

E) 2004

6. (UNIRIO/2002) Uma indústria do Rio de Janeiro libera poluentes na baía de Guanabara. Foi feito um estudo para controlar essa poluição ambiental, cujos resultados são a seguir relatados.



Do ponto de vista da comissão que efetuou o estudo, essa indústria deveria reduzir sua liberação de rejeitos até o nível onde se encontra P, admitindo-se que o custo total ideal é o resultado da adição do custo de poluição $y = 2^x - 1$, ao custo de controle da poluição $y = 6\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Para que se consiga o custo ideal, a quantidade de poluentes emitidos, em kg, deve ser aproximadamente

Considere:

log 2 = 0,3

log 3 = 0,4

A) 1333 B) 2333

C) 3333 D) 4333

E) 5333

GABARITO

Questões de Logarítmos

1	2	3	4	5	6
D	B	B	B	D	A