# MATEMÁTICA

**FRENTE:** MATEMÁTICA III

**PROFESSOR(A):** JUDSON SANTOS

**EAD – ITA/IME**

**AULAS 06 A 11**

**ASSUNTO:** RAÍZES DA UNIDADE E RELAÇÕES

## Resumo Teórico

### Teorema-Fórmula de Moivre ($2^a$)

Seja **n** um número inteiro positivo e **z** um número complexo. Existem **n** raízes n-ésimas de **z**, que são assim definidas:

$$\sqrt[n]{w} = r^{\left(\frac{1}{n}\right)}\left[\cos\left(\frac{\beta+2k\pi}{n}\right)+i\cdot\text{sen}\left(\frac{\beta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

para k = 0, 1, 2, ..., n – 1.

Para mostrar este resultado, inicialmente **w** e **z** nas respectivas formas trigonométricas, ou seja:
$w = s(\cos\alpha + i\cdot\text{sen}\,\alpha)$ e $z = r(\cos\beta + i\cdot\text{sen}\,\beta)$ com $s \geq 0$ e $r \geq 0$.

Com isso,
$z = r(\cos\beta + i\cdot\text{sen}\,\beta) = w^n = s^n(\cos\alpha + i\cdot\text{sen}\,\alpha)^n =$
$= s^n[\cos(n\alpha) + i\cdot\text{sen}(n\alpha)]$, resultando $s = r^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ e
$n\alpha = \beta + 2k\pi$, para algum inteiro **k**.
Com isso, teremos **n** raízes n-ésimas de **z**.

## Exercício Resolvido

As seis soluções de $z^6 = -64$ são escritas na forma $a + i\cdot b$, onde **a** e **b** são números reais. Qual é o produto das soluções, com $a > 0$?

**Solução:**

A fórmula de De Moivre implica que as seis raízes sextas de $-64 = 64(\cos\pi + i\cdot\text{sen}\pi)$ são:

$$z_k = 64^{\left(\frac{1}{6}\right)}\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)+i\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\right]$$

para k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Verificando, concluímos que apenas $z_0 = \sqrt{3}+i$ e $z_5 = \sqrt{3}-i$, tem a parte real positiva.

Então, $z_0\cdot z_5 = \left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right) \rightarrow z_0\cdot z_5 = \left(\sqrt{3}\right)^2 - i^2 \rightarrow z_0\cdot z_5 = 4$

### Raiz da Unidade

Caro aluno, agora vamos utilizar uma técnica de somar e subtrair termos sem alterar o problema e depois colocar o fator comum agrupados de dois a dois pode ser feita não somente com as diferenças de dois quadrados e cubos, mas com diferenças entre:

$$a^n - b^n = a^n - a^{n-1}b + a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 + \ldots$$
$$\ldots + a^2b^{n-2} - a^1b^{n-1} + a^1b^{n-1} - b^n$$

Agrupando os termos comuns de dois em dois, temos:

$$a^n - b^n = \underbrace{a^n - a^{n-1}b}_{} + \underbrace{a^{n-1}b - a^{n-2}\cdot b^2}_{} + \underbrace{a^2b^{n-2} - a^1b^{n-1}}_{} + \underbrace{a^1b^{n-1} - b^n}_{}$$

$$a^n - b^n = a^{n-1}(a-b) + a^{n-2}b(a-b) + a^1b^{n-2}(a-b) + b^{n-1}(a-b)$$

Portanto:

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

**Obs.:** Quando a potência **n** for ímpar é verdadeiro também para a soma de ou mais termos.

Isto é:

$$a^3 - (-b)^3 = a^3 - a^2(-b) + a^2(-b) - a(-b)^2 + a(-b)^2 - (-b)^3$$

Agrupando os termos comuns de dois em dois, temos:

$$a^3 + b^3 = \underbrace{a^3 - a^2(-b)}_{} + \underbrace{a^2(-b) - a\cdot(-b)^2}_{} + \underbrace{a(-b)^2 - (-b)^3}_{}$$

$$a^3 + b^3 = a^2(a+b) + a(-b)(a+b) + (-b)^2(a+b)$$

Portanto:

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

Com isso, de modo análogo ao anterior, podemos generalizar que:

$$\boxed{a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} - n^{n-1}),\ \text{se } \mathbf{n} \text{ for ímpar}}$$

### Teorema do resto usando a fatoração anterior

Se o número complexo $\alpha$ é raiz de uma função polinomial **p**. Então, p(x) é divisível por $(x - \alpha)$.

