Bernoulli
Sistema de Ensino

Bernoulli Resolve

6V | Volume 1 | Matemática

SUMÁRIO

Frente A	Módulo 01:	Conjuntos numéricos	3
	Módulo 02:	Raciocínio lógico	6
	Módulo 03:	Teoria dos Conjuntos	8
	Módulo 04:	Divisibilidade, MDC e MMC	12
Frente B	Módulo 01:	Razões e Proporções	17
	Módulo 02:	Regra de Três	20
	Módulo 03:	Noções primitivas de Geometria Plana	25
	Módulo 04:	Triângulos e Pontos Notáveis	28
Frente C	Módulo 01:	Sistemas métricos e Base Decimal	33
		Seção Enem	35
	Módulo 02:	Porcentagem	36
	Módulo 03:	Juros simples e compostos	39
	Módulo 04:	Estatística	42

COMENTÁRIO E RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

MÓDULO – A 01

Conjuntos Numéricos

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: Sabemos que:

$\frac{3}{7} \cong 0,42;$ $\frac{5}{6} \cong 0,83;$ $\frac{4}{9} \cong 0,44;$ $\frac{3}{5} = 0,6.$ Portanto, a divisão do menor pelo maior será igual a: $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{7}.\frac{6}{5} = \frac{18}{35}.$

Questão 02 – Letra D

Comentário: $x + y = 0,9494... + 0,060606... = \frac{94}{99} + \frac{06}{99} = \frac{100}{99}.$

Questão 03 – Letra D

Comentário: No conjunto dos números inteiros, sabemos que:
par + par = par
ímpar + ímpar = par
par + ímpar = ímpar
Portanto, para que a soma de três números inteiros seja ímpar, devemos ter dois pares e um ímpar ou três ímpares.

Questão 04 – Letra D

Comentário:

A) Verdadeiro, pois, quando a representação decimal infinita de um número é periódica, trata-se de uma dízima periódica. Logo, esse número decimal pode ser transformado em uma fração cujos termos são inteiros, ou seja, ele é um número racional.

B) Verdadeiro, pois, quando a representação decimal de um número é finita, ele pode ser transformado em uma fração cujos termos são inteiros.

C) Verdadeiro, pois números com representação decimal finita são racionais.

D) Falso. Contraexemplo: $\frac{2}{3}$ = 0,666..., ou seja, $\frac{2}{3}$ é um número racional, e sua representação decimal é infinita.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Analisando cada uma das afirmativas, temos:

A) Falsa. $\frac{7}{7} = 1 \in$ J.

B) Falsa. Há infinitos racionais em J.

C) Falsa. Há infinitos irracionais em J.

D) Verdadeira. Há infinitos reais em J.

E) Falsa. Há infinitos racionais em J.

Questão 06 – Letra D

Comentário:

A) Falso. Contraexemplo: $\sqrt{2} \, . \, \sqrt{2} = 2$.

B) Falso. Contraexemplo: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

C) Falso. Tome π e $\sqrt{11}$.

D) Verdadeiro. Sendo **x** e **y** dois números racionais, o número $\frac{x+y}{2}$ está entre esses números, e é racional.

E) Falso. Contraexemplo: −1 − (−1) = 0.

Questão 07 – Letra B

Comentário: Temos que MMC(3, 7, 14) = 42. Assim, vale que: $\frac{3}{7}.42 < \frac{n}{14}.42 < \frac{2}{3}.42 \Rightarrow 18 < 3n < 28.$ Como **n** é um número inteiro, os únicos números que pertencem ao intervalo 18 < 3n < 28 são 21, 24 e 27; logo, **n** pode assumir apenas três valores: 7, 8 e 9.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Organizando os números constantes nas alternativas em ordem crescente, temos:

$$\left\{-2; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}$$

Substituindo esses valores para o **x** na sentença, temos:

$(-2)^2 > -2 \Rightarrow \; 4 > -2$ (Verdadeira)

$(-1)^2 > -1 \Rightarrow \; 1 > -1$ (Verdadeira)

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 > -\frac{1}{2} \Rightarrow \; \frac{1}{4} > -\frac{1}{2}$ (Verdadeira)

$0^2 > 0 \Rightarrow \; 0 > 0$ (Falsa)

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2} \Rightarrow \; \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ (Falsa)

$1^2 > 1 \Rightarrow \; 1 > 1$ (Falsa)

$2^2 > 2 \Rightarrow \; 4 > 2$ (Verdadeira)

Portanto, as alternativas podem ser classificadas da seguinte forma, sendo V = Verdadeira e F = Falsa:

A) {V, V, F}

B) {V, F, V}

C) {V, V, V}

D) {V, F, V}

E) {F, F, F}

Logo, a alternativa C apresenta um possível conjunto **M**.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário:

$$\begin{cases} 4 \le m \le 8 \quad \text{(I)} \\ 24 \le n \le 32 \Rightarrow \dfrac{1}{32} \le \dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{24} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando (I) e (II), temos:

$$4.\frac{1}{32} \le m.\frac{1}{n} \le 8.\frac{1}{24} \Rightarrow \frac{1}{8} \le \frac{m}{n} \le \frac{1}{3}$$

Assim, o maior valor para $\frac{m}{n}$ é $\frac{1}{3}$.

Questão 02 – Letra C

Comentário: Checando a soma dos cartões dos jogadores:

Maria: $1,\overline{3}+\frac{4}{5}+1,2+\frac{7}{3}=\frac{4}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{5}+\frac{7}{3}=2+\frac{11}{3}=\frac{17}{3}\notin\mathbb{Z}.$

Selton: $0,\overline{2}+\frac{1}{5}+0,3+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{7}{18}=\frac{16}{18}\notin\mathbb{Z}.$

Tadeu: $1,\overline{1}+\frac{3}{10}+1,7+\frac{8}{9}=\frac{10}{9}+\frac{3}{10}+\frac{17}{10}+\frac{8}{9}=2+2=4\in\mathbb{Z}.$

Valentina: $0,\overline{6}+\frac{7}{2}+0,1+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+4=4+\frac{23}{30}=\frac{143}{30}\notin\mathbb{Z}.$

Logo, Tadeu foi o vencedor.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Transformando as frações em números decimais, temos $\frac{13}{17}\cong 0,7647$ e $\frac{6}{17}\cong 0,3529$.

Ordenando os números de maneira crescente:

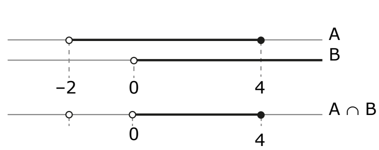
$0,333... < 0,3529 < 0,760 < 0,7647 \Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{6}{17}<\frac{19}{25}<\frac{13}{17}.$

Assim, temos $a=\frac{13}{17}$ e $b=\frac{1}{3}$. Logo, teremos:

$$\frac{a+b^2}{b}=\frac{\frac{13}{17}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{117+17}{153}}{\frac{1}{3}}\Rightarrow\frac{134}{153}.3=\frac{402}{153}\cong 2,63.$$

Questão 04 – Letra A

Comentário: Pelos dados do enunciado, temos A = {$x \in \mathbb{R}$ | $-2 < x \le 4$} e B = {$x \in \mathbb{R}$ | $x > 0$}. Representando graficamente, temos:



Portanto, A ∩ B = A = {$x \in \mathbb{R}$ | $0 < x \le 4$}.

Questão 05 – Letra C

Comentário: $\sqrt{5}$ é tal que

$\sqrt{2^2} < \sqrt{5} < \sqrt{3^2} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -3 < -\sqrt{5} < -2.$

$-\frac{3}{5}=-0,6$, como $-0,6 > -2$, então $-\frac{3}{5} > -\sqrt{5}.$

$-\frac{3}{5}<\frac{3}{8}=0,375<1.$ Temos, então:

$-\sqrt{5}<-\frac{3}{5}<\frac{3}{8}<1$, que na ordem decrescente fica

$1>\frac{3}{8}>-\frac{3}{5}>-\sqrt{5}.$

Questão 06 – Letra E

Comentário: Analisando cada uma das alternativas, temos:

A) Falsa. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

B) Falsa. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

C) Falsa. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

D) Falsa. Nesse caso, basta ver que $0,3 \in \mathbb{R}$, porém $0,3 \notin \mathbb{Z}$ e $0,3 \notin \mathbb{I}$, portanto, $0,3 \notin \mathbb{Z} \cup \mathbb{I}$.

E) Verdadeira. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Questão 07 – Letra C

Comentário: De acordo com os dados da questão, temos que $M \cap P = [5, 10]$, $P - N = [5, 6]$. Portanto, $(M \cap P) \cup (P - N) = [5, 10]$. Logo, o comprimento de $(M \cap P) \cup (P - N)$ é $10 - 5 = 5$.

Questão 08 – Letra D

Comentário: Fatorando 84, obtemos $84 = 2^2 . 3 . 7$. Logo, os divisores inteiros serão:

{±1; ±2; ±3; ±6; ±7; ±12; ±14; ±28; ±42; ±84}.

Destes, os múltiplos de 3 são {±3; ±6; ±12; ±42; ±84}. Assim, X ∩ Y = {3; 6; 12; 42; 84}.

E o maior elemento é o 84, que é múltiplo de 7.

Questão 09 – Letra C

Comentário:

Temos que: $\frac{x}{y}$ = 7,3636... ⇒ $\frac{x}{y} = 7,\overline{36} \Rightarrow$

$\frac{x}{y}=\frac{736-7}{99}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{729}{99}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{81}{11}$

$\frac{x}{y}=\frac{81}{11}=\frac{162}{22}=\frac{243}{33}=...$, pois são frações equivalentes.

Da divisão de Euclides, temos $\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline 8 & z \end{array}$.

Tomando x = 81 e y = 11 ⇒ $\begin{array}{r|l} 81 & 11 \\ \hline 4 & 7 \end{array}$.

Opção inválida, pois dá resto 4.

Tomando x = 162 e y = 22 ⇒ $\begin{array}{r|l} 162 & 22 \\ \hline 8 & 7 \end{array}$.

Opção válida, pois dá resto 8.

Logo, x + y + z = 162 + 22 + 7 = 191.

Questão 10 – Letra C

Comentário:

A) Falso. Como **M** é o ponto médio de AB, então:

$$M = \frac{\frac{2}{5}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{23}{40} = 0,575.$$

B) Falso. Como **N** é o ponto médio de BY, então: $N = \frac{\frac{3}{4}+1}{2} = \frac{7}{8}$.

C) Verdadeiro. De acordo com as alternativas anteriores,

$$M = \frac{23}{40} = 0,575 \text{ e } N = \frac{7}{8} = 0,875.$$

D) Falso. $M = \frac{23}{40}$.

E) Falso. Pois M = 0,575 e N = 0,875.

Questão 11 – Letra B

Comentário:

I. A = {x ∈ $\mathbb{R}$ | 2 < x < 20}

II. B = {0, 2, 4, 6, 8...}

III. C = {40, 20, 10, 8, 5, 4, 2, 1}

Portanto, (A ∩ B) ∩ C = {4, 8, 10}, ou seja, três elementos.

Questão 12 – Letra D

Comentário:

I. Verdadeira. $\sqrt{10} \in (\mathbb{Q} \cup \mathbb{I})$, como 10 não possui raiz inteira, logo, $\sqrt{10} \in \mathbb{I}$.

II. Falsa. Os números inteiros são um subconjunto dos números reais.

III. Verdadeira. $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}) = \varnothing$, os números irracionais não podem ser escritos na forma de fração de números inteiros, que é a definição de números racionais. Logo, não há elementos comuns aos dois conjuntos.

IV. Falsa. O conjunto $\mathbb{R}$ inclui o zero, enquanto o $\mathbb{R}^*$ exclui o zero. Logo, $\mathbb{R}$ não é subconjunto de $\mathbb{R}^*$.

V. Falsa. Sabe-se que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ e $3,762 \notin \mathbb{Z}$, portanto, $3,762 \notin (\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z})$.

VI. Verdadeira. Dado que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, e $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}) = \varnothing$ (item 3), temos que $\mathbb{I}$ não é subconjunto de $\mathbb{Z}$.

Questão 13 – Letra B

Comentário:

I. Falso. Tome como contraexemplo a = 3 e b = 4, daí temos $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.

II. Verdadeiro. Pela propriedade distributiva dos reais.

III. Falso. Se a = 3, b = 6 e c = 2 ⇒ (3 : 6): 2 ≠ 3 :(6 : 2) ⇒

$$\left(\frac{1}{2}\right) : 2 \neq 3 : 3 \Rightarrow \frac{1}{4} \neq 1.$$

Portanto, a única afirmação correta é a II.

Questão 14 – Letra D

Comentário:

I. Falso. Use como contraexemplo a = 0,5.

II. Falso. Use como contraexemplo a = 3 e b = –3.

III. Verdadeiro. $\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| \geq a.$

IV. Verdadeiro. A média aritmética de dois números distintos está contida entre estes dois números.

Assim, as afirmativas III e IV são verdadeiras.

Questão 15 – Letra D

Comentário: Pelo enunciado, tem-se P = {0, 2, 4, 6, 8, 10 ,12}, M = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24} e Q = {1, 4, 16, 64}. Logo, P – Q = {0, 2, 6, 8, 10, 12}, e a afirmativa D é incorreta.

Questão 16 – Letra E

Comentário: O conjunto **G** é o conjunto dos divisores positivos de 90, enquanto o conjunto **F** é o conjunto dos números inteiros (basta observar que é possível construir qualquer inteiro com uma escolha adequada de **q** racional). Já o conjunto **D** é formado pelos quadrados perfeitos pertencentes aos racionais. A intersecção entre esses conjuntos deve ser natural; como $90 = 3^2 . 2 . 5$, os divisores naturais de 90 que são quadrados perfeitos são 1 e 9, e logo G ∩ F ∩ D tem 2 elementos.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 1

Comentário: Calculando a diferença entre os diâmetros das pérolas dadas, temos:

4,025	4,100	4,000	4,080	4,000
–4,000	–4,000	–3,970	–4,000	–3,099
0,025	0,100	0,030	0,080	0,901

Como 0,025 é o menor valor encontrado, concluímos que a pérola escolhida será a de diâmetro igual a 4,025 mm.

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: Pelo conceito de frações equivalentes, temos que: $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ e $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$. Assim, $\frac{3}{8} < \frac{4}{8} < \frac{10}{8} \Rightarrow \frac{3}{8} < \frac{1}{2} < \frac{5}{4}$.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 1

Habilidade: 1

Comentário: **Y** e **T** estão à esquerda do zero, pois são números negativos. Como T < Y, **T** é o número que fica mais à esquerda, entre as unidades –2 e –3, pois –2 < –2,5 < –3. Como $\sqrt{1} = 1 < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$, e $\frac{3}{2} = 1,5$, **Z** e **X** estão entre as unidades 1 e 2. Como $1,5 = \sqrt{2,25} < \sqrt{3}$, X > Z e **X** fica à direita de **Z**.

MATEMÁTICA

MÓDULO – A 02

Raciocínio Lógico

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: Pelo enunciado da questão, tem-se a seguinte implicação: "Se a escolar tiver pelo menos um aluno classificado para a terceira fase, então ganhará um diploma de Honra ao mérito". A contrapositiva dessa implicação é: "Se a escola não ganhou o diploma de Honra ao Mérito, então nenhum de seus alunos foi classificado para a terceira fase". Portanto, a alternativa correta é a C.

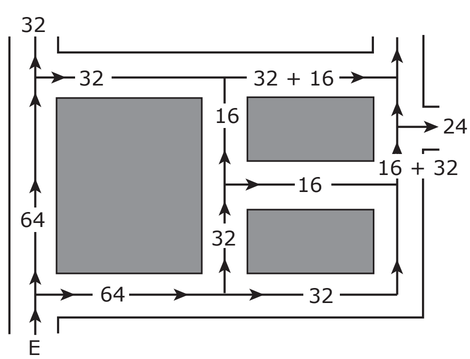
Questão 02 – Letra C

Comentário: Como temos 13 pessoas e doze meses disponíveis para que elas façam aniversário, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês.

Observação: O Princípio das Gavetas de Dirichlet diz que, ao alocar (n + 1) elementos em **n** grupos, um dos grupos terá, ao menos, dois ou mais elementos.

Questão 03 – Letra A

Comentário: De acordo com o raciocínio da questão, temos:



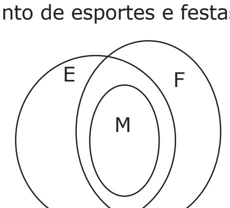
Logo, o número de carros que deixam a região pela saída **S** é igual a 24.

Questão 04 – Letra E

Comentário: A negação de y = –4 é y ≠ –4 e a negação de x < 3 é x ≥ 3. Logo, "Se x < 3, y = –4", pela relação de equivalência descrita no enunciado, é equivalente a "Se y ≠ –4, então x ≥ 3".

Questão 05 – Letra C

Comentário: Utilizando diagrama para representar a afirmação, temos que os jovens que adoram esportes e festas podem ser representados pela interseção desses dois conjuntos. Portanto, como todos os jovens que gostam de Matemática adoram esportes e festas, temos que esse conjunto está contido na interseção do conjunto de esportes e festas. Logo:



Questão 06 – Letra B

Comentário: A proposição "Todos os alunos serão reprovados em Anatomia" é equivalente a "Nenhum aluno será aprovado em Anatomia". Assim, se algum aluno for aprovado em Anatomia, essa proposição se mostra falsa, de tal modo que uma negação possível de "Todos os alunos serão reprovados em Anatomia" é "Algum aluno será aprovado em Anatomia".

Questão 07 – Letra A

Comentário: Traduzindo a sequência contida no código de barras para a linguagem binária (0 ou 1), temos 0110 1000 0011 1001, ou seja, o código corresponde a 6 835.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Se a fruta pesa 320 g, há algumas opções para o seu destino. Se a aparência da casca ou rigidez estão anormais, a fruta é enviada para a compostagem ou para a fábrica de geleias. Se a aparência da casca e a rigidez estão normais, ela é enviada para exportação. Assim, uma fruta de 320 g nunca será enviada para comercialização no mercado interno.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: De acordo com a regra do jogo, no quadrado central, faltam os números 2, 3 e 5. Para facilitar o raciocínio, numeramos as linhas e as colunas conforme a figura a seguir:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4				7			5	6
2							9		2
3	6								
4	3				6	9			
5			5	8	○	1	7		
6	8			7		4			
7						3		2	1
8			2						
9	1	6			2				7

O número pedido se encontra na 5ª linha e 5ª coluna. Ele não pode ser o 5, pois essa linha já apresenta o número 5 na 5ª linha e 3ª coluna. Também não pode ser o número 2, pois ele já aparece na 9ª linha e 5ª coluna. Portanto, o único número que poderá ser colocado na casa marcada é o 3.

Questão 02 – Letra E

Comentário: Como o trabalho **E** só pode ser feito depois de **C**, este só pode ser o segundo ou o primeiro a ser feito. Como **A** deve ser feito depois de **B** e **D**, **A** necessariamente será o quinto trabalho a ser feito. Logo, o quarto trabalho a ser feito pode ser **B**, de tal forma que a ordem escolhida pode ser DCEBA, ou pode ser **D**, por exemplo, segundo a ordem BCEDA.

Questão 03 – Letra D

Comentário: Equivalente à proposição "Todo lixo eletrônico contamina o meio ambiente" é a sentença "Se um lixo não contamina o meio ambiente, então ele não é eletrônico". Como um lixo só poderá ser não destinado à reciclagem e não contaminar o meio ambiente se não contaminar o meio ambiente, o que implica não ser eletrônico, temos que se um lixo é não destinado à reciclagem e não contamina o meio ambiente, então não será eletrônico.

Questão 04 – Letra D

Comentário: A alternativa D é a única que possui um sentido completo e um único valor lógico, pois é uma igualdade que pode ser classificada como verdadeira ou falsa. Analisando as outras alternativas, temos que:

Alternativa A: É uma pergunta em que a resposta poderá ser sim ou não.

Alternativa B: Não possui valor lógico, é uma exclamação.

Alternativa C: É uma inequação que depende dos valores de **x** e **y**, então possui mais de um valor lógico.

Alternativa E: Não é uma equação ou inequação, portanto, não possui valor lógico.

Questão 05 – Letra C

Comentário: Analisando as afirmações apresentadas:

"O de sobrenome Sharifa, que não é o Roy, é mais velho que Luan". Isso implica que Sharifa é o sobrenome de Edu.

"O de sobrenome Arrabeca é o mais velho dos três". Isso implica que Arrabeca é o sobrenome de Roy e, consequentemente, Todeka é o sobrenome de Luan.

Questão 06 – Letra E

Comentário: Seguindo as instruções dadas, temos:

Instrução 1: $X = 4$ e $Y = 0$

Instrução 2: $X = 4 + 7 = 11$

Instrução 3: $Y = 0 + 11 = 11$

Instrução 4: $Y < 100$

Pela instrução 4, só podemos ir para a instrução 5 se $Y \geq 100$, do contrário, é preciso voltar para a instrução 2 e prosseguir a partir dela. Então,

$X = 11 + 7 = 18 \Rightarrow Y = 11 + 18 = 29 \Rightarrow Y < 100.$

$X = 18 + 7 = 25 \Rightarrow Y = 29 + 25 = 54 \Rightarrow Y < 100.$

$X = 25 + 7 = 32 \Rightarrow Y = 54 + 32 = 86 \Rightarrow Y < 100.$

$X = 32 + 7 = 39 \Rightarrow Y = 86 + 39 = 125 \Rightarrow Y > 100$, logo podemos ir para a instrução 5.

Instrução 5: $X = 39$

Portanto, o valor que será impresso na instrução 5 é 39.

Questão 07 – Letra E

Comentário: Temos que $x^2 - 7x + 10 = 0$ é verdade; logo, $x = 2$ ou $x = 5$ também é verdade. Ademais, dada a proposição, "Se $y > 3$, então $x \neq 2$ e $x \neq 5$" a sua contrapositiva será "Se $x = 2$ ou $x = 5$, então $y \leq 3$". Assim, a soma $x + y \leq 8$ e, portanto, a alternativa correta é a E.

Questão 08 – Letra D

Comentário: A sequência de quadrados obedece ao seguinte padrão:

1° = 1 . 1 = 1 quadrado pintado

2° = 1 . 2 = 2 quadrados pintados

3° = 2 . 3 = 6 quadrados pintados

4° = 6 . 4 = 24 quadrados pintados

5° = 24 . 5 = 120 quadrados pintados

6° = 120 . 6 = 720 quadrados pintados

7° = 720 . 7 = 5 040 quadrados pintados

E, por fim, 8° = 5 040 . 8 = 40 320 quadrados pintados.

Questão 09 – Letra E

Comentário: A notação $F \not\subset A$ indica que o conjunto **F** não está contido em **A**, ou seja, que existe ao menos um elemento de **F** (jogador de futebol) que não pertence a **A** (atleta), ou seja, que existe jogador de futebol que não é atleta.

Questão 10 – Letra A

Comentário: Como João só fala a verdade, ele não pode ser o primeiro da fila, uma vez que ele não pode ficar atrás de si mesmo, nem o segundo, uma vez que não se chama Carlos. Logo, João é o terceiro da fila. Assim, como João fala a verdade, Renato está na segunda posição, e, por eliminação, Carlos é o primeiro da fila.

Questão 11 – Letra B

Comentário: Dada a proposição "Se o cachorro dorme, então o gato não mia", temos a contrapositiva "Se o gato mia, então o cachorro não dorme". Assim, sabendo que "o gato mia" é verdade, logo "o cachorro não dorme" também é verdade. Além disso, dada a proposição "Se o pássaro não canta, então o cachorro dorme", temos a contrapositiva "Se o cachorro não dorme, então o pássaro canta". Assim, sabendo que "o cachorro não dorme" é verdade, logo "o pássaro canta" também é verdade.

Questão 12 – Letra C

Comentário: Considere **N** e **P** como nefelibata e pragmático, respectivamente. Assim, temos a sentença "Nenhum N é P" equivalente a "Todo N é não P" e a negação dessa sentença sendo "Algum N é P". Portanto, a negação da sentença "Nenhum nefelibata é pragmático" é "Algum nefelibata é pragmático".

Questão 13 – Letra E

Comentário: Analisando a contrapositiva da 2ª e da 3ª sentença, e sabendo que as três são verdadeiras, temos:

- Se Paula não é divorciada, então Maria não é casada.
- Se Paula não é divorciada, então Laura é casada.

Assim, "Se Paula não é divorciada, então Maria não é casada e Laura é casada". Contudo, como a 1ª sentença é uma disjunção exclusiva, as proposições "Laura não é casada" e "Maria é casada" não podem ser ambas falsas. Portanto, Paula deve ser divorciada.

Questão 14 – Letra A

Comentário: Sabendo que Carlos não é advogado e que cada um dos personagens exerce uma e somente uma das profissões citadas, então é verdade que "Carlos não é advogado, então Paulo não é médico" e "Se Paulo não é médico então, então João é advogado". Portanto, João é advogado, Paulo é engenheiro e Carlos é médico.

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 1

Comentário: A temperatura máxima é indicada pelo nível inferior do filete da coluna da esquerda, que é 19°C. A temperatura atual é indicada pelo nível superior dos filetes cinzas nas duas colunas, que é de 8°C. Logo, a temperatura máxima registrada nesse termômetro é 19°C.

Questão 02 – Letra A

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 6

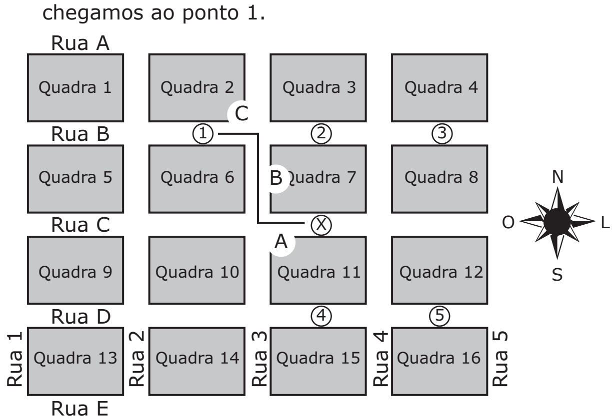
Comentário: Partindo do ponto **X**, têm-se as seguintes instruções:

A) ande para oeste;

B) vire à direita na primeira rua e siga em frente;

C) vire à esquerda na próxima rua.

Seguindo os três passos, conforme a figura a seguir, chegamos ao ponto 1.



Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário: Temos D > A > C > E, em que a desigualdade significa A > B significa que **A** ficou melhor colocado que **B**. Devemos colocar o time **B** entre alguma dessas desigualdades. Entre **C** e **E** não é possível, pois **E** ficou em posição imediatamente inferior à de **C**, assim como entre **A** e **C**, pois **B** não ficou entre os três últimos. Assim, **B** pode ter ficado antes de **D** ou entre **D** e **A**, e a alternativa C é a única que vislumbra uma dessas duas possibilidades, no caso **B** imediatamente acima de **D**.

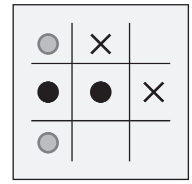
Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: V

Competência de área: 1

Habilidade: 5

Comentário: Ao posicionar a peça tanto na primeira linha da primeira coluna quanto na terceira linha da primeira coluna, o jogador que utiliza os círculos terá vitória garantida na próxima rodada, pois poderá alinhar suas peças ou na vertical (preenchendo a primeira coluna) ou na diagonal do tabuleiro.



Questão 05 – Letra D

Eixo cognitivo: V

Competência de área: 3

Habilidade: 14

Comentário: Para ir da 4ª etapa para a 6ª etapa, é necessário retirar da lata 800 mL (o volume da garrafa maior), colocar na menor garrafa 300 mL (o volume que, na 4ª etapa, encontra-se na garrafa maior) e encher a garrafa maior. Logo, o correto a se fazer é passar para a garrafa menor o conteúdo da garrafa maior (gerando a configuração ilustrada na alternativa D), para, então, encher a garrafa maior com o azeite da lata, levando à configuração ilustrada na 6ª etapa.

MÓDULO – A 03

Teoria dos Conjuntos

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra B

Comentário:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$

$A \cup B \cap C = \{2, 4, 7, 9\}$

$(A \cup B) \cap C - A = \{2, 4\}$

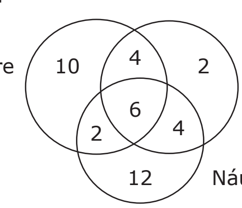
Questão 02 – Letra C

Comentário: Temos que: $\begin{cases} B - A = \{a\} \\ A \cap B = \{b, d\} \end{cases}$

Logo, $B = \{a, b, d\}$.

Questão 03 – Letra C

Comentário: De acordo com os dados da tabela apresentada no exercício, podemos escrever:



Logo, o número de pacientes atendidos no posto será dado por: $10 + 4 + 6 + 2 + 2 + 4 + 12 = 40$.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Sendo **x** o número de candidatos que se inscreveram em ambos os cursos, 480 – x se inscreveram apenas em **A** e 392 – x apenas em **B**. Como são 560 candidatos inscritos, tem-se que:

$(392 - x) + (480 - x) + x = 560 \Rightarrow x = 312$

Assim, $480 - 312 = 168$ se inscreveram apenas em **A**.

Questão 05 – Letra C

Comentário: Analisando a figura, observamos que a parte do triângulo que está no interior do retângulo é $R \cap T$.

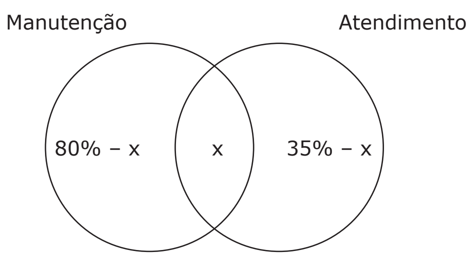
Quanto à parte do triângulo que está no interior do hexágono, que também está no interior do retângulo, esta é definida por $R \cap T \cap H$.

Logo, a parte colorida é definida por $(R \cap T) - (R \cap T \cap H)$, mas $R \cap T \cap H = T \cap H$.

Assim, $(R \cap T) - (R \cap T \cap H) = (R \cap T) - (T \cap H)$.

Questão 06 – Letra D

Comentário: Sendo **x** a quantidade de funcionários que trabalham nas duas equipes, faremos o seguinte Diagrama de Venn para ilustrar o problema:



Dessa forma, temos:

$80\% - x + x + 35\% - x = 100\% \Rightarrow$

$-x = 100\% - 115\% \Rightarrow x = 15\%$

Agora, calculando 15% de 500, temos:

15% de 500 = 0,15 . 500 = 75

Logo, 75 funcionários trabalham nas duas equipes.

Questão 07

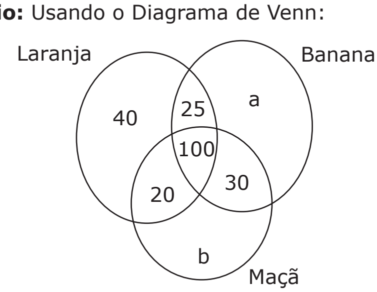
Comentário: Como 31 são morenas, logo, $\underbrace{50}_{\text{Total}} - \underbrace{31}_{\text{Morenas}} = 19$ são louras.

Como 14 são louras com olhos azuis, logo, $\underbrace{19}_{\text{Louras}} - \underbrace{14}_{\text{Louras com olhos azuis}} = 5$ são louras com olhos castanhos.

Como 18 pessoas têm os olhos castanhos, e, dessas, 5 são louras, logo, 18 – 5 = 13 são morenas de olhos castanhos.

Questão 08 – Letra B

Comentário: Usando o Diagrama de Venn:



Observação: Sempre começar atribuindo o valor da interseção dos três conjuntos. Em seguida, atribuir o valor das outras três interseções, sem se esquecer de subtrair o valor da interseção dos três conjuntos.

Como **a** é o número de pessoas que consomem somente banana, e **b,** o número de pessoas que consomem somente maça, o número de consumidores de banana é igual ao de consumidores de maçã. Dessa forma, temos:

$a + 25 + 100 + 30 = b + 20 + 100 + 30 \Rightarrow a + 5 = b$

Assim:

$40 + 25 + 100 + 20 + a + 30 + b = 400 \Rightarrow$

$215 + a + a + 5 = 400 \Rightarrow 2a = 180 \Rightarrow a = 90$

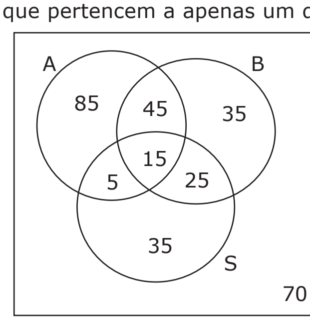
Logo, b = 95.

Portanto, o número de pessoas que consomem maçã e não consomem laranja é igual a b + 30 = 95 + 30 = 125.

Exercícios Propostos

Questão 01

Comentário: Sempre começar atribuindo o valor da interseção dos três conjuntos. Em seguida, atribuir o valor das outras três interseções, sem se esquecer de subtrair do valor da interseção dos três conjuntos. Por fim, completar o número de elementos que pertencem a apenas um dos conjuntos.



A) 85 + 45 + 15 + 5 + 35 + 25 + 35 + 70 = 315

B) 45 + 25 + 5 = 75

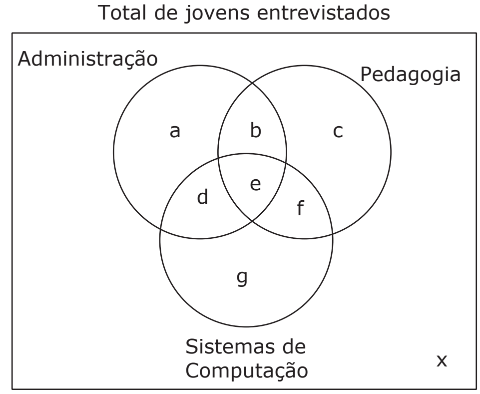
C) 85 + 45 + 35 + 70 = 235

D) 85 + 70 = 155

Questão 02 – Letra E

Comentário: Considere o Diagrama de Venn a seguir para ilustrar o problema:

Total de jovens entrevistados



Pelo texto da questão, temos:

- 100 dos jovens fariam os 3 cursos, ou seja, e = 100;
- 150 fariam sistemas de computação ou pedagogia, ou seja, $100 + f = 150 \Rightarrow f = 50$;

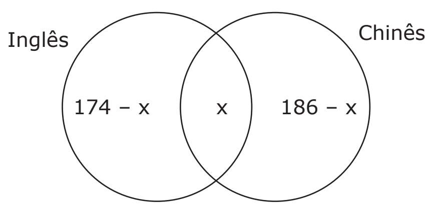
- 250 fariam administração e pedagogia, ou seja, $100 + b = 250 \Rightarrow b = 150$;
- 300 fariam administração e sistemas de computação, ou seja, $100 + d = 300 \Rightarrow d = 200$;
- 500 fariam pedagogia, ou seja, $150 + 100 + 50 + c = 500 \Rightarrow c = 200$;
- 600 fariam sistemas de computação, ou seja, $200 + 100 + 50 + g = 600 \Rightarrow g = 250$;
- 800 fariam administração, ou seja, $150 + 100 + 200 + a = 800 \Rightarrow a = 350$.

  Portanto, sendo **x** o número de jovens que não fariam nenhum dos 3 cursos, temos:

  $a + b + c + d + e + f + g + x = 1\,800 \Rightarrow$
  $350 + 150 + 200 + 200 + 100 + 50 + 250 + x = 1\,800 \Rightarrow$
  $1\,300 + x = 1\,800 \Rightarrow x = 500$.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Sendo **x** o número de alunos que estudam os dois idiomas, considere o Diagrama de Venn a seguir para ilustrar o problema:



Portanto, temos:

$174 - x + x + 186 - x = 300 \Rightarrow -x = 300 - 360 \Rightarrow x = 60$

Logo, o número de alunos que se dedicam ao estudo de apenas uma disciplina é dado por $300 - 60 = 240$.

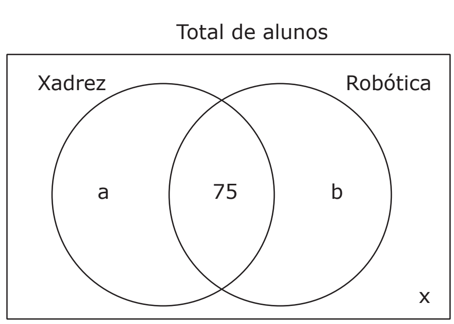
Questão 04 – Letra D

Comentário: Primeiro, vamos determinar o total de alunos que frequentam as oficinas de xadrez e de robótica:

Xadrez – 40% de 500 = $0{,}4 \cdot 500 = 200$

Robótica – 35% de 500 = $0{,}35 \cdot 500 = 175$

Agora, sendo **a** o número de alunos matriculados somente na oficina de xadrez e **b** o número de alunos matriculados somente na oficina de robótica, vamos utilizar o Diagrama de Venn a seguir para ilustrar o problema:



Dessa forma, temos:

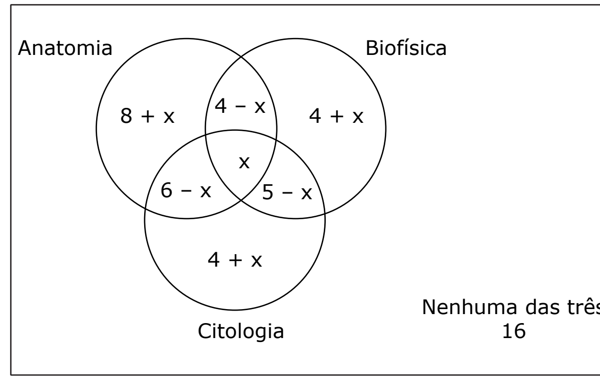
$a + 75 = 200 \Rightarrow a = 125$

$b + 75 = 175 \Rightarrow b = 100$

Logo, $a + b + 75 + x = 500 \Rightarrow 300 + x = 500 \Rightarrow x = 200$.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Sendo **x** o número de alunos que cursam as três disciplinas, vamos utilizar o Diagrama de Venn a seguir para a resolução do problema:



Somando todos os valores, temos:

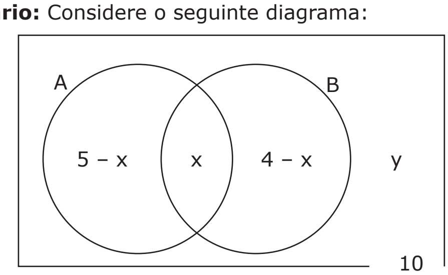
$(8+x)+(4-x)+x+(6-x)+(4+x)+(5-x)+(4+x)+16=50 \Rightarrow x=3$

Dessa forma, o número de alunos que cursam, simultaneamente, exatamente duas disciplinas é dado por:

$(4 - x) + (6 - x) + (5 - x) = 1 + 3 + 2 = 6$.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Considere o seguinte diagrama:



$5 - x + x + 4 - x + y = 10$

$9 - x + y = 10$

$y = 1 + x$

Observe que $y \geq 1$, pois $x \geq 0$.

Portanto, pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.

Questão 07 – Letra D

Comentário: Note que a região alaranjada é a região comum a **A** e a **C**, mas não a **B**. Logo, um elemento dessa região é um elemento que pertence a **A**, pertence a **C**, mas não pertence a **B**, ou seja, pertence a $\overline{B}$. Logo, a região representa $A \cap \overline{B} \cap C$.

Questão 08 – Letra E

Comentário: Na população, 100% – (15% + 10% + 10% + 5%) = 60% não apresentam o fator de risco **A**, enquanto que 100% – (15% + 15% + 15% + 10% + 10% + 10% + 5%) = 20% não apresentavam nenhum dos três fatores. Como o segundo conjunto está contido nesses 60%, a intersecção de ambos corresponde a 20% da população, e assim a porcentagem pedida é de $\dfrac{20\%}{60\%} = 0{,}333... \cong 33\%$.

Questão 09 – Letra A

Comentário: Inicialmente, podemos definir:

I. a = total de pessoas que leem somente a revista **A**.

II. b = total de pessoas que leem somente a revista **B**.

III. c = total de pessoas que leem somente a revista **C**.

IV. x = total de pessoas que leem somente **A** e **B**.

V. y = total de pessoas que leem somente **B** e **C**.

VI. z = total de pessoas que leem somente **A** e **C**.

VII. m = total de pessoas que leem as 3 revistas (pessoas mais bem informadas).

Sabemos que:

17 leem duas das três revistas, logo, x + y + z = 17.

61 leem apenas uma delas, logo, a + b + c = 61.

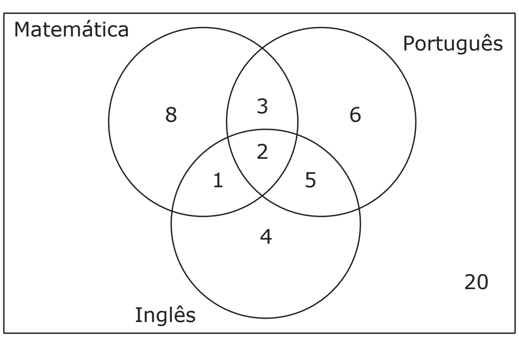
81 leem pelo menos uma delas, logo:

$$\underbrace{x+y+z}_{17}+\underbrace{a+b+c}_{61}+m=81 \Rightarrow m=3$$

Portanto, existem 3 pessoas mais bem informadas entre as 81 entrevistadas.

Questão 10 – Letra E

Comentário: Fazendo um diagrama de Venn, teremos:



Portanto, a quantidade de candidatos que participaram do concurso foi igual a:

8 + 3 + 6 + 1 + 2 + 5 + 4 + 20 = 49 candidatos.

Questão 11 – Letra A

Comentário: Sejam:

T: Conjunto de todas as pessoas do mundo;

M: Conjunto de todos os muçulmanos;

A: Conjunto de todos os árabes.

T é o conjunto universo da questão, o que implica que todos os demais conjuntos são subconjuntos de **T**, ou seja, $A \subset T$ e $M \subset T$.

O conjunto de árabes e muçulmanos é dado por $A \cup M$, logo o conjunto complementar, ou seja, que não são muçulmanos nem árabes, será $T - (A \cup M)$.

Questão 12 – Letra B

Comentário: Seja **x** o número de pessoas do grupo, **A** o conjunto de pessoas que leem *A notícia* e **B** o conjunto de pessoas que leem *O informativo*. Usando a relação $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, temos:

$$n(A \cup B) = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{6}$$

$$n(A \cup B) = \frac{4x}{6} = \frac{2x}{3}$$

Então, $\frac{1}{3}$ não lê nenhum dos dois jornais, pois $x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3}$.

Questão 13 – Letra C

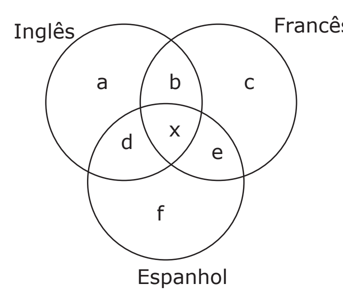
Comentário: Sendo **x** a porcentagem de alunos que resolveram ambos os problemas, (76% – x) resolveu apenas o primeiro e (48% – x) resolveram apenas o segundo. Assim, 20% + x + (48% – x) + (76% – x) = 100% e x = 44%. Logo, há na classe $\frac{22}{44} . 100 = 50$ alunos.

Questão 14 – Letra B

Comentário: Pelos dados do enunciado, 2 pessoas assistiram aos três filmes, 3 apenas **X** e **Y**, 4 apenas **Y** e **Z**, 5 apenas **Y** e 6 apenas **X** ou apenas **X** e **Z**, além de 10 pessoas que não assistiram a filme algum. Perceba, no entanto, que 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 10 = 30 pessoas, ou seja, ninguém assistiu apenas a **Z**, única região do diagrama de Venn não contemplada pelos dados supracitados.

Questão 15 – Letra A

Comentário: Sendo **x** o número de alunos matriculados nos 3 cursos, considere o seguinte Diagrama de Venn para ilustrar o problema:



Pelo texto, temos as seguintes informações:

I. 250 alunos estão matriculados no curso de inglês, ou seja, a + b + d + x = 250.

II. 130 alunos estão matriculados no curso de francês, ou seja, b + c + e + x = 130.

III. 180 estão matriculados no curso de espanhol, ou seja, d + e + f + x = 180.

Note que, para que **x** seja máximo, os valores de **b**, **d** e **e** devem ser mínimos, ou seja, devem ser zero.

Por outro lado, o valor de **x** não pode superar o mínimo entre **a**, **c** e **f**, portanto, o valor máximo de **x** é igual a 130.

Questão 16 – Letra B

Comentário: Analisando os elementos das alternativas associados aos conjuntos, temos: $1\,234 \notin A \Rightarrow 1\,234 \notin P$, logo a alternativa C está errada; $115 \notin B^C \Rightarrow 115 \notin Q$, logo a alternativa D está errada; $550 \notin B$ e $550 \notin C^C \Rightarrow 550 \notin R$, logo a alternativa A está errada. Ademais, $972 \in P$, $1\,234 \in Q$ e $500 \in R$. Portanto, a resposta correta é a alternativa B.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: Considere **A** o número de mulheres que têm certeza de que os homens odeiam ir ao *shopping* e **B** o número de mulheres que pensam que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa, então:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$

$100\% = 72\% + 65\% - n(A \cap B) \Rightarrow$

$n(A \cap B) = 37\%$

Sabendo que a pesquisa foi realizada com 300 mulheres, logo $n(A \cap B) = 300 \,.\, 0{,}37 = 111$.

Portanto, a quantidade delas que acredita que os homens odeiam ir ao *shopping* e pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa é superior a 100 e inferior a 120.

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 6

Habilidade: 26

Comentário: No gráfico "Por que vive na rua?", somando o percentual indicado em cada barra, temos:

$36\% + 30\% + 30\% + 20\% + 16\% = 132\%$.

Logo, algumas pessoas declaram mais de um motivo para viverem na rua.

Questão 03 – Letra A

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 6

Habilidade: 26

Comentário: Seja **P** o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcolismo / drogas e **Q** o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa, temos que:

$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q) \Rightarrow$

$40\% = 36\% + 16\% - n(P \cap Q) \Rightarrow$

$n(P \cap Q) = 12\%$

Logo, o conjunto interseção de **P** e **Q** é igual a 12%.

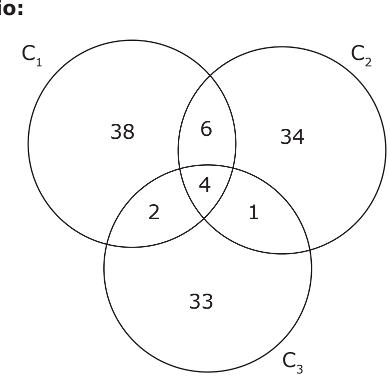
Questão 04 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário:



Como os três catálogos têm 4 páginas em comum, 4 está na região do Diagrama de Venn correspondente à interseção entre os três conjuntos. Em seguida, achamos os valores de regiões que correspondem à interseção de dois conjuntos, subtraindo o total de páginas comuns por 4, e, finalmente, as regiões restantes. Somando o valor encontrado nas 7 regiões, do Diagrama de Venn e cuja união dá o universo de páginas impressas, achamos $38 + 34 + 33 + 4 + 6 + 2 + 1 = 118$ originais de impressão.

Questão 05 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário:

i) Inicialmente, temos $a + b + c + d + e + f = 250$.

ii) Se 32% dos alunos são homens, temos que $d + e + f = 32\% \,.\, 250 \Rightarrow d + e + f = 80$.

iii) Se 40% dos homens estão na primeira série, temos que $d = 40\% \,.\, 80 \Rightarrow d = 32$.

iv) Logo, já podemos assumir que $e + f = 48$.

v) Se 20% dos alunos estão na terceira série, temos que $c + f = 20\% \,.\, 250 \Rightarrow c + f = 50$.

vi) Se 10 alunos da terceira série são homens, $c = 40$ e $f = 10$.

vii) De (ii), temos $e = 38$.

viii) Entre os alunos da segunda série, o número de mulheres é igual ao número de homens; assim, temos, de (vii), que $b = 38$.

Concluindo, de (i), temos que $a = 92$.

MÓDULO – A 04

Divisibilidade, MDC e MMC

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra E

Comentário:

$N = 16^{15} + 2^{56} = (2^4)^{15} + (2^4)^{14} = 2^4.(2^4)^{14} + (2^4)^{14} = (2^4)^{14}(1 + 2^4) = (2^4)^{14}.(17)$

Portanto, como **N** apresenta o número 17 na sua decomposição em fatores primos, dizemos que **N** é divisível por 17.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Temos que

$2\,018^2 - 2\,017^2 = 4\,072\,324 - 4\,068\,289 = 4\,035 = 3^1 \,.\, 5^1 \,.\, 269^1$.

Portanto, a quantidade de divisores será dada por $(1 + 1) \,.\, (1 + 1) \,.\, (1 + 1) = 8$.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Ao analisar a disposição dos números na tabela, nota-se que os que aparecem na 1ª linha são sempre os múltiplos de 8. Além disso, tem-se que $2\,017 = (252 \,.\, 8) + 1$. Portanto, o número 2 017 está na 2ª linha.

Questão 04 – Letra E

Comentário: Basta decompor o número natural $10^{63} - 10^{61}$ em fatores primos e determinar o expoente do número 3.

Assim: $10^{63} - 10^{61} = 10^{61}(10^2 - 1) = (2.5)^{61}(99) =$

$2^{61} . 5^{61} . 9 . 11 = 2^{61} . 3^2 . 5^{61} . 11$

Portanto, o expoente do número 3 é 2.

Questão 05 – Letra C

Comentário: Fatorando os números 4 e 6, temos:

$4 = 2^2$

$6 = 2 . 3$

O MMC(4, 6) é dado pelo produto dos fatores comuns aos dois números com o maior expoente, ou seja:

$\text{MMC}(4, 6) = 2^2 . 3 = 12$

Portanto, **n** deve ser um múltiplo de 12.

Questão 06 – Letra D

Comentário: Fatorando os números 20 e 35, temos:

$20 = 4 . 5 = 2^2 . 5$

$35 = 5 . 7$

O MMC(20, 35) é dado pelo produto dos fatores comuns aos dois números com o maior expoente, ou seja:

$\text{MMC}(20, 35) = 2^2 . 5 . 7 = 140$

Portanto, a próxima passagem dos dois cometas pela Terra ocorrerá no ano de 1930 + 140 = 2070.

Questão 07 – Letra A

Comentário: Como, em cada dia, as redações foram igualmente divididas entre os professores, então o número de professores na equipe será dado pelo MDC(702, 728, 585). Assim, temos: $702 = 2 . 3^3 . 13$, $728 = 2^3 . 7 . 13$, $585 = 3^2 . 5 . 13$. Portanto, o MDC(702, 728, 585) = 13, que é um divisor de 52.

Questão 08 – Letra C

Comentário:

750 – 40 = 710

$$\begin{array}{r|l} 710 & 3 \\ \hline 2 & 236 \end{array}$$

O acidente ocorreu 2 km à frente do último telefone. Logo, o próximo telefone encontra-se 1 km à frente.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Tempo total até a colheita considerando a tabela:

$V_1 \Rightarrow 4 + 3 + 1 = 8$ semanas

$V_2 \Rightarrow 2 + 3 + 1 = 6$ semanas

$V_3 \Rightarrow 1 + 2 + 1 = 4$ semanas

O tempo necessário para que a colheita seja simultânea é igual ao MMC de 8, 6 e 4.

MMC(8, 6, 4) = 24

Logo, são necessárias 24 semanas.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Fatorando os números 30, 45 e 60, temos:

$30 = 3 . 10 = 2 . 3 . 5$

$45 = 3 . 15 = 3^2 . 5$

$60 = 6 . 10 = 2^2 . 3 . 5$

O MMC(30, 45, 60) é dado pelo produto dos fatores comuns aos três números com o maior expoente, ou seja:

$\text{MMC}(30, 45, 60) = 2^2 . 3^2 . 5 = 180$

Portanto, o primeiro mês em que os jogos das três modalidades voltarão a coincidir é março + 6 meses = setembro.

Questão 03 – Letra A

Comentário: Os casos especiais são aqueles que, apesar de serem múltiplos de 4 e de 100, não são múltiplos de 400. Listando os múltiplos de 100 maiores que 1 900, temos:

2 000, 2 100, 2 200, 2 300, ...

Note que 2 000 é múltiplo de 400, já 2 100 não, portanto ele é um caso especial.

Logo, a soma dos algarismos do próximo ano que será um caso especial é dada por 2 + 1 + 0 + 0 = 3.

Questão 04 – Letra C

Comentário: Fatorando os números 90 e 162, temos:

$90 = 9 . 10 = 2 . 3^2 . 5$

$162 = 2 . 81 = 2 . 3^4$

O MDC(90, 162) é dado pelo produto dos fatores comuns aos dois números com o menor expoente, ou seja:

$\text{MDC}(90, 192) = 2 . 3^2 = 18$

Portanto, temos:

Pilhas de moedas de 10 centavos: $\dfrac{162}{18} = 9$.

Pilhas de moedas de 25 centavos: $\dfrac{90}{18} = 5$.

Logo, o número de pilhas é dado por 5 + 9 = 14.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Fatorando os números 12, 22 e 39, temos:

$12 = 3 . 4 = 2^2 . 3$

$22 = 2 . 11$

$39 = 3 . 13$

O MMC(12, 22, 39) é dado pelo produto dos fatores comuns aos três números com o maior expoente, ou seja:

$\text{MMC}(12, 22, 39) = 2^2 . 3 . 11 . 13 = 1\,716$

Agora, analisando esses minutos, temos que:

1 716 = 28 . 60 minutos + 36 minutos = 24 horas + 4 horas + 36 minutos = 1 dia + 4 horas + 36 minutos.

Portanto, os três cucos tocarão juntos novamente às 19h36min do dia seguinte.

Questão 06 – Letra E

Comentário: Fatorando cada um dos números, temos:

$a = 54 . 10 = 27 . 2 . 2 . 5 = 2^2 . 3^3 . 5$

$b = 72 . 10 = 8 . 9 . 2 . 5 = 2^4 . 3^2 . 5$

$c = 18 . 100 = 2 . 9 . 2^2 . 5^2 = 2^3 . 3^2 . 5^2$

MATEMÁTICA

O MMC(a, b, c) é dado pelo produto dos fatores comuns aos três números com o maior expoente, ou seja:

MMC(a, b, c) = $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

Dessa forma, o número de divisores **n** do MMC(a, b, c) é dado por (4 + 1)(3 + 1)(2 + 1) = 60.

Questão 07 – Letra B

Comentário: Como o feirante deseja distribuir para cada família o menor número possível de frutas de cada espécie, ele atenderá, então, o maior número possível de famílias. Sendo 576 = $2^6 \cdot 3^2$, 432 = $2^4 \cdot 3^3$, 504 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, MDC(576, 432, 504) = $2^3 \cdot 3^2$ = 72 famílias.

Assim,

$$\frac{576}{72} = 8 \text{ goiabas}$$

$$\frac{432}{72} = 6 \text{ laranjas}$$

$$\frac{504}{72} = 7 \text{ maçãs}$$

Portanto, cada família receberá 21 frutas, que é múltiplo de 7.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Fatorando os números 96, 144, 192 e 240, temos:

96 = 4 . 24 = 4 . 4 . 6 = $2^5 \cdot 3$

144 = 4 . 36 = 4 . 4 . 9 = $2^4 \cdot 3^2$

192 = 3 . 64 = 3 . 2^6

240 = 24 . 10 = 4 . 6 . 2 . 5 = $2^4 \cdot 3 \cdot 5$

O MDC(96, 144, 192, 240) = $2^4 \cdot 3$ = 48

Portanto, o número de pacotes de feijão em cada cesta é dado por $\frac{144}{48} = 3$.

Questão 09 – Letra D

Comentário: Fatorando os números 180 e 216, temos:

180 = 10 . 18 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

216 = 3 . 72 = $2^3 \cdot 3^3$

O MDC(180, 216) é dado pelo produto dos fatores comuns aos dois números com o menor expoente, ou seja:

MDC(180, 216) = $2^2 \cdot 3^2$ = 36

Grupos de homens: $\frac{180}{36} = 5$

Grupos de mulheres: $\frac{216}{36} = 6$

Portanto, o número de hospitais visitados será dado por 5 + 6 = 11, que é um número primo.

Questão 10 – Letra D

Comentário: O primeiro remédio deve ser tomado a cada 90 minutos, e o segundo, a cada 150 minutos. Fatorando os números 90 e 150, temos:

90 = 9 . 10 = $2 \cdot 3^2 \cdot 5$

150 = 10 . 15 = $2 \cdot 3 \cdot 5^2$

O MMC(90, 210) é dado pelo produto dos fatores comuns aos dois números com o maior expoente, ou seja:

MMC(90, 210) = $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ = 450 = 7 . 60 minutos + 30 minutos.

Portanto, a próxima vez que Gabriela irá tomar os remédios juntos será 6h + 7h + 30min = 13h + 30min.

Porém, esse horário é na parte da tarde; logo, o próximo horário em que ela tomará os dois remédios juntos é:

13h + 30min + 7h + 30min = 21h.

Questão 11 – Letra B

Comentário: Fatorando os números 18, 30 e 42, temos:

18 = 2 . 9 = $2 \cdot 3^2$

30 = 3 . 10 = 2 . 3 . 5

42 = 6 . 7 = 2 . 3 . 7

O MDC(18, 30, 42) é dado pelo produto dos fatores comuns aos 3 números com o menor expoente, ou seja:

MDC(18, 30, 42) = 2 . 3 = 6

Portanto, podemos agrupar cada tipo de documentos em pastas que contenham 6 destes:

Contratos de locação: $\frac{42}{6} = 7$ pastas

Contratos de compra: $\frac{30}{6} = 5$ pastas

Laudos de avaliação de imóveis: $\frac{18}{6} = 3$ pastas

Portanto, o total de pastas é dado por 3 + 5 + 7 = 15 pastas.

Questão 12 – Letra A

Comentário: Na expressão $m = \frac{3p}{7}$, o menor valor de **p** que mantém **m** inteiro é 7.

$$m = \frac{3p}{7} \underset{p=7}{\Rightarrow} m = \frac{3 \cdot 7}{7} \Rightarrow m = 3$$

Logo:

$n = 48 - 3p \Rightarrow n = 48 - 3 \cdot 7 \Rightarrow n = 27$

Assim, $m + n = 3 + 27 = 30$.

Questão 13 – Letra D

Comentário: Seja **r** o número de páginas restantes após um número **x** de dias. De acordo com o enunciado, podemos escrever:

$$\begin{cases} 675 - 25x = r \quad \text{(I)} \\ 615 - 15x = r \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) – (II), temos:

675 – 25x – (615 – 15x) = r – r $\Rightarrow$ 60 – 10x = 0 $\Rightarrow$ x = 6.

Questão 14 – Letra C

Comentário: Para que o número 7n6 seja divisível por 9, 7 + n + 6 = 13 + n deve ser divisível por 9, logo n = 5. Como 56 é divisível por 4, o número 756 satisfaz as condições do enunciado.

Questão 15 – Letra C

Comentário: Decompondo o número 37 037, temos que: 37 037 = 7 . 11 . 13 . 37. Portanto, a diferença entre as idades da filha mais velha e da filha mais nova será igual a 13 – 7 = 6.

Questão 16 – Letra D

Comentário: Decompondo os números 144, 30^p e 36, temos:

$144 = 2^4 . 3^2$

$30^p = (2 . 3 . 5)^p = 2^p . 3^p . 5^p$

$36 = 2^2 . 3^2$

Sabendo que no MDC encontram-se os fatores primos comuns com os menores expoentes e que o MDC(144, 30^p) = 36, temos que p = 2.

Questão 17 – Letra E

Comentário: Denotando por S(n) a soma dos divisores positivos de **n**, testamos cada uma das opções:

A) $\begin{cases} S(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15 \\ S(9) = 1 + 3 + 9 = 13 \end{cases} \Rightarrow S(8) \neq S(9)$

B) $\begin{cases} S(9) = 1 + 3 + 9 = 13 \\ S(11) = 1 + 11 = 12 \end{cases} \Rightarrow S(9) \neq S(11)$

C) $\begin{cases} S(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18 \\ S(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28 \end{cases} \Rightarrow S(10) \neq S(12)$

D) $\begin{cases} S(15) = 1 + 3 + 5 + 15 = 24 \\ S(20) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 = 42 \end{cases} \Rightarrow S(15) \neq S(20)$

E) $\begin{cases} S(16) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 \\ S(25) = 1 + 5 + 25 = 31 \end{cases} \Rightarrow S(16) = S(25)$

Logo, a alternativa correta é a E.

Questão 18 – Letra A

Comentário: De acordo com o enunciado e com a Divisão Euclidiana, podemos escrever:

$$\begin{array}{l|l} x & 37 \\ \hline y^3 & y \end{array} \Rightarrow 0 \leq y^3 < 37 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ (não convém, pois } \mathbf{x} \text{ é positivo)} \\ y = 1 \\ y = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Como queremos a soma dos dividendos, basta substituir o valor de **y** na divisão inicial. Portanto, como $x = 37y + y^3$, temos:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 37 . 1 + 1^3 = 38 \\ x = 37 . 2 + 2^3 = 82 \\ x = 37 . 3 + 3^3 = 138 \end{cases} \Rightarrow 38 + 82 + 138 = 258$$

Questão 19 – Letra C

Comentário: Como o número de degraus **n** dessa escada é um múltiplo de 7 compreendido entre 40 e 100, temos que ele é da forma:

40 < n < 100

Os múltiplos de 7 nesse intervalo são {42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98}.

Podemos descartar todos os pares e todos os múltiplos de 3 dessa lista, pois deixam restos 0 na divisão por 2 e 3, respectivamente, ficando com os seguintes números:

{49, 77, 91}

Desses, o único que deixa resto 1 quando dividido por 2 e resto 2 quando dividido por 3 é o 77.

Questão 20

Comentário: Os valores possíveis são os divisores positivos do máximo divisor comum entre as dimensões da sala, no caso MDC(200, 500) = 100. Esses valores são 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100.

Questão 21

Comentário:

A) Sabemos que MDC(a, b) . MMC(a, b) = a . b.

Logo, podemos escrever:

MDC(a, b) . MMC(a, b) = a . b $\Rightarrow$

5 . 105 = 35 . b $\Rightarrow$ b = 15

B) O número 5 é fator de **a** e **b** pois é o MDC entre esses números. Temos ainda que:

MDC(a, b) . MMC(a, b) = a . b $\Rightarrow$ 5 . 105 = a . b $\Rightarrow$

5 . (5 . 7 . 3) = a . b $\Rightarrow$

a . b = 3 . 5^2 . 7

Portanto, os possíveis valores de **a** e **b** serão:

$\begin{cases} a = 5 . 3 \\ b = 5 . 7 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (15, 35)$

$\begin{cases} a = 5 . 7 \\ b = 5 . 3 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (35, 15)$

$\begin{cases} a = 5 \\ b = 5 . 7 . 3 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (5, 105)$

$\begin{cases} a = 5 . 3 . 7 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (105, 5)$

Questão 22 – Letra A

Comentário: Dadas as informações, temos que: N = 13Q + R e N + 2 = 13(Q + 1). Assim, 13Q + R + 2 = 13Q + 13 $\Rightarrow$ R = 11 $\Rightarrow$ Q = 5 $\Rightarrow$ N = 76 = 2^2 . 19. Portanto, os divisores primos de **N** são 2 e 19.

Questão 23 – Letra B

Comentário: O número de divisores **d** de **n** é dada por:

(x + 1)(y + 1) = 12

Portanto, temos as seguintes duplas possíveis para que o produto de dois inteiros seja igual a 12:

(12, 1) $\Rightarrow$ x = 11 e y = 0 (não convém)

(1, 12) $\Rightarrow$ x = 0 e y = 11 (não convém)

(2, 6) $\Rightarrow$ x = 1 e y = 5

(6, 2) $\Rightarrow$ x = 5 e y = 1

(3, 4) $\Rightarrow$ x = 2 e y = 3

(4, 3) $\Rightarrow$ x = 3 e y = 2

Substituindo esses valores em **n**, temos:

$2^1 . 5^5$ = 2 . 3 125 = 6 250 > 199

$2^5 . 5^1$ = 32 . 5 = 160 < 199

$2^3 . 5^4$ = 8 . 625 = 5 000 > 199

$2^4 . 5^3$ = 16 . 125 = 2 000 > 199

$2^2 . 5^3$ = 4 . 125 = 500 > 199

$2^3 . 5^2$ = 8 . 25 = 200 > 199

Portanto, x = 5 e y = 1. Dessa forma, x + y = 5 + 1 = 6.

MATEMÁTICA

Questão 24 – Letra D

Comentário: Seja ℓ a quantidade de laranjas, em que $500 < \ell < 1\,500$. Ao dividir as ℓ laranjas em sacos com 50 e 36 unidades, sobrariam 12 laranjas. Logo:

$\begin{array}{l|l} \ell & 50 \\ \cline{2-2} 12 & q_1 \end{array} \Rightarrow \ell = 50q_1 + 12 \Rightarrow \ell - 12 = 50q_1$, ou seja, $\ell - 12$ é um múltiplo de 50, e

$\begin{array}{l|l} \ell & 36 \\ \cline{2-2} 12 & q_2 \end{array} \Rightarrow \ell = 36q_2 + 12 \Rightarrow \ell - 12 = 36q_2$, ou seja, $\ell - 12$ é um múltiplo de 36.

Como $50 = 2 \,.\, 5^2$ e $36 = 2^2 \,.\, 3^2$, temos que $\text{MMC}(50, 36) = 2^2 \,.\, 3^3 \,.\, 5^2$.

Assim, MMC(50, 36) = 900, e os outros múltiplos comuns de 50 e 36 são: (1 800, 2 700, 3 600, ...)

Entretanto, temos que $500 < \ell < 1\,500$, logo:

$488 < \ell - 12 < 1\,488$

$\ell - 12 = 900$, portanto $\ell = 912$.

Assim, $\begin{array}{r|l} 912 & 35 \\ \cline{2-2} 2 & 26 \end{array}$.

Portanto, se as laranjas fossem colocadas em sacos com 35 unidades cada um, sobrariam 2 laranjas.

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Conforme o enunciado, as tábuas são de 540 cm, 810 cm e 1 080 cm. Já os pedaços solicitados pelo arquiteto devem ter o mesmo tamanho, não havendo sobra. Portanto, o valor do comprimento dos pedaços deve ser divisor de 540, 810 e 1 080.

Fatorando os valores:

$$\begin{array}{rrr|l} 540, & 810, & 1080 & 2 \\ 270, & 405, & 540 & 3 \\ 90, & 135, & 180 & 3 \\ 30, & 45, & 60 & 3 \\ 10, & 15, & 20 & 5 \\ 2, & 3, & 4 & \end{array}$$

Pelo exposto, o MDC entre os valores é dado por $2 \,.\, 3^3 \,.\, 5 = 270$ cm.

Como o valor **n** deve satisfazer, ainda, a condição de ser menor que 2 m, tem-se: $n < 200$ cm, $n \in \text{div}(270)$ e **n** é o maior valor natural.

Logo, **n** é dado por 135 cm.

Calculando o número de tábuas após o corte:

$$\underbrace{40 \,.\, \frac{540}{135}}_{160} + \underbrace{30 \,.\, \frac{810}{135}}_{180} + \underbrace{10 \,.\, \frac{1\,080}{135}}_{80} = 420 \text{ peças}$$

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Para escolhermos o número mínimo de escolas, devemos distribuir o maior número possível de ingressos para cada escola. Portanto, o número de ingressos que cada escola vai receber é o MDC(320, 400).

MDC(320, 400) = 80

Assim, $\frac{400}{80} = 5$ escolas e $\frac{320}{80} = 4$ escolas.

Logo, 5 + 4 = 9 escolas serão contempladas no total.

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número **N** é dado pela expressão $2^x \,.\, 5^y \,.\, 7^z$, na qual **x**, **y** e **z** são números inteiros não negativos. Sabe-se que **N** é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7.

O número de divisores de **N** é igual a $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$, incluindo o próprio **N**. Como o enunciado pergunta o número de divisores de **N**, diferentes de **N**, a reposta é:

$(x + 1)(y + 1)(z + 1) - 1$

Observação: Note que, se **N** é múltiplo de 10, então $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Como **N** não é múltiplo de 7, $z = 0$.

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 1

Comentário: A quantidade de dias, após a primeira aplicação, que os três produtos serão aplicados juntos novamente será dada pelo mínimo múltiplo comum entre 40, 32 e 28. Portanto, $\text{MMC}(40, 32, 28) = 2^5 \,.\, 5 \,.\, 7 = 1\,120$.

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Do dia 31 de março ao dia 12 de outubro, foram decorridos 195 dias. Assim, temos:

$\begin{array}{r|l} 195 & 7 \\ \cline{2-2} 6 & 27 \end{array}$

Ou seja, no período de 195 dias, ocorreram 27 terças-feiras e sobraram 6 dias. Contando esses 6 dias a partir da última terça-feira considerada, temos que o dia 12 de outubro cairá em uma segunda-feira.

MÓDULO – B 01

Razões e Proporções

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra A

Comentário: A barra 2 equivale a $\frac{2}{3}$ da primeira barra, a barra 3 equivale a $\frac{5}{3}$, a quarta barra a $\frac{6}{3} = 2$ e a barra 6 equivale a $\frac{3,5}{3} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$.

Questão 02 – Letra E

Comentário: Chamando de **x** a distância real entre as cidades, a escala é a razão $\frac{65 \text{ cm}}{x}$. Essa razão deve ser igual à razão representada pela escala, isto é, tem-se a proporção

$$\frac{65 \text{ cm}}{x} = \frac{1}{200\,000} \Rightarrow x = 200\,000 \,.\, 65 \text{ cm} \Rightarrow$$
$$x = 13\,000\,000 \text{ cm} = 130 \text{ km}.$$

Questão 03 – Letra A

Comentário: Como 180 km equivale a 18 000 000 cm, a distância **x**, no mapa, entre as cidades **A** e **B** é:

$$\frac{1}{1\,500\,000} = \frac{x}{18\,000\,000} \Rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

Questão 04 – Letra C

Comentário: O preço pago pelo produto é diretamente proporcional à quantidade comprada, portanto, o preço **x** pago por 1,250 kg é:

$$\frac{30,9}{0,750} = \frac{x}{1,250} \Rightarrow 0,750x = 1,250 \,.\, 30,9 \Rightarrow$$
$$0,750x = 38,625 \Rightarrow x = 51,50$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: Se 15 gramas de biscoitos correspondem a 90 calorias, então cada grama equivale a 6 calorias. Como no pacote temos 10 biscoitos, totalizando 95 gramas, o pacote tem 570 calorias. Portanto, cada biscoito tem $\frac{570}{10}$ = 57 calorias.

Questão 06 – Letra D

Comentário: Observe a tabela a seguir:

Modelo	Largura (cm)	Altura (cm)	Preço (R$)	Área (cm²)	Preço / Área (R$ / cm²)
23"	50	30	750,00	1 500	1/2
32"	70	40	1 400,00	2 800	1/2
40"	90	50	2 250,00	4 500	1/2

Assim, percebemos que a razão entre a área de cada televisor e seu preço permanece constante.

Questão 07 – Letra C

Comentário: Seja **k** uma constante real, temos que:

$$A \,\alpha\, \frac{1}{B^2} \Rightarrow A = \frac{k}{B^2}$$

Se A = 1 e B = 6, então k = 36. Portanto a relação entre **A** e **B** é dada por $A = \frac{36}{B^2}$.

Para A = 4, temos $B^2 = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow |B| = 3$.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Como a herança foi dividida em duas partes **x** e **y**, temos que: x + y = 1. Assim, sendo **x** inversamente proporcional a 2 e **y** inversamente proporcional a 3, é verdade que: $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow 2x = 3(1 - x) \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$.

Exercícios Propostos

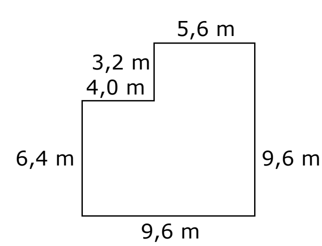
Questão 01 – Letra C

Comentário: Por equivalência, 45 cm é igual a 450 mm. Então, temos:

$$\frac{1,5 \text{ mm}}{450 \text{ mm}} = \frac{1}{300}$$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Convertendo as dimensões da copa de acordo com a escala, temos:



Perceba que a área da copa corresponde à área de um quadrado de lado 9,6 m, excluindo a área de um retângulo de dimensões 3,2 m x 4,0 m. Portanto, a área da copa é:
A = 9,6 . 9,6 – 3,2 . 4,0 = 79,36 m².

Questão 03 – Letra A

Comentário: A cotação do dólar com relação ao real era de $\frac{3\,060}{1\,500}$ = 2,04. Por outro lado, a cotação do euro em relação ao real era de $\frac{3\,250}{1\,250}$ = 2,60. Portanto, a cotação do euro em relação ao dólar é $\frac{2,6}{2,04} \cong 1,2745$.

Questão 04 – Letra C

Comentário: Seja **x** a idade de Pedro e 55 – x a idade de seu pai, temos:

$$\frac{x}{55 - x} = \frac{2}{9} \Rightarrow 9x = 110 - 2x \Rightarrow 11x = 110 \Rightarrow x = 10$$

Portanto, Pedro tem 10 anos.

Questão 05 – Letra B

Comentário: Foi dado que José e Jair gastam, respectivamente, 30 e 45 minutos para limpar um mesmo vestiário. Juntos, eles gastarão um tempo **T** para limpá-lo, em que:

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{30}+\frac{1}{45}\Rightarrow T=\frac{3+2}{90}=\frac{5}{90}\Rightarrow T=\frac{90}{5}=18\text{ minutos}$$

Portanto, José e Jair gastam 18 minutos para, juntos, limpar o vestiário.

Questão 06 – Letra D

Comentário: Dividindo o lucro de R$ 18 500,00 entre os sócios **x**, **y** e **z** em partes diretamente proporcionais a 5, 7 e 8, temos:

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z}{8}=\frac{x+y+z}{5+7+8}=\frac{18\,500}{20}=925$$

$$\frac{x}{5}=925\Rightarrow\ x=4\,625$$

$$\frac{y}{7}=925\Rightarrow\ y=6\,475$$

$$\frac{z}{8}=925\Rightarrow\ z=7\,400$$

Portanto, o sócio mais antigo da empresa receberá R$ 7 400,00.

Questão 07 – Letra E

Comentário: Seja **x** o número inicial de clientes do restaurante e **y** o número inicial de garçons, temos:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{30}{1}\\[2mm] \dfrac{x+50}{y+5}=\dfrac{25}{1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=30y\\ x-25y=75\end{cases}$$

Substituindo **x** na segunda equação, encontramos:
$30y - 25y = 75 \Rightarrow 5y = 75 \Rightarrow y = 15$

Portanto, $x = 30 \,.\, 15 = 450$ clientes.

Questão 08 – Letra E

Comentário: Sejam **x** e **y** as medidas das dimensões do galpão retangular, podemos então escrever as equações:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{10}\\ xy=5\,000\end{cases}$$

Da primeira equação, sabemos que $y = 2x$. Substituindo na segunda equação, temos:
$x.2x = 5\,000 \Rightarrow 2x^2 = 5\,000 \Rightarrow x^2 = 2\,500 \Rightarrow x = 50$
Portanto, o maior lado é $y = 100$.

Questão 09 – Letra B

Comentário: Sejam **A**, **B** e **C** as partes que cabem a cada um dos investidores, $A + B + C = 540\,000$.

$$\frac{A}{200\,000}=\frac{B}{300\,000}=\frac{C}{500\,000}=\frac{A+B+C}{1\,000\,000}=\frac{540\,000}{1\,000\,000}=0{,}54$$

$$\frac{A}{200\,000}=0{,}54\Rightarrow\ A=108\,000$$

$$\frac{B}{300\,000}=0{,}54\Rightarrow\ B=162\,000$$

$$\frac{C}{500\,000}=0{,}54\Rightarrow\ C=270\,000$$

Portanto, **B** recebeu R$ 162 000,00.

Questão 10

Comentário: Sejam **x** e **y** as quantidades, em quilogramas, produzidas por José e João, respectivamente.

Logo, $\begin{cases}x+y=1\,500\\ x=y+250\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=875\\ y=675\end{cases}$.

Sejam **P** e **Q** os tamanhos do terreno que José e João vão receber, respectivamente. Como a divisão dos 30 alqueires será feita de forma diretamente proporcional à produção de cada filho, temos:

$$P=\frac{875}{1\,500}.30=17{,}5\ \text{ e }\ Q=\frac{625}{1\,500}.30=12{,}5$$

Logo, José ficará com 17,5 alqueires, e João, com 12,5 alqueires.

Questão 11

Comentário: Como a distância **d** é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade, de acordo com o gráfico, temos que:

$d\alpha v^2 \Rightarrow 32\alpha(50)^2$

Podemos, então, estabelecer que $k \,.\, 32\alpha\ (2 \,.\, 50)^2 \Rightarrow k = 4$.

Portanto, a distância de frenagem é $4 \,.\, 32 = 128$ m.

Questão 12 – Letra E

Comentário: Chamando de **A**, **B** e **C** as quantidades arquivadas por Adilson, Bento e Celso, temos:

$$24\,.\,A=30\,.\,B=36\,.\,C\Rightarrow\frac{A}{\frac{1}{24}}=\frac{B}{\frac{1}{30}}=\frac{C}{\frac{1}{36}}$$

Também temos $A + C - B = 26$. Com base nesses dados, podemos manipular as expressões:

$$\frac{A}{\frac{1}{24}}=\frac{B}{\frac{1}{30}}=\frac{C}{\frac{1}{36}}=\frac{A-B+C}{\frac{1}{24}-\frac{1}{30}+\frac{1}{36}}=\frac{26}{\frac{13}{360}}=720\Rightarrow$$

$$A=30,\ B=24,\ C=20\Rightarrow\ A+B+C=74$$

Assim, a quantidade de documentos arquivados é maior que 60.

Questão 13 – Letra B

Comentário: Chamando de **M**, **K**, **S** e **A** as quantias pagas por Marcos, Kátia, Sérgio e Ana, e sabendo que estas foram proporcionais à quantidade que cada um comeu, temos:

$$\frac{M}{4}=\frac{S}{4}=\frac{K}{3}=\frac{A}{3}$$

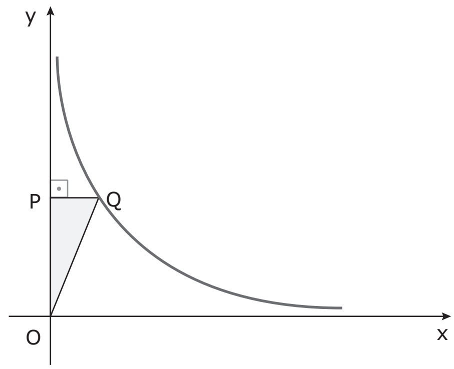
Usando uma das propriedades das proporções, e sabendo que a soma das quantias pagas por todos é $21 \,.\, 2 = 42$ reais, temos:

$$\frac{M}{4}=\frac{S}{4}=\frac{K}{3}=\frac{A}{3}=\frac{M+S+K+A}{4+4+3+3}=\frac{42}{14}=3\Rightarrow$$
$$M=S=12\text{ e }K=A=9$$

Assim, a quantia paga por cada homem e por cada mulher foi, respectivamente, 12 reais e 9 reais.

Questão 14 – Letra D

Comentário:



Sabe-se que **x** e **y** são grandezas inversamente proporcionais. Assim, dada uma constante real **k**, temos que xy = k.

Como $\left(\frac{5}{3}, 480\right)$ é um ponto da curva definida por y = f(x), temos:

$k = \frac{5}{3}.480 \Rightarrow k = 800$

A área **S** do triângulo OPQ é dada por:

$S = \frac{PQ.OP}{2}$

Sendo Q = (x, y) um ponto da curva, concluímos que:

PQ = x e OP = y.

Logo: $S = \frac{xy}{2} = \frac{k}{2} = \frac{800}{2} = 400.$

Portanto, a área do triângulo OPQ vale 400.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 3

Habilidade: 11

Comentário: Se a escala é 1 : 400, temos:

1 cm —— 400 cm

1 cm^3 —— $(400)^3$ cm^3

Logo, o volume **v** do monumento é:

1 cm^3 —— $(4 . 10^2)^3$ cm^3

25 cm^3 —— v

v = 25 . 64 . 10^6 cm^3

v = 1 600 . 10^6 cm^3

v = 1 600 m^3.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 4

Habilidade: 15

Comentário: Temos que 9 m = 900 cm e 5,5 m = 550 cm. Portanto, a razão **r** procurada será igual a $r = \frac{18}{900} = \frac{11}{550} = \frac{1}{50}$.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário:

Jogador I: $\frac{50}{85} \cong 0,59$

Jogador II: $\frac{40}{65} \cong 0,61$

Jogador III: $\frac{20}{65} \cong 0,31$

Jogador IV: $\frac{30}{40} = 0,75$

Jogador V: $\frac{48}{90} \cong 0,53$

Portanto, o jogador IV deve ser escolhido.

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 3

Habilidade: 11

Comentário: A razão entre a medida real e a medida da fotografia da caneta é $\frac{16,8\,cm}{1,4\,cm} = 12$, portanto as medidas da pegada são 2,2 cm . 12 = 26,4 cm e 3,4 cm . 12 = 40,8 cm.

Questão 05 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: O ponto central receberá 0,6 . 12 t = 7,2 t. O restante da carga, 12 t – 7,2 t = 4,8 t, será igualmente distribuído entre os outros dois pontos, isto é, cada ponto sustentará 2,4 t.

Questão 06 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 6

Comentário: Chamando de **a**, **b**, e **c** respectivamente as quantidades, em m^3, de areia, brita e cimento, deve-se ter $\frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1}$ e a + b + c = 14.

$\frac{a}{4} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1} = \frac{a+b+c}{4+2+1} = \frac{14}{7} = 2$. Assim, $\frac{c}{1} = 2 \Rightarrow c = 2$.

Questão 07 – Letra A

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 1

Habilidade: 1

Comentário: Na figura, podem-se contar 70 cadeiras no total, das quais 17 estão reservadas. Dessa forma, a razão entre a quantidade de cadeiras reservadas em relação ao total de cadeiras é representada pela fração $\frac{17}{70}$.

Questão 08 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 3

Habilidade: 12

Comentário: Conforme indicado na figura, no quadriculado, o lado de cada quadrado mede 1 cm. Contando os lados dos quadrados que fazem parte da trajetória, encontram-se 16 lados, o que equivale a 16 cm. Utilizando a escala da figura e chamando de **x** a distância real percorrida pelo aluno na trajetória, tem-se a proporção $\frac{1}{25\,000} = \frac{16\text{ cm}}{x}$. Assim, x = 400 000 cm = 4 km. Tendo feito essa trajetória 2 vezes por dia (ida e volta) durante 5 dias, o aluno percorreu 2 . 5 . 4 km = 40 km.

Questão 09 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 3

Habilidade: 11

Comentário: No detalhe do mapa no qual é mostrada a ampliação, a escala é 1 : 4 000 000, enquanto no mapa do Brasil, a escala é 1 : 25 000 000. Isso significa que a escala foi ampliada segundo a razão $\frac{25\,000\,000}{4\,000\,000} = \frac{25}{4}$. Como a escala diz respeito às dimensões lineares, a razão entre as áreas será o quadrado da razão entre as escalas, isto é, $\left(\frac{25}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}$. Essa fração é um número maior que 30 e menor que 40.

Questão 10 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 3

Habilidade: 11

Comentário: Pela definição de escala, temos que esta representa a razão entre a altura gráfica e a altura real. Assim, percebe-se que o tamanho real é dado pela razão entre o tamanho gráfico e a escala. Efetuando os cálculos para as 5 árvores, temos:

I. $\frac{9}{\frac{1}{100}} = 900$ u.c.

II. $\frac{9}{\frac{2}{100}} = 450$ u.c.

III. $\frac{6}{\frac{2}{300}} = 900$ u.c.

IV. $\frac{5}{\frac{1}{300}} = 1\,500$ u.c.

V. $\frac{5}{\frac{2}{300}} = 750$ u.c.

Assim, a árvore IV é a que apresenta maior tamanho real.

Questão 11 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: A escala representa a razão entre a dimensão representada e a dimensão real. Assim:

$$\text{Escala} = \frac{60\text{ cm}}{10.42\text{ km}} = \frac{0{,}6\text{ m}}{4{,}2\,.\,10^5\text{ m}} = \frac{1}{700\,000}$$

Questão 12 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: A resistência **S** da viga dada é diretamente proporcional a largura **b** e ao quadrado da altura **d** e **k** é a constante de proporcionalidade do material. Logo, $S = k.b.d^2$.

Questão 13 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: O contrato inicial do funcionário determinava que ele iria ganhar R$ 120,00 por semana pela venda de R$ 600,00 semanais em produtos. Caso ele aumentasse a venda para R$ 1 200,00, sua comissão subiria para R$ 200,00, ou seja, R$ 80,00 a mais que o valor oferecido inicialmente pelo comerciante. Como o funcionário vendeu R$ 990,00 na semana, ou seja, ele superou o valor inicial em R$ 390,00, sua comissão será: $\frac{\text{R\$ }80{,}00}{\text{R\$ }600{,}00}$.R$ 390,00 = R$ 52,00.

Portanto, o patrão pagou ao funcionário uma quantia de R$ 120,00 + R$ 52,00 = R$ 172,00.

MÓDULO – B 02

Regra de Três

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra D

Comentário: O valor a ser pago é diretamente proporcional ao peso do produto. Dessa forma, temos a regra de três:

Peso (kg)	Valor (R$)
0,256 ↑	12,80 ↓
1	x

$$\frac{0{,}256}{1} = \frac{12{,}80}{x} \Rightarrow x = 50{,}00.$$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Tempo e velocidade são grandezas inversamente proporcionais. Para encontrar a velocidade **v** com que ele corre, basta fazer a seguinte regra de três simples:

Tempo (minutos)	Velocidade (Km/h)
20	6
12	v

$$\frac{6}{v} = \frac{12}{20} \Rightarrow v = 10 \text{ km/h}$$

Questão 03 – Letra A

Comentário: Para resolver essa questão, vamos utilizar a regra de três composta:

	Datilógrafos	Símbolos digitados	Tempo (minutos)
1ª situação	13	13 013	13
2ª situação	1	x	1

Comparando as grandezas datilógrafos e tempo com a grandeza símbolos digitados, constatamos que essas grandezas são diretamente proporcionais. Assim:

$$\frac{13\,013}{x} = \frac{13}{1} . \frac{13}{1} \Rightarrow x = 77$$

Portanto, são digitados 77 símbolos por cada datilógrafo em um minuto.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Para encontrar o número **x** de funcionários, vamos utilizar a regra de três composta, mas, primeiro, vamos avaliar as grandezas:

- Quanto mais funcionários, mais peças serão produzidas, portanto essas grandezas são diretamente proporcionais.
- Quanto mais funcionários, menos dias úteis são necessários para a produção das peças, portanto essas grandezas são inversamente proporcionais.

Nº de funcionários	Quantidade de peças	Dias úteis
10	150	30
x	200	20

Dessa forma, temos:

$$\frac{10}{x} = \frac{15\cancel{0}}{20\cancel{0}} . \frac{2\cancel{0}}{3\cancel{0}} \Rightarrow 200 = 10x \Rightarrow x = 20 \text{ funcionários.}$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Para encontrar o número **x** de peças, vamos utilizar a regra de três, porém, antes, vamos analisar as grandezas:

- Quanto mais peças precisam ser produzidas, mais funcionários são necessários, portanto essas grandezas são diretamente proporcionais.
- Quanto mais peças precisam ser produzidas, mais horas trabalhadas por dias são necessárias, portanto essas grandezas são diretamente proporcionais.

Peças produzidas	Funcionários	Horas por dia
5 000	200	8
x	120	6

Dessa forma, temos:

$$\frac{5\,0\cancel{00}}{x} = \frac{2\cancel{00}}{120} . \frac{8}{6} \Rightarrow 16x = 50 . 720 \Rightarrow$$

$$x = 50 . \frac{720}{16} = 50 . 45 = 2\,250 \text{ peças.}$$

Questão 06 – Letra D

Comentário: Quando um dente da roda maior da 1 volta complete, 1 dente da roda menor, pelo fato de as rodas estarem engrenadas, dará 5 voltas, portanto, para encontrar o número de voltas **x** que a roda menor dará quando a roda maior der 5 voltas, basta fazer a seguinte regra de três:

Nº de voltas da roda grande	Nº de voltas da roda pequena
1	5
8	x

Dessa forma, temos:

$$\frac{1}{8} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 40$$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Vamos analisar cada afirmativa:

I.

Nº de gatos	Ração (kg)	Dias
5	20	20
2	2	x

$$\frac{20}{x} = \frac{20}{2} . \frac{2}{5} \Rightarrow x = 5 \text{ dias}$$

A afirmativa é falsa, pois 2 gatos comem 2kg de ração em 5 dias.

II.

Nº de gatos	Ração (kg)	Dias
5	20	20
5	5	x

$$\frac{20}{x} = \frac{20}{5} . \frac{5}{5} \Rightarrow x = 5 \text{ dias}$$

A afirmativa é verdadeira, 5 gatos comem 5 kg de ração em 5 dias.

III.

Nº de gatos	Ração (kg)	Dias
5	20	20
4	16	x

$$\frac{20}{x} = \frac{20}{16} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow x = 20 \text{ dias}$$

A afirmativa é falsa, pois 4 gatos comem 16 kg de ração em 20 dias.

Portanto, apenas a afirmativa II é verdadeira.

Questão 08 – Letra B

Comentário: Analisando a relação entre a massa (em gramas) e o tempo (em anos) dessa substância, descrita no gráfico, observamos que quanto maior o tempo, isto é, quanto mais o tempo passa, menor é a quantidade da substância. Logo, massa e tempo são inversamente proporcionais. Assim, para saber qual o tempo necessário para que ela se reduza a 2,5 gramas, pegamos um ponto do gráfico e montamos a tabela.

Massa (g)	Tempo (anos)
20	10
2,5	x

$$\frac{x}{10} = \frac{20}{2{,}5} \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 10}{2{,}5} \Rightarrow x = 80 \text{ anos}$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário: Para encontrarmos a quantidade de horas **h**, vamos fazer a seguinte regra de três, porém, antes, vamos analisar as grandezas:

- Quanto mais horas por dia são trabalhadas, menos trabalhadores são necessários, portanto essas grandezas são inversamente proporcionais.
- Quanto mais horas por dia são trabalhadas, mais do muro será construído, portanto essas grandezas são diretamente proporcionais.
- Quanto mais horas por dia são trabalhadas, menos dias são necessários para a construção do muro, portanto essas grandezas são inversamente proporcionais.

Horas por dia	Nº de operários	Dias	Comprimento do muro
8	15	16	80
h	10	24	90

Dessa forma, temos:

$$\frac{\cancel{8}}{h} = \frac{10}{15} \cdot \frac{\cancel{24}}{\cancel{16}} \cdot \frac{\cancel{8}\cancel{0}}{9\cancel{0}} \Rightarrow 30h = 270 \Rightarrow h = 9$$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Convertendo o tempo que Marta ficou fora de casa para minutos, temos:

30 dias = 30 . 24 horas = 30 . 24 . 60 minutos = 43 200 minutos

Convertendo a quantidade de água desperdiçada para litros, temos:

200ml = 0,2 L

Agora, para encontrar a quantidade **x** de água desperdiçada, vamos fazer a seguinte regra de três:

Tempo (minutos)	Quantidade de água (Litros)
20	0,2
43 200	x

Dessa forma, temos:

$$\frac{20}{43\,200} = \frac{0{,}2}{x} \Rightarrow 20x = 8\,640 \Rightarrow x = 432\text{L}.$$

Questão 03 – Letra B

Comentário: A Avenida Euclidiana tem 0,5 dam = 5 m de largura. A largura da Avenida Pitagórica é 100 cm = 1 m maior que a Avenida Euclidiana, ou seja, é de 6 m. A quantidade de asfalto necessária é diretamente proporcional ao comprimento e à largura, então:

Asfalto (kg)	Comprimento (m)	Largura (m)
380	190	5
930	x	6

$\frac{380 \text{ kg}}{930 \text{ kg}} = \frac{190 \text{ m}}{x} \cdot \frac{5 \text{ m}}{6 \text{ m}}$. Assim, x = 387,5 m = 3 875 dm, cuja soma dos algarismos é 3 + 8 + 7 + 5 = 23.

Questão 04 – Letra C

Comentário: Primeiro, vamos colocar as vazões de ambas as torneiras em relação a uma hora:

Torneira 1 = 1 m^3 a cada 1 hora;

Torneira 2 = 1m^3 a cada 6 horas = $\frac{1}{6}$ m^3 a cada 1 hora.

Portanto, o nível do reservatório sobe a cada uma hora $1m^3 + \frac{1}{6}m^3 = \frac{7}{6}m^3$.

Portanto, para encontrar o tempo **t** para que esse reservatório fica complete, basta fazer a seguinte regra de três:

Tempo (horas)	Volume(m^3)
1	$\frac{7}{6}$
x	14

Dessa forma, temos:

$$\frac{1}{t} = \frac{\frac{7}{6}}{14} \Rightarrow \frac{\cancel{7}t}{6} = \cancel{14} \Rightarrow t = 12 \text{ horas.}$$

Questão 05 – Letra D

Comentário: Como o trajeto é de ida e volta, por dia são percorridos 16,5 km + 16,5 km = 33 km. Como esse trajeto é feito 30 vezes durante o mês, a distância total percorrida pelo automóvel é de 30 . 33 = 990 km. Agora, para encontrar o total de combustível **x** gasto, vamos fazer a seguinte regra de três:

Gasolina (Litros)	Distância (km)
1	11
x	990

Dessa forma, temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{\cancel{11}}{\cancel{990}} \Rightarrow x = 90$$

Logo, o gasto mensal com o combustível será dado por:

90 . R$ 3,60 = R$ 324,00.

Questão 06 – Letra D

Comentário: Para que o prazo seja cumprido, em dois dias de trabalho, as **x** máquinas devem fazer o trabalho que faltou ser feito pelas 4 máquinas quebradas em 3 dias. O número de máquinas é inversamente proporcional ao tempo, então:

Nº de máquinas	Tempo (dias)
4	3
x	2

$$\frac{4}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 6 \text{ máquinas.}$$

Questão 07 – Letra C

Comentário: Com base nas informações dadas, temos que a produção de cana-de-açúcar por hectare é $\frac{7\,500}{3\,000} = 2{,}5$ vezes maior que a de milho. Sabendo que a área é diretamente proporcional à produtividade de cada cultura e que ao plantio de milho couberam 400 hectares, resta à cana–de–açúcar uma área de 2,5 . 400 = 1 000 hectares.

Portanto, a usina tem x = 400 + 1 000 = 1 400 ha plantados, o que corresponde a $1{,}4 \cdot 10^7$ m^2.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Analisando as grandezas:

- Quanto mais tempo, mais páginas serão impressas, portanto essas grandezas são diretamente proporcionais.
- Quanto mais tempo, menos máquinas são necessárias, portanto essas grandezas são inversamente proporcionais.
- Quanto mais tempo, menor será a eficiência, portanto essas grandezas são inversamente proporcionais.

N° de máquinas	N° de páginas	Tempo (minutos)	Eficiência
2	5 000	30	1
1	3 600	x	1,2

Dessa forma, temos:

$$\frac{30}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\,000}{3\,600} \cdot \frac{1{,}2}{1} \Rightarrow x = 36 \text{ min.}$$

Questão 09 – Letra B

Comentário: Sabemos que, para um mesmo comprimento de tecido que passa pela máquina, quanto maior o raio do cilindro, menos voltas ele dá. Assim:

Raio (cm)	Voltas / minuto
10	10
80	x

$$\frac{x}{10} = \frac{10}{80} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 10}{80} \Rightarrow x = 1{,}25 \frac{\text{voltas}}{\text{minuto}}$$

Logo, em 12 horas, o primeiro rolo dará:

Voltas	Minutos
1,25	1
y	12 . 60

$$\frac{1{,}25}{y} = \frac{1}{12 \cdot 60} \Rightarrow y = 1{,}25 \cdot 12 \cdot 60 \Rightarrow y = 900 \text{ voltas.}$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: I

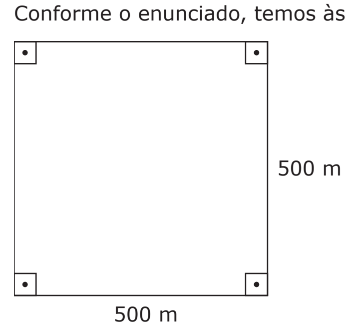
Competência de área: 5

Habilidade: 19

Comentário:

1º momento:

Conforme o enunciado, temos às 10h da manhã:



A = 500 m . 500 m

A = 250 000 m^2

Como são 4 pessoas por m^2, temos 1 000 000 pessoas.

2º momento:

Das 10h da manhã até as 16h, temos:

6 h . 120 000 pessoas/h = 720 000 pessoas

Total: 1 720 000 pessoas

2 000 pessoas ——— 1 policial

1 720 000 pessoas ——— x policiais

Logo, $x = \frac{1\,720\,\cancel{000}}{2\,\cancel{000}} = 860$ policiais.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: A área do campo é de 8 000 m^2 e as duas máquinas que o clube possui podam juntas 200 m^2 por hora. O tempo necessário é diretamente proporcional à área. Assim:

Área (m^2)	Tempo (horas)
200	1
8 000	h

$$\frac{200}{8\,000} = \frac{1}{h} \Rightarrow h = \frac{8\,000}{200} = 40$$

Logo, as duas máquinas juntas gastam 40 horas para podar todo o campo.

Porém, por motivo de urgência, o campo deve ser podado em 5 horas, então será preciso aumentar o número de máquinas. As grandezas são inversamente proporcionais. Assim:

Nº de máquinas	Tempo (horas)
2	40
x	5

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{40} \Rightarrow x = \frac{80}{5} = 16$$

Portanto, como o clube já possui duas máquinas, o administrador do campo deverá solicitar ao clube vizinho, no mínimo, 14 máquinas.

Questão 03 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Temos 250 mg/m^2. Como 3 kg correspondem a 0,208 m^2, então a dose diária **x**, em miligramas, que esse felino deverá receber é de:

Dosagem (mg)	Área (m^2)
250	1
x	0,208

$$x = 250 \,.\, 0{,}208 = \cancel{250} \,.\, \frac{208}{\cancel{1\,000}} = \frac{208}{4} = 52 \text{ mg.}$$

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: Como há 4 catracas por portão e há 5 portões, há um total de 20 catracas nas entradas do estádio. Consideremos a regra de três a seguir:

Pessoas	Catracas	Tempo(s)
1	1	2
45 000	20	x

Como indicam as setas, o tempo é diretamente proporcional à quantidade de pessoas e inversamente proporcional à quantidade de catracas. Assim, temos a proporção:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{45\,000} \,.\, \frac{20}{1} \Rightarrow$$

$20x = 2 \,.\, 45\,000 \Rightarrow$

$x = 4\,500\text{s} = 1{,}25\text{h} = 1\text{h}15\text{min}.$

Questão 05 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: Sabemos que 1 centilitro = 10^{-2} L = 10 . 10^{-3} L = 10 mL, então 1 fl oz = 2,95 cL = 29,5 mL. Consideremos a regra de três:

Onças	mL
1	29,5
x	355

$$\frac{1}{x} = \frac{29{,}5}{355} \Rightarrow \quad x = \frac{355}{29{,}5} = 12{,}03 \text{ fl oz}$$

Questão 06 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 3

Habilidade: 12

Comentário: A capacidade do caminhão é de 1 500 telhas, então, carregando 900 telhas, o caminhoneiro está usando $\frac{900}{1\,500} = \frac{3}{5}$ da capacidade do caminhão. Esse resultado significa que ele pode carregar mais $\frac{2}{5}$ da capacidade do caminhão. Se a capacidade do caminhão é 1 200 tijolos, $\frac{2}{5}$ da capacidade do caminhão representam $\frac{2}{5}.1\,200 = 480$ tijolos.

Questão 07 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: Consideremos a seguinte regra de três composta: a quantidade de ralos a ser utilizada é diretamente proporcional à capacidade do reservatório e inversamente proporcional ao tempo gasto para esvaziá-lo.

Ralos	Capacidade (m³)	Tempo (horas)
6	900	6
X	500	4

$$\frac{6}{x} = \frac{900}{500} \cdot \frac{4}{6} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 500 \cdot 6}{900 \cdot 4} = 5$$

Logo, serão necessários 5 ralos.

Questão 08 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Podemos relacionar o preço e a quantidade de tíquetes por meio de uma regra de três simples:

Preço (R$)	Tíquetes
3,00	20
x	9 200

$$\frac{3}{x} = \frac{20}{9\,200} \Rightarrow x = 1\,380{,}00$$

Assim, para trocar os tíquetes pela bicicleta, será necessário desembolsar R$ 1 380,00.

Questão 09 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: A quantidade de gotas ministradas é diretamente proporcional à massa corporal do bebê. Assim, para resolver essa questão, vamos utilizar a regra de três simples:

Gotas	Massa corporal (kg)
5	2
30	x

$$\frac{5}{30} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 12$$

Logo, a massa corporal do filho é de 12 kg.

Questão 10 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário:

$$2\,\frac{\text{banho}}{\text{dia}} \cdot 10\,\text{minutos} \cdot 7\,\text{dias} \cdot \frac{4{,}8\text{ kW}}{60\,\text{minutos}} = 11{,}2\text{ kW}$$

Questão 11 – Letra A

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 3

Habilidade: 13

Comentário: Sabe-se que, nos primeiros 10 dias, 20 alunos trabalharam 3 horas diárias e que foram arrecadados, diariamente, 12 kg de alimentos. Assim, temos:

Total de alimentos colhidos por aluno, por hora:

$$\frac{12}{3 \cdot 20} = 0{,}2\text{ kg}$$

Dessa maneira, a quantidade total de alimentos arrecadados durante os 10 primeiros dias foi de 120 kg.

Considerando que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade arrecadada por dia, nos 20 dias restantes, foi de:

$$(20 + 30) \cdot 4 \cdot 0{,}2 = 40\,\frac{\text{kg}}{\text{dia}}$$

Assim, nesse período, foram arrecadados 800 kg de alimentos.

Portanto, o total de alimentos arrecadados, durante os 30 dias de campanha, foi de 920 kg.

MÓDULO – B 03

Noções Primitivas de Geometria Plana

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra A

Comentário: A soma dos três ângulos menores indicados na figura é de 90°. Assim:

$x + (3x + 10°) + x = 90° \Rightarrow 5x = 80° \Rightarrow x = 16°$

Questão 02 – Letra D

Comentário: Sendo **x** a medida do ângulo procurado:

$$180° - x = 100° + \frac{90° - x}{2} \Rightarrow$$

$$80° - x = \frac{90° - x}{2} \Rightarrow$$

$$160° - 2x = 90° - x \Rightarrow$$

$$x = 70°$$

Questão 03 – Letra B

Comentário: O ângulo da direita e o da esquerda são opostos pelo vértice, logo têm medidas iguais. Assim:

$6x + 4° = 2x + 100° \Rightarrow$

$4x = 96° \Rightarrow$

$x = 24°$

Dessa forma, a medida dos ângulos da direita e da esquerda é de $2 \cdot 24° + 100° = 148°$. Esses ângulos são suplementares a **y**, que terá medida $y = 180° - 148° = 32°$.

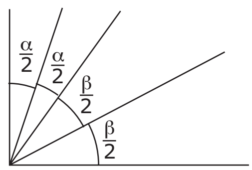
Questão 04 – Letra A

Comentário: Como os dois ângulos são alternos externos, para que as retas seja paralelas, suas medidas devem ser iguais. Assim:

$3x + 18° = 5x + 10° \Rightarrow 2x = 8° \Rightarrow x = 4°$.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Considere a figura a seguir:



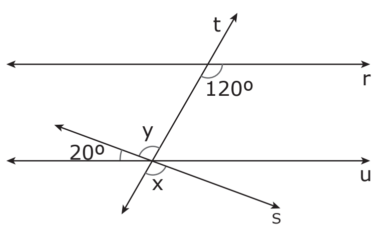
Como α e β são ângulos complementares, $\alpha + \beta = 90°$.

Ora, o ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos é:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°.$$

Questão 06 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir e seus dados.



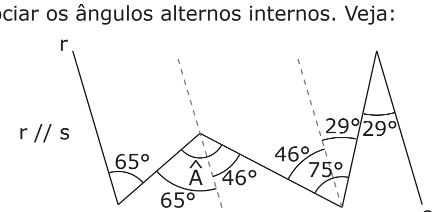
Pela figura, temos que r // u. Assim $20° + y = 120°$, pois são ângulos alternos internos. Logo, $y = 100°$.

Os ângulos **x** e **y** são opostos pelo vértice, logo $x = y = 100°$.

Portanto, $2x + 3y = 2 \cdot 100° + 3 \cdot 100° = 500°$.

Questão 07 – Letra C

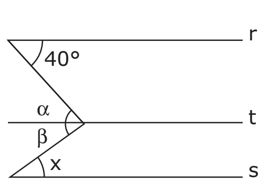
Comentário: A cada ângulo, vamos traçar uma paralela a **r** e a **s** e associar os ângulos alternos internos. Veja:



Logo, $\hat{A} = 46° + 65° = 111°$, e a equipe vai fotografar a construção localizada no número $9 \cdot 111 = 999$.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução da questão:



Traçamos uma reta **t** paralela a **r** e **s**. Assim, temos que $\alpha = 40°$ (alternos internos) e $x = \beta$ (alternos internos). Como $\alpha + \beta = 112°$, logo $40° + x = 112° \Rightarrow x = 72°$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário: Usando o fato de o ângulo de baixo ser alterno ao ângulo formado pela junção dos dois ângulos de cima, temos:

$2\alpha + 90° = 4\alpha + (60° - \alpha) \Rightarrow \alpha = 30°$

Ou seja, a medida do ângulo pedido é um divisor de 60.

Questão 02 – Letra D

Comentário: Se a medida de um dos ângulos procurados é **x**, a medida do outro será $(78° - x)$, já que a soma da medida de ambos é 78°. Assim:

$$x = \frac{3}{5}(90° - (78° - x)) \Rightarrow$$
$$5x = 3(90° - 78° + x) \Rightarrow$$
$$5x = 3(12° + x) \Rightarrow$$
$$5x = 36 + 3x \Rightarrow$$
$$x = 18°$$

Logo, os ângulos são 18° e 60°.

Questão 03

Comentário: Sendo **x** o maior ângulo, o menor pode ser denotado por $(180° - x)$. Assim:

$$\frac{2x}{3} - \frac{3(180° - x)}{4} = 69° \Rightarrow$$
$$\frac{8x - 9(180° - x)}{12} = 69° \Rightarrow$$
$$828° = 8x - 1\,620° + 9x \Rightarrow$$
$$17x = 2\,448° \Rightarrow$$
$$x = 144°$$

Logo, os ângulos são de 36° e 144°.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Dois ângulos colaterais são suplementares. Denotando o ângulo agudo por **x**, o obtuso será $(x + 20°)$. Como a soma de ambos é de 180°, temos que $x + x + 20° = 180°$ e logo $x = 80°$.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Como OP é bissetriz de $A\hat{O}B$, $y - 10° = x + 30°$, ou seja, $y = x + 40°$ (I). Como a soma dos três ângulos indicados na figura é de 180°, temos $2y + (y - 10°) + (x + 30°) = 180°$, ou seja, $3y + x = 160°$ (II). Substituindo (I) em (II), temos $3(x + 40°) + x = 160°$, ou seja, $x = 10°$. Portanto, $y = 50°$.

Questão 06 – Letra E

Comentário: Como $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são complementares, temos que $\hat{A} + \hat{B} = 90°$. Além disso, $\frac{\hat{A}}{\hat{B}} = \frac{13}{17}$, em que $\hat{A} < \hat{B}$.

Com os dados disponíveis, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} = 90° \\ \dfrac{\hat{A}}{\hat{B}} = \dfrac{13}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{B} = 90° \\ \hat{A} = \dfrac{13}{17}\hat{B} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \dfrac{13}{17}\hat{B} + \hat{B} = 90° \Rightarrow \right.$$

$$13\hat{B} + 17\hat{B} = 1\,530° \Rightarrow 30\hat{B} = 1\,530° \Rightarrow \hat{B} = 51°$$

Substituindo o valor de $\hat{B} = 51°$ na equação a seguir, temos:

$\hat{A} + \hat{B} = 90° \Rightarrow \hat{A} = 90° - 51° \Rightarrow \hat{A} = 39°$.

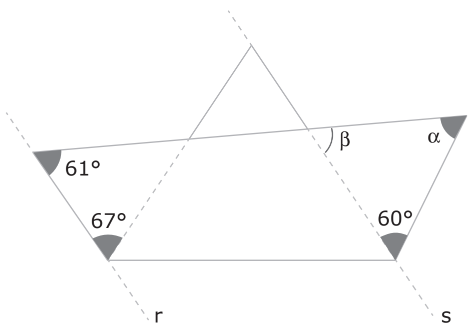
Os suplementos dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são, respectivamente, 141° e 129°, portanto a razão entre os dois suplementos é $\frac{141°}{129°} = \frac{47}{43}$.

Questão 07 – Letra A

Comentário: Usando o fato de o ângulo de 100° ser alterno ao ângulo formado pela junção dos dois ângulos de cima (3x e 2x), temos que 100° = 3x + 2x e, portanto, x = 20°. Assim, o triângulo tem um ângulo interno de 2 . 20° = 40° e 180° – 100° = 80°. Pelo teorema do ângulo externo, $\beta = 80° + 40° = 120°$.

Questão 08 – Letra E

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução da questão.



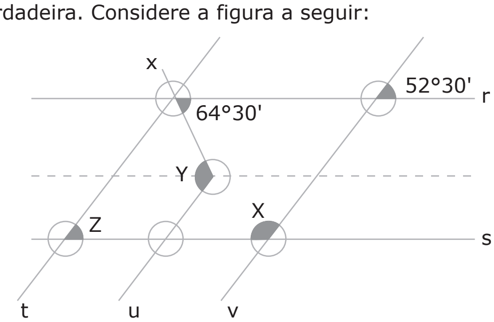
Como **r** e **s** são paralelas, os ângulos β e 61º são correspondentes, logo $\beta = 61°$. Portanto, $\alpha + 60 + 61° = 180° \Rightarrow \alpha = 59°$.

Questão 09 – Letra A

Comentário: Analisando cada uma das proposições, temos:

I) Verdadeira. Os ângulos X e 52°30' são suplementares. Logo, $X + 52°30' = 180° \Rightarrow X = 180° - 52°30' \Rightarrow X = 127°30'$.

II) Verdadeira. Considere a figura a seguir:



Traçando uma paralela às retas **r** e **s**, dividimos o ângulo Y em dois: um alterno ao ângulo 64°30' e o outro alterno ao ângulo suplementar de X. Logo, $Y = 64°30' + 52°30' \Rightarrow Y = 116° + 1° \; (60' = 1°) \Rightarrow Y = 117°$.

III) Falsa. Os ângulos Z e X são suplementares. Logo, Z = 52°30'. Portanto, somente as afirmações I e II estão corretas.

Questão 10

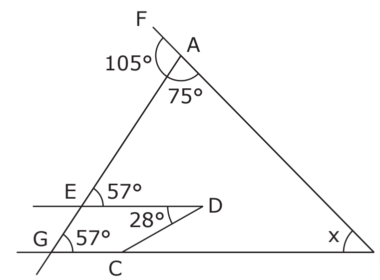
Comentário: Traçando uma paralela a **r** e **s** no vértice do ângulo reto, este é dividido em duas partes: uma alterna ao ângulo de 10° e outra alterna ao ângulo suplementar a **x**, ou seja, (180° – x). Assim, 10° + (180° – x) = 90° e x = 100°.

Questão 11 – Letra C

Comentário: Por serem alternos internos, $B\hat{C}D = \hat{D}$ e assim $B\hat{C}A = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$. Como $\overline{AC} = \overline{AB}$, $C\hat{B}A = 2\alpha$. Logo, $5\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 20°$. Como $x + 2\alpha = 180°$, temos que x = 140°.

Questão 12 – Letra D

Comentário: Estendemos a reta AE e BC até o encontro no ponto **G** indicado na figura a seguir.



Temos que $C\hat{G}E$ e $D\hat{E}A$ são ângulos correspondentes, pois DE e CG são paralelos e o ângulo $G\hat{A}B$ é suplementar a $F\hat{A}G$. Portanto, utilizando a soma dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABG$, temos:

$$\underbrace{B\hat{G}A}_{57°} + \underbrace{G\hat{A}B}_{75°} + \underbrace{A\hat{B}G}_{x} = 180° \Rightarrow x = 180° - 57° - 75° \Rightarrow x = 48°$$

Seção Enem

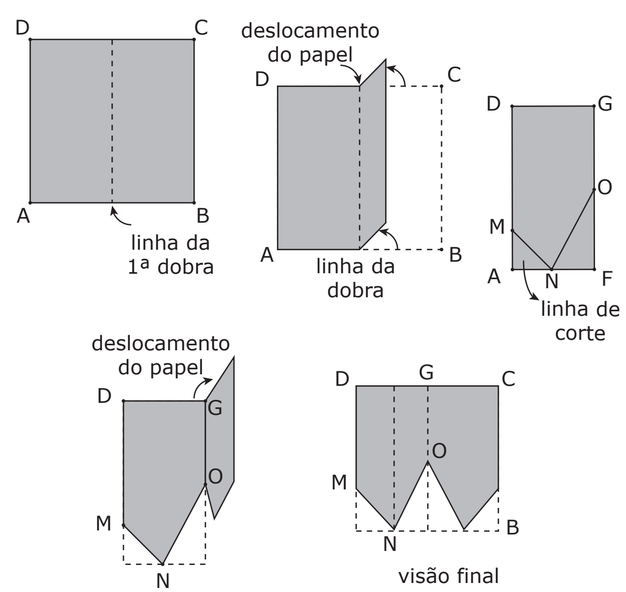
Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Observe os elementos descritos no texto com as possíveis dobras e cortes na ordem estabelecida.



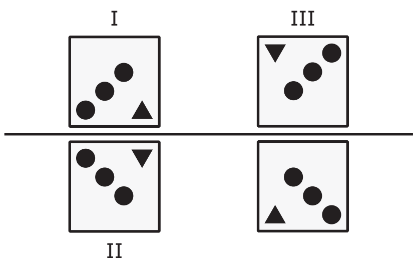
Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Basta notar que as figuras são simétricas verticalmente. Para perceber isso, basta colocá-las uma em cima da outra, em qualquer ordem. Fazendo o mesmo com a figura III, encontraremos a sua correspondente:



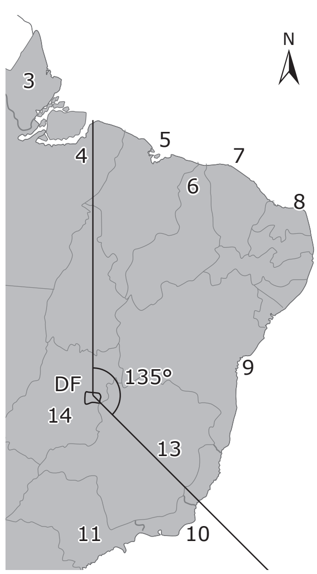
Questão 03 – Letra B

Eixo cognitivo: I

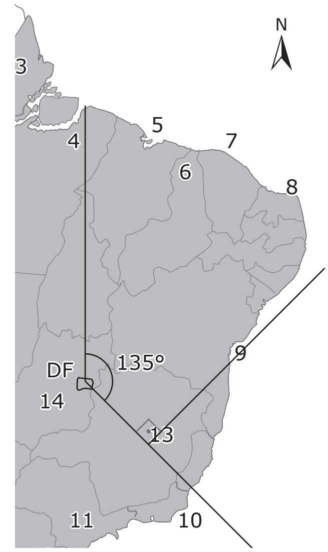
Competência de área: 2

Habilidade: 6

Comentário: Como informado no enunciado, AII partiu de Brasília, formando um ângulo de 135°, no sentido horário, com a rota Brasília-Belém, que é aproximadamente vertical. Apenas com a noção de que o ângulo de 135° é maior que o de 90° e menor que o de 180°, vemos que AII pode ter ido para Belo Horizonte ou para o Rio de Janeiro.



Como nenhuma das alternativas da questão cita o Rio de Janeiro como opção de destino para AII, concluímos que AII foi para Belo Horizonte. Partindo de Belo Horizonte, AIII seguiu uma direção que forma, com a direção Brasília-Belo Horizonte, 90° no sentido anti-horário, ou ainda, 135° – 90° = 45°, no sentido horário, com a rota Brasília-Belém.



Assim, apenas tendo a noção de que o ângulo de 45° é maior que o de 0° e menor que o de 90°, vemos que AIII se dirigiu a alguma das capitais de estados nordestinos. A única alternativa em que isso ocorre é a B.

MÓDULO – B 04

Triângulos e Pontos Notáveis

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra A

Comentário: Pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos:

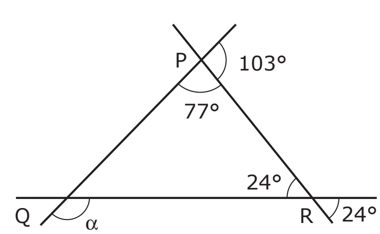
$x + (180° - a) + (180° - b) = 180° \Rightarrow$

$x + 80° + 70° = 180° \Rightarrow$

$x = 30°$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Observe a figura a seguir:



O ângulo $P\hat{R}Q$ é oposto pelo vértice ao ângulo de 24°, logo $P\hat{R}Q = 24°$. Além disso, o ângulo $Q\hat{P}R$ é o suplemento do ângulo de 103°, portanto $Q\hat{P}R = 180° - 103° = 77°$.

O ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ é um ângulo externo do triângulo PQR, logo:

$\alpha = 77° + 24° \Rightarrow \alpha = 101°$.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Como, BC = CA, $A\hat{B}C = C\hat{A}B = 40°$ e $B\hat{C}A = 100°$. Assim, $D\hat{C}A = 180° - 100° = 80°$. Como AC = AD, $A\hat{D}C = 80°$ e $C\hat{A}D = 180° - (80° + 80°) = 20°$.

Questão 04 – Letra D

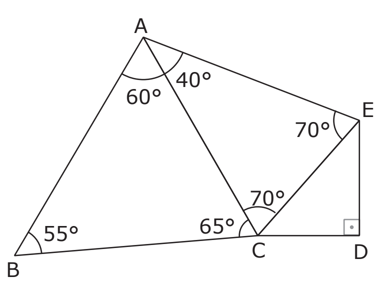
Comentário: O circuncentro e o ortocentro são exteriores ao triângulo se este for obtuso, já que, nesse caso, algumas mediatrizes / alturas são externas ao triângulo; já o baricentro e o incentro são sempre interiores ao triângulo, uma vez que as bissetrizes internas e medianas são sempre interiores ao triângulo.

Questão 05 – Letra C

Comentário: O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita a um triângulo qualquer. Como em uma circunferência a distância de seus pontos ao centro é uma constante, chamada raio, e, construindo–se uma circunferência circunscrita, os vértices do triângulo se situam sobre a circunferência, mostra–se que o circuncentro é o ponto equidistante dos três vértices de um triângulo qualquer.

Questão 06 – Letra A

Comentário: Completando os triângulos ABC e ACE com os ângulos que faltam, temos:



Para descobrir qual é o maior lado na figura, analisaremos os três triângulos partindo do ΔCDE. Nele, o maior lado é o segmento CE, pois este é a hipotenusa. Considerando o triângulo ACE, temos os lados AC = AE > CE, pois ao maior ângulo se opõe o maior lado. Por fim, analisando os ângulos do triângulo ABC, concluímos que AB > BC > AC. Logo, $\overline{AB}$ é o maior segmento.

Questão 07 – Letra E

Comentário: Como os triângulos T_1 e T_2 são equiláteros, sejam H_{T_1} e H_{T_2} suas respectivas alturas:

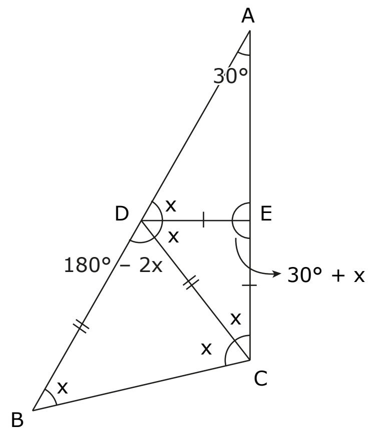
$$\frac{2}{3}H_{T_1} = R \Rightarrow H_{T_1} = \frac{3}{2}R$$

$$\frac{1}{3}H_{T_2} = R \Rightarrow H_{T_2} = 3R$$

Assim, $\dfrac{H_{T_2}}{H_{T_1}} = \dfrac{3R}{\dfrac{3R}{2}} = 2.$

Questão 08

Comentário: Denotando por **x** o ângulo pedido, temos por paralelismo que $A\hat{D}E = x$. Usando os segmentos congruentes, constrói–se a seguinte figura:



Denotou–se $C\hat{D}E = x$, pois $C\hat{D}E + B\hat{D}C + A\hat{D}E = 180°$. Pela soma dos ângulos internos em DEC, temos que x + x + 30° + x = 180° e, portanto, x = 50°, ou seja, $A\hat{B}C = 50°$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário:

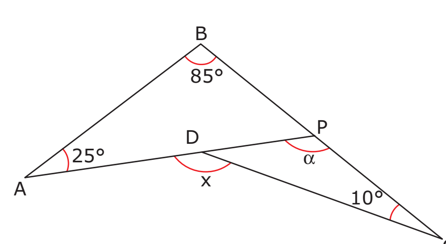
I. Verdadeiro. Os ângulos internos do triângulo DCE são 90°, 45° e 180° – (90° + 45°) = 45°, ou seja, é isósceles.

II. Verdadeiro. Os ângulos internos do triângulo ABE são 60°, 60° e 180° – (60° + 60°) = 60°, ou seja, é equilátero.

III. Verdadeiro. $A\hat{E}D = 180° - (60° + 45°) = 75°$ e $E\hat{D}A = 4°$. Logo $E\hat{A}D = 60°$ e $B\hat{A}D = 120°$, ou seja, AE é bissetriz de $B\hat{A}D$.

Questão 02 – Letra D

Comentário: Prolonga-se o lado $\overline{AD}$ até encontrar o lado $\overline{BC}$ em **P**, como na figura a seguir:

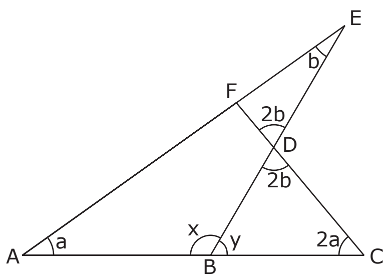


Aplicando a relação do ângulo externo nos triângulos ABP e DPC, temos:

$$\alpha = 25° + 85° \Rightarrow \alpha = 110°$$
$$x = \underbrace{\alpha}_{110°} + 10° \Rightarrow x = 120°$$

Questão 03 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir:



O ângulo **x** é ângulo externo ao triângulo BCD.

Logo, x = 2b + 2a $\Rightarrow$ x = 2(a + b). (I)

O ângulo **y** é ângulo externo ao triângulo ABE.

Logo, y = a + b. (II)

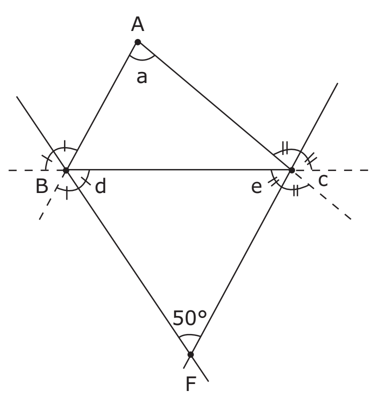
De I e II, temos x = 2y.

Assim, 2y + y = 180° $\Rightarrow$ y = 60°.

Daí, x = 2 . 60° $\Rightarrow$ x = 120°.

Questão 04 – Letra C

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução da questão.



No triângulo BCF, temos que:

50° + d + e = 180° $\Rightarrow$ d + e = 130°.

Já no triângulo ABC, temos:

a + (180° – 2d) + (180° – 2e) = 180° $\Rightarrow$

$a + 180^\circ - 2\underbrace{(d + e)}_{130^\circ} = 0 \Rightarrow$

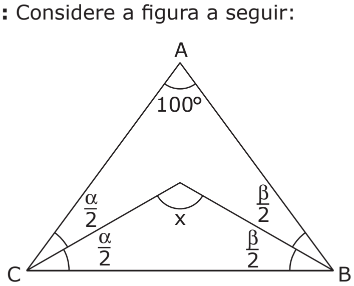
a + 180° – 2 . 130° = 0 $\Rightarrow$

a = 260° – 180° = 80°.

Logo, o ângulo interno do vértice A mede 80°.

Questão 05 – Letra B

Comentário: Considere a figura a seguir:



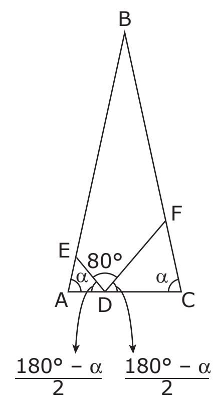
Se um dos ângulos internos do triângulo ABC vale 100°, então, $\alpha + \beta$ = 80°, pois, se houvesse dois ângulos medindo 100°, a soma dos ângulos internos seria maior que 180°. Seja **x** o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Daí: $x + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180^\circ \Rightarrow x + \frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ \Rightarrow x + \frac{80^\circ}{2} = 180^\circ \Rightarrow x = 140^\circ$

Mas, como x = 140° é obtuso, o ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ é 180° – 140° = 40°.

Questão 06 – Letra A

Comentário: O triângulo ABC é isósceles de base AC. De acordo com os dados da questão, os triângulos ADE e CDF também são isósceles e, como $\hat{A} \equiv \hat{C} = \alpha$, $\Delta ADE \sim \Delta CDF$. Assim:



$\frac{180^\circ - \alpha}{2} + 80^\circ + \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 180^\circ \Rightarrow$

$180^\circ - \alpha = 100^\circ \Rightarrow \alpha = 80^\circ$

Logo,

$A\hat{B}C = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow$

$A\hat{B}C = 180^\circ - 160^\circ \Rightarrow$

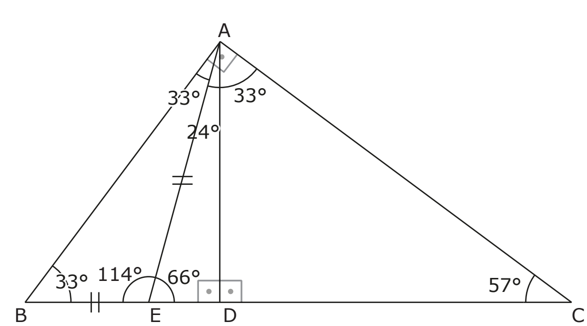
$A\hat{B}C = 20^\circ$

Questão 07 – Letra D

Comentário: Denote por **Q** a intersecção entre a reta **s** e o lado CH. Como c = 30°, $C\hat{A}H$ = 60°. Como a reta **s** é suporte da bissetriz a este ângulo, $C\hat{A}Q$ = 30°, e portanto $C\hat{Q}A$ = 120°. Assim, $B\hat{Q}A$ = 60° e x = 180° – (110° + 60°) = 10°.

Questão 08 – Letra A

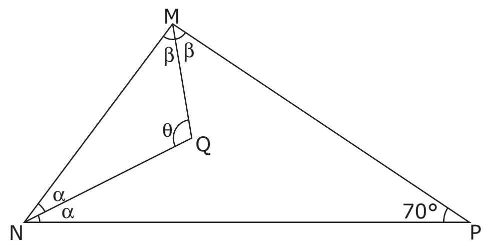
Comentário: Observe a figura a seguir, que ilustra a situação descrita no enunciado:



Num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede a metade desta; logo BEA é isósceles. Como $D\hat{A}E$ = 24°, $A\hat{E}D$ = 66° e logo $A\hat{E}B$ = 114°. Assim, como $E\hat{B}A$ = $B\hat{A}E$, $E\hat{B}A$ = 33°. Portanto, os ângulos agudos do triângulo retângulo medem 33° e 57°.

Questão 09 – Letra D

Comentário: Pela geometria da situação, podemos extrair a seguinte figura:



No Δ MNP, temos:

$2\alpha + 2\beta + 70° = 180° \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 110° \Rightarrow \alpha + \beta = 55°$

No Δ MQN, temos:

$\underbrace{\alpha+\beta}_{55°} + \theta = 180° \Rightarrow 55° + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 125°$

Portanto, $M\hat{Q}N = 125°$.

Questão 10 – Letra D

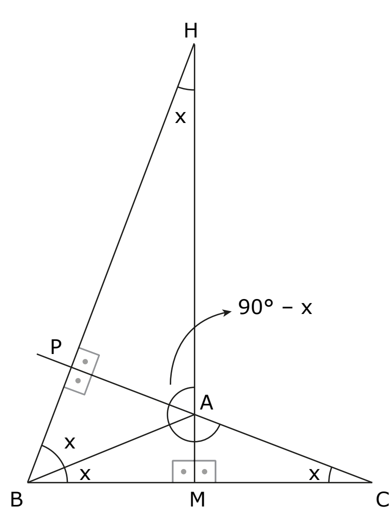
Comentário: O triângulo ABC é retângulo em **C**. Logo, a altura relativa ao vértice **A** é o cateto AC e a altura relativa ao vértice **B** é o cateto BC. O ângulo entre essas alturas, que são catetos, é, então, de 90°.

Questão 11 – Letra D

Comentário: A soma dos ângulos externos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ é de 115°. Portanto, a soma dos ângulos externos será de 360° – 115° = 245°. Portanto, $P\hat{B}C + P\hat{C}B = \frac{245°}{2} = 112{,}5°$. Como a soma dos ângulos internos do quadrilátero BPCA é de 360°, $B\hat{P}C$ = 360° – (65° + 115° + 122,5°) = 57°30'.

Questão 12 – Letra E

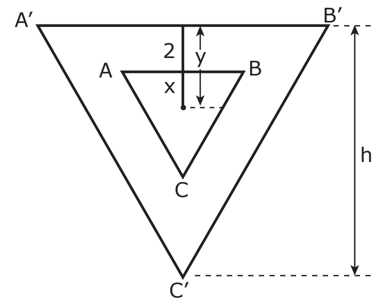
Comentário: Pela geometria da situação, podemos extrair a seguinte figura:



Temos que $B\hat{A}M = B\hat{A}P = H\hat{A}P = 90° - x$, logo, $3 \,.\, (90° - x) = 180° \Rightarrow$ $x = 30°$.

Questão 13 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir:



O triângulo ABC é equilátero e possui lados com medidas iguais a $3\sqrt{3}$ cm, logo sua altura é igual a $\frac{9}{2}$ cm.

Considerando **x** a distância do baricentro até o lado AB do Δ ABC, temos:

$$x = \frac{9}{2} \,.\, \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ cm.}$$

Os triângulos possuem o mesmo baricentro e os lados paralelos, logo a distância **y** do baricentro até o lado A'B' do Δ A'B'C' é igual a:

$$y = x + 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2} + 2 \Rightarrow y = \frac{7}{2} \text{ cm.}$$

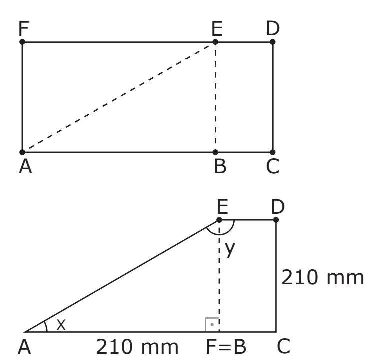
Considerando **h** a altura do Δ A'B'C', temos:

$$y = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3y \Rightarrow h = 3.\frac{7}{2} \Rightarrow h = \frac{21}{2} \text{ cm.}$$

Portanto, a medida das alturas do Δ A'B'C' é igual 10,5 cm.

Questão 14 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:



Ao realizar a dobra, o ponto **F** deve coincidir com o ponto **B**; desse modo, o triângulo retângulo EBA é congruente ao triângulo EFA, logo:

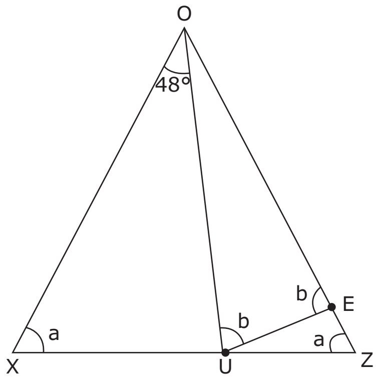
EF = EB = AB = 210 mm $\Rightarrow$ Δ ABE é isósceles

Assim, temos que 2x = 90° $\Rightarrow$ x = 45°.

Por paralelismo, podemos observar que **x** e **y** são suplementares, logo y = 135°.

Questão 15 – Letra A

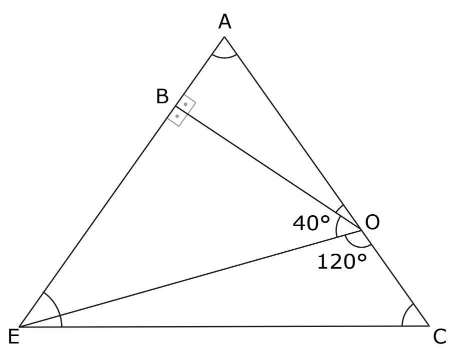
Comentário: Sabendo que o triângulo XOZ é isósceles e que os segmentos OE e OU são congruentes, considere a figura a seguir para a resolução da questão.



Como **b** é ângulo externo do triângulo ZUE, então $Z\hat{U}E = b - a$. Ademais, o ângulo $O\hat{U}Z$ é externo ao triângulo XOU, logo $a + 48° = b + (b - a) \Rightarrow 2b - 2a = 48° \Rightarrow 2(b - a) = 48° \Rightarrow b - a = 24°$. Portanto, $Z\hat{U}E = 24°$.

Questão 16 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir, que ilustra a situação descrita no enunciado:



Sendo AE = AC, então $O\hat{E}B + O\hat{E}C = O\hat{C}E$. (I)

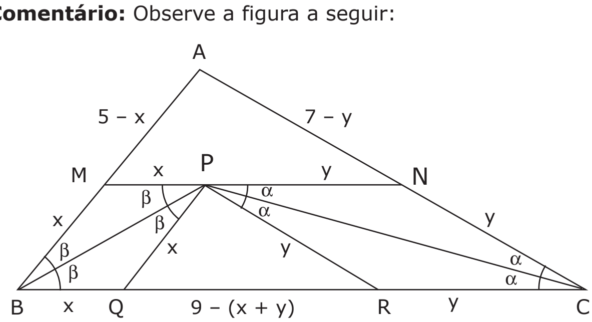
Pelo triângulo OEC, temos $O\hat{E}C + 120° + O\hat{C}E = 180° \Rightarrow O\hat{E}C + O\hat{C}E = 60°$. (II)

Substituindo (I) em (II), sabendo que $O\hat{E}B = 50°$, temos que

$O\hat{E}C + O\hat{E}B + O\hat{E}C = 60° \Rightarrow 2 \cdot O\hat{E}C + 50° = 60° \Rightarrow O\hat{E}C = 5°$.

Questão 17 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:



BP é bissetriz de $A\hat{B}C$ e CP é bissetriz $A\hat{C}B$, portanto:

$$\begin{cases} M\hat{B}P = P\hat{B}Q = \beta \\ N\hat{C}P = P\hat{C}R = \alpha \end{cases}$$

Como MN // BC, temos:

$$\begin{cases} M\hat{P}B = P\hat{B}Q = \beta \\ N\hat{P}C = P\hat{C}R = \alpha \end{cases}$$

Além disso:

$$\begin{cases} BM\ //\ PQ \Rightarrow M\hat{B}P = B\hat{P}Q = \beta \\ NC\ //\ PR \Rightarrow N\hat{C}P = C\hat{P}R = \alpha \end{cases}$$

Podemos observar que os quadriláteros BMPQ e CNPR são losangos, cujos lados medem respectivamente **x** e **y**.

Se 2p é o perímetro do Δ AMN, temos:

$2p = x + y + 5 - x + 7 - y \Rightarrow 2p = 12$

Se 2p' é o perímetro do Δ PQR, temos:

$2p' = x + y + 9 - x - y \Rightarrow 2p' = 9$

A razão entre os perímetros dos triângulos AMN e PQR, respectivamente, será $\frac{2p}{2p'} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Sejam **a** e **b** as medidas dos outros dois lados do triângulo, com a > b. Pela condição de existência de triângulos, devemos ter $a - b < 6$ e, pela construção do triângulo, $a + b = 11$. Assim, as possibilidades são $(a, b) \in \{(8, 3), (7, 4), (6, 5)\}$. Portanto, podem ser construídos 3 triângulos.

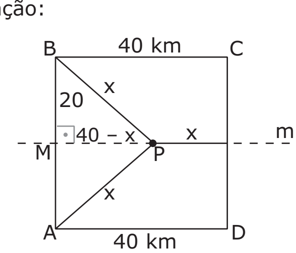
Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Seja **P** o ponto onde se localizará a estação. Como **P** deve ser equidistante de **A** e **B**, **P** deve pertencer à mediatriz **m** do segmento AB, representado na figura a seguir. Seja **x** a distância de **P** à reta que liga **C** e **D**. Teremos, pois, a seguinte situação:



Como o triângulo BMP é retângulo, temos:

$x^2 = (40 - x)^2 + 20^2 \Rightarrow 80x = 2\,000 \Rightarrow x = 25$

Portanto, o ponto **P** deve estar na perpendicular à estrada que liga **C** e **D** passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.

MÓDULO – C 01

Sistemas Métricos e Base Decimal

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra D

Comentário: Como $1m^3$ equivale a 1 000 dm^3, temos que o volume do recipiente que o gotejamento enche a cada 12 min é igual a 0,000020 m^3 = 0,02 dm^3 = 0,02 L.

Portanto, o volume, ao final de 30 minutos, é de $\frac{30}{12} \cdot 0{,}02 = 0{,}05$ L.

Questão 02 – Letra E

Comentário: Primeiro, vamos converter milímetros cúbicos em decímetros cúbicos:

$$1 \text{ mm} = 10^{-2} \text{ dm} \Rightarrow 1 \text{ mm}^3 = (10^{-2} \text{ dm})^3 = 10^{-6} \text{ dm}^3$$

Como 1 dm^3 = 1L, temos que o número total **x** de glóbulos vermelhos no corpo do indivíduo, é igual a:

$$\begin{matrix} 5 \cdot 10^6 \text{ —— } 10^{-6} \text{ dm}^3 \\ x \text{ —— } 5{,}5 \text{ dm}^3 \end{matrix} \Rightarrow x = 2{,}75 \cdot 10^{13}$$

Questão 03 – Letra D

Comentário: A área total da fachada do prédio é 12 m . 20 m = 240 m^2. A área de cada cerâmica é 10 cm . 10 cm = 0,1 m . 0,1 m = 0,01 m^2. Assim, serão necessários $\frac{240 \text{ m}^2}{0{,}01 \text{ m}^2} = 2{,}4 \cdot 10^4 = 24\ 000$ ladrilhos para o revestimento da fachada. Como cada caixa contém 50 ladrilhos, o número **x** de caixas necessárias pode ser calculado por $x = \frac{24\ 000}{50} = 480$ caixas.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Como 10 m^3 equivalem a 10 000 L, a residência está pagando por 10 000 – 600 L = 9 400 L por mês que não estão sendo consumidos. Ao longo de 12 meses, serão pagos sem consumir 12 . 9 400 L = 112 800 L.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Durante o período de 1 hora, ou 3 600 segundos, o número máximo de decolagens que pode acontecer é de $Q = \frac{3\ 600}{45} + 1 = 81$. Analisando as alternativas, podemos, por eliminação, concluir que, para que a norma seja desrespeitada, basta que duas decolagens sejam feitas sem que seja considerado o intervalo de 45 segundos. Portanto, a única alternativa que, de fato, deixa claro que foram feitas 100 decolagens é a alternativa D.

Questão 06 – Letra B

Comentário: A precipitação pluviométrica diz respeito à altura do paralelepípedo, cujo volume representará a quantidade total de água precipitada. Lembrando que 1 litro equivale a 1 dm^3, devemos achar o volume, em litros, do paralelepípedo de área da base 10 km^2 e altura 5 cm, a fim de se resolver o problema. Assim, devemos transformar as unidades:

$1 \text{ km} = 10^4 \text{ dm} \Rightarrow 1 \text{ km}^2 = (10^4 \text{ dm})^2 = 10^8 \text{ dm}^2$

5 cm = 0,5 dm

Agora, lembrando que o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela altura, temos:

$V = 10 \text{ km}^2 \cdot 5 \text{ cm} = 10 \cdot 10^8 \text{ dm}^2 \cdot 0{,}5 \text{ dm} = 5 \cdot 10^8 \text{ dm}^3$

Questão 07 – Letra D

Comentário: Colocando a equação com os números decompostos na base 10, obtemos que:

$400 + 10a + 5 - (150 + b) = 100c + 77 \Rightarrow$

$100c = 178 + 10a - b \Rightarrow c = \frac{178 + 10a - b}{100}$

Como **c** é um número inteiro de 1 a 9, o numerador da expressão anterior deve ser um múltiplo de 100. Considerando **a** e **b** inteiros, os valores que eles podem assumir para que a expressão seja o menor múltiplo de 100, depois dele mesmo, é de:

$178 + \underbrace{10a - b}_{22} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 8$

Perceba que não existe outra possibilidade para **a** e **b** tais que eles estejam entre 1 e 9. Portanto, c = 2.

Então $b \cdot c^{-a} = 8 \cdot 2^{-3} = 1$.

Questão 08 – Letra B

Comentário: Sendo **a** o algarismo do milhar, **b** o algarismo da centena, **c** o algarismo da dezena e **d** o algarismo da unidade, temos:

a + b + c + d = 16 (i)

$\begin{cases} a + b + c = d \\ a = b + c \end{cases} \Rightarrow d = 2a$

Logo,

$a + a + 2a = 16 \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4 \text{ e } d = 8$

Substituindo os valores de **a** e **d** em (i):

$4 + b + c + 8 = 16 \Rightarrow b + c = 4$

Os valores possíveis para **b** e **c**, $b \neq c$ são b = 3 e c = 1 ou b = 1 e c = 3

Portanto, b . c = 3.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário: Cada habitante utiliza 0,028 m^3 de água por dia, em 16 dias serão utilizados 16 . 0,028 m^3 = 0,448 m^3.

Como há na cidade 3 500 habitantes, o gasto total de água será 3 500 . 0,448 m^3 = 1 568 m^3 = 1 568 000 dm^3 = 1 568 000 L.

MATEMÁTICA

Questão 02 – Letra C

Comentário: O volume necessário para vacinar todas as crianças é 114 000 . 18 cm^3 = 2 052 000 cm^3 = 2 052 L.

Como a prefeitura recebeu apenas 1 728 litros, ainda faltam 2 052 – 1 728 = 324 L.

Se 1 728 L estão distribuídos em 80 caixas, em cada uma das caixas tem $\frac{1\,728}{324}$ = 21,6 L da vacina. Portanto, o número de caixas que acomoda os 324 L da vacina é de $\frac{324}{21{,}6}$ = 15.

Questão 03 – Letra E

Comentário: Podemos escrever **x** e **y** na forma:

$$\begin{cases} x = 1000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 \\ y = 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1 \end{cases}$$

Assim, temos:

$x - y = 1\,000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 - (1\,000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1) \Rightarrow$

$x - y = 1\,000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 - 1\,000a_4 - 100a_3 - 10a_2 - a_1 \Rightarrow$

$x - y = 999a_1 + 90a_2 - 90a_3 - 999a_4 \Rightarrow$

$x - y = 9\,(111a_1 + 10a_2 - 10a_3 - 111a_4)$

Portanto, x – y é sempre divisível por 9.

Questão 04 – Letra B

Comentário: O número pensado deve ser da forma N = 100x + 10y + z. Os possíveis números de dois algarismos distintos serão:

(10x, y), (10x, z), (10y, x), (10y, z), (10z, x) e (10z, y).

Portanto:

S = (10x + y) + (10x + z) + (10y + x) + (10y + z) + (10z + x) + (10z + y) ⇒ S = 22x + 22y + 22z = 22(x + y + z)

Sendo R = x + y + z, temos:

$$\frac{S}{R} = \frac{22(x+y+z)}{x+y+z} = 22$$

Questão 05 – Letra A

Comentário:

5	a	b	c	8				x							

Observe que a soma dos dois números à direita do 5 é igual a 15 e a soma dos dois a esquerda do 8 é 12. E a soma dos 3 números é 20, montando um sistema com **a**, **b** e **c**, temos:

$$\begin{cases} a + b = 15 \Rightarrow \; b = 15 - a \\ b + c = 12 \; \Rightarrow \; c = 12 - a \Rightarrow \\ a + b + c = 20 \end{cases}$$

$a + 15 - a + 12 - a = 20 \Rightarrow$

$a = 7; b = 8 \text{ e } c = 5$

Preenchendo os espaços vazios considerando a soma igual a 20, temos:

5	7	8	5	8	7	5	8	x									

Portanto, **x** é igual a 7, que é divisor de 49.

Questão 06 – Letra B

Comentário: Seja N = ab um número natural, em que **a** e **b** são seus algarismos não nulos.

Foi dado que M = ba e N – M = 45. Logo:

ab – ba = 45 ⇒ 10a + b – (10b + a) = 45 ⇒

9a – 9b = 45 ⇒ a – b = 5

Assim, as possibilidades para **a** e **b** são 9 e 4, 8 e 3, 7 e 2, 6 e 1.

Portanto, os possíveis valores de **N** são 4.

Questão 07 – Letra E

Comentário: Podemos decompor o número abc na base decimal como 100a + 10b + c. Logo, a expressão se resume a:

3.(100a + 10b + c) = 100b + 10b + b = 111b ⇒

100a + 10b + c = 37b ⇒ 100a + c = 27b ⇒

$$b = \frac{100a + c}{27}$$

Logo, observe que, como **b** é um número inteiro, o numerador da expressão anterior deve ser um número divisível por 27. Como este é um número de 3 algarismos, o primeiro múltiplo de 27 possível é 108.

Portanto, a = 1, c = 8 e b = 4. Logo a + b + c = 13.

Questão 08 – Letra E

Comentário: Consideremos n = ab. Sendo **a** e **b** algarismos do inteiro positivo **n**, temos:

$$\begin{cases} n = 10a + b \\ n = S(n) + P(n) \end{cases}$$

$10a + b = a + b + a \,.\, b \Rightarrow$

$9a = a \,.\, b \Rightarrow$

$a(9 - b) = 0 \underset{a \neq 0}{\underbrace{\Rightarrow}} 9 = b$

Logo, o algarismo das unidades de **n** é 9.

Questão 09 – Letra D

Comentário: Seja n = abc um número natural de 3 algarismos, **a**, **b** e **c**.

Foi dado que, ao multiplicar **n** por 7, obtém-se um número terminado em 373, ou seja:

$$\begin{array}{r} abc \\ \times \quad 7 \\ \hline \ldots 373 \end{array}$$

Por tentativa, temos que a única possibilidade para o valor **c** é 9.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle(6) \\ a\;b\;9 \\ \times \quad 7 \\ \hline \ldots 3\;7\;3 \end{array}$$

Agora, 7b + 6 tem de terminar em 7, ou seja, b = 3.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle(2) \\ a\;3\;9 \\ \times \quad 7 \\ \hline \ldots 3\;7\;3 \end{array}$$

Enfim, 7a + 2 tem de terminar em 3, ou seja, a = 3.
Portanto, a multiplicação pedida é:

$$\begin{array}{r} 339 \\ \times \quad 7 \\ \hline \ldots 373 \end{array}$$

Ou seja, n = 339, que é um número divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é divisível por 3.

Questão 10 – Letra C

Comentário: Seja ab o número em questão. Podemos escrevê-lo como sendo n = 10a + b e a inversão dos seus algarismos como m = 10b + a. De acordo com o enunciado, podemos afirmar que b = 3a + 1 e 10b + a = 2(10a + b) + 18.

Montando um sistema com as equações, temos:

$$\begin{cases} b = 3a + 1 \\ 10b + a = 2(10a + b) + 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3a + 1 \\ 19a - 8b = -18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$19a - 8(3a + 1) = -18 \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 7$$

Portanto, a + b = 2 + 7 = 9.

Questão 11 – Letra E

Comentário: Assumindo a idade de Ada Byron como um número de dois dígitos **a** e **b**, podemos escrever a idade dela como 10a + b. Trocando a ordem dos algarismos, obtemos 10b + a, e elevando ao quadrado, temos $(10b + a)^2 = 100b^2 + 20ba + a^2$. Como esse resultado corresponde a um ano do século XIX, **b** necessariamente deve ser igual a 4. Logo, a expressão anterior se resume a $1600 + 80a + a^2$. Conclui-se então que, para manter a restrição do século que Ada Byron vivia, **a** deve ser igual a 3, pois $42^2 = 1764$ e $44^2 = 1936$. Portanto, o ano em questão é $43^2 = 1849$.

Logo, a idade dela era 34 anos, ou seja, 1815 era seu ano de nascimento. Portanto, até 1977 passaram-se 162 anos.

Questão 12

Comentário: Seja n = abcd, em que **a**, **b**, **c** e **d** são os algarismos. Por hipótese, temos:

$$\begin{cases} a^2 + d^2 = 58 & \text{(i)} \\ b^2 + c^2 = 52 & \text{(ii)} \\ abcd - 3\,816 = dcba & \text{(iii)} \end{cases}$$

Da equação (i), temos que as possibilidades para **a** e **d** são:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \text{ e } d_1 = 7 \\ \quad \text{ou} \\ a_2 = 7 \text{ e } d_2 = 3 \end{cases}$$

Da equação (ii), temos que as possibilidades para **b** e **c** são:

$$\begin{cases} b_1 = 4 \text{ e } c_1 = 6 \\ \quad \text{ou} \\ b_2 = 6 \text{ e } c_2 = 4 \end{cases}$$

Assim, os possíveis valores para **n** são:
$n_1 = 3\,467$, $n_2 = 3\,647$, $n_3 = 7\,643$ ou $n_4 = 7\,463$
Entretanto, para atender à condição (iii), temos:
n = 7 463, pois 7 463 – 3 816 = 3 647.

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 1

Habilidade: 1

Comentário: Sendo:

1 milhão = 10^6

1 km = 10^3 m

1 UA = 1,496 . 10^2 milhões de quilômetros

Então, temos:

1UA = 1,496 . 10^2 . 10^6 . 10^3 m

1UA = 1,496 . 10^{11} m

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 1

Habilidade: 1

Comentário: 1 micrômetro (μm) = 10^{-6} m

1 m = 10^3 mm

Assim:

0,2 μm = 0,2 . 10^{-6} m = 2 . 10^{-1} . 10^{-6} . 10^3 mm = 2 . 10^{-4} mm.

Portanto, a medida da Chlamydia é de 2 . 10^{-4} mm.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 3

Habilidade: 12

Comentário: A quantidade de água ingerida por esse paciente antes do exame deverá ser igual a:

150 . 2 . 10 = 3 000 mL = 3 L

Portanto, ele deverá comprar 2 garrafas de capacidade 1,5 litro, ou seja, deverá escolher a garrafa IV.

Questão 04 – Letra E

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 3

Habilidade: 10

Comentário:

8 hectares = 8 hm^2 = 8.$(10^2 \text{ m})^2$ = 8 . 10^4 m^2 = 80 000 m^2.

Questão 05 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Em uma hora, há 60.60 = 3 600 segundos; logo, em 6 horas há 21 600 segundos. Assim, caíram $\frac{21\,600}{3} = 7200$ gotas, sendo desperdiçado um volume de 7 200 . 0,2 = 1 440 mL = 1,44 L.

MATEMÁTICA

Questão 06 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Como o algarismo faltante é o sexto, contado da direita para a esquerda, sua posição é de centena de milhar.

Questão 07 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário:

MCCV = 1 000 + 100 + 100 +5 = 1 205

XLIII = 50 – 10 + 1 + 1 + 1 = 43

Logo, os números representados são 1 205 000 e 43 000.

Questão 08 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário:

a = 2 300 mm = 230 cm = 23 dm = 2,3 m.

b = 160 cm = 16 dm = 1,6 m.

Questão 09 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário:

6 000 m $\cong$ 6 000 . 3,3 pés $\cong$ 19 800 pés.

Logo, a diferença, em pés, entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu é:

31 000 – 19 800 = 11 200 pés.

MÓDULO – C 02

Porcentagem

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: Sendo **x** o preço inicial da ação, seu preço final será x . 1,12 . 1,07 . 0,98 . 0,92 $\cong$ 1,08x, ou seja, a ação sofreu uma valorização de aproximadamente 8%.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Como o imóvel em São Paulo valorizou 10%, o valor de **x** é tal que 1,1.x = 495 000 $\Rightarrow$ x = 450 000. Já em Porto Alegre, houve uma desvalorização de 10% na venda, o que mostra que o valor de **y** é tal que:

0,9.y = 495 000 $\Rightarrow$ y = 550 000.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Para saber a porcentagem, dividimos o valor do acréscimo pelo valor total: $\frac{720}{24\,000} = 0,03 = 3\%$.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Se **x** é o valor de consumo, 0,33x é o valor do imposto. Logo, o valor total corresponde a:

x + 0,33x = 150,29 $\Rightarrow$ 1,33x = 150,29 $\Rightarrow$ x = 113,00.

Então, o tributo será de 150,29 – 113,00 = R$ 37,29.

Questão 05 – Letra C

Comentário: O percentual restante da área do terreno equivale a 100% – 42% – 53% = 5%.

5% equivalem a 3 000 m^2, logo, montando a regra de três, podemos obter que a área ocupada pelo centro comercial (42%) é $3\,000.\frac{42\%}{5\%} = 25\,200$ m^2.

Questão 06 – Letra B

Comentário: Seja **x** o preço de cada unidade, logo o preço das três é 3x. Se a segunda teve 10% de desconto, ela saiu por 0,9x e a terceira tendo 20% de desconto saiu por 0,8x. Portanto, comprando três unidades dessa mercadoria sairá por x + 0,9x + 0,8x = 2,7x.

Observe que a variação percentual de 3x para 2,7x equivale a 10% de desconto.

Questão 07 – Letra A

Comentário: De acordo com os gráficos, temos que o número de pessoas com 18 anos ou mais é:

190 800 000 – 56 300 000 = 134 500 000.

Como desse grupo de pessoas 52% são mulheres, temos então 52% . 134 500 000 = 69 940 000, ou seja, aproximadamente 70 milhões.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Se 57% do cerrado foi inteiramente destruído, resta apenas 43% dele. Se a cada ano é reduzido 1,5%, em 10 anos reduzirá em 15% a área do cerrado. Logo, a quantidade restante do cerrado será 43% – 15% = 28%.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário: Seja **x** o preço do terreno. Após pagar 25% da entrada, o restante a ser pago do terreno é 0,75x. Como dito no enunciado, temos que 0,34 . 0,75x = 10 200, logo x = R$ 40 000,00.

Questão 02 – Letra C

Comentário: Sabemos que o número de mulheres é 60% . 2 400 = 1 440. Destes, foi dito que o número de mulheres estrangeiras correspondem a 25% . 1 440 = 360. Como temos 1 440 mulheres, o total de homens é 960. Mas se 672 são brasileiros, então os homens estrangeiros correspondem a 960 – 672 = 288. Logo, o número de funcionários que não são brasileiros corresponde a 288 + 360 = 648. Assim, o percentual de funcionários que não são brasileiros é $\frac{648}{2\,400} = 27\%$.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Consideremos **h** o número de homens e 500 – h o número de mulheres. De acordo com o problema, temos:

$$\frac{50}{100}.h + \frac{60}{100}.(500 - h) = 280 \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}.h + 300 - \frac{3}{5}.h = 280 \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{10}.h = -20 \Rightarrow h = 200$$

Logo, foram entrevistados 200 homens e 300 mulheres.

Questão 04

Comentário: Sendo **P** o preço inicial do celular, seu preço final será dado por P . 1,2 . 1,25 . 0,6 = 0,9P. Logo, o preço desse produto sofreu uma redução de $\frac{P - 0,9P}{P} = 10\%$.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Atualmente a composição do suco contém 4% de água, que equivale a 10 000 litros. Portanto, a quantidade de suco produzida é de:

$$\frac{10\,000}{4\%} = \frac{x}{100\%} \Rightarrow x = 250\,000 \text{ L}$$

Como a composição do suco será alterada para que 10% seja composta por água, serão consumidos, então, 10% . 250 000, que equivale a 25 000 litros de água.

Questão 06

Comentário:

A) Escola A: $\frac{1\,150}{1\,000} = 1,15$

Escola B: $\frac{1320}{1200} = 1,10$

Escola C: $\frac{1\,680}{1\,500} = 1,12$

Logo, a Escola A teve o maior aumento percentual nas mensalidades.

B) Valor da mensalidade para:

1º filho: R$ 1 320,00

2º filho: 1 320 . 0,9 = R$ 1 188,00

3º filho: 1 320 . 0,8 = R$ 1 056,00

Portanto, o valor total gasto com os três filhos será de 1 320 + 1 188 + 1 056 = R$ 3 564,00.

Questão 07 – Letra B

Comentário: Seja **M** o valor da mensalidade e **P** o valor das parcelas a serem pagas nos primeiros três meses. Pelo enunciado, podemos afirmar que:

12M + 3P = 8 400 (I)

O desembolso, após o término do depósito caução (ou seja, 9 mensalidades), é 80% superior àquele correspondente ao desembolso referente aos três primeiros meses (ou seja, 3M + 3P). Montando as equações, obtemos que:

9M = 1,8.(3M + 3P) (II)

Resolvendo o sistema obtido pelas equações (I) e (II), temos que M = R$ 600,00 e P = R$ 400,00, logo as três parcelas do depósito caução correspondem a 3 . 400 = R$ 1 200,00.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Antes tínhamos que 80 homens correspondiam a 40% dos frequentadores, logo o número de mulheres era $80.\frac{60\%}{40\%} = 120$. No instante seguinte, temos que 126 homens correspondem a 28% do total, logo o número de mulheres é $126.\frac{72\%}{28\%} = 324$.

Assim, o aumento percentual de mulheres é $\frac{324}{120} - 1 = 1,7 = 170\%$.

Questão 09 – Letra D

Comentário: A quantidade da mistura I é 45% do total, logo, se há 0,1 g/kg do nutriente **C** na mistura I, então a quantidade do nutriente **C** proveniente da mistura I é 0,1 . 0,45 g/kg. Analogamente, para as misturas II e III, obtemos a quantidade do nutriente **C** que é, respectivamente, 0,4 . 0,25 g/kg e 0,5 . 0,3 g/kg. Logo, a quantia do nutriente **C** é: (0,1 . 0,45 + 0,4 . 0,25 + 0,5 . 0,3) g/kg = 0,295 g/kg.

Questão 10 – Letra C

Comentário: Das 800 cirurgias ortopédicas, temos que 0,45 . 800 = 360 foram de fêmur. Ademais, das 440 feitas em homens, temos que 0,4 . 440 = 176 foram de fêmur. Portanto, o número total de cirurgias de fêmur realizadas em mulheres foi 360 – 176 = 184.

Questão 11 – Letra D

Comentário: Sejam:

x: valor da hora normal trabalhada;

y: valor da hora extra trabalhada;

S: salário diário (normal).

Temos:

S = 8x

Com as horas extras, temos:

$1,5S = 8x + 2y \Rightarrow 1,5.(8x) = 8x + 2y \Rightarrow$

$12x = 8x + 2y \Rightarrow 4x = 2y \Rightarrow y = 2x$

Portanto, a hora extra vale o dobro da hora normal, ou seja, 100% a mais.

MATEMÁTICA

Questão 12

Comentário: Vamos organizar a seguinte tabela:

	Antes	Depois
Balas por pacote	n	1,2n
Preço do pacote	P	1,08P
Preço de cada bala	$\frac{P}{n}$	$\frac{1,08P}{1,2n}$

A promoção fez com que o preço de cada bala do pacote se tornasse igual a:

$$\frac{1,08P}{1,2n} = 0,9\frac{P}{n}$$

Logo, cada bala sofreu uma redução de 10% em seu preço.

Questão 13 – Letra A

Comentário: Sejam T_1, D_1 e V_1 o tempo, a distância e a velocidade no trajeto usual, respectivamente.

Sejam T_2, D_2 e V_2 o tempo, a distância e a velocidade no novo trajeto, respectivamente. Daí:

$D_2 = (1 + i)D_1 \Rightarrow D_2 = (1 + 0,2)D_1 \Rightarrow D_2 = 1,2D_1$ e

$V_2 = (1 + i)V_1 \Rightarrow V_2 = (1 + 1)V_1 \Rightarrow V_2 = 2V_1$

Temos $T_2 = \frac{D_2}{V_2} \Rightarrow T_2 = \frac{1,2D_1}{2V_1} \Rightarrow T_2 = 0,6\frac{D_1}{V_1}$.

Se $T_1 = \frac{D_1}{V_1}$, então $T_2 = 0,6T_1$.

Assim, o tempo no novo trajeto será 60% do trajeto usual, ou seja, houve uma redução de 40% no tempo de viagem.

Questão 14 – Letra C

Comentário: Seja P_c o preço de custo do produto. Para não ter prejuízo, o lojista vende seus produtos por $1,44P_c$.

Como os clientes gostam de obter descontos no momento da compra, o lojista cria uma tabela de preços de venda aumentando em 80% o preço de custo, ou seja, os produtos serão vendidos por $1,8P_c$.

Seja **x** o maior desconto que o lojista pode conceder ao cliente, sobre o preço de tabela, de modo a não ter prejuízo. Assim:

$(1 + x).(1,8P_c) = 1,44P_c \Rightarrow 1 + x = 0,8 \Rightarrow$

$x = -0,2 \Rightarrow x = -20\%$

Portanto, o lojista pode conceder ao cliente um desconto de 20%.

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 25

Comentário: Vamos organizar a seguinte tabela:

Site	Diferença no tempo de acesso	Taxa de aumento no tempo de acesso
X	21 – 12 = 9	$\frac{9}{12} . 100 = 75\%$
Y	51 – 30 = 21	$\frac{21}{30} . 100 = 70\%$
Z	11 – 10 = 1	$\frac{1}{10} . 100 = 10\%$
W	57 – 38 = 19	$\frac{19}{38} . 100 = 50\%$
U	56 – 40 = 26	$\frac{26}{40} . 100 = 65\%$

Logo, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi no *site* X.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário: O atacadista compra um produto de valor **x** e repassa às lojas por um preço 0,5 superior ao que pagou. Para terem lucro, os lojistas revendem pelo dobro do valor que compraram, então o preço final (P_f) do produto será:

$P_f = x . 1,5 . 2 =$ R\$ 10,00 . 1,5 . 2 = R\$ 30,00.

Questão 03 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Seja **I** a intensidade da luz proveniente da fonte. Considerando os valores mínimos de transparência, a intensidade que atravessa a película é 0,5I. A intensidade que atravessa o vidro é, então, 0,7 . 0,5I = 0,35I. Considerando os valores máximos de transparência, 0,7I atravessa a película e 0,9 . 0,7I = 0,63I atravessa o vidro. Logo, **P** está entre 35% e 63%.

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: O lucro obtido foi R\$ 34 000,00 – R\$ 26 000,00 = R\$ 8 000,00. O imposto devido será 0,15 . R\$ 8 000,00 = R\$ 1 200,00.

Questão 05 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário: A área original é dada por 30 cm . 15 cm = 450 cm². Os lados da base passaram a medir 0,8 . 30 cm = 24 cm e 0,8 . 15 cm = 12 cm. Logo, a nova área será 24 cm . 12 cm = 288 cm².

A razão entre as áreas será $\frac{288\ \text{cm}^2}{450\ \text{cm}^2} = 0{,}64$, ou seja, a área sofre uma redução de 36%.

Questão 06 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Sendo **q** a quantia aplicada, em reais, por essa pessoa, temos:

1º mês: a pessoa perdeu 30% do total investido, ou seja, perdeu 0,3q, ficando, então, com 0,7q;

2º mês: a pessoa recuperou 20% do que havia perdido, ou seja, 0,2(0,3q) = 0,06q.

Assim, depois desses dois meses, essa pessoa tem o equivalente a 0,7q + 0,06q = 0,76q.

Como o montante é de R$ 3 800,00, temos:

$0{,}76q = 3\,800 \Rightarrow q = 5\,000$

Questão 07 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Observe que, dos 112 jogadores, temos 54 + 14 = 68 jogadores que concluíram o Ensino Médio, ou seja, cerca de $\frac{68}{112} \cong 0{,}60 = 60\%$.

Questão 08 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: O total de fumantes do grupo é igual a: 0,9 . 1 500 + 0,8 . 500 = 1 750.

Questão 09 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário: Sejam **H** o número de homens e **M** o número de mulheres. Dado que 35% das mulheres e 12% dos homens não sentem vontade de fazer sexo, temos que o total de brasileiros com essa característica é de 35%M + 12%H. Portanto, a porcentagem de brasileiros sem vontade de fazer sexo é de:

$$\frac{35\%M + 12\%H}{M + H}.$$

No entanto, de acordo com o enunciado, podemos considerar que H = M, então temos que a porcentagem é de:

$$\frac{35\%H + 12\%H}{2H} = 23{,}5\% \cong 24\%.$$

Questão 10 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Seja **x** o total de eleitores. Temos:

$$0{,}51\ .\ \underbrace{0{,}8x}_{\text{Votos válidos}} = 0{,}408x \cong 0{,}41x$$

Logo, o resultado é da ordem de 41%.

Questão 11 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: Sejam **P** a população total e **E** a energia total consumida.

- Considerando uma renda familiar maior do que vinte salários:

  Porcentagem da população $\rightarrow$ 0,05P

  Energia consumida $\rightarrow$ 0,10E

  Consumo por indivíduo $\rightarrow \frac{0{,}10E}{0{,}05P} = 2\frac{E}{P}$

- Considerando uma renda familiar de até três salários mínimos:

  Porcentagem da população $\rightarrow$ 0,50P

  Energia consumida $\rightarrow$ 0,30E

  Consumo por indivíduo $\rightarrow \frac{0{,}30E}{0{,}50P} = 0{,}6\frac{E}{P}$

  Portanto, temos: $x = \dfrac{2\frac{E}{P}}{0{,}6\frac{E}{P}} = \dfrac{2}{0{,}6} \cong 3{,}3$

MÓDULO – C 03

Juros Simples e Compostos

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra B

Comentário: O juro simples total **J** pago pelo estudante é dado por:

J = C . i . t = 2 000 . 0,008 . 12 = R$ 192,00

Assim, o valor total pago pelo estudante é de

2 000 + 192 = 2 192 reais.

MATEMÁTICA

Questão 02 – Letra D

Comentário: Sendo **C** o valor emprestado, temos:

$J = C . i . t \Rightarrow 3\,000 = C . 0{,}006 . 5 = 0{,}03C \Rightarrow C = 100\,000$

Logo, o valor emprestado foi de 100 mil reais.

Questão 03

Comentário: Sendo i = 10% = 0,1 e t = 3, temos que:

$53\,240 = C(1 + 0{,}1)^3 \Rightarrow C(1{,}1)^3 = 53\,240 \Rightarrow$

$C = \dfrac{53\,240}{1{,}331} \Rightarrow C = 40\,000$

Questão 04 – Letra B

Comentário: Sendo **C** o preço da televisão, incidirá sobre ela um valor **J** de juros, dado por J = Cit. Assim, J = C . 0,007 . 5 = C . 0,035. Portanto, incidiu sobre o preço da TV juros de 3,5%.

Questão 05 – Letra A

Comentário: O montante **x** é tal que x = 15 000 . 1,08 . 1,09 = 17 658 reais, cuja soma dos algarismos é 27.

Questão 06

Comentário: A dívida que sobrou para Marcelo no final de 30 dias é de 1 000 – 400 = 600 reais. Como incidiu 5% de juros, o valor a ser pago é de 600 . 1,05 = 630 reais.

Questão 07 – Letra D

Comentário: A dívida que restou ao cliente após o pagamento da entrada foi de 30 000 – 20 000 = 10 000 reais. Sobre esse valor, foi cobrado 11 200 reais, ou seja, juros de 11 200 – 10 000 = 1 200 reais. Logo, a taxa de juros é de

$\dfrac{1\,200}{10\,000} = 0{,}12 = 12\%.$

Questão 08 – Letra C

Comentário:

- Início de 2010:
  M = 5 160 . 1,2 = 6 192 reais
- Início de 2011:
  M = 6 192 . 1,2 = 7 430,40 reais

O juro recebido é igual a 7 430,40 – 6 192 = 1 238,40 reais.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: Sendo **C** o valor à vista da parte financiada dos insumos, em um regime de juro simples, e J = Cit o valor dos juros que incidiram sobre **C**, temos:

208 000 = C + J

208 000 = C + Cit

$208\,000 = C + C . 0{,}02 . 10 = C + 0{,}2C = 1{,}2C \Rightarrow$

C = R$ 174 000,00

Questão 02 – Letra C

Comentário: Em um regime de juros compostos, temos: C = 10 000; i = 0,015 e t = 20.

Assim, o montante é expresso por:

$$M = 10\,000(1 + 0{,}015)^{20} \Rightarrow M = 10\,000(1{,}015)^{20} \Rightarrow$$

$$M = 10\,000\Big[\underbrace{(1{,}015)^{10}}_{1{,}16}\Big]^2 \Rightarrow M = 10\,000[1{,}16]^2 \Rightarrow$$

$$M = 10\,000 . 1{,}3456 \Rightarrow M = 13\,456 \text{ reais.}$$

Questão 03

Comentário:

A) Em 60 dias, teremos 2 meses. Daí:

$27\,300(1 + i)^2 = 27\,300(1 + 0{,}3)^2 =$

$27\,300(1{,}3)^2 = 46\,137$ reais.

B) $\dfrac{27\,300}{(1+i)} = \dfrac{27\,300}{(1+0{,}3)} = \dfrac{27\,300}{1{,}3} = 21\,000$ reais.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Para encontrar o preço à vista do produto, encontraremos a parcela do preço à vista do produto embutido em cada parcela e em seguida as somaremos. Na entrada, não incide juros, logo 500 reais do preço do produto estão embutidos na entrada. Chamando de C_2 e C_3 o valor à vista embutido na segunda e terceira parcelas, teremos:

$576 = C_2 . 1{,}2 \Rightarrow C_2 = 480$

$576 = C_3 . (1{,}2)^2 = C_3 . 1{,}44 \Rightarrow C_3 = 400$

Logo, o preço à vista do produto é de 500 + 480 + 400 = 1 380 reais.

Questão 05 – Letra D

Comentário: Considerando **x** o capital do sr. Paulo, temos que, após 3 meses com juros simples de 4% ao mês, os juros J_1 serão iguais a 0,12x, e, reaplicando o montante obtido à taxa de juros simples de 3% ao mês durante 9 meses, os juros J_2 serão iguais a 0,3024x. Assim, para obter o mesmo rendimento, ele deveria ter investido esse capital a uma taxa **i** durante um ano, tal que:

$12ix = 0{,}12x + 0{,}3024x \Rightarrow 12ix = 0{,}4224x \Rightarrow$

$i = 0{,}0352 = 3{,}52\%$

Questão 06 – Letra A

Comentário: Após dois meses, a dívida de Bruno era de 1 000 . 1,2 = 1 200 reais. Ao efetuar o pagamento de R$ 700,00, sua dívida passou a ser de 1 200 – 700 = 500 reais. Logo, para liquidar o débito no mês seguinte, ele pagou um total de 1,1 . 500 = R$ 550,00.

Questão 07 – Letra C

Comentário: Temos que o valor da dívida de Renato, após um mês, era de 1 400 . 1,15 = 1 610 reais. Como ele pagou apenas 750 reais, ainda restaram 860 reais a serem pagos, e, nas mesmas condições firmadas, um mês depois, o pagamento deverá ser de 860 . 1,15 = 989 reais.

Questão 08 – Letra C

Comentário: O valor total dos juros após a renegociação, em regime de juros simples, é dado por:

$J = Cit \Rightarrow J = 2\,000 \cdot 6 \cdot 0{,}05 = R\$\ 600{,}00$

Assim, o usuário pagou efetivamente 600 reais de juros. A sua economia é dada pela diferença entre o valor dos juros em regime de juros compostos e este valor de 600 reais. Calculando o valor que seria pago sob este regime:

$M = C + J = C(1 + i)^t = 2\,000(1 + 0{,}06)^6 = 2\,000 \cdot 1{,}4185 = 2\,837 \Rightarrow$

$2\,837 = 2\,000 + J \Rightarrow J = R\$\ 837{,}00$

Assim, a economia foi de R\$ 837,00 – R\$ 600,00 = R\$ 237,00.

Questão 09 – Letra B

Comentário: Sendo **C** o valor da parcela fixa, temos:

$$\frac{C}{(1{,}03)^2} + \frac{C}{(1{,}03)^3} = 10\,000 \Rightarrow$$

$$0{,}9426C + 0{,}9151C = 10\,000 \Rightarrow$$

$$1{,}8577C = 10\,000 \Rightarrow C = R\$\ 5\,383{,}00$$

Questão 10 – Letra E

Comentário: Sendo **C** o capital aplicado, e sabendo-se que, após 8 meses, o montante resgatado foi de R\$ 65 536,00, temos:

$$65\,536 = C \cdot (1 + 0{,}01)^4 \cdot (1 + 0{,}02)^4 \Rightarrow$$

$$65\,536 = C \cdot 1{,}01^4 \cdot 1{,}02^4 \Rightarrow$$

$$C = \frac{65\,536}{(1{,}01 \cdot 1{,}02)^4} = \frac{4^8}{1{,}0302^4} = \left(\frac{4}{\sqrt{1{,}0302}}\right)^8 \Rightarrow$$

$$C \cong 3{,}96^8$$

Questão 11 – Letra C

Comentário: Sendo **x** a taxa de juros mínima para que se alcance o montante de 22 000 reais, teremos:

$$20\,000.(1{,}02)(1{,}05)\left(1 + \frac{x}{100}\right) = 22\,000 \Rightarrow$$

$$1 + \frac{x}{100} \cong 1{,}03 \Rightarrow x \cong 3\%$$

Questão 12

Comentário: Considere J_A e J_B os rendimentos das aplicações **A** e **B**, respectivamente. Assim, temos: $J_A = 1\,200 \cdot i \cdot t$ e $J_B = 1\,300 \cdot i \cdot t$. Sabemos que $J_A + J_B =$ R\$ 800,00, logo $1\,200 \cdot i \cdot t + 1\,300 \cdot i \cdot t = 800 \Rightarrow i \cdot t \cdot (1\,200 + 1\,300) = 800 \Rightarrow$ $i \cdot t = 0{,}32$. Portanto, $J_A = 1\,200 \cdot 032 =$ R\$ 384,00 e $J_B = 1\,300 \cdot 032 = 416$.

Questão 13 – Letra B

Comentário: Sendo **x** o valor do produto à vista, **y** é o valor de cada parcela. No ato da compra, foi pago **y** e ficou um saldo devedor de x – y.

Após 3 meses, temos:

$$y = (x - y) \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 3) \Rightarrow y = (x - y) \cdot 1{,}06 \Rightarrow x - y = \frac{y}{1{,}06} \Rightarrow$$

$$x = \frac{100y}{106} + y \Rightarrow x = \frac{206y}{106} \Rightarrow y = \frac{106x}{206} = \frac{53x}{103}$$

Logo, em relação ao preço do produto à vista, cada parcela corresponde à $\frac{53}{103}$.

Questão 14 – Letra C

Comentário: Desejamos retirar os juros referentes à última parcela. Observe que cada parcela teve seu valor original aumentado em 5%. Seja **P** a parcela sem juros. Temos:

$$1{,}05 \cdot P = 462 \Rightarrow P = \frac{462}{1{,}05} = 440 \text{ reais}.$$

Questão 15 – Letra A

Comentário: Ao final do primeiro mês, o saldo devedor era de 600 + 600 . 0,05 = 630 reais. Logo, ao amortizar 330 reais, resta um saldo devedor de 630 – 330 = 300 reais. Ao final do segundo mês, o saldo devedor era de 300 + 300 . 0,02 = 306 reais. Logo, foram pagos 330 + 306 = 636 reais, o que corresponde a 636 – 600 = 36 reais de juros. Assim, o valor percentual dos juros em relação ao empréstimo inicial é de $\frac{36}{600} = 6\%$.

Questão 16 – Letra C

Comentário: Sem o abatimento, o montante **M** a ser pago, sendo **C** o capital contraído por empréstimo, é dado por $M = C \cdot (1 + 0{,}2)^2 \cdot (1 + 0{,}1)^2 = 1{,}7424 \cdot C$. Com o abatimento, o montante a ser pago é de 0,9M, ou seja, $0{,}9 \cdot 1{,}7424 \cdot C \cong 1{,}57C$. Assim, foram pagos, aproximadamente, 1,57C – C = 0,57C de juros, ou seja, 57%.

Questão 17 – Letra C

Comentário: Temos que o valor que excede os R\$ 50 000 é R\$ 20 000,00. Assim, o montante M_1 sobre esse valor do investimento foi de:

$M_1 = 20\,000.(1 + 0{,}01)^2 =$ R\$ 20 402,00.

Logo, os juros foram de R\$ 402,00, que tiveram um desconto **d** do IR de:

$d = 402 \cdot 0{,}225 =$ R\$ 90,45.

O montante M_2 bruto da aplicação foi de:

$M_2 = 70\,000.(1 + 0{,}01)^2 =$ R\$ 71 407,00.

Portanto, o rendimento líquido da aplicação, ao final dos dois meses, foi de:

1 407 – 90,45 = R\$ 1 316,55.

Questão 18 – Letra D

Comentário: Após um ano, César tem um montante $M_1 = 10\,000(1 + i)$. Ao sacar R\$ 7 000,00, sua aplicação após mais um ano, M_2, passa a ser R\$ 6 000,00. Então:

$$M_2 = (10\,000(1 + i) - 7\,000)(1 + i) \Rightarrow$$

$$6\,000 = (10\,000 + 10\,000i - 7\,000)(1 + i) \Rightarrow$$

$$6\,000 = 1\,000(3 + 10i).(1 + i) \Rightarrow 6 = 3 + 3i + 10i + 10i^2 \Rightarrow$$

$$10i^2 + 13i - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} i = 0{,}2 \\ \text{ou} \\ i = -1{,}5 \end{cases}$$

Como **i** é positivo, i = 0,2, logo:

$(4i - 1)^2 = (4.0{,}2 - 1)^2 = (-0{,}2)^2 = 0{,}04.$

MATEMÁTICA

Seção Enem

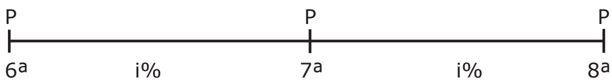
Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário: Usando o fluxo de caixa, temos:



O valor total pago será dado por:

$$P+\frac{P}{1+\frac{i}{100}}+\frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}$$

Pois a 7ª prestação foi paga 1 mês antes, e a 8ª prestação foi paga 2 meses antes.

Portanto, temos:

$$P.\left[1+\frac{1}{1+\frac{i}{100}}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$$

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: Temos que o saldo devedor é diminuído em 500 reais a cada mês. A tabela a seguir mostra a prestação e o valor do saldo.

Saldo	Prestação
180 000 (a_1)	500
179 500 (a_2)	500 + 1% de 179 500 500 + 1 795
179 000 (a_3)	500 + 1% de 179 000 500 + 1 790
178 500 (a_4)	500 + 1% de 178 500 500 + 1 785

Observe que os termos a_1, a_2, a_3, ... formam uma P.A. e o termo esperado é o a_{10}, sendo seu valor dado por:

$a_{10} = a_1 + (10 - 1)(-500)$

$a_{10} = 180\,000 + 9\,(-500)$

$a_{10} = 175\,500$

A prestação obtida pode ser encontrada por:

500 + 1% de 175 500

500 + 1 755 = 2 255

Logo, o valor a ser pago ao banco na décima prestação é de R$ 2 255,00.

Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário: O investimento **A** tem uma rentabilidade anual de $(1,03)^{12} - 1 = 1,426 - 1 = 0,426 = 42,6\%$.

O investimento **B** tem uma rentabilidade anual de

$(1,36)^1 - 1 = 1,36 - 1 = 0,36 = 36\%$.

O investimento **C** tem uma rentabilidade anual de

$(1,18)^2 - 1 = 1,3924 - 1 = 0,3924 = 39,24\%$.

Portanto, o investimento em **A** é o que tem a maior rentabilidade anual (42,6%) em relação aos demais.

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 1

Habilidade: 4

Comentário: Aplicando R$ 500,00 na poupança, com rendimento mensal de 0,560%, o montante, em reais, será de: 500,00 . (1,00560) = 502,80.

Aplicando R$ 500,00 no CBD, com rendimento mensal de 0,876%, os juros ou o ganho, em reais, será de: 500,00 . (0,00876) = 4,38.

Como o imposto de renda no CBD é de 4% sobre o ganho, temos que o montante, em reais, será de: 500,00 + 4,38 . (0,96) = 504,21.

Portanto, a aplicação mais vantajosa é a do CBD, pois o montante é maior.

MÓDULO – C 04

Estatística

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra D

Comentário: As classes de árvores que nos interessam são aquelas de diâmetro entre 8 cm e 10 cm, em quantidade de 8, aquelas de diâmetro entre 10 cm e 12 cm, 4 árvores e aquelas de diâmetro entre 12 cm e 14 cm, que são 6 árvores. Logo, o total de árvores com diâmetro não inferior a 8 cm é igual a 8 + 4 + 6 = 18.

Questão 02 – Letra C

Comentário: Organizando as notas em ordem crescente, temos: 2, 3, 4, 5, 7, 7 e 8. Assim, a mediana é 5 e a moda é 7.

Questão 03 – Letra D

Comentário: Os setores **c** e **d** equivalem a 50% das respostas.

Como **a** equivale a 35% das respostas, **b** equivale a 15% das respostas.

Sendo **R** o número de respostas, temos:

$15\%R = 270 \Rightarrow R = 1\,800$

Como os setores **c** e **d** têm 50% das respostas, eles têm 900 respostas, ou seja, cada um tem 450 respostas.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Percebe-se que vinte pessoas preferem a revista D. Como 15 pessoas preferem a revista A e 25 a revista C, o número de alunos que preferem a revista D é igual à média aritmética dos que preferem as revistas A ou C, uma vez que

$\frac{15+25}{2} = 20.$

Questão 05 – Letra D

Comentário: A moda vale dez, termo que se repetiu 4 vezes. Como há 12 termos, a mediana será a média aritmética entre o sexto e sétimo termos, no caso, $\frac{8+10}{2} = 9$. A média é dada por $\frac{2.5+2.6+2.8+4.10+2.12}{12} = \frac{102}{12} = 8{,}5.$

Questão 06 – Letra A

Comentário: A média aritmética da distribuição de redução do custo mensal é dada por:

$$\frac{700.8+900.5+1\,400.1+2\,000.7+2\,400.5+3\,000.1}{8+5+1+7+5+1} =$$

$$\frac{40\,500}{27} = 1\,500$$

A mediana é 1 400. Então, a soma da média aritmética e da mediana corresponde a 2 900.

Questão 07 – Letra E

Comentário: A média procurada pode ser dada pelo saldo de gols total dividido pelo número de jogos. O saldo de gols total, por sua vez, é dado como a soma dos gols marcados subtraído da soma dos gols sofridos: $\mu = \frac{34-31}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$

Questão 08

Comentário:

A) Seja **X** a média dos preços e **M** a mediana, temos que:

$$X = \frac{10{,}75 + 6{,}00 + 9{,}50 + 11{,}00 + 5{,}25 + 7{,}00 + 10{,}50 + 8{,}00}{8} = 8{,}5$$

$$M = \frac{8 + 9{,}50}{2} = 8{,}75$$

B) Sendo **y** o preço cobrado em cada uma das novas lanchonetes, temos:

$$8{,}45 = \frac{10{,}75 + 6{,}00 + 9{,}50 + 11{,}00 + 5{,}25 + 7{,}00 + 10{,}50 + 8{,}00 + y + y}{10} \Rightarrow$$

$$84{,}5 = 68 + 2y \Rightarrow y = 8{,}25$$

Logo, o valor da jarra de suco é de R$ 8,25.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário: A moda é 3, que é o valor que mais se repete na amostra. A mediana, por sua vez, é 2, uma vez que o centésimo e o centésimo primeiro valores valem 2. A média desses dados pode ser calculada por: $\mu = \frac{0.25+1.30+2.55+3.90}{25+30+55+90} = \frac{410}{200} = 2{,}05.$

Questão 02 – Letra D

Comentário: Considere os dados a seguir em ordem crescente.

1, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 34

A média aritmética desses dados é:

$$A = \frac{1+10\,.\,3+11\,.\,3+12\,.\,4+13\,.\,4+34}{16} \Rightarrow A \cong 12{,}4$$

A média aritmética sem o menor dado é:

$$A = \frac{10\,.\,3+11\,.\,3+12\,.\,4+13\,.\,4+34}{15} \Rightarrow A \cong 13{,}1$$

A média aritmética sem o maior dado é:

$$A = \frac{1+10\,.\,3+11\,.\,3+12\,.\,4+13\,.\,4}{15} \Rightarrow A \cong 10{,}9$$

A média aritmética sem os dados discrepantes é:

$$A = \frac{10\,.\,3+11\,.\,3+12\,.\,4+13\,.\,4}{14} \Rightarrow A \cong 11{,}6$$

As modas e a mediana não variam com os dados discrepantes. As modas, com ou sem esses dados, permanecem 12 e 13, que aparecem com mais frequência. A mediana, com todos os dados apresentados, é dada por $\frac{12+12}{2} = 12$.

Caso fosse retirado um dos valores discrepantes, a mediana estaria na 8ª posição (12). E, se retirados os dois valores, a mediana também seria 12 – a média das 7ª e 8ª posições. Portanto, apenas a média aritmética sofre influência dos dados discrepantes.

Questão 03 – Letra A

Comentário: A moda vale 3,87, valor que se repete três vezes. A mediana será a média aritmética entre o sexto e o sétimo maiores valores, no caso, $\frac{3{,}84+3{,}86}{2} = 3{,}85$. Já a média **M** é dada por:

$$M = \frac{3{,}73 + 3{,}78 + 3{,}79 + 2.3{,}8 + 3{,}84 + 3{,}86 + 3.3{,}87 + 2.3{,}9}{12} =$$

$$\frac{45{,}89}{12} \approx 3{,}82.$$

Logo, a média é menor que a mediana, que é menor que a moda.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Como os valores de 40% e 25% são aqueles que aparecem mais vezes, no caso duas, eles formarão a moda. Como a amostra tem 8 elementos, a mediana será dada pela média aritmética entre os valores do 4° e 5° elementos, ou seja, $\frac{25+26}{2} = 25{,}5$. A média aritmética **M** pode ser dada por $M = \frac{2\,.40+2\,.\,25+30+26+22+21}{8} = \frac{229}{8} = 28{,}625.$

MATEMÁTICA

Questão 05 – Letra C

Comentário: A média dessas notas é dada por:

$$8,2 = \frac{6,5 + 10 + 8 + 9,4 + 8 + 6,4 + x + 7,4}{8} \Rightarrow$$

$$65,6 = 55,7 + x \Rightarrow \ x = 9,9$$

Agora, analisando as alternativas, temos:

A) Falsa. A distribuição é amodal.

B) Falsa. A nota é superior a 9,8.

C) Verdadeira. A mediana **M** dessa distribuição é dada por: $M = \frac{8 + 7,4}{2} = 4 + 3,7 = 7,7$.

D) Falsa. Como a nota é superior a todas as outras notas, ela é maior que a média aritmética dessas notas.

Questão 06 – Letra A

Comentário:

$$\text{Média} = \overline{X} = \frac{(5 . 3) + (4 . 7) + (3 . 21) + (2 \ . 28) + (1 . 23) + (0 . 18)}{100} = 1,85 \text{ filhos / família}$$

$$\text{Desvio padrão} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 . f_i}{n-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{(5-1,85)^2 \ . 3 + (4-1,85)^2 \ . 7 + (3-1,85)^2 \ . 21 + (2-1,85)^2 \ . 28 + (1-1,85)^2 \ . 23 + (0-1,85)^2 \ . 18}{100-1}}$$

$$S \approx 1,31$$

Como não há a alternativa 1,31, o valor mais próximo é 1,4, ou seja, alternativa A.

Questão 07 – Letra E

Comentário: Sendo **x** a quantidade de pessoas entre 16 e 20 anos que frequentaram o pronto–socorro, de tal sorte que a média de idades seja 12,4 anos, temos:

$$\frac{2.1 + 6.3 + 10.2 + 14.4 + 18.x}{10 + x} = 12,4 \Rightarrow 96 + 18x = 124 + 12,4x \Rightarrow 5,6x = 28 \Rightarrow x = 5$$

Assim, a frequência acumulada de pessoas é de 1 + 3 + 2 + 4 + 5 = 15 pessoas e o comprimento da barra será 15 . 0,8 = 12 cm.

Questão 08 – Letra D

Comentário: A média de idade das mães das crianças nascidas em 2004 pode ser melhor aproximada por:

$$\frac{7,5.0,7 + 17.19,9 + 22.30,7 + 27.23,7 + 32.14,8 + 37.7,3}{97,1} \approx 25$$

Perceba que não foram incluídas as mães com idade ignorada e de mais de 40 anos e um grupo formada por um intervalo de idades foi expresso pelo valor médio desse intervalo.

Questão 09 – Letra A

Comentário: Todos os atletas conseguiram uma soma de pontos igual a 18, ou seja, a média de pontos para todos é 6. Logo, a classificação será decidida pela variância:

$$\sigma_A^2 = \frac{(6-6)^2 + (6-6)^2 + (6-6)^2}{3} = 0$$

$$\sigma_B^2 = \frac{(7-6)^2 + (3-6)^2 + (8-6)^2}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\sigma_C^2 = \frac{(5-6)^2 + (7-6)^2 + (6-6)^2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma_D^2 = \frac{(4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\sigma_E^2 = \frac{(5-6)^2 + (8-6)^2 + (5-6)^2}{3} = 2$$

Assim, a classificação, dada pela ordem crescente das variâncias, tem A em primeiro lugar, C em segundo lugar e E em terceiro lugar.

Questão 10 – Letra E

Comentário:

I. Falso. A taxa média em fevereiro nos dez anos listados é dada por $\frac{1,22+1,15+0,87+0,80+0,86+0,59+0,84+0,75+0,49+0,79}{10} \cong$ 0,83%.

II. Verdadeiro. 0,60% apareceu duas vezes nos cinco primeiro meses de 2013, sendo que os outros valores apareceram uma vez.

III. Verdadeiro. Como são 10 dados, a mediana será a média aritmética do quinto e sexto termos (em ordem crescente). Assim, a mediana do mês de março nos últimos 10 anos é $\frac{0,92+0,84}{2}=0,88$.

IV. Falso. A media pedida foi de $\frac{1,08+0,87+1,05+0,94+1,03}{5} \cong 0,99\%$.

Logo, as afirmativas II e III são verdadeiras.

Questão 11 – Letra E

Comentário: Como o grupo terá cinco elementos, a sua mediana será o terceiro elemento na ordem crescente, e poderá ser 6, **n** ou 10. Para que a mediana seja 6, necessariamente n < 6. No entanto, para que a média seja 6, **n** deveria ser –2, o que viola as condições do enunciado. A mediana será **n** se $6 \leq n \leq 10$. Assim, para que a média seja **n**:

$$\frac{n+32}{5}=n \Rightarrow n=8$$

A mediana será 10 se n > 10. Para que a média seja dez:

$$\frac{n+32}{5}=10 \Rightarrow n=18$$

Logo, a soma dos valores possíveis é 8 + 18 = 26.

Questão 12 – Letra A

Comentário: A média dos alunos que fizeram a avaliação A é de $\frac{3.2+4.3+6.1}{6}=4$. Como todos os que fizeram a avaliação B tiraram 4 pontos, a média da turma é 4 pontos. Perceba que o termo relativo à soma dos erros quadráticos E não se altera se considerados apenas os alunos que fizeram A ou todos os alunos. Assim, sendo **n** o número de alunos que fizeram B:

$$\sigma_A=\sqrt{\frac{E}{6}} \Rightarrow \sigma_{turma}=\sqrt{\frac{E}{n+6}} \Rightarrow \sigma_A=2.\sigma_{turma} \Rightarrow \sqrt{\frac{E}{6}}=2.\sqrt{\frac{E}{n+6}} \Rightarrow \frac{E}{6}=\frac{4E}{n+6} \Rightarrow n=18$$

Logo, essa turma tem 24 alunos.

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 27

Comentário: Para determinar a mediana, é necessário organizar as taxas em ordem crescente.

Rol: {6,8; 7,5; 7,6; 7,6; 7,7; 7,9; 7,9; 8,1; 8,2; 8,5; 8,5; 8,6; 8,9; 9,0}

Como há uma quantidade par de dados, a mediana é a média entre os dois termos centrais.

Mediana = $\frac{7,9+8,1}{2}=8,0$.

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 27

Comentário: Organizando os valores da quantidade de trotes recebidos no semestre em ordem crescente, temos 14, 16, 16, 18, 20, 30. Então, a mediana será a média aritmética entre o terceiro e quarto valores, ou seja, é $\frac{16+18}{2}=17$.

Questão 03 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 27

Comentário: Escrevendo o número de erros cometidos por essa pessoa em ordem crescente, temos 0, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6. A mediana será a média aritmética entre o quarto e o quinto maiores valores, ou seja, $\frac{2+3}{2}=2,5$.

MATEMÁTICA

Questão 04 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: O valor destinado à produção de tecidos e malhas de acordo com o gráfico, é de 30% dos usos finais têxteis, que, por sua vez, representam 37,8% do total reciclado.

$$\frac{30}{100} \cdot \frac{37,8}{100} \cdot 282 = 31,98$$

Como o valor está em kton, tem-se aproximadamente 32 kton.

Questão 05 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Colocando as notas dos candidatos em ordem crescente, temos:

$$\begin{array}{llll} K: & 33 & \boxed{33\ \ 33} & 34 \rightarrow 33 \\ L: & 32 & \boxed{33\ \ 34} & 39 \rightarrow 33,5 \\ M: & 34 & \boxed{35\ \ 35} & 36 \rightarrow 35 \\ N: & 24 & \boxed{35\ \ 37} & 40 \rightarrow 36 \\ P: & 16 & \boxed{26\ \ 36} & 41 \rightarrow 31 \end{array}$$

Como temos 4 termos, a mediana é a média dos dois centrais. A maior mediana é do candidato **N**.

Questão 06 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Calculando a média para todos os valores, temos:

$$\overline{X} = \frac{18 + 16.2 + 17 + 13 + 14.2 + 19 + 12 + 1}{10} = 14.$$

Determinando a média, excluindo o maior e o menor valor, temos: $\overline{X}_1 = \dfrac{18 + 16.2 + 17 + 13 + 14.2 + 12}{8} = 15.$

Observa-se, então, o aumento da média em 1 ponto.

Questão 07 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Existem 200 hotéis, sendo:

- 25% de hotéis com preço A

  $\frac{25}{100}.200 = 50$ hotéis com preço R$ 200,00.

- 25% de hotéis com preço B

  $\frac{25}{100}.200 = 50$ hotéis com preço R$ 300,00.

- 40% de hotéis com preço C

  $\frac{40}{100}.200 = 80$ hotéis com preço R$ 400,00.

- 10% de hotéis com preço D

  $\frac{10}{100}.200 = 20$ hotéis com preço R$ 600,00.

Consideremos a série numérica formada pelos preços em ordem crescente (rol) com base no número de hotéis calculado anteriormente.

A mediana será a média dos dois termos centrais do rol, sendo o valor 300 (termo de posição 100) e o valor 400 (termo de posição 101).

$$\text{Mediana} = \frac{300 + 400}{2} = 350 \text{ reais.}$$

Questão 08 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Posicionando em ordem crescente dos dados, temos:

181 419	181 796	204 804	209 425	212 952
1º	2º	3º	4º	5º
246 875	255 415	290 415	298 041	305 088
6º	7º	8º	9º	10º

Como temos 10 elementos ordenados, os valores para calcular a mediana são o quinto e o sexto elementos.

$$\text{Mediana} = \frac{212\,952 + 246\,875}{2} = 229\,913,5 = \underbrace{229\,913}_{\text{Parte inteira}} + 0,5.$$

Questão 09 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Se uma saca possui 60 kg, então 90 kg correspondem a $\frac{90\text{ kg}}{60\text{ kg}}$ = 1,5 saca. A área de um talhão (30 000 m²) equivale a $30\,000\text{ m}^2 = 3.\underbrace{10\,000\text{ m}^2}_{1\text{ hectare}}$ = 3 hectares.

Logo, o desvio padrão pode ser expresso por:

$$\text{Desvio padrão } = \frac{90\text{ kg}}{\text{talhão}} = \frac{1,5\text{ saca}}{3\text{ hectares}} = 0,5\frac{\text{saca}}{\text{hectare}}$$

Como a variância é o quadrado do desvio padrão, temos:

$$\text{Variância} = \left(0,5\frac{\text{saca}}{\text{hectare}}\right)^2 = 0,25\left(\frac{\text{saca}}{\text{hectare}}\right)^2$$

Questão 10 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Ordenando os dados coletados, temos:

{13,5; 13,5; 13,5; 13,5; 14; 15, 5; 16; 18; 18; 18,5; 19,5; 20; 20; 20; 21,5}

A média das temperaturas (T_M) é:

$$T_M = \frac{4.13,5 + 14 + 15,5 + 16 + 2.18 + 18,5 + 19,5 + 3.20 + 21,5}{15} \Rightarrow$$

$$T_M = 17\ °C$$

A mediana é o valor que ocupa a posição central do conjunto ordenado dos dados coletados (a 8ª posição), que é igual a 18 °C.

A moda é igual ao elemento que aparece com maior frequência, que, nesse caso, é 13,5 °C.

Questão 11 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: Para determinar a mediana, precisamos ordenar os elementos do conjunto que estamos trabalhando em ordem crescente. Logo,o conjunto é:

{4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 13}

Como o número de elementos é par, temos:

$$\frac{6+7}{2} = 6,5$$

Questão 12 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 7

Habilidade: 29

Comentário: Perceba que as médias dos classificados Marco e Paulo são iguais. Logo, se o critério de desempate é em favor do que obtiver pontuação mais regular, temos de observar quem obteve menor desvio padrão. O classificado Marco obteve menor desvio padrão, ou seja, é o que tirou notas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais mais regulares.

Questão 13 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: A média **X** do número de gols por partida pode ser calculada por:

$$X = \frac{0 . 5 + 1 . 3 + 2 . 4 + 3 . 3 + 4 . 2 + 5 . 2 + 7 . 1}{5 + 3 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1} \Rightarrow$$

$$X = \frac{45}{20} \Rightarrow x = 2,25$$

Para determinar o valor da mediana **Y**, vamos ordenar os elementos em ordem crescente:

{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7}

O número de elementos desse conjunto é par; logo, para a mediana, temos:

$$Y = \frac{2+2}{2} = 2$$

Para determinar o valor da moda **Z**, basta perceber na tabela que o número 0 apresenta maior frequência. Logo, Z = 0. Finalmente, temos Z < Y < X.

Questão 14 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 7

Habilidade: 29

Comentário: Se a equipe campeã é aquela em que o tempo mais se aproxima de 45 minutos, precisamos analisar, em primeiro lugar, as equipes que tiveram seus tempos mais próximos desses 45 minutos.

Já sabemos que a moda nos informa o valor mais frequente em um conjunto; por isso, concluímos que apenas as equipes III e IV obtiveram tempos suficientemente próximos do tempo médio. Para decidir qual dessas duas é a campeã, devemos analisar o desvio padrão de cada uma.

Já sabemos que quanto menor o desvio padrão, menor a variação dos resultados obtidos pela equipe em cada etapa. Como o desvio padrão da equipe III é menor que o da equipe IV, podemos concluir que os resultados obtidos pela equipe III estão mais próximos de 45 minutos que os obtidos pela equipe IV. Portanto, a equipe III é a campeã.

Questão 15 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 7

Habilidade: 28

Comentário: A média aritmética dos números é:

$$A = \frac{1.4 + 2.1 + 4.2 + 5.2 + 6.1}{10} = 3$$

Para determinar a mediana, vamos ordenar todos os números obtidos:

{1, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 5, 5, 6}

Como o número de elementos é par, a mediana será dada por

$$\frac{2+4}{2} = 3.$$

Pela definição, moda é aquele elemento que aparece com maior frequência. Logo, pela tabela, a moda é 1, pois aparece quatro vezes.

Questão 16 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 7

Habilidade: 29

Comentário: Sabemos que a moda é o valor que aparece com maior frequência num conjunto. Dos cinco números, já sabemos que três deles são iguais a 2. Logo, não importa o valor dos outros dois números desconhecidos, a moda será 2.

O mesmo acontece com a mediana. Note que, para qualquer valor colocado para as equipes **D** e **E**, o elemento central será sempre 2.

Bernoulli
Colégio e Pré-vestibular

Rua Diorita, 43 - Prado
Belo Horizonte - MG
Tel.: (31) 3029-4949

www.bernoulli.com.br/sistema