Exercícios Análise Combinatória

1. (Uemg 2014) Na Copa das Confederações de 2013, no Brasil, onde a seleção brasileira foi campeã, o técnico Luiz Felipe Scolari tinha à sua disposição 23 jogadores de várias posições, sendo: 3 goleiros, 8 defensores, 6 meio-campistas e 6 atacantes. Para formar seu time, com 11 jogadores, o técnico utiliza 1 goleiro , 4 defensores , 3 meio-campistas e 3 atacantes. Tendo sempre Júlio César como goleiro e Fred como atacante, o número de times distintos que o técnico poderá formar é
a) 14 000.
b) 480.
c) 8! + 4!
d) 72 000.

2. (Uneb 2014)

De acordo com o texto, se Cebolinha lançar a sua moeda dez vezes, a probabilidade de a face voltada para cima sair cara, em pelo menos oito dos lançamentos, é igual a
a) $\frac{5}{128}$
b) $\frac{7}{128}$
c) $\frac{15}{256}$
d) $\frac{17}{256}$
e) $\frac{25}{512}$

3. (Insper 2014) Um dirigente sugeriu a criação de um torneio de futebol chamado Copa dos Campeões, disputado apenas pelos oito países que já foram campeões mundiais: os três sul-americanos (Uruguai, Brasil e Argentina) e os cinco europeus (Itália, Alemanha, Inglaterra, França e Espanha). As oito seleções seriam divididas em dois grupos de quatro, sendo os jogos do grupo A disputados no Rio de Janeiro e os do grupo B em São Paulo. Considerando os integrantes de cada grupo e as cidades onde serão realizados os jogos, o número de maneiras diferentes de dividir as oito seleções de modo que as três sul-americanas não fiquem no mesmo grupo é
a) 140.
b) 120.
c) 70.
d) 60.
e) 40.

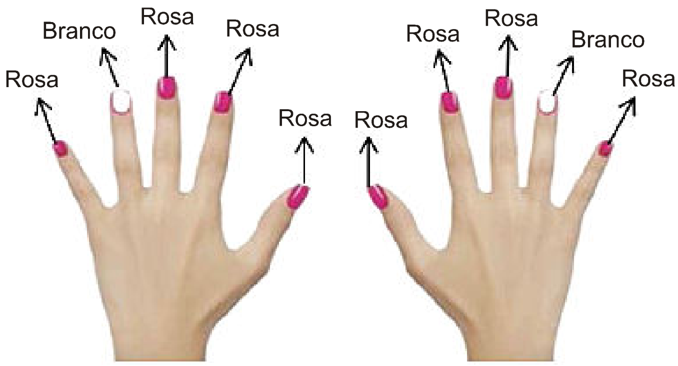
4. (Uece 2014) Sejam r e s duas retas distintas e paralelas.
Se fixarmos 10 pontos em r e 6 pontos em s, todos distintos, ao unirmos, com segmentos de reta, três quaisquer destes pontos não colineares, formam-se triângulos. Assinale a opção correspondente ao número de triângulos que podem ser formados.
a) 360
b) 380
c) 400
d) 420

5. (Ufsc 2014) Assinale a(s) proposição(ões) **CORRETA(S)**.
01) O número do cartão de crédito é composto de 16 algarismos. Zezé teve seu cartão quebrado, perdendo a parte que contém os quatro últimos dígitos. Apenas consegue lembrar que o número formado por eles é par, começa com 3 e tem todos os algarismos distintos. Então, existem 280 números satisfazendo essas condições.

02) No prédio onde Gina mora, instalaram um sistema eletrônico de acesso no qual se deve criar uma senha com 4 algarismos, que devem ser escolhidos dentre os algarismos apresentados no teclado da figura. Para não esquecer a senha, ela resolveu escolher 4 algarismos dentre os 6 que representam a data de seu nascimento. Dessa forma, se Gina nasceu em 27/10/93, então ela pode formar 15 senhas diferentes com 4 algarismos distintos.

04) Entre as últimas tendências da moda, pintar as unhas ganha um novo estilo chamado de “filha única”. A arte consiste em pintar a unha do dedo anelar de uma cor diferente das demais, fazendo a mesma coisa nas duas mãos, conforme mostra o

exemplo na figura. Larissa tem três cores diferentes de esmalte, então, usando essa forma de pintar as unhas, poderá fazê-lo de 6 maneiras diferentes.



08) Uma fábrica de automóveis lançou um modelo de carro que pode ter até 5 tipos de equipamentos opcionais. O número de alternativas deste modelo com respeito aos equipamentos opcionais é igual a 120.
16) Jogando-se simultaneamente dois dados idênticos e não viciados, observa-se a soma dos valores das faces que ficam voltadas para cima. A soma com maior probabilidade de ocorrer é 7.
32) O número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z = 6$ é igual a 28.
64) Se a soma de quatro números primos distintos é igual a 145, então o menor deles é 3.

6. (Mackenzie 2014) Cinco casais resolvem ir ao teatro e compram os ingressos para ocuparem todas as 10 poltronas de uma determinada fileira. O número de maneiras que essas 10 pessoas podem se acomodar nas 10 poltronas, se um dos casais brigou, e eles não podem se sentar lado a lado é
a) $9 \cdot (9!)$
b) $8 \cdot (9!)$
c) $8 \cdot (8!)$
d) $\frac{10!}{2}$
e) $\frac{10!}{4}$

7. (Pucrs 2014) O número de anagramas da palavra BRASIL em que as vogais ficam lado a lado, e as consoantes também, é
a) 24
b) 48
c) 96
d) 240
e) 720

8. (Uece 2014) Paulo possui 709 livros e identificou cada um destes livros com um código formado por três letras do nosso alfabeto, seguindo a “ordem alfabética” assim definida: AAA, AAB,..., AAZ, ABA, ABB,..., ABZ, ACA,... Então, o primeiro livro foi identificado com AAA, o segundo com AAB,... Nestas condições, considerando o alfabeto com 26 letras, o código associado ao último livro foi
a) BAG.
b) BAU.
c) BBC.
d) BBG.

9. (Enem 2013) Considere o seguinte jogo de apostas:

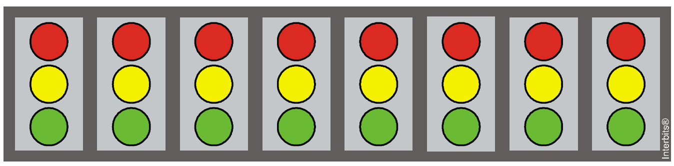
Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela.
O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R$500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:
- Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;
- Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;
- Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;
- Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;
- Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são
a) Caio e Eduardo.
b) Arthur e Eduardo.
c) Bruno e Caio.
d) Arthur e Bruno.
e) Douglas e Eduardo.

10. (Uerj 2013) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes − vermelha, amarela e verde. Observe a figura:



Considere as seguintes informações:

— cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
— qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
— duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

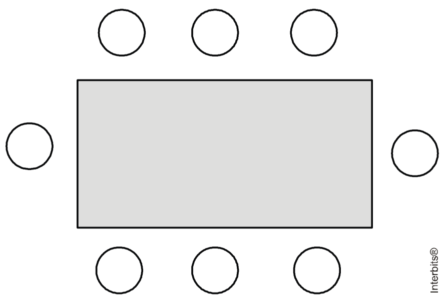
Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir.

11. (G1 - ifsp 2013) Dispõe-se de cinco cores para colorir o retângulo que está dividido em quatro outros retângulos menores, R_1, R_2, R_3 e R_4, de maneira que retângulos com um lado comum não devem ser coloridos com a mesma cor. O número de modos diferentes de colorir os quatro retângulos com apenas duas cores é

R_1	R_2
R_3	R_4

a) 8.
b) 12.
c) 15.
d) 18.
e) 20.

12. (Upe 2013) Oito amigos entraram em um restaurante para jantar e sentaram-se numa mesa retangular, com oito lugares, como mostra a figura a seguir:



Dentre todas as configurações possíveis, quantas são as possibilidades de dois desses amigos, Amaro e Danilo, ficarem sentados em frente um do outro?
a) 1 440
b) 1 920
c) 2 016
d) 4 032
e) 5 760

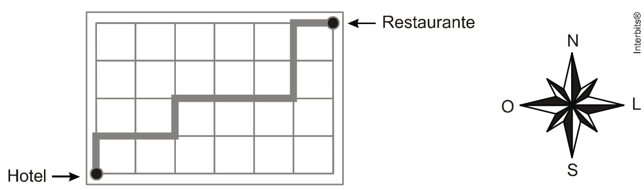
13. (Uerj 2012) A tabela abaixo apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano.

País	Descrição	Exemplo de placa
X	3 letras e 3 algarismos, em qualquer ordem	M3MK09
Y	um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem	YBW0299

Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país X igual a *n* e no país Y igual a *p*. A razão $\frac{n}{p}$ corresponde a:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 6

14. (Fgv 2012) Oito garotas chegam de férias a uma pequena cidade do litoral norte. Dirigem-se a um hotel onde somente estão disponíveis dois quartos triplos e um quarto duplo.

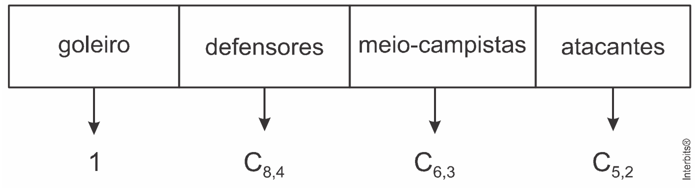
a) De quantos modos diferentes elas podem alojar-se no hotel?
b) As ruas da cidade interceptam-se em ângulos retos, como mostra a figura. Certo dia, elas decidem almoçar no único restaurante da cidade. Quantos caminhos diferentes elas podem escolher para ir do hotel ao restaurante? Elas caminham somente para o norte ou para o leste. A figura indica um possível caminho.



15. (Ufba 2011) Considere o conjunto de todos os números de cinco algarismos distintos, formados com os algarismos 1, 3, 5, 8 e 9.
Escolhendo, aleatoriamente, um elemento desse conjunto, calcule a probabilidade de o número escolhido ser menor que o número 58931.

Solução

Resposta da questão 1:
[A]



Logo, o número de times distintos é:
$1 \cdot 70 \cdot 20 \cdot 10 = 14000.$

Resposta da questão 2:
[B]

Espaço amostral dos 10 lançamentos: $2^{10} = 1024$.

Sair cara em pelo menos 8 moedas:
$C_{10,8} + C_{10,9} + C_{10,10} = 45 + 10 + 1 = 56.$

Logo, a probabilidade pedida será: $P = \frac{56}{1024} = \frac{7}{128}$.

Resposta da questão 3:
[D]

Existem 2 maneiras de escolher o grupo que terá duas seleções sul-americanas, $\binom{3}{2} = 3$ modos de escolher essas duas seleções, e $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ modos de escolher as duas seleções europeias que irão formar o grupo com as duas sul-americanas. Como o segundo grupo é determinado univocamente pelas escolhas do primeiro, segue-se que o resultado pedido, pelo Princípio Fundamental da Contagem, é $2 \cdot 3 \cdot 10 = 60.$

Resposta da questão 4:
[D]

Número de combinações do total de pontos três a três:
$C_{16,3} = \frac{16!}{3!(16-3)!} = 560$

Número de combinações dos 10 pontos de uma reta três a três: $C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$

Número de combinações dos 6 pontos da outra reta três a três: $C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$

Portanto, o total de triângulos será dado por: $560 - 120 - 20 = 420.$

Resposta da questão 5:
01 + 04 + 16 + 32 = 53.

[01] **Correto**. Se o número formado pelos quatro últimos dígitos é par, tem os algarismos distintos e começa com 3, então existem 5 possibilidades para o algarismo das unidades, 8 possibilidades para o algarismo das centenas e 7 para o das dezenas. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, existem $8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$ números satisfazendo essas condições.

[02] **Incorreto**. Como a data do aniversário de Gina não possui algarismos repetidos, segue-se que o número de senhas que ela pode formar, com 4 algarismos distintos, corresponde ao número de arranjos simples de 6 elementos tomados 4 a 4, ou seja,

$$A_{6,\,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

[04] **Correto**. Existem 3 escolhas para o dedo anelar e 2 para os outros dedos da mão. Em consequência, pelo Princípio Multiplicativo, as unhas podem ser pintadas de $3 \cdot 2 = 6$ modos distintos.

[08] **Incorreto**. É possível escolher $0, 1, 2, 3, 4$ ou 5 opcionais. Por conseguinte, existem

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 = 32$$

alternativas com respeito aos equipamentos opcionais.

[16] **Correto**. Seja Ω o espaço amostral. Temos

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

Seja S_i, com $i = 2, 3, \ldots, 12$, o conjunto formado pelos resultados cuja soma é igual a i.

Por inspeção, é fácil ver que

$$n(S_2) < n(S_3) < \ldots < n(S_6) < n(S_7) > n(S_8) > \ldots > n(S_{12}).$$

Desse modo, como $S_7 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, vem $n(S_7) = 6$ e, portanto, a soma com maior probabilidade de ocorrência é 7.

[32] **Correto**. O número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z = 6$ é igual a

$$CR_{3,6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28.$$

[64] **Incorreto**. Sabendo que 2 é o único primo par, segue-se que a soma de quatro primos distintos maiores do que 2 é um número par.

Portanto, se a, b, c e d são primos tais que $a < b < c < d$ e $a + b + c + d = 145$, só pode ser $a = 2$.

Resposta da questão 6:
[B]

As 10 pessoas podem se sentar de $P_{10} = 10!$ maneiras. Por outro lado, o casal que está brigado pode se sentar lado a lado de $P_9 \cdot P_2 = 2 \cdot 9!$ modos.
Em consequência, o resultado pedido é
$10! - 2 \cdot 9! = 10 \cdot 9! - 2 \cdot 9! = 8 \cdot 9!.$

Resposta da questão 7:
[C]

Considerando dois grupos, o das vogais com dois elementos e o das consoantes com 4 elementos, temos três permutações, a permutação dos grupos e as permutações dos elementos em cada grupo.
Portanto, o número de anagramas da palavra BRASIL em que as vogais ficam lado a lado e as consoantes também será dado por:

$2! \cdot 4! \cdot 2! = 96.$

Resposta da questão 8:
[D]

Quantidade de códigos que começam por A:
$1 \cdot 26 \cdot 26 = 676$
Quantidade de códigos que começam por BA:
$1 \cdot 1 \cdot 26 = 26$
O restante dos livros começa por BB.
Faltam então, 7 livros para obtermos o código do último. $(709 - 676 - 26 = 7)$

Então, a última letra é G (sétima letra do alfabeto).
O código associado ao último livro é BBG.

Resposta da questão 9:
[A]

Supondo que duas cartelas de um mesmo jogador não possuem 6 dezenas iguais, segue-se que Arthur, Bruno, Caio, Douglas e Eduardo possuem, respectivamente, as seguintes possibilidades de serem premiados:

$$250;\ 41 \cdot \binom{7}{6} + 4 = 291;\ 12 \cdot \binom{8}{6} + 10 = 346;$$
$$4 \cdot \binom{9}{6} = 336 \text{ e } 2 \cdot \binom{10}{6} = 420.$$

Portanto, como o número de casos possíveis para o resultado do sorteio é o mesmo para todos, podemos concluir que Caio e Eduardo são os que têm as maiores probabilidades de serem premiados.

Resposta da questão 10:
1ª Solução:

O número de mensagens distintas que o sistema pode emitir é dado por

$$\begin{aligned}\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} &= \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 3 \\ &= 1680.\end{aligned}$$

2ª Solução:

O número de mensagens distintas que o sistema pode emitir corresponde ao número de permutações de 8 lâmpadas, sendo 3 vermelhas, 2 verdes, 1 amarela e 2 apagadas, ou seja,

$$\begin{aligned}P_8^{(3,2,2)} &= \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2} \\ &= 1680.\end{aligned}$$

Resposta da questão 11:
[E]

Existem apenas duas maneiras de colorir os retângulos usando as cores A e B:

A	B
B	A

ou

B	A
A	B

Interbits®

Escolhendo duas entre as 5 cotes disponíveis.
$C_{5,2} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$
Número de maneiras para se pintar os retângulos:
$2 \cdot 10 = 20$

Resposta da questão 12:
[E]

Existem 4 escolhas para os acentos em que sentarão Amaro e Danilo. Definidos os assentos que eles ocuparão, ainda podemos permutá-los de 2 maneiras. Além disso, as outras seis pessoas podem ser dispostas de $6!$ maneiras.
Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, segue que o resultado pedido é

$$4 \cdot 2 \cdot 6! = 5.760.$$

Resposta da questão 13:
[B]

Escolhendo 3 lugares para as letras $C_{6,3} = 20$

x = $C_{6,3}$.26.26.26.10.10.10 = 20.26.26.26.10.10.10

y = 26.26.26.10.10.10.10

Logo, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{20.26.26.26.10.10.10}{26.26.26.10.10.10.10} = 2$.

Resposta da questão 14:

a) 3 pessoas para o primeiro quarto:

$c_{8,3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56.$

3 pessoas para o segundo quarto:

$c_{5,3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10.$

2 pessoas para o terceiro quarto $c_{2,2} = 1.$

Portanto $56 \cdot 10 \cdot 1 = 560.$

b) Escolhendo 4 caminhos para norte, num total de 10, temos:

$c_{10,4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8.7}{4.3.2.1} = 210.$

Resposta da questão 15:

total						→ 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120
Começando com 1 ou 3						→ 2 . 4 . 3 . 2 . 1 = 48
Começando com 5	5	1				→ 3 . 2 . 1 = 6
	5	3				→ 3 . 2 . 1 = 6
6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 17	5	8	1			→ 2 . 1 = 2
	5	8	3			→ 2 . 1 = 2
	5	8	1	9	3	→ 1

Interbits®

$$P = \frac{17 + 48}{120} = \frac{65}{120} = \frac{13}{24}$$