**Demonstração.:**

Como $P(\alpha) = 0$, temos:
$p(x) = p(x) - p(\alpha)$

$p(x) = (a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0) - (a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \ldots$
$\ldots + a_1 \cdot \alpha + a_0)$
$p(x) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + a_1(x - \alpha)$

Sabemos que $p(x) = x^n - a^n$ é divisível por $(x - \alpha)$, onde $\alpha$ é um número complexo qualquer.

Pois, verificamos que:

$$x^n - \alpha^n = (x-\alpha)\cdot\left(x^{n-1} + x^{n-2}\cdot\alpha + x^{n-3}\cdot\alpha^2 + \ldots\ldots + x\cdot\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1}\right)$$

Logo, $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$; isto é, existe um polinômio **q** tal que $p(x) = q(x) \cdot (x - \alpha)$.

## Teorema da Decomposição

Seja $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$ uma equação algébrica de grau $n \geq 1$. Se $r_1$, $r_2$ e $r_3$ são as raízes complexas dessa equação, então $p(x)$ pode ser decomposto como:

$$\boxed{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)}$$

Vejamos agora alguns exemplos trabalhando a ideia da fatoração com raiz da unidade.

**Exemplo 1:** Calcule $\sqrt[3]{1}$.

**Solução:**

$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos\theta + i\cdot \text{sen}\,\theta}$ são

$z_1 = 1$

$$z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = w$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\cdot\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = w^2$$

Com isso, temos que 1, $w$ e $w^2$ são $\sqrt[3]{1}$.

Portanto, agora vamos trabalhar com a seguinte ideia:

Como $1 = \cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta$, as raízes n-ésimas da unidade podem ser escritas:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right),\ k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

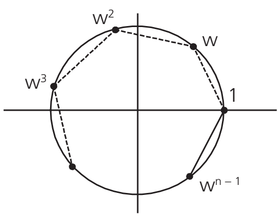
Em particular, quando $k = 1$, a raiz correspondente denota-se por:

$$w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Assim, as raízes n-ésimas da unidade são:

$$\boxed{1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}}$$

No plano complexo, as raízes n-ésima da unidade são os vértices do polígono regular de **n** lados, inscrito no círculo de $|z| = 1$, com vértices no ponto $z = \sqrt[n]{1}$.




As raízes n-ésima de um elemento qualquer de **C** podem ser obtidas multiplicando uma raiz n-ésima qualquer fixada deste elemento pelas raízes n-ésima da unidade.

**Prova:** Seja $z_0 \in C^*$ tal que $z^n = z_0$.

Suponha que $w_0$ seja uma solução da equação $z^n = z_0$; logo, $w_0 \neq 0$.

Seja **u** uma solução qualquer da equação; logo, $u^n = w_0^n = z_0$. Consequentemente, $\left(\frac{u}{w_0}\right)^n = 1$ e, portanto, $\frac{u}{w_0}$, onde **w** é a raiz. Logo, $u = w_0 \cdot w$, n-ésima da unidade.

Por outro lado, se **w** é uma raiz n-ésima da unidade, é fácil verificar que $w_0 \cdot w$ é solução da equação $z^n = z_0$.

## Binômio de Newton dos Complexos na Trigonometria

Caro aluno, vamos mostrar alguns resultados interessantes dos números complexos envolvendo o Binômio de Newton com a trigonometria.

De acordo com o desenvolvimento do Binômio de Newton, temos:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}\cdot x^0 + \binom{n}{1}\cdot x^1 + \binom{n}{2}\cdot x^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n}\cdot x^n$$

Através do resultado acima, podemos demonstrar várias relações entre os teoremas das propriedades das linhas do Triângulo de Pascal e a trigonometria.

Vejamos algumas situações:

**1ª situação:** Vamos substituir $x = \pm 1$ no desenvolvimento do Binômio de Newton temos:

I. para $x = 1$

$$\Rightarrow\ (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

II. para $x = -1$

$$\Rightarrow\ (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n\cdot\binom{n}{n} = 0$$

**2ª situação:** Utilizando os resultados acima, podemos demonstrar as relações das somas pares e ímpares dos números binomiais de **n** elementos tomados **n** a **n**.

Somando os itens **I** e **II** da primeira situação, temos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots\ldots = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \ldots = 0$$

temos: $2\cdot\binom{n}{0} + 2\cdot\binom{n}{2} + 2\cdot\binom{n}{4} + 2\cdot\binom{n}{6} + \ldots = 2^n$

Portanto: $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots + 2^{n-1}$ **(III)**

Subtraindo os itens **I** e **II** da primeira situação, temos:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\ldots=2^{n}$$
$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\ldots=0$$

temos: $2\binom{n}{1}+2\binom{n}{3}+2\binom{n}{5}+2\binom{n}{7}+\ldots=2^{n}$

Portanto: $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\binom{n}{7}+\ldots=2^{n-1}$ (**IV**)

**3ª situação:** Utilizando os resultados anteriores, vamos demonstrar a soma dos números binomiais com uma variação de 4, envolvendo a fórmula de De Moivre.

Vamos substituir $x = \pm i$ no desenvolvimento do Binômio de Newton. Temos:

I. para $x = i$

$$\Rightarrow (1+i)^{n}=\binom{n}{0}\cdot i^{0}+\binom{n}{1}\cdot i^{1}+\binom{n}{2}\cdot i^{2}+\binom{n}{3}\cdot i^{3}+\binom{n}{4}\cdot i^{4}+\ldots$$
$$\ldots=\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{n}=2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

II. para $x = -1$

$$\Rightarrow (1-i)^{n}=\binom{n}{0}\cdot i^{0}-\binom{n}{1}\cdot i^{1}+\binom{n}{2}\cdot i^{2}-\binom{n}{3}\cdot i^{3}+\binom{n}{4}\cdot i^{4}-\ldots=$$
$$=\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)=2^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left[\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+i\cdot \text{sen}\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

Somando os itens **I** e **II** da terceira situação, temos:

$$2\binom{n}{0}-2\cdot\binom{n}{2}+2\cdot\binom{n}{4}-2\cdot\binom{n}{6}+\ldots=$$
$$=2^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+i\cdot \text{sen}\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

temos:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots=$$
$$=\frac{2^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2}=2^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\ (\mathbf{V})$$

Subtraindo os itens **I** e **II** da terceira situação, temos:

$$2\binom{n}{1}\cdot i-2\binom{n}{3}\cdot i+2\binom{n}{5}\cdot i-2\binom{n}{7}\cdot i+\ldots=$$
$$=2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

temos:

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\binom{n}{7}+\ldots=$$
$$=\frac{2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot 2\cdot i\cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{2}=2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\ (\mathbf{VI})$$

Somando os itens **III** e **V** das relações demonstradas acima, temos:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\ldots=2^{n-1}$$
$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots=2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

temos:

$$2\cdot\binom{n}{0}+2\cdot\binom{n}{4}+2\cdot\binom{n}{8}+\ldots=2^{n-1}+2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Portanto:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\ldots=2^{n-2}+2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Somando os itens **IV** e **VI** das relações demonstradas acima, temos:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\binom{n}{7}+\ldots=2^{n-1}$$
$$\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\ldots=2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

temos:

$$2\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{5}+2\cdot\binom{n}{9}+\ldots\ldots\ldots=2^{n-1}+2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Portanto:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\ldots=2^{n-2}+2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

## Exercícios

**01.** Considere o desenvolvimento do trinômio feito da seguinte forma: $(1+x+x^2)^8=\sum_{k=0}^{16}A_k\cdot x^k$. Então, o valor da soma $A_0 + A_4 + A_8 + A_{12} + A_{16}$ é igual a:

A) 1028
B) 1601
C) 3281
D) 0
E) 1641

**02.** (O.M. Campinense/2005) Calcule o valor da seguinte soma alternada de números binomiais:

$$\binom{44}{0}-\binom{44}{2}+\binom{44}{4}-\binom{44}{6}+\ldots+\binom{44}{40}-\binom{44}{42}+\binom{44}{44}$$

A) 0
B) $2^{22}$
C) $2^{11}$
D) $-2^{22}$
E) $-2^{11}$

**03.** Na expansão em Binômio de Newton de $\left(\sqrt{x}+2\right)^{2n+1}$, qual a soma dos coeficientes de todos os termos em que o expoente de **x** é inteiro?

A) $2^{2n+1}$
B) $\dfrac{2^{2n+1}-1}{2}$
C) $\dfrac{3^{2n+1}+1}{2}$
D) $\dfrac{3^{2n+1}-1}{2}$
E) $3^{2n+1}$

**04.** (Poli-SP) Sendo:

$$a=C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots,\ b=C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots,$$

prove que $a^2 + b^2 = 2^n$, a partir de $(1 + i)^n$.

**05.** Sabendo que o valor da expressão:

$$17\cdot\binom{20}{0}+16\cdot\binom{20}{1}+15\cdot\binom{20}{2}+\ldots+0\cdot\binom{20}{17}+(-1)\cdot\binom{20}{18}+$$

$+(-2)\cdot\binom{20}{19}+(-3)\cdot\binom{20}{20}=a\cdot(b)^c$, onde **a** e **b** são números primos e $c \geq 20$, calcule o valor de **a + b + c**.

**06.** Considere o polinômio:

$$P(x) = x^{n+1} + a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_nx + a_{n+1}.$$

Sabendo que suas raízes são: $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots\binom{n}{n}$, suponha que o coeficiente $a_2$ possa ser escrito da forma $a_2=2^k-\frac{1}{2}\binom{2m}{m}$. Então, o valor da expressão $\binom{m+n}{k}$, para $m \neq 0$, $n \neq 0$ e $k \neq 0$, é igual a:

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

**07.** Sabendo que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ e $\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ são as raízes de uma equação da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde **a**, **b**, **c** e **d** são reais não nulos, então o valor da expressão $\dfrac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$ é igual a:

A) $\dfrac{16}{3}$
B) 4
C) $\dfrac{16}{5}$
D) $\dfrac{8}{3}$
E) $\dfrac{16}{7}$

**08.** (ITA/1995) Para cada $n \in N$, temos que:

$$1-\binom{4n}{2}+\binom{4n}{4}-\ldots-\binom{4n}{4n-2}+1 \text{ é igual a:}$$

A) $(-1)^n2^{2n}$
B) $2^{2n}$
C) $(-1)^n2^n$
D) $(-1)^{n+1}2^{2n}$
E) $(-1)^{n+1}2^n$

**09.** Sendo **n** um número inteiro positivo, então o valor da expressão $R=\frac{1}{4^n}\left(C_{4n}^0-C_{4n}^2+C_{4n}^4-C_{4n}^6+\ldots+C_{4n}^{4n}\right)$ é igual a:

A) –2
B) $(-1)^n$
C) $(-1)^{n+1}$
D) $(-1)^{n-1}$
E) 2

**10.** (ITA/2003) Das afirmações abaixo sobre a equação: $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, e suas soluções no plano complexo:

I. A equação possui, pelo menos, um par de raízes reais;
II. A equação possui, pelo menos, duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1;
III. Se $n \in N^*$ e **r** é uma raiz qualquer desta equação, então $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{r}{3}\right|^r<\frac{1}{2}$.

É(são) verdadeira(s):
A) nenhuma.
B) apenas I.
C) apenas II.
D) apenas III.
E) apenas I e II.

**11.** O valor da expressão:

$C_n^1-3\cdot C_n^3+9\cdot C_n^5-27\cdot C_n^7+\ldots$, para $n \in N$, é igual a:

A) $\dfrac{2^n}{\sqrt{3}}$
B) $\dfrac{2^n}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3}$
C) $\dfrac{2^n}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{2n\pi}{3}$
D) $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}$
E) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$

**12.** Se $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots,\binom{n}{n}$ são coeficientes binomiais do desenvolvimento de $(1 + x)^n$, calcule o valor da expressão $1\cdot\binom{n}{0}+3\cdot\binom{n}{1}+7\cdot\binom{n}{2}+13\cdot\binom{n}{3}+\ldots$ com $(n+1)$ termos em função de **n**.

**13.** (OMA) Seja:

$$P(x) = x^{2007} + x^{2006}(1+x) + x^{2005}(1+x)^2 + \ldots + x(1+x)^{2006} + (1+x)^{2007}.$$

Então, o coeficiente do termo em $x^{500}$ de P(x) é igual a:

A) $\binom{2009}{500}$ B) $\binom{2008}{500}$
C) $\binom{2007}{500}$ D) $\binom{2006}{500}$
E) $\binom{2005}{500}$

**14.** Demonstre que:

A) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cdot\cos\frac{n\pi}{3}\right)$

B) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cdot\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$

C) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n - 2\cdot\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$

**15.** Demonstre que:

A) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

B) $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cdot\text{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$

C) $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

D) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\cdot\text{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$

**16.** Calcule as constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6$, tal que $\cos^6\theta \equiv a_6 \cdot \cos(6\theta) + a_5\cos(5\theta) + \ldots + a_1\cos(\theta) + a_0$.

**17.** O valor da expressão

$44\binom{45}{0} + 43\binom{45}{1} + 42\binom{45}{2} + \ldots + 0\binom{45}{44} - \binom{45}{45}$ é da forma $a \cdot 2^b$ com **a** e **b** números primos entre si. Então o valor de a + b vale:

A) 83 B) 84
C) 85 D) 86
E) 87

**18.** Sabendo que a expressão

$\binom{22}{10}\binom{15}{0} + \binom{22}{9}\binom{15}{1} + \binom{22}{8}\binom{15}{2} + \ldots + \binom{22}{0}\binom{15}{10}$ representa um número binomial da forma $\binom{p}{q}$, onde **p** e **q** são números primos positivos entre si e q < 27. Então o valor da soma dos algarismos de $p^2 + q^2$ vale:

A) 20 B) 21
C) 22 D) 23
E) 24

**19.** (O.C.M. – adaptada) Sabendo que o valor da expressão abaixo: $\frac{1}{1!9!} + \frac{1}{3!7!} + \frac{1}{5!5!} + \frac{1}{7!3!} + \frac{1}{9!1!}$ é da forma $\frac{2^a}{b!}$, onde **a** e **b** são números primos entre si. Então o valor de a + b é igual a:

A) 19 B) 20
C) 21 D) 22
E) 23

**20.** (IME-Aman/2006) Sejam **a**, **b** e **c** as raízes da equação $4x^3 + 12x^2 + 7x + 5 = 0$. Determine o valor de $a^3 + b^3 + c^3$.

**21.** Se **r**, **s** e **t** são as raízes da equação $8x^3 + 1001x + 2008 = 0$. Calcule $(r + s)^3 + (s + t)^3 + (r + t)^3$.

**22.** (OM-Campinense/2005) Determine o valor da soma

$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 2003 \cdot 2004 \cdot 2005$

A) $6\binom{2005}{4}$ B) $6\binom{2006}{4}$
C) $6\binom{2005}{3}$ D) $3\binom{2006}{3}$
E) $3\binom{2005}{4}$

**23.** Sabendo que **S** é representado da forma $2^a - b$ para $S = \sum_{i=1}^{30}\left(\sum_{j=1}^{30}\binom{i}{j}\right)$. Então o valor de a + b é igual a:

A) 31
B) 32
C) 1
D) 63
E) 62

**24.** Se **z** é um número complexo tal que o seu módulo e argumento principal são respectivamente iguais a 1 e $\frac{\pi}{15}$rad. Sabendo que a matriz quadrada M é definida por

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{z^2+z-1}{z} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{z^8+z^4-1}{z^4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{z^6+z^3+1}{z^3} \end{pmatrix}$$, então o valor absoluto do $\det(2 \cdot M \cdot M^T)$ é igual a:

A) 1
B) 4
C) 8
D) 16
E) 64

**25.** Seja **a** um número real positivo tal que $a^3 = 6(a + 1)$. Prove que a equação $x^2 + a \cdot x + a^2 - 6 = 0$ não possui solução real.

**26.** Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{3^n}$ pode ser escrito da forma $\frac{a+b\sqrt{2}}{c}$ com **a** e **b** números primos entre si, $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Então o valor de a + b + c é igual a:

A) 40
B) 41
C) 42
D) 43
E) 44

**27.** Sejam $A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k$ e $B=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}11^k$. Se $\ln B-\ln A=\ln\left(\frac{6561}{4}\right)$ então **n** é igual a:

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

**28.** Calcule o valor da expressão $\left|7\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^6+5\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^7\right|$, onde $i^2 = -1$.

**29.** Se $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, onde **a**, **b** e **c** são números complexos. Suponha-se que $p(2009 + 9002\pi i) = p(2009) = p(9002) = 0$. Determine o número de raízes não real de $x^{12} + ax^8 + bx^4 + c$?

A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 12

**30.** Calcule o valor numérico da expressão tg1° + tg5° + tg9° + ... + tg177°.

## Gabarito

| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | D | D | – | E | B | C | A | B | D |
| **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| B | – | B | – | – | – | E | A | A | – |
| **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
| – | A | D | – | – | B | E | – | C | B |

– Demonstração