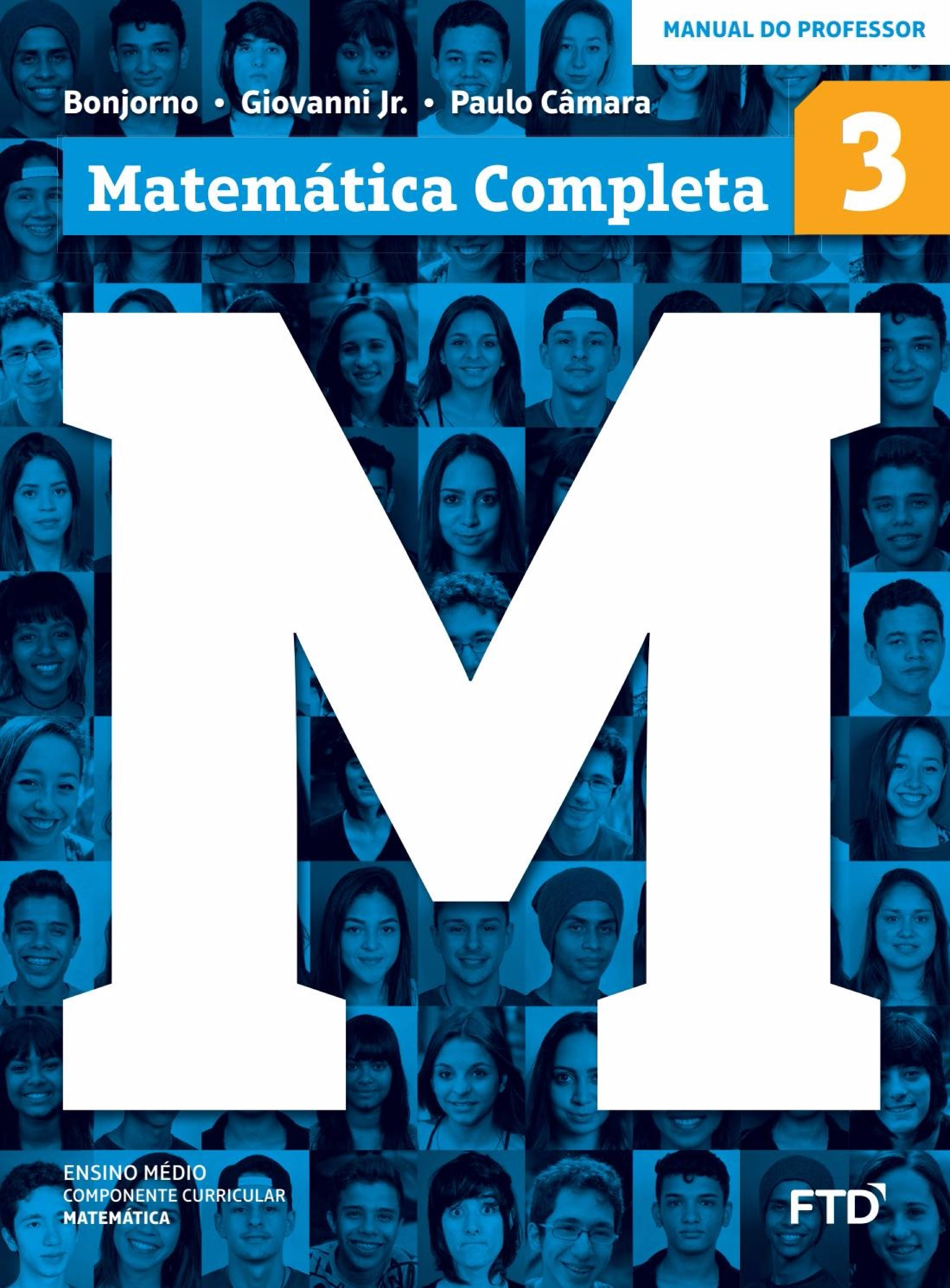
MANUAL DO PROFESSOR

Bonjorno • Giovanni Jr. • Paulo Câmara

Matemática Completa 3



ENSINO MÉDIO
COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA

FTD

Matemática Completa

3

ENSINO MÉDIO
COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA

José Roberto Bonjorno

Licenciado em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Professor Carlos Pasquale"
Bacharel e licenciado em Física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Professor de Matemática e Física em escolas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio desde 1973

José Ruy Giovanni Júnior

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo
Professor e assessor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio desde 1985

Paulo Roberto Câmara de Sousa

Mestre em Educação pela Universidade Federal da Paraíba
Especialização em Educação Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco.
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco
Professor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio desde 1974
Professor de programas de formação continuada e pós-graduação desde 1990
Professor do Departamento de Matemática do Centro Acadêmico do Agreste – UFPE

4ª edição
São Paulo – 2016

FTD

MANUAL DO PROFESSOR

FTD

Copyright © José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Jr., Paulo Roberto Câmara de Sousa

Diretor editorial	Lauri Cericato
Gerente editorial	Flávia Renata P. A. Fugita
Editora	Cibeli de Oliveira Chibante Bueno
Editores assistentes	Juliana Montagner, Adriano Rosa Lopes, Marcos Antônio Silva; Thais B. Moura, Janaina B. Pereira e Carlos Eduardo B. S. Esteves
Assessoria	Rodolfo Campos
Gerente de produção editorial	Mariana Milani
Coordenador de produção editorial	Marcelo Henrique Ferreira Fontes
Coordenadora de arte	Daniela Máximo
Projeto gráfico	Casa Paulistana
Projeto de capa	Bruno Attili
Foto de capa	Thais Falcão/Olho do Falcão *Modelos da capa*: Andrei Lopes, Angélica Souza, Beatriz Raielle, Bruna Soares, Bruno Guedes, Caio Freitas, Denis Wiltemburg, Eloá Souza, Jardo Gomes, Karina Farias, Karoline Vicente, Letícia Silva, Lilith Moreira, Maria Eduarda Ferreira, Rafael Souza, Tarik Abdo, Thaís Souza
Supervisora de arte	Isabel Cristina Corandin Marques
Diagramação	Adriana M. Nery de Souza, Eduardo Benetorio, Gabriel Basaglia, José Aparecido A. da Silva, Lucas Trevelin, Nadir Fernandes Racheti, Márcia Sasso, Sara Slovac Savero
Tratamento de imagens	Eziquiel Racheti
Coordenadora de ilustrações e cartografia	Marcia Berne
Cartografia	Alexandre Bueno
Coordenadora de preparação e revisão	Lilian Semenichin
Supervisora de preparação e revisão	Izabel Cristina Rodrigues
Revisão	Cristiane Casseb, Desirée Araújo, Dilma Dias Ratto, Iara R. S. Mletchol, Juliana Rochetto, Jussara Gomes, Kátia Cardoso, Lilian Vismari, Pedro Fandi, Regina Barrozo, Renato Colombo Jr., Solange Guerra, Yara Affonso
Coordenador de iconografia e licenciamento de textos	Expedito Arantes
Supervisora de licenciamento de textos	Elaine Bueno
Iconografia	Paloma Klein
Diretor de operações e produção gráfica	Reginaldo Soares Damasceno

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bonjorno, José Roberto
Matemática Completa 3º ano / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa. – 4. ed. – São Paulo: FTD, 2016. – (Coleção Matemática Completa)

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-85-96-00328-5 (aluno)
ISBN 978-85-96-00329-2 (professor)

1. Matemática (Ensino Médio) I. Giovanni Júnior, José Ruy. II. Sousa, Paulo Roberto Câmara de. III. Título. IV. Série.

16-03482 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

EDITORA FTD S.A.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo-SP
CEP 01326-010 – Tel. (0-XX-11) 3598-6000
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
E-mail: central.atendimento@ftd.com.br

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD S.A.
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

Apresentação

Este livro tem o objetivo de auxiliar e estimular você a compreender a Matemática para utilizá-la em seu dia a dia e na continuação dos seus estudos.

Após cada conceito, com a intenção de ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos, os capítulos trazem exercícios resolvidos e propostos que priorizam a compreensão e aplicação do conteúdo abordado.

Além dos conteúdos matemáticos específicos, o livro ainda traz possibilidades de explorar o uso de recursos tecnológicos, como *softwares* de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e de refletir sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

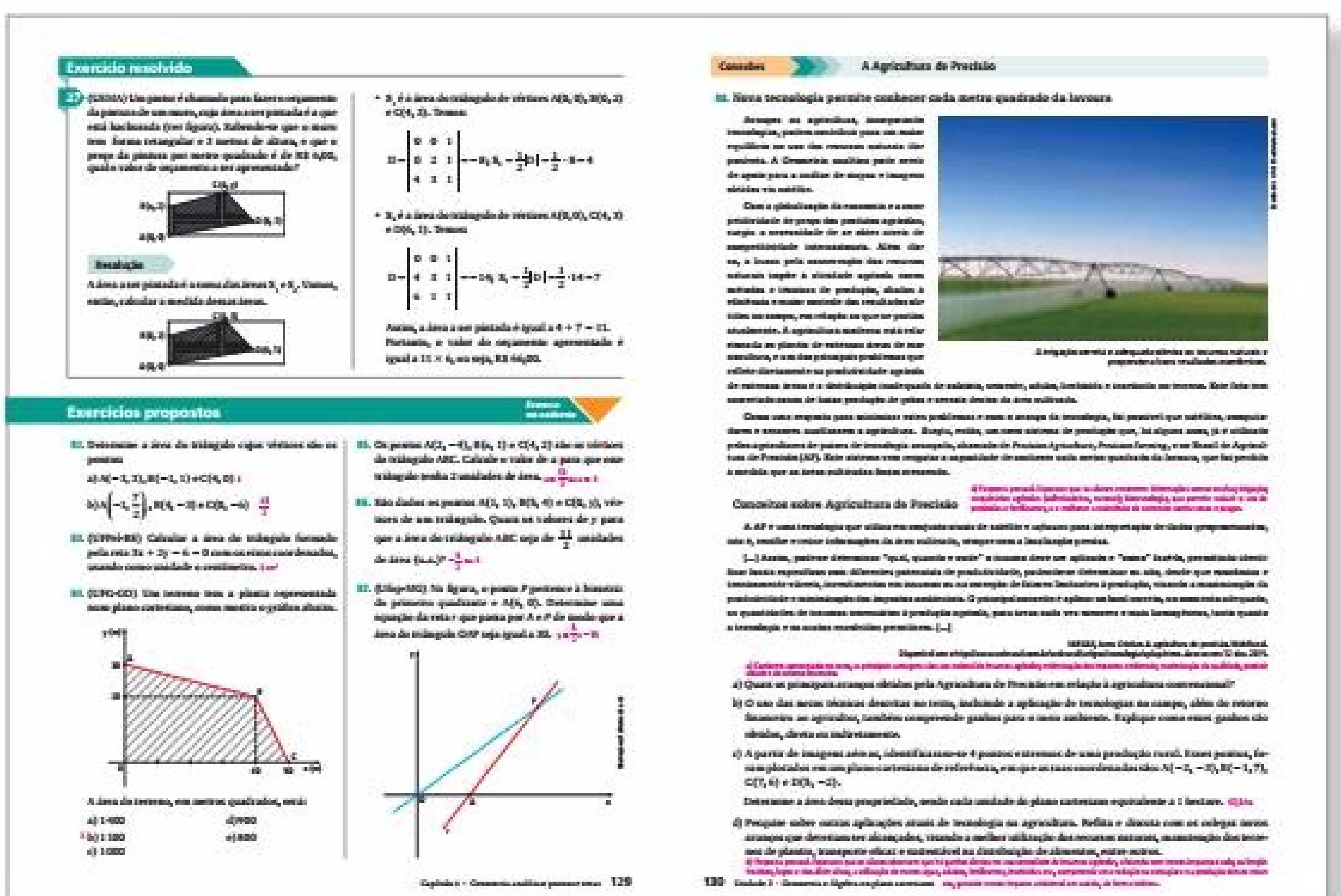
Bons estudos!

Os Autores

Conheça o seu livro

Abertura de unidade

Apresenta por meio de imagens, de um pequeno texto e algumas questões, um tema relacionado ao conteúdo matemático que será desenvolvido na unidade.

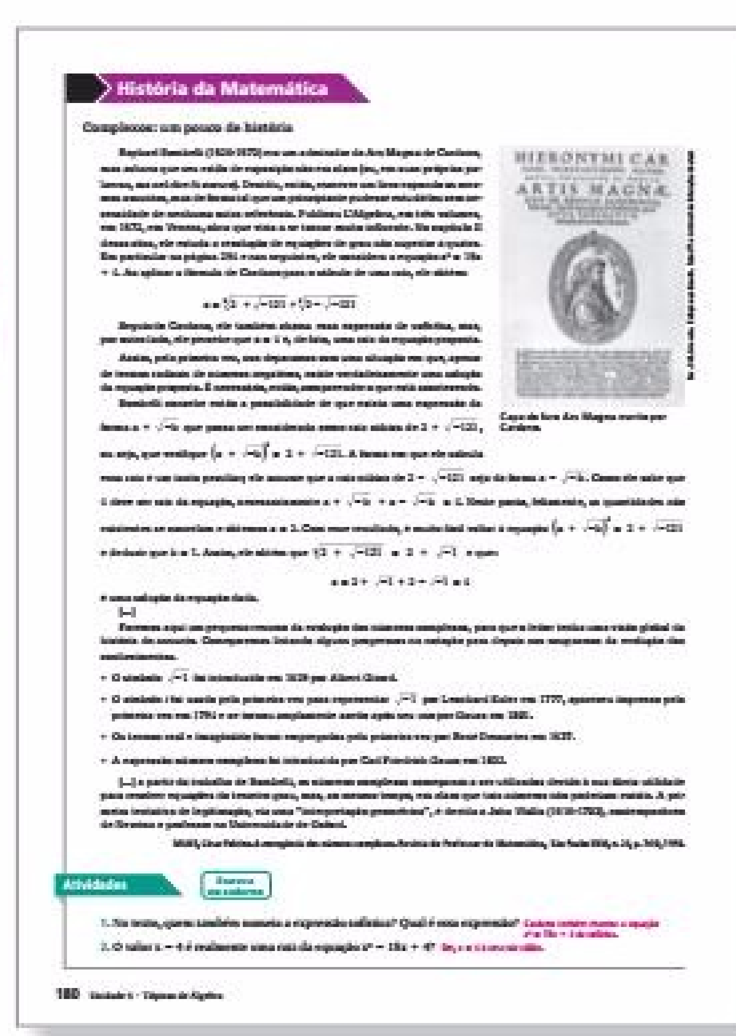


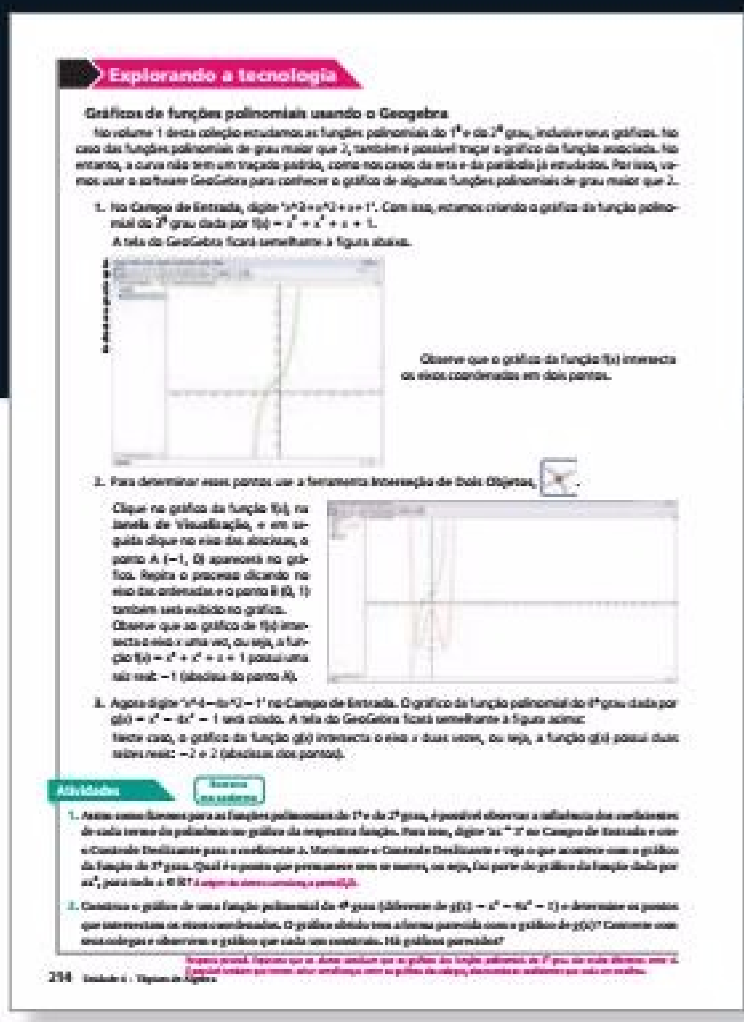
Exercícios resolvidos e propostos

Os exercícios resolvidos aparecem após a apresentação de cada conteúdo, seguidos de exercícios propostos para consolidar a teoria abordada. Em cada capítulo, há uma atividade diferenciada, denominada *Conexões*, que apresenta textos que exploram a aplicação da Matemática em diversas áreas do conhecimento.

História da Matemática

Esta seção relaciona os conteúdos abordados à História da Matemática por meio de um texto acompanhado de questões.



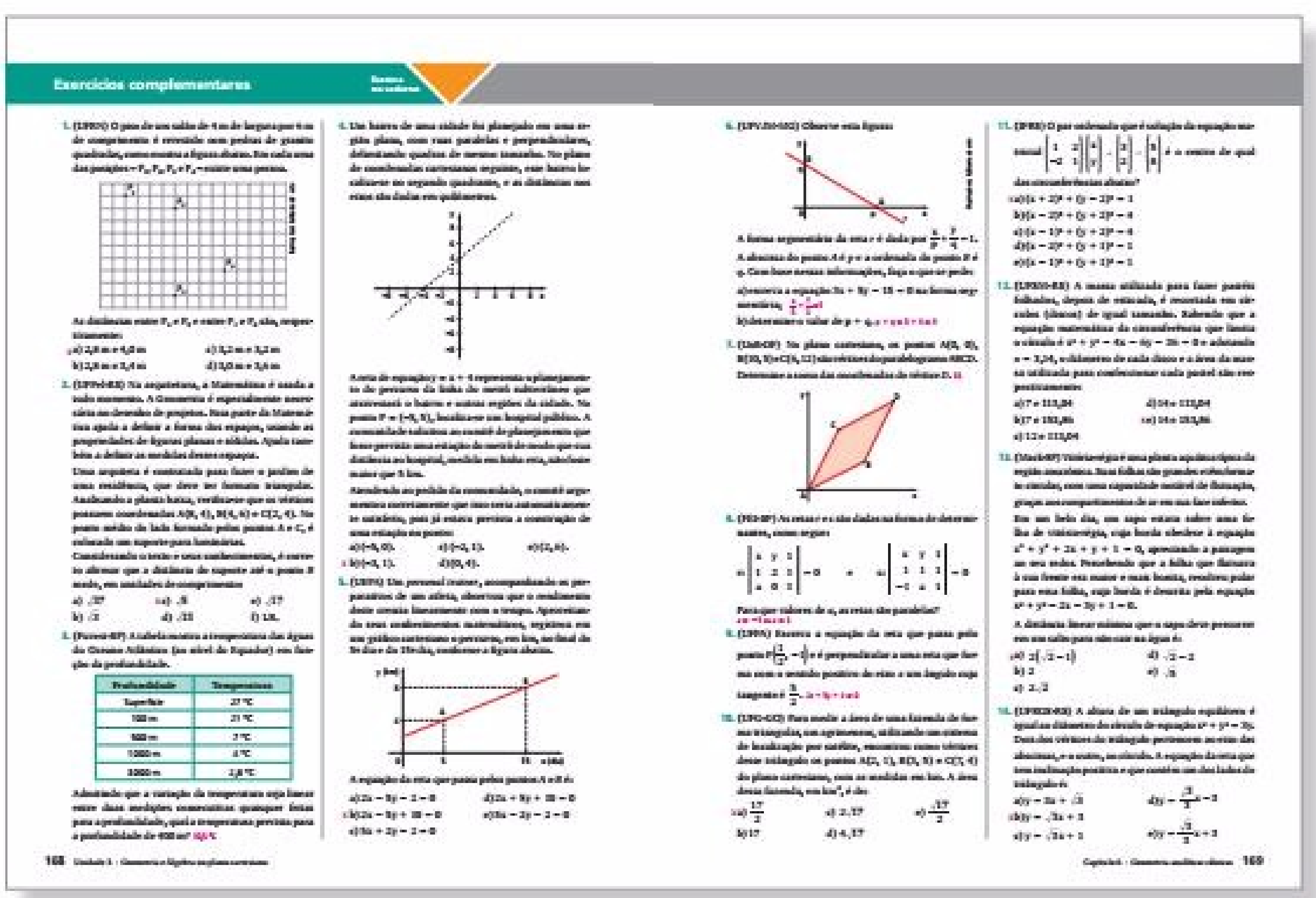


Explorando a tecnologia

Nesta seção são apresentadas atividades relacionadas ao conteúdo em estudo, utilizando *softwares* de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas.

Retomando e pesquisando

Retoma e discute o tema da abertura da unidade, relacionando-o aos conteúdos estudados ao longo da unidade.

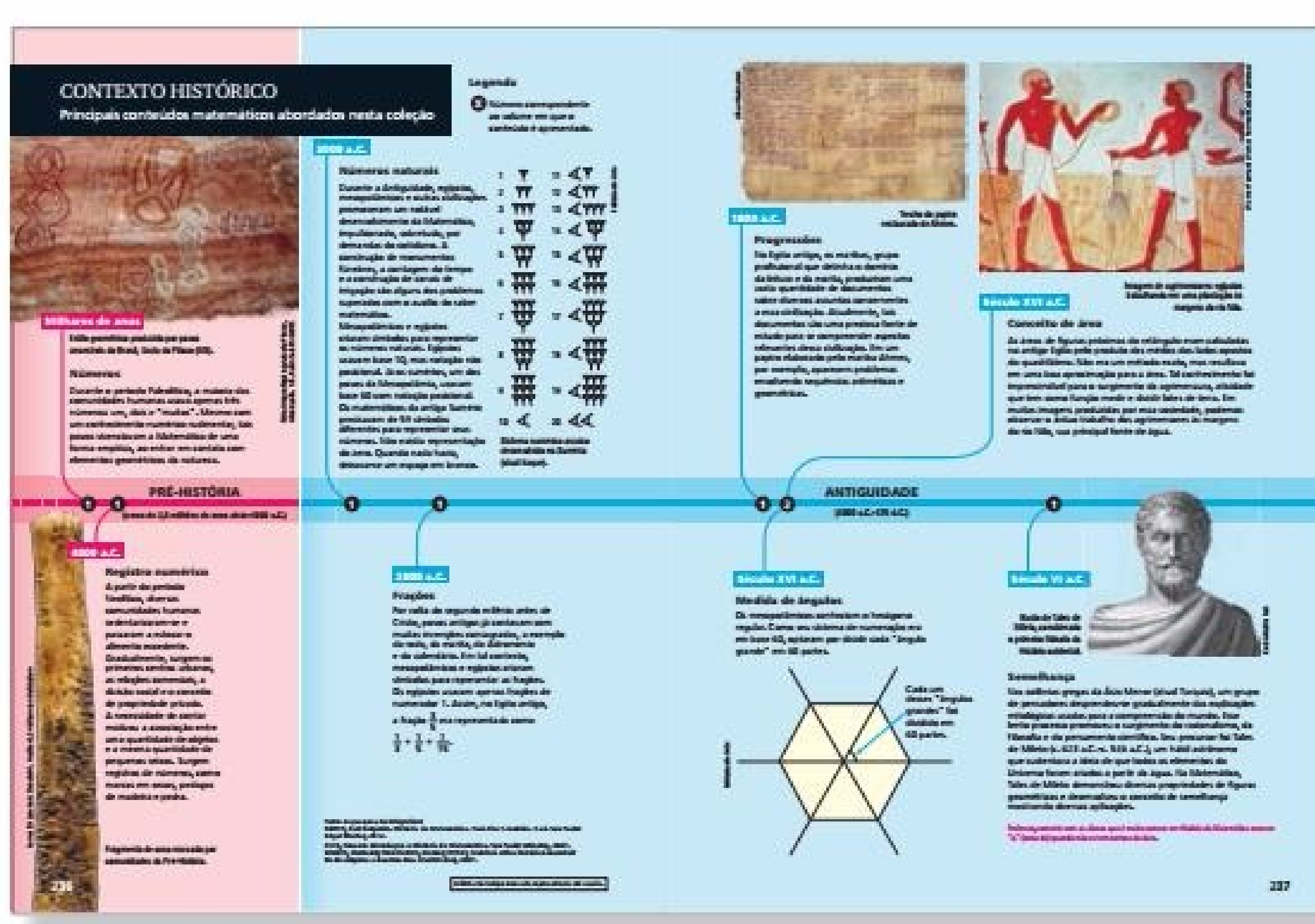


Exercícios complementares

No final de cada unidade, esta seção apresenta questões relacionadas aos conteúdos trabalhados ao longo da unidade. São apresentadas questões autorais, de vestibulares, do Enem e de outros concursos nacionais.

Infográfico: Contexto histórico

Ao final do volume há um infográfico que apresenta uma linha do tempo relacionando os conteúdos abordados na coleção com tópicos da história da Matemática.



Sumário

Unidade 1

Estatística

No Brasil existem diferentes tipos de indicadores econômicos que são utilizados no cálculo da taxa de juros, da inflação, dos aluguéis entre outros valores. Instituições como o Banco Central do Brasil (BCB), o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e a Fundação Getúlio Vargas (FGV), são responsáveis pela coleta, análise e interpretação de diferentes dados. Para isso, o instituto responsável pela pesquisa planeja e coordena o levantamento de informações. Organiza, analisa e interpreta os resultados e monta um banco de dados, que pode ser utilizado de diversas maneiras.

Entre os indicadores calculados mensalmente pelo IBGE temos:

- INPC (Índice Nacional de Preços ao Consumidor): esse é um dos principais indicadores da variação mensal de preços. Além disso, ele é usado para medir a variação do custo de vida das famílias, residentes em áreas urbanas, com rendimento mensal entre 1 e 5 salários mínimos em que a pessoa de referência é assalariada em sua ocupação principal.
- IPCA ou INPCA (Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo): esse indicador é utilizado pelo Governo Federal para aferir as metas inflacionárias. Além disso, mede a variação do custo de vida das famílias residentes em áreas urbanas, com rendimento mensal entre 1 e 40 salários mínimos mensais, independentemente da fonte dos rendimentos.

Para o cálculo desses índices, os dados são obtidos por meio de uma amostra coletada em várias regiões metropolitanas do país.

Um dos fatores que podem provocar elevação nos indicadores econômicos é uma menor oferta de determinado produto no mercado interno. É possível observar, por exemplo, a alta dos preços dos produtos que estão na entressafra nos supermercados, feiras livres etc.

Sergio Parisi/Creative/Getty Images

1. Você conhece esses dois indicadores econômicos? Explique a diferença entre eles.
2. Pesquise outros indicadores econômicos brasileiros.
3. Verifique o valor do salário mínimo e escreva a faixa de renda das famílias que fazem parte de uma pesquisa com os indicadores a seguir.
   a) no INPC.
   b) no IPCA.
4. De acordo com o texto, os dados de uma pesquisa podem ser obtidos por meio de uma amostra. O que você entende por amostra? Explique como você acredita que é feita essa coleta de dados.

Escreva no caderno

Veja no Manual do Professor.

CAPÍTULO 1

Noções de Estatística

De origem muito antiga, a **Estatística** teve, durante séculos, um caráter meramente descritivo e de registro de ocorrências. Os registros de cerca de 2000 a.C. referem-se a iniciativas como o recenseamento das populações agrícolas chinesas.

O que contemporaneamente conhecemos como Ciências Estatísticas, ou simplesmente Estatística, é um conjunto de técnicas e métodos de pesquisa que, entre outros tópicos, envolve o planejamento do experimento a ser realizado, a coleta qualificada dos dados, a inferência e o processamento e a análise das informações. Ao longo deste capítulo, estudaremos essas técnicas e esses procedimentos.

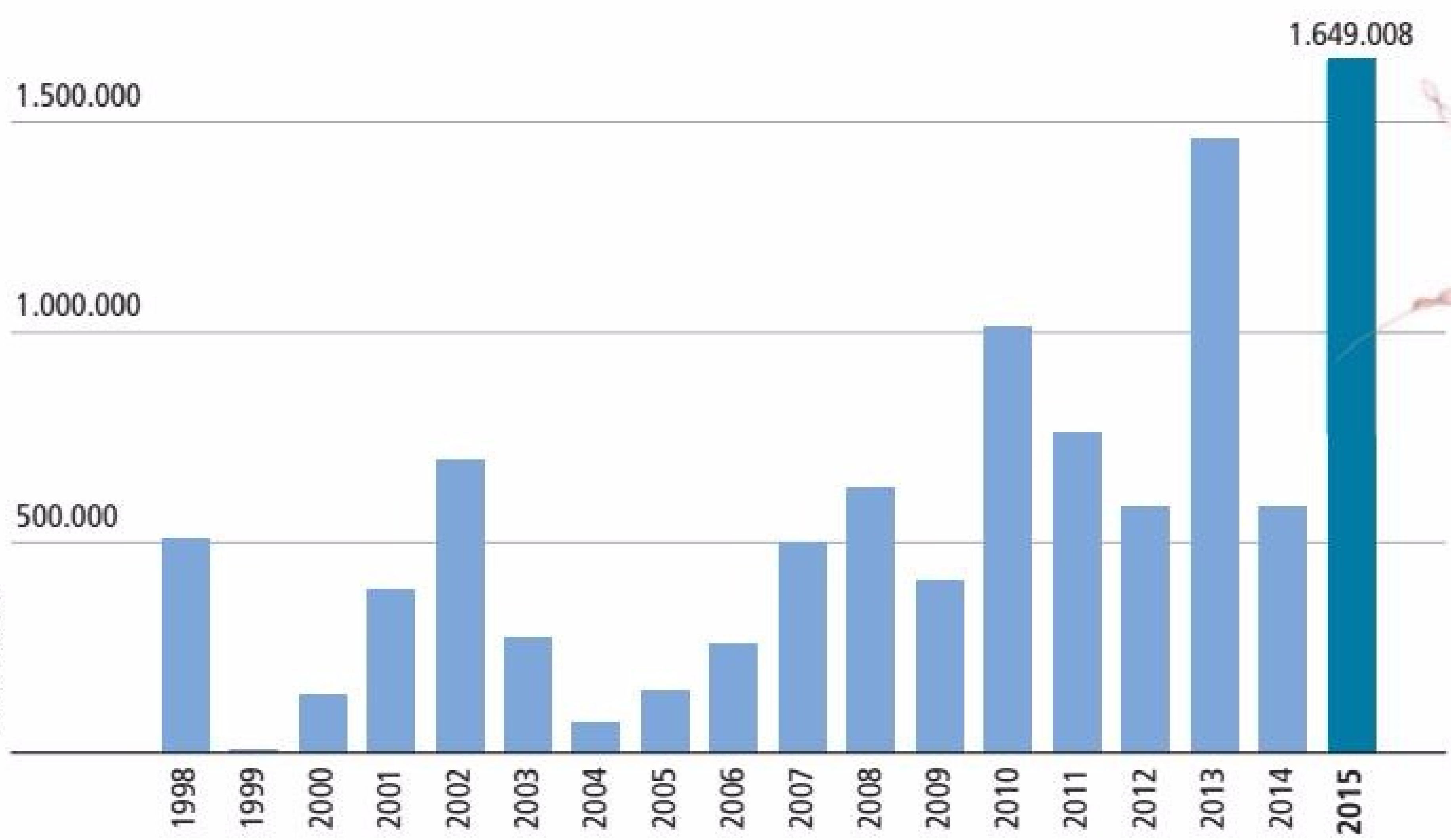
Empregando os recursos da informática, a Estatística tem sido fundamental para o desenvolvimento da Economia, da Medicina, da Física, da Psicologia, da Linguística, da Administração pública etc.

Grande parte das informações divulgadas pelos meios de comunicação atuais provém de pesquisas e estudos estatísticos.

Por exemplo, o gráfico a seguir, publicado na Folha de S.Paulo, mostra a evolução dos casos de dengue no Brasil, de 1998 até 2015.

DENGUE NO BRASIL

Com 1,6 milhão de casos, país bateu recorde da série histórica



Editoria de arte

Tacio Philip Sansonovski/ Shutterstock.com

A dengue é uma doença infecciosa causada por um vírus e é transmitida, no Brasil, pelo mosquito *Aedes aegypti*, também infectado pelo vírus. Atualmente, a dengue é considerada um dos principais problemas de saúde pública de todo o mundo. Além da dengue, esse mosquito também pode transmitir a chikungunya e a zika.

Fonte: BRASIL. Ministério da Saúde. Dengue no Brasil. In: Dengue: entenda a doença. **Folha de S.Paulo**. São Paulo, 23 fev. 2016. Disponível em: <http://temas.folha.uol.com.br/aedes/dengue/entenda-a-doenca.shtml>. Acesso em: 7 mar. 2016.

Pelas análises feitas com base em dados organizados, podemos, em muitos casos, fazer previsões, determinar tendências, auxiliar na tomada de decisões e, portanto, elaborar um planejamento com mais precisão. Os gráficos constituem instrumentos que possibilitam ao governo, por exemplo, acompanhar o aumento de casos de dengue nos últimos anos para estabelecer planos de ação a fim de combater essa doença e fazer previsões para os próximos anos.

No estudo que faremos, você verá como organizar um grupo de dados em tabelas e como construir gráficos com base nesses dados.

Iniciando nosso estudo em Estatística, vamos definir alguns termos importantes.

Termos importantes

População

A Estatística parte da observação de grupos, geralmente numerosos, aos quais damos o nome de **população** ou **universo estatístico**.

Cada elemento da população estudada é denominado **unidade estatística**.

Observe os exemplos:

População estatística	Unidade estatística
48 alunos que estudam no 3º ano de uma escola	Cada aluno que estuda no 3º ano dessa escola
Clubes de futebol campeões brasileiros	Cada clube campeão brasileiro de futebol

Fonte: Dados fictícios.

Uma **população** consiste de todos os elementos, ou seja, de todos os indivíduos, itens ou objetos, cujas características estão sendo estudadas.

Amostra

Quando não se pode consultar todos os elementos ou dados de uma determinada população estudada, recorremos a um subconjunto dessa população ao qual chamamos de **amostra**.

Uma amostra é uma parcela representativa da população selecionada para fins de estudo.

Por exemplo, para estimar a renda média das pessoas que residem em um município, como amostra, deverá ser pesquisada uma quantidade, significativamente menor, das pessoas que residem nesse município.

É importante que o resultado obtido em uma pesquisa por amostragem seja o mais próximo possível do resultado que obteríamos pesquisando toda a população. Por isso, certos critérios devem ser observados para que a amostra seja imparcial e representativa. Por exemplo, na amostra para estimar a renda média dos residentes em um município, deve conter pessoas de diferentes faixas de renda, aproximando-se da mesma proporção existente da população.

Algumas das razões que nos levam à utilização de uma amostra, em vez de colher os dados de toda população estudada, são:

a) econômicas: pode ser muito caro observar grande número de elementos;

b) de tempo: uma observação muito demorada pode levar a resultados desatualizados.

Variável

A observação da população é dirigida ao estudo de uma dada **característica** ou **propriedade** de seus elementos. Cada característica é chamada de **variável estatística** ou simplesmente **variável** e são classificadas em **qualitativas** ou **quantitativas**.

A variável é qualitativa se os valores tomados não são numéricos. Ela pode ser **ordinal** ou **nominal**:

- Qualitativa ordinal: seus valores podem ser ordenados; por exemplo, escolaridade e classe social;
- Qualitativa nominal: seus valores não podem ser ordenados; por exemplo, grupo étnico e área de estudos.

A variável é quantitativa: se os valores tomados são numéricos. Ela pode ser **contínua** ou **discreta**:

- **Quantitativa contínua**: quando pode assumir qualquer valor de um intervalo real, por exemplo, altura e peso;
- **Quantitativa discreta**: quando resulta de uma contagem e forma um conjunto finito ou enumerável, expressa por números inteiros; por exemplo, número de filhos e número de clientes de certo banco.

Frequência absoluta e frequência relativa

A primeira fase de um estudo estatístico consiste em recolher, contar e classificar os dados pesquisados sobre uma população estatística ou sobre uma amostra dessa população. Assim, nesse processo, devemos organizar todos os dados coletados, separá-los segundo uma determinada característica e contabilizá-los de acordo com a frequência em que essa informação aparece dentro dessa amostra.

Professor, a palavra "peso" está sendo usada aqui em seu sentido coloquial, com a ideia de massa e não com o sentido de força-peso da Física.

Vamos analisar a seguinte situação: foram coletados dados relativos à idade (em anos) e ao "peso" (em quilogramas) de um grupo de adolescentes que moram no condomínio Enseada. O resultado dessa pesquisa, com uma amostra de 30 adolescentes, é apresentada a seguir:

Idade dos adolescentes do condomínio Enseada									
14	15	15	16	14	14	17	15	16	14
16	16	14	17	15	16	15	15	16	16
15	16	14	16	15	17	15	15	15	15

Fonte: Dados fictícios.

"Peso" dos adolescentes do condomínio Enseada									
48,5	51,0	51,0	51,5	51,4	53,0	49,2	50,3	50,3	50,0
48,0	49,4	53,0	50,0	53,0	50,3	53,0	53,0	50,3	50,0
48,5	49,1	50,0	50,0	52,4	53,0	51,1	51,1	52,4	52,3

Fonte: Dados fictícios.

Note que nesse caso temos duas variáveis estatísticas para serem analisadas: "idade" e "peso". Primeiro vamos analisar os dados da variável "idade".

A apresentação dos valores atribuídos à variável "idade" pode ser resumida por meio da **frequência absoluta** (**f_i**), que corresponde à quantidade de vezes em que cada valor atribuído a essa variável foi citado. Nesse caso, temos:

14 anos: 6
15 anos: 12
16 anos: 9
17 anos: 3

Podemos comparar a participação de cada um desses valores em relação ao todo por meio da **frequência relativa** (**f_r**), que é a razão entre a frequência absoluta e o total de elementos do conjunto (*N*), ou seja, $f_r = \frac{f_i}{N}$. Geralmente, apresentamos a frequência relativa em forma de porcentagem. Em relação à variável "idade", temos:

14 anos: $\frac{6}{30} = 0,2 = 20\%$

15 anos: $\frac{12}{30} = 0,4 = 40\%$

16 anos: $\frac{9}{30} = 0,3 = 30\%$

17 anos: $\frac{3}{30} = 0,1 = 10\%$

Podemos organizar uma tabela denominada **tabela de distribuição de frequências** com as frequências absoluta e relativa. Nessa tabela, também podemos acrescentar a **frequência acumulada** e a **frequência relativa acumulada**, que correspondem, respectivamente, às somas das frequências absolutas e às somas das frequências relativas até determinado dado. Veja:

Idade dos adolescentes do condomínio Enseada					
i	Idade (anos)	Frequência absoluta (f_i)	Frequência absoluta acumulada (f_{ia})	Frequência relativa (f_r)	Frequência relativa acumulada (f_{ra})
1	14	6	6	$\frac{6}{30}$ ou 20%	$\frac{6}{30}$ ou 20%
2	15	12	6 + 12 = 18	$\frac{12}{30}$ ou 40%	$\frac{18}{30}$ ou 60%
3	16	9	18 + 9 = 27	$\frac{9}{30}$ ou 30%	$\frac{27}{30}$ ou 90%
4	17	3	27 + 3 = 30	$\frac{3}{30}$ ou 10%	$\frac{30}{30}$ ou 100%
		n = 30		Total = 1 ou 100%	

Fonte: Dados fictícios.

Agora, vamos analisar os dados da variável "peso".

Note que para essa variável aparecem muitos valores diferentes, o que dificulta colocar cada valor em uma linha da tabela de distribuição de frequências. Quando isso ocorre, agrupamos os valores em **intervalos** ou **classes**. Para construir essa tabela, seguiremos três passos:

1º passo: Cálculo da amplitude total.

A **amplitude total** é a diferença entre o maior e o menor valor de uma variável.

Nesse caso, o menor valor para a variável peso é 48 kg e o maior valor é 53 kg; logo a amplitude total é 53 kg − 48 kg = 5 kg.

2º passo: Escolha do número de intervalos ou classes.

Geralmente o número de intervalos ou classes é igual ou superior a 4 ou um pouco acima do valor da amplitude total; nesse caso, vamos considerar seis intervalos.

3º passo: Cálculo da amplitude do intervalo.

Dividimos a amplitude total pelo número de classes e arredondamos o valor se necessário. Nesse caso: $\frac{5}{6} \simeq 0,97 \simeq 1$.

Veja abaixo a distribuição de frequências da variável "peso":

i	Intervalos ou classes "peso" (em kg)	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (f_r)
1	[48; 49[	3	$\frac{3}{30}$ ou 10%
2	[49; 50[	3	$\frac{3}{30}$ ou 10%
3	[50; 51[	9	$\frac{9}{30}$ ou 30%
4	[51; 52[	6	$\frac{6}{30}$ ou 20%
5	[52; 53[	3	$\frac{3}{30}$ ou 10%
6	[53; 54[	6	$\frac{6}{30}$ ou 20%
	Total	30	1 ou 100%

Fonte: Dados fictícios.

Professor, embora a amostra apresentada seja de pessoas com pouca diferença de "peso", a realidade costuma ser diferente. Então, aproveite a oportunidade para discutir assuntos como obesidade (problemas causados à saúde) e a discriminação que muitas pessoas sofrem porque a sociedade estabeleceu alguns padrões. Se necessário, converse com o professor de Biologia para enriquecer a discussão.

Observações:

- O intervalo real [a, b[também é representado, em Estatística, pela notação $a \vdash b$.
- Existem outras técnicas para escolher o número de classes e definir sua amplitude. Uma técnica muito utilizada é o método da raiz quadrada do número de elementos da amostra. Por exemplo, a nossa amostra possui 30 adolescentes, ou seja, o número de classes é $\sqrt{30} \simeq 5,47$. Como esse número precisa ser inteiro, arredondamos para o número maior mais próximo, ou seja, 6.

  Não há uma regra fixa para a construção de intervalos baseada em uma amostra, porém recomenda-se, sempre que possível, que as classes possuam a mesma amplitude e, para não comprometer a análise dos dados, se evite que a amplitude seja muito grande ou muito pequena.

Exercícios resolvidos

1 Um professor de natação fez uma pesquisa sobre a idade de seus alunos e obteve o resultado, em anos, a seguir:

14	15	15	16	14	13	16	17	14	16
15	17	17	15	16	15	14	14	13	15
16	14	15	14	16	14	14	15	16	14
13	14	15	17	16	15	16	14	15	17

Fonte: Dados fictícios.

Construa uma tabela com a distribuição das frequências absoluta e relativa considerando os dados acima.

Resolução

Segundo a tabela, o professor possui 40 alunos com idades de 13, 14, 15, 16 ou 17 anos. Efetuando a contagem e os cálculos da ocorrência de cada idade, temos:

Idade (em anos)	13	14	15	16	17
Frequência absoluta	3	12	11	9	5
Frequência relativa	$\frac{3}{40}$ ou 7,5%	$\frac{12}{40}$ ou 30%	$\frac{11}{40}$ ou 27,5%	$\frac{9}{40}$ ou 22,5%	$\frac{5}{40}$ ou 12,5%

Fonte: Dados fictícios.

2 Veja ao lado os principais motivos alegados por 30 000 devedores, pesquisados em uma região metropolitana, ao justificarem atrasos do crediário ou cheques sem fundo. Com base nessa pesquisa, responda:

a) Qual é a frequência relativa das pessoas que apresentam outras justificativas?

b) Quais são as frequências absolutas para cada tipo de devedor?

Editoria de arte

Fonte: Dados fictícios.

Resolução

a) $100\% - (18\% + 17\% + 12\% + 12\% + 8\% + 5\%) = 28\%$

b) $N = 30\,000$; $f_i = N \cdot f_r$

(I): 18% de $30\,000 = \frac{18}{100} \cdot 30\,000 \Rightarrow 5\,400$ devedores

(II): 17% de $30\,000 = \frac{17}{100} \cdot 30\,000 \Rightarrow 5\,100$ devedores

(III): 12% de $30\,000 = \frac{12}{100} \cdot 30\,000 \Rightarrow 3\,600$ devedores

(IV): 12% de $30\,000 = \frac{12}{100} \cdot 30\,000 \Rightarrow 3\,600$ devedores

(V): 8% de $30\,000 = \frac{8}{100} \cdot 30\,000 \Rightarrow 2\,400$ devedores

(VI): 5% de $30\,000 = \frac{5}{100} \cdot 30\,000 \Rightarrow 1\,500$ devedores

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. A massa (em quilogramas) de 20 trabalhadores de uma empresa com 100 funcionários está registrada a seguir:

65	52	73	80	65
50	70	75	80	65
70	77	82	91	75
52	68	86	70	80

Com base nos dados obtidos, responda:

Olivier Le Moal/PanterStock/Glow Images

Balança analógica.

a) Qual é a população e a unidade estatística dessa pesquisa? População: 100 funcionários de uma empresa; unidade estatística: cada trabalhador da empresa.

b) Qual é a sua amostra? 20 funcionários escolhidos ao acaso.

c) Qual é a variável nessa pesquisa? Ela é discreta ou contínua? Variável: é a massa do trabalhador em quilogramas; variável contínua.

d) Que frequências absolutas têm os valores 65 kg, 75 kg, 80 kg e 90 kg? 65 kg: 3; 75 kg: 2; 80 kg: 3; 90 kg: 0

2. Leia a notícia:

Comandada por uma mulher, a polícia baiana tem 45% de delegadas

Há 202 delegadas na Bahia. Feitas as contas, 45% das delegacias do estado são comandadas por mulheres que carregam o revólver na cintura e o estojo de maquiagem na bolsa. Em São Paulo, esse índice não ultrapassa 10%.

Alexandre Bueno

Fonte: Revista **Veja**, 16/2/2000.

Com base nas informações, responda:

a) Quantos delegados (homens) há na Bahia? 247 delegados.

b) Elabore um quadro de distribuição de frequências absolutas e relativas para os delegados (homens/mulheres) na Bahia. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

c) Qual é a frequência relativa de delegados (homens) em São Paulo? 90%

3. (Fameca-SP) Um laboratório realizou 80 coletas de sangue em um certo dia. Foram analisados os grupos sanguíneos e suas frequências absoluta e relativa. A tabela mostra os dados obtidos, exceto três deles.

Grupo sanguíneo	Frequência absoluta	Frequência relativa
A	36	45%
B	24	30%
AB		15%
O	8	
Total		100%

A frequência absoluta do grupo sanguíneo do tipo AB e a frequência relativa do tipo O são, respectivamente,

a) 5 e 10%.
X b) 12 e 10%.
c) 15 e 12%.
d) 24 e 30%.
e) 36 e 45%.

4. Em uma escola, o conceito de cada bimestre é representado por letras *A*, *B*, *C*, *D* e *E*. Em um determinado bimestre, os conceitos, em Ciências, dos 20 alunos do 2º ano foram os seguintes:

Ciências				
Conceito				
B	A	C	C	D
C	D	A	A	C
E	D	D	C	B
C	B	C	C	B

Fonte: Dados fictícios.

Nessas condições, elabore uma tabela de distribuição de frequências absolutas e frequências absolutas acumuladas. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

5. Os salários mensais, em reais, dos 20 funcionários de uma empresa são: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

720	720	800	800
840	720	760	800
920	720	760	800
840	720	680	760
880	720	880	760

Fonte: Dados fictícios.

Elabore um quadro de distribuição de frequências absolutas e frequências absolutas acumuladas.

6. A cantina de uma escola selecionou 50 alunos ao acaso e verificou o número de vezes por semana em que eles compravam lanche.

0	2	2	4	3	2	2	1	2	2
1	1	0	1	1	1	1	1	1	2
2	2	3	2	2	2	0	2	2	1
1	0	2	0	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	1	2	5	4

Fonte: Dados fictícios.

a) Construa, no caderno, uma tabela de distribuição de frequências absolutas com esses dados. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Quantos alunos compram pelo menos 1 lanche por semana? 45 alunos.

7. Um dado foi jogado 20 vezes. Em cada jogada foram obtidos os seguintes pontos: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

1	5	6	5	2	2	2	4	6	5
2	3	3	1	6	6	5	5	4	2

Elabore uma tabela com distribuição de frequências absolutas, frequências absolutas acumuladas, frequências relativas e frequências relativas acumuladas e responda:

a) Quantas vezes o número 3 foi obtido no dado?

b) Quantas vezes o número obtido no dado foi menor que 5?

c) Qual foi o índice, em porcentagem, em que o número 6 foi obtido no dado?

d) Qual foi o índice, em porcentagem, em que números maiores que 4 foram obtidos no dado?

8. Em uma pesquisa de opinião pública com 800 telespectadores sobre o programa de televisão preferido por eles, obteve-se a seguinte distribuição de frequências absolutas:

Programa de TV	Número de telespectadores
Novelas	360
Esportes	128
Filmes	80
Noticiários	32
Shows	200

Fonte: Dados fictícios.

Construa, no caderno, uma tabela com distribuição de frequências absolutas acumuladas, frequências relativas e frequências relativas acumuladas.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

Representação gráfica

A representação gráfica de uma distribuição de frequências facilita a interpretação dos dados de um levantamento estatístico.

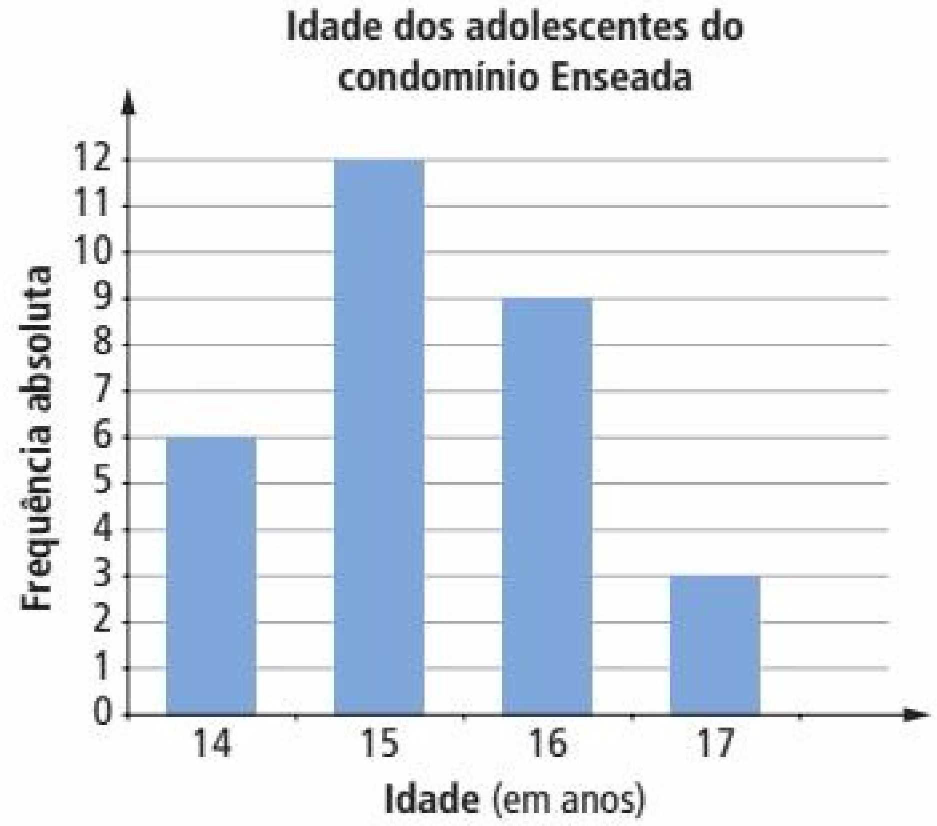
Neste tópico, estudaremos as principais representações gráficas utilizadas em Estatística.

Gráfico de barras

Em um **gráfico de barras** os dados de uma tabela são representados por retângulos paralelos, horizontais ou verticais, todos de mesma largura e comprimentos proporcionais aos valores que representam.

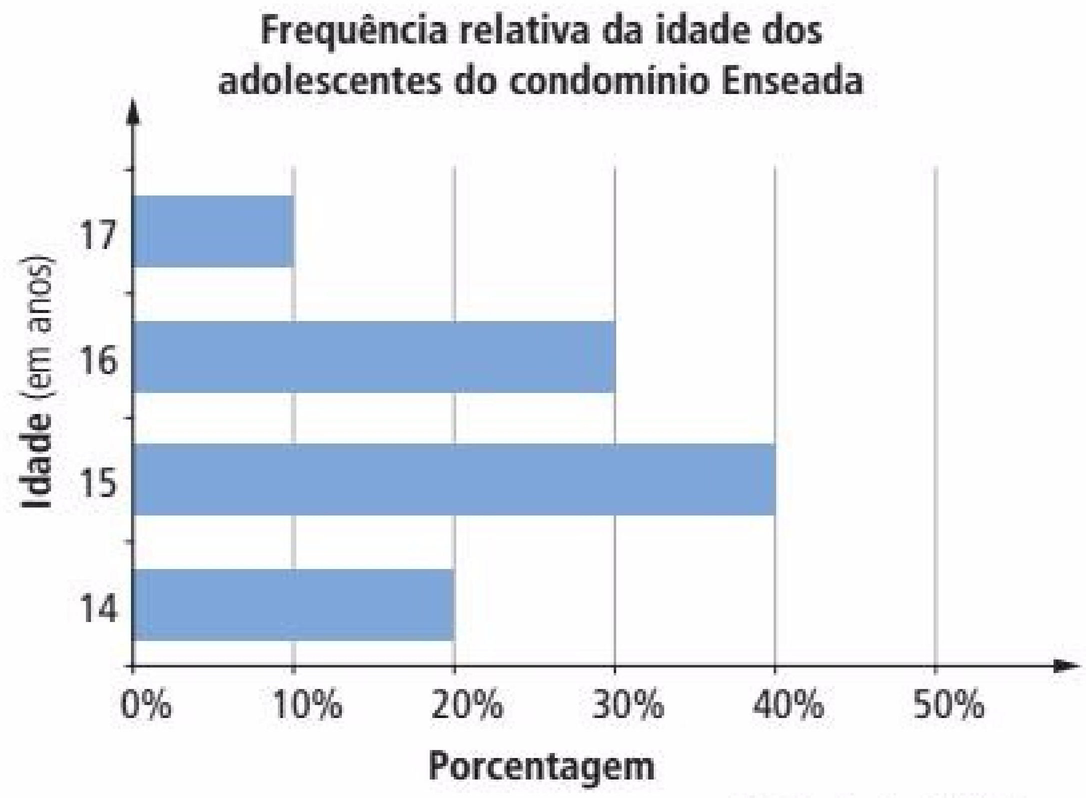
Esse tipo de gráfico permite uma rápida exploração visual e uma comparação entre a variável em estudo e suas frequências. O gráfico de barras verticais é também chamado de **gráfico de colunas**.

Por exemplo, considerando a tabela de distribuição de frequência das idades dos adolescentes do condomínio Enseada (página 12), podemos construir dois gráficos de barras:



Fonte: Dados fictícios.

Ilustrações: Editoria de arte



Fonte: Dados fictícios.

Não há uma regra que defina a posição das barras, ou seja, se as barras são horizontais ou verticais. Isso fica a critério de quem constrói o gráfico.

Acima, o gráfico "Frequência relativa da idade dos adolescentes do condomínio Enseada" poderia ser um gráfico de colunas, assim como o gráfico "Idade dos adolescentes do condomínio Enseada" poderia ser um gráfico de barras horizontais.

Gráfico de setores

O **gráfico de setores** é um círculo dividido em partes (setores) cujo ângulo central, que define o setor, é proporcional à frequência absoluta ou relativa. Esse gráfico é muito utilizado quando queremos comparar uma informação específica com todo o grupo.

Podemos obter o valor do ângulo central por meio de uma regra de três simples. Considerando θ, o ângulo central do setor; temos:

$$\begin{array}{lcl} 360° & \text{———} & N \\ \theta & \text{———} & f_i \end{array} \Rightarrow \theta = \frac{360° \cdot f_i}{N}$$

ou

$$\begin{array}{lcl} 360° & \text{———} & 100\% \\ \theta & \text{———} & f_r \end{array} \Rightarrow \theta = \frac{360° \cdot f_r}{100}$$

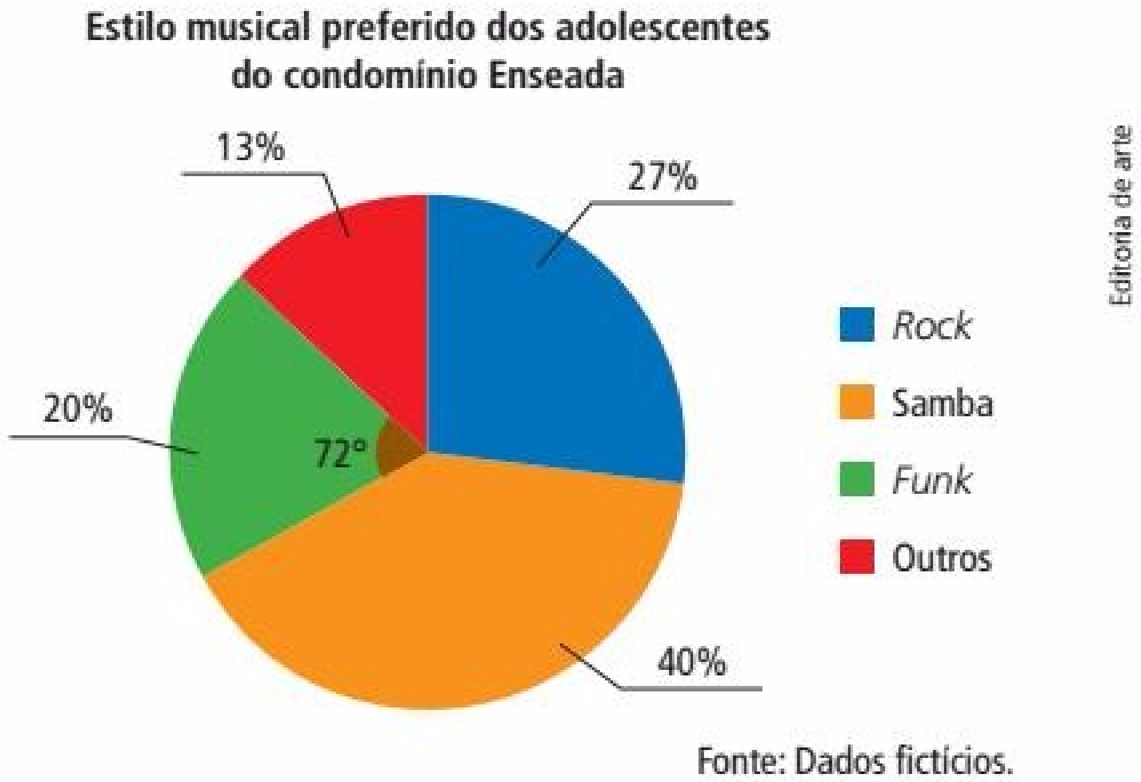
Assim, podemos calcular o ângulo central (θ) a partir das frequências absoluta ou relativa.

Por exemplo, podemos representar os dados "Frequências do estilo musical preferido dos adolescentes do condomínio Enseada" por meio de um gráfico de setores. Observe a distribuição de frequências a seguir:

Frequências do estilo musical preferido dos adolescentes do condomínio Enseada		
Estilo musical	**Frequência absoluta (f_i)**	**Frequência relativa (f_r)**
Rock	8	27
Samba	12	40
Funk	6	20
Outros	4	13
Total	30	100

Fonte: Dados fictícios.

A partir das frequências obtidas, podemos construir o gráfico de setores. Veja:



Fonte: Dados fictícios.

Observe que o ângulo central correspondente *funk* pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\theta = \frac{360° \cdot f_r}{100} \Rightarrow \theta = \frac{360° \cdot 20}{100} = 72° \text{ ou } \theta = \frac{360° \cdot f_i}{N} \Rightarrow \theta = \frac{360° \cdot 6}{30} = 72°$$

Repetindo esse procedimento, obtemos os ângulos dos setores correspondentes a "*Rock*" (96°), "Samba" (144°) e "outros" (48°).

Gráfico de linha

O **gráfico de linha** é usado geralmente para identificar tendências de aumento ou diminuição de valores numéricos de uma variável em determinado período. Ele também é conhecido como **gráfico de segmentos**.

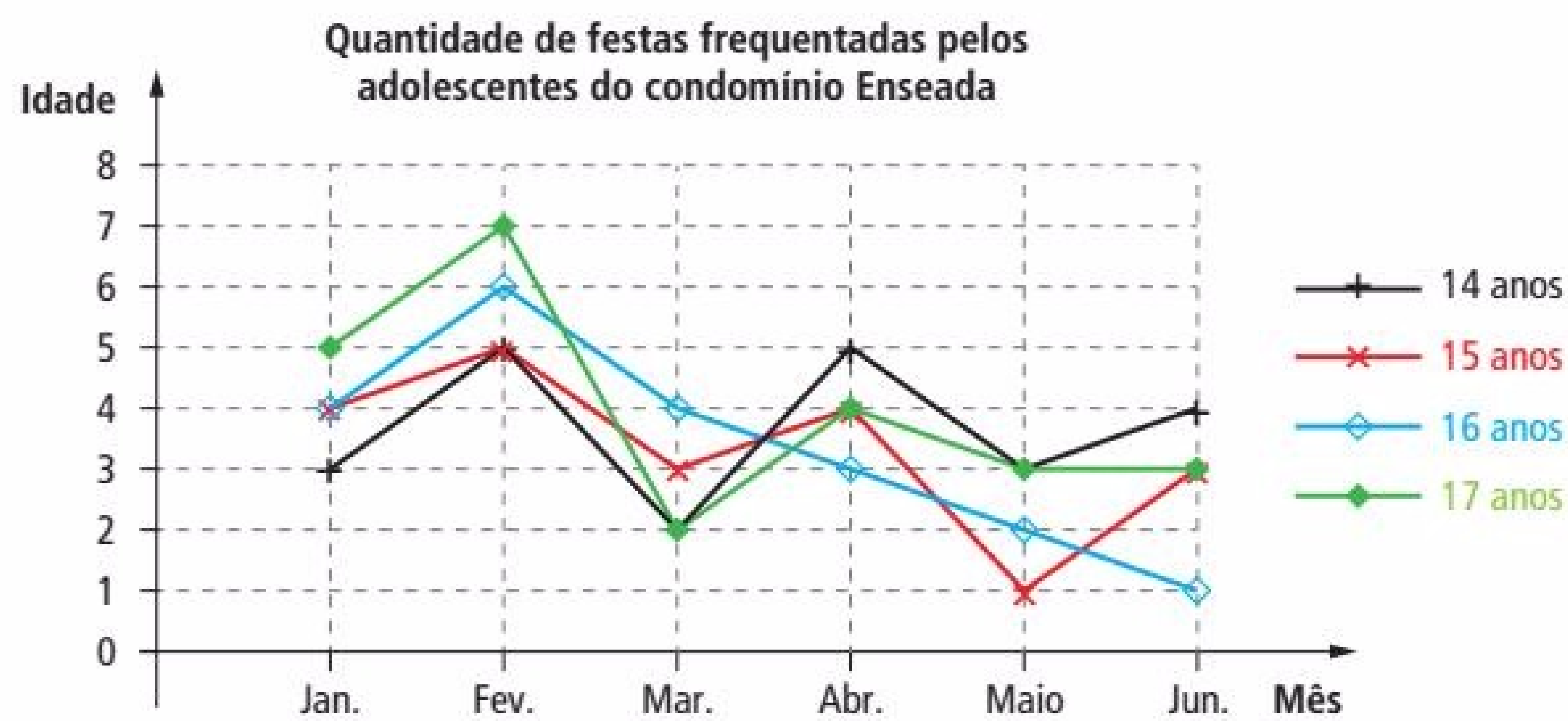
Por exemplo, vamos considerar que nos primeiros 6 meses do ano os adolescentes do condomínio Enseada, que estão agrupados de acordo com a idade, participaram das seguintes quantidades de festas em cada mês:

Quantidade de festas frequentadas pelos adolescentes do condomínio Enseada

Idade \ Mês	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
14	3	5	2	5	3	4
15	4	5	3	4	1	3
16	4	6	4	3	2	1
17	5	7	2	4	3	3

Fonte: Dados fictícios.

Representando os meses nas abscissas e a quantidade de festas nas ordenadas, podemos construir o gráfico abaixo:



Fonte: Dados fictícios.

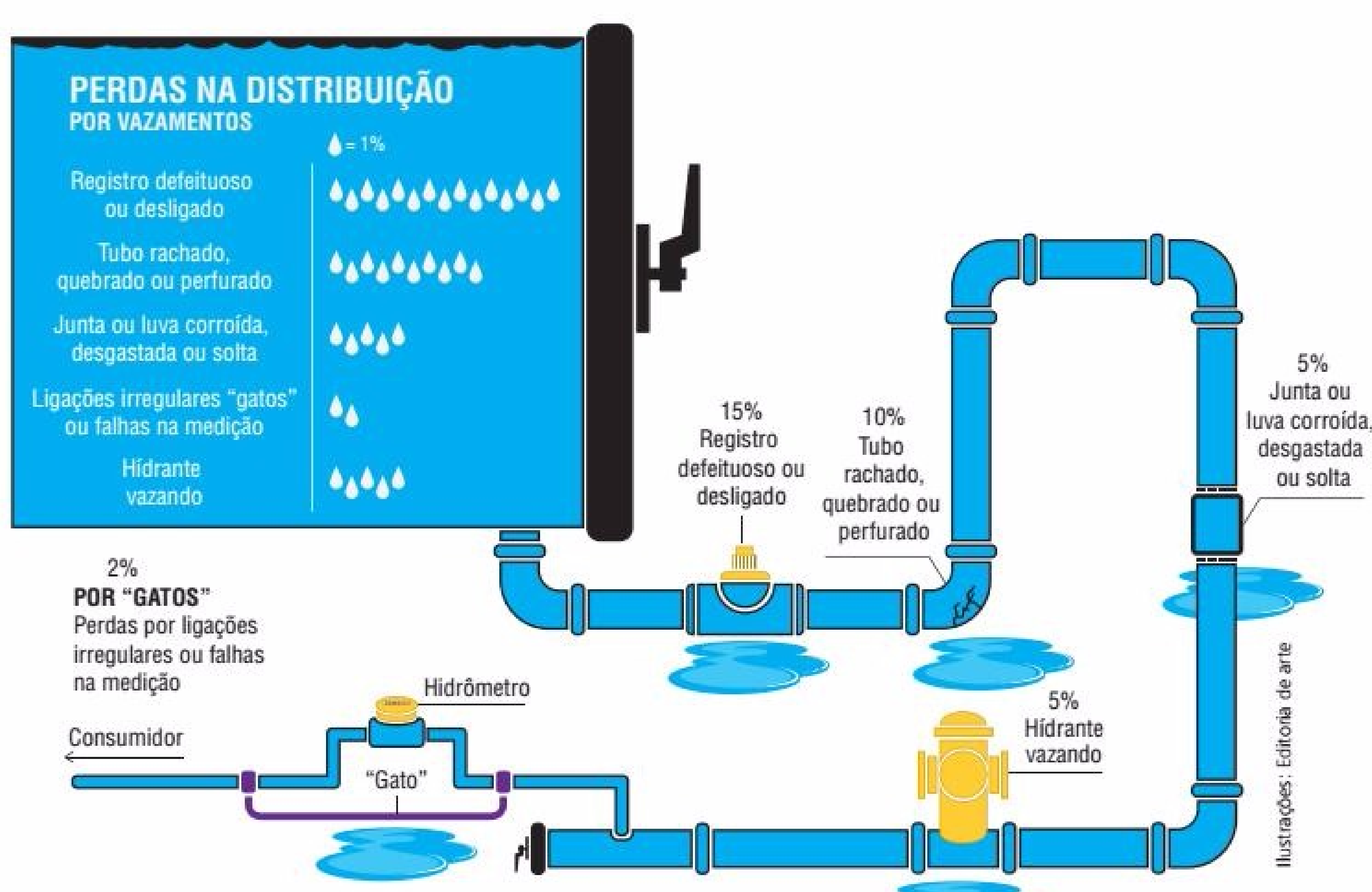
Assim, observando o gráfico, é possível perceber que, depois de fevereiro, a quantidade de festas para os adolescentes de 16 anos diminuiu mês a mês. Outra observação é que entre maio e junho o número de festas para os adolescentes de 17 anos não teve alteração.

Gráfico pictórico

Os gráficos pictóricos ou pictogramas são formados por imagens relacionadas ao tema do gráfico que representam a intensidade de uma informação fornecendo uma visão geral de uma pesquisa.

Como esse tipo de gráfico é composto por imagens, tornando mais atrativo para o leitor, ele é bastante utilizado em jornais e revistas.

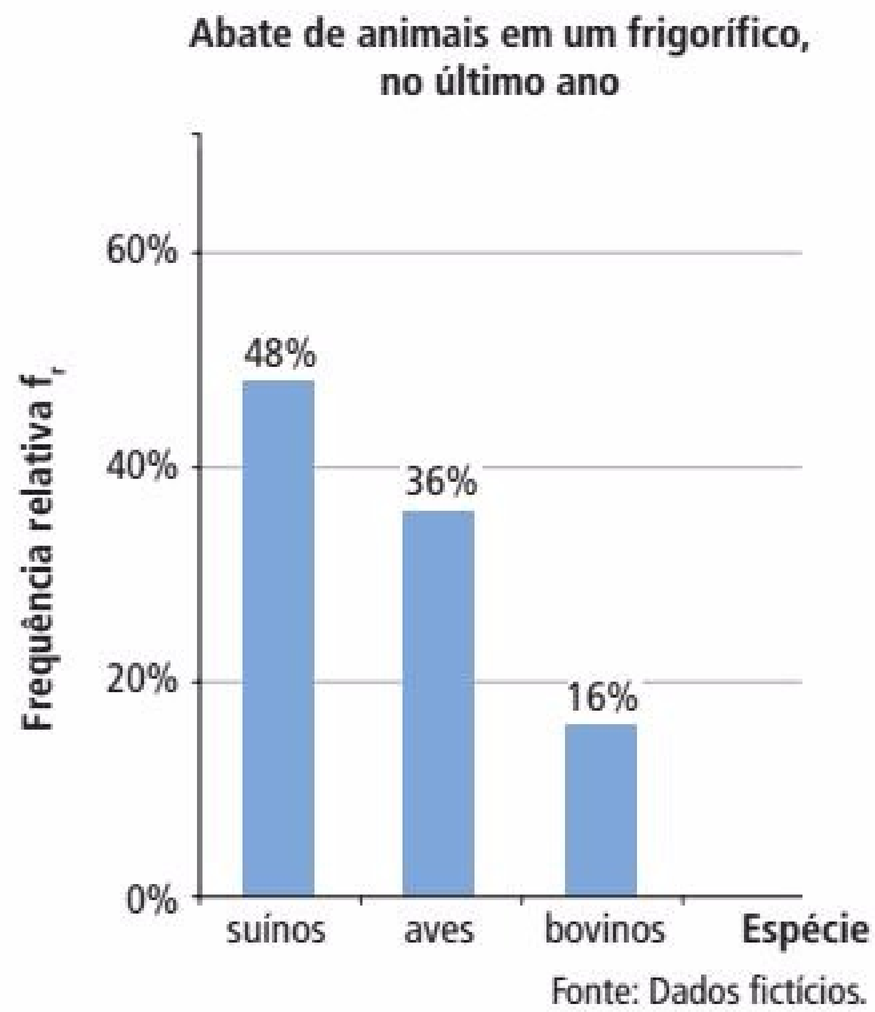
Observe o pictograma a seguir, que apresenta as perdas na distribuição de água por vazamentos. Note que cada "gota" representa 1% de perda na distribuição.



Ilustrações: Editoria de arte

Exercícios resolvidos

3 Observe o gráfico abaixo.



Fonte: Dados fictícios.

Com base nos dados do gráfico, responda:

a) Qual o percentual de animais abatidos de cada espécie?

b) Supondo que a produção de carne bovina foi obtida de 20 mil animais, qual a quantidade de aves abatidas?

Resolução

a) Analisando o gráfico, observamos que foram abatidos 48% de suínos, 36% de aves e 16% de bovinos.

b) Para sabermos a quantidade de aves abatidas, temos:

$$\begin{matrix} 20\,000 \text{ ——— } 16\% \\ x(\text{aves}) \text{ ——— } 36\% \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{20\,000 \cdot 36}{16} = 45\,000$$

Portanto, foram abatidas 45 mil aves.

4 Foi feita uma pesquisa com os 1 200 alunos de uma escola sobre as atividades esportivas que gostariam de praticar. O resultado encontra-se na tabela abaixo.

Frequência do esporte preferido	
Atividade esportiva	**Nº de alunos**
Vôlei	600
Basquete	180
Futebol	120
Natação	60
Outras	240

Fonte: Dados fictícios.

Construa o gráfico de setores correspondente à tabela.

Resolução

Inicialmente, vamos calcular a medida do ângulo central correspondente ao setor que representa cada atividade escolhida pelos alunos.

Lembrando que uma circunferência tem 360° e aplicando uma regra de três simples, temos:

- vôlei (v)

$$\begin{matrix} 1\,200 \text{ ——— } 360° \\ 600 \text{ ——— } v \end{matrix} \Rightarrow v = \frac{600 \cdot 360°}{1\,200} = 180°$$

Seguindo esse raciocínio, teremos:

- basquete (b)

$$\begin{matrix} 1\,200 \text{ ——— } 360° \\ 180 \text{ ——— } b \end{matrix} \Rightarrow b = \frac{180 \cdot 360°}{1\,200} = 54°$$

- futebol (f)

$$\begin{matrix} 1\,200 \text{ ——— } 360° \\ 120 \text{ ——— } f \end{matrix} \Rightarrow f = \frac{120 \cdot 360°}{1\,200} = 36°$$

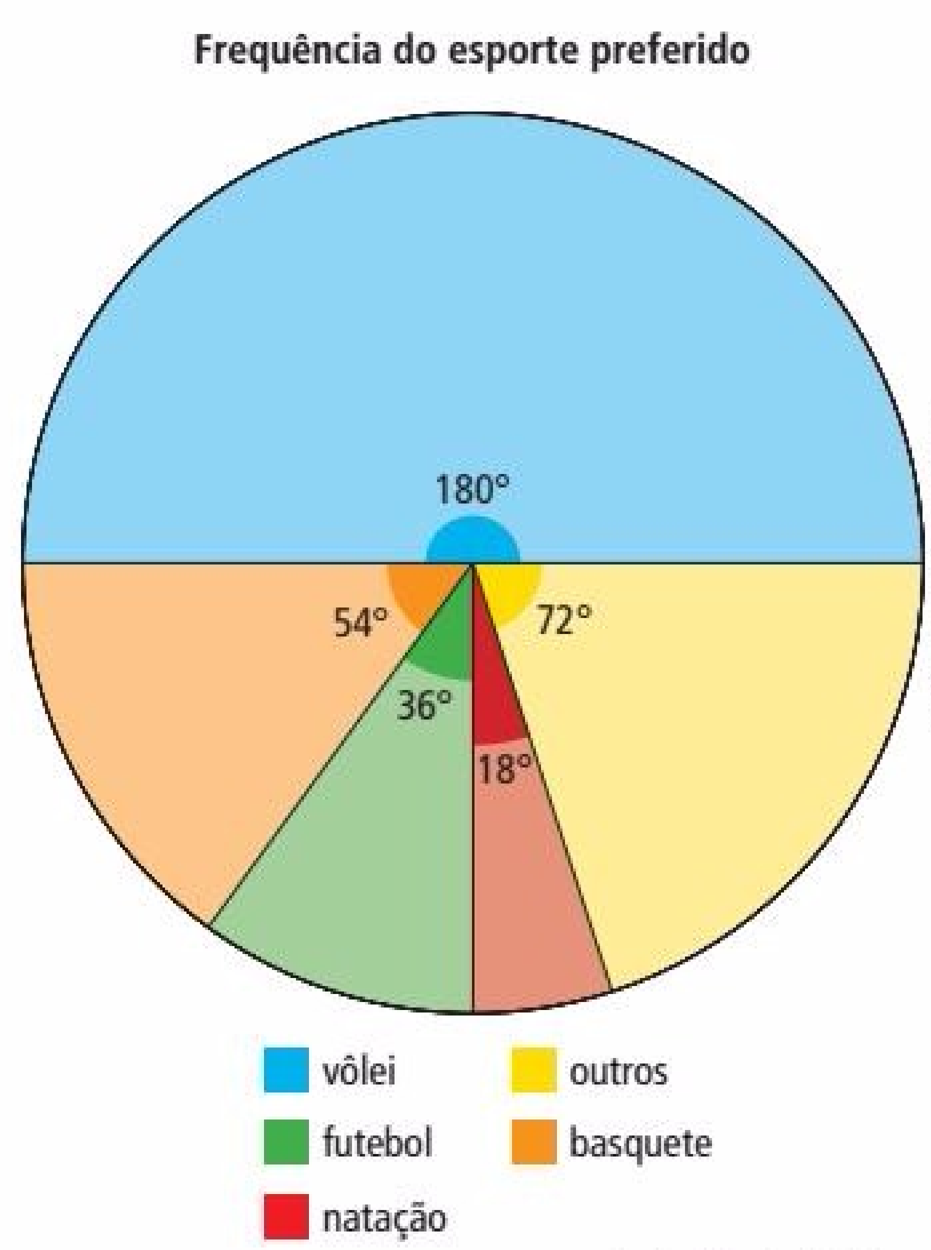
- natação (n)

$$\begin{matrix} 1\,200 \text{ ——— } 360° \\ 60 \text{ ——— } n \end{matrix} \Rightarrow n = \frac{60 \cdot 360°}{1\,200} = 18°$$

- outras atividades (o)

$$\begin{matrix} 1\,200 \text{ ——— } 360° \\ 240 \text{ ——— } o \end{matrix} \Rightarrow o = \frac{240 \cdot 360°}{1\,200} = 72°$$

A seguir, basta demarcar as áreas no círculo, usando um compasso e um transferidor. Assim, temos a figura abaixo.



Fonte: Dados fictícios.

Ilustrações: Editoria de arte

9. A superfície aproximada dos cinco oceanos é dada na tabela seguinte:

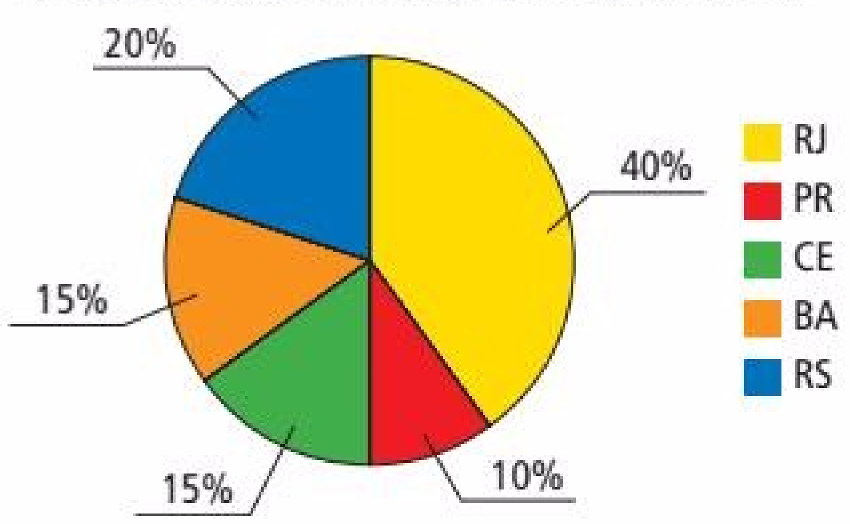
Superfície dos oceanos	
Oceano	**Superfície** (em milhões de km²)
Pacífico	180
Atlântico	105
Índico	73
Antártico	20
Ártico	12

Fonte: Dados fictícios.

Construa um gráfico de barras verticais (colunas) para essa tabela. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

10. O gráfico a seguir mostra em quais estados brasileiros os alunos de uma escola, que viajaram, passaram suas férias. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

Estados brasileiros visitados de Minas Gerais



Fonte: Dados fictícios.

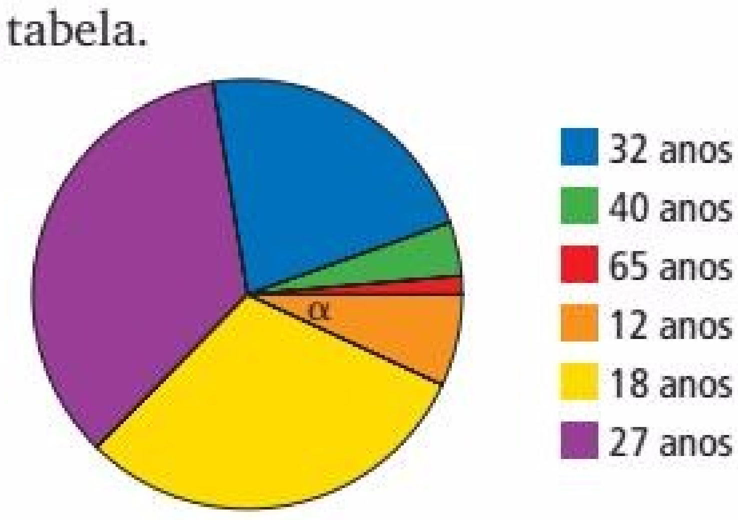
a) Que estado recebeu o maior número de alunos?

b) Se 120 alunos foram para o Rio de Janeiro, quantos alunos passaram férias no Paraná?

11. (FSA-SP) Foram pesquisadas as idades das pessoas de um grupo e obtiveram-se os seguintes resultados:

Nº de pessoas	**Idade** (anos)
5	12
22	18
25	27
16	32
3	40
1	65
Total: 72	

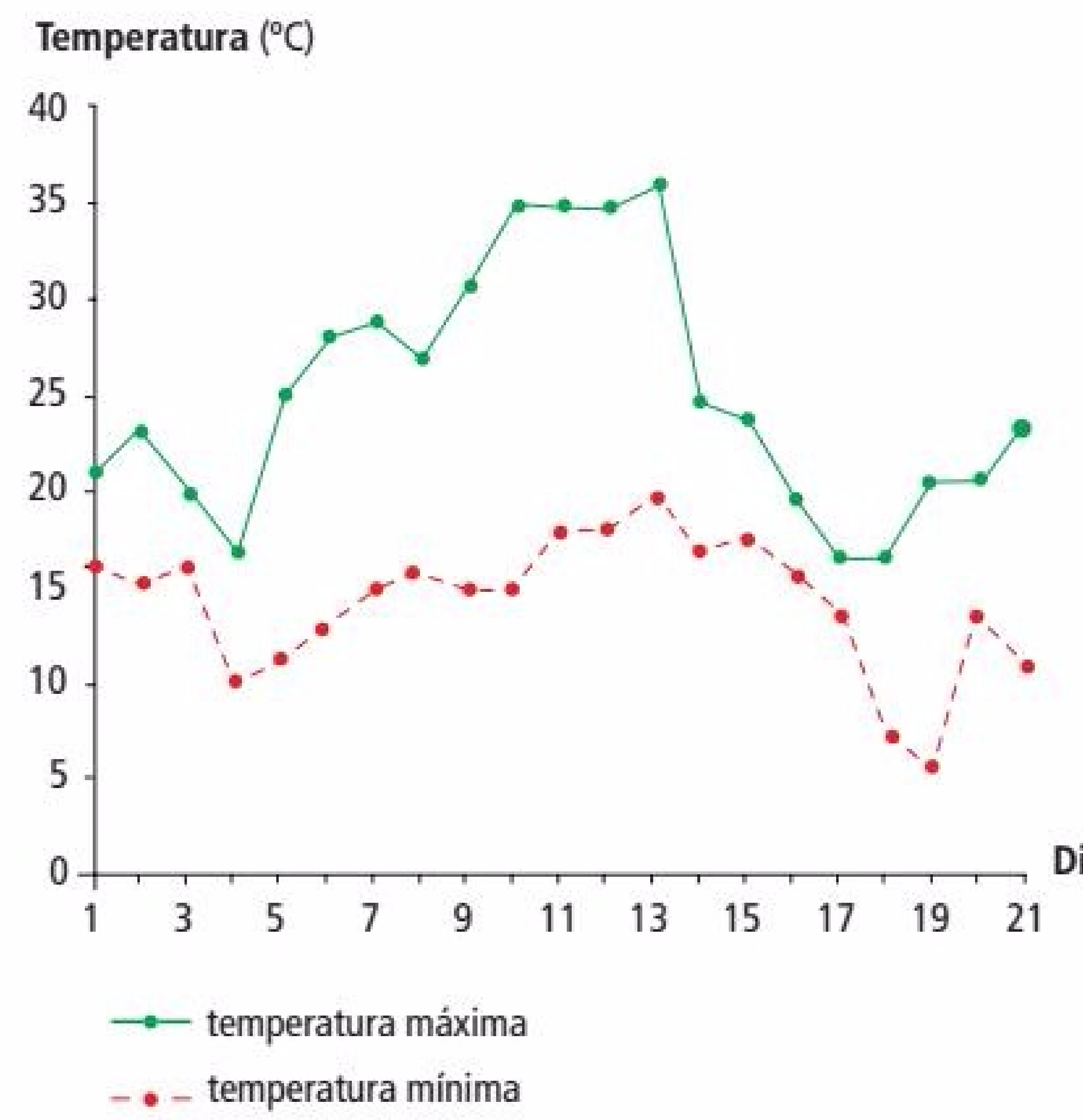
O gráfico de setores, abaixo, representa a distribuição dada na tabela.



Podemos afirmar que α mede:

a) 72° b) 60° X c) 25° d) 10° e) 5°

12. (UFRGS-RS) O gráfico abaixo mostra o registro das temperaturas máximas e mínimas em uma cidade, nos primeiros 21 dias do mês de setembro de 2013.



Ilustrações: Editoria de arte

Assinale a alternativa **correta** com base nos dados apresentados no gráfico.

a) No dia 13, foi registrada a menor temperatura mínima do período.

b) Entre os dias 3 e 7, as temperaturas máximas foram aumentando dia a dia.

c) Entre os dias 13 e 19, as temperaturas mínimas diminuíram dia a dia.

d) No dia 19, foi registrada a menor temperatura máxima do período.

X e) No dia 19, foi registrada a menor temperatura do período.

13. Uma pesquisa sobre atividades culturais extraclasse foi feita entre 1 000 alunos de uma escola. O resultado está indicado a seguir:

Atividades culturais extraclasse	
Atividades	**Nº de alunos**
Visitas a museus	400
Visitas a outras cidades	200
Palestras	250
Exposições	100
Outras	50

Fonte: Dados fictícios.

Usando um gráfico de setores, faça a representação gráfica dessa distribuição, expressando os setores em porcentagens. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

Histograma de frequências

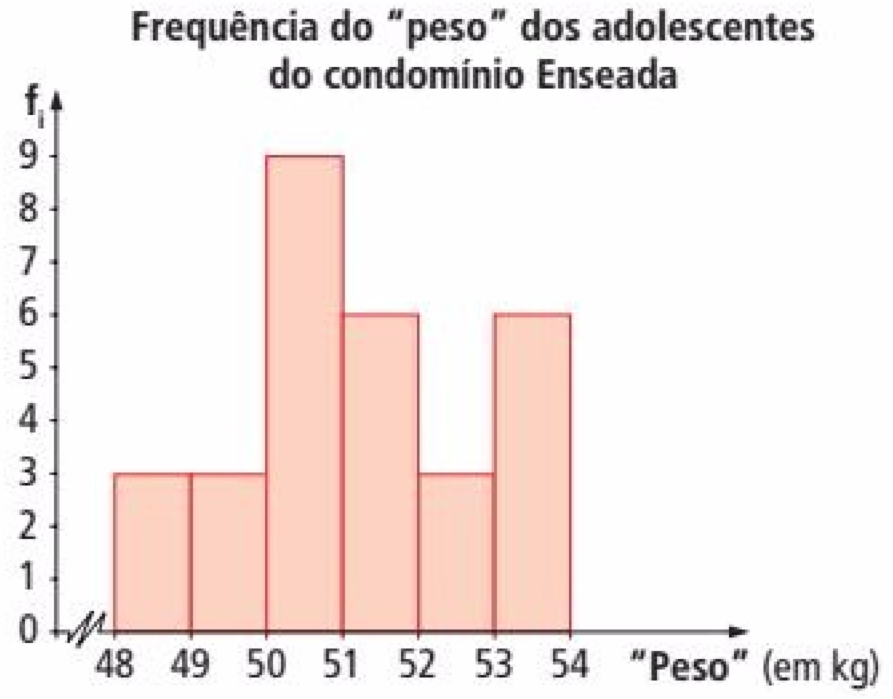
Quando se trata da representação gráfica de distribuição de frequências com dados agrupados, utilizamos um tipo de gráfico denominado **histograma de frequências absolutas** ou simplesmente **histograma**.

Histograma é um gráfico formado por um conjunto de colunas retangulares contíguas, com bases proporcionais aos intervalos de classe. No eixo das abscissas indicamos as classes, cujas amplitudes correspondem às bases dos retângulos. No eixo das ordenadas marcamos as frequências absolutas, que correspondem às alturas dos retângulos.

Abaixo está a tabela de distribuição de frequência e o respectivo histograma.

Classes "peso" (kg)	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (f_r)(%)
[48; 49[	3	10
[49; 50[	3	10
[50; 51[	9	30
[51; 52[	6	20
[52; 53[	3	10
[53; 54[	6	20
Total	30	100

Fonte: Dados fictícios.



Fonte: Dados fictícios.

Observe que sobre cada um dos intervalos foi construído um retângulo de área proporcional à respectiva frequência absoluta. Podemos também construir um histograma com base na frequência relativa. Nesse caso, o eixo vertical representaria as porcentagens e o comprimento de cada barra é representado por sua respectiva porcentagem.

Observação:

No eixo horizontal desse gráfico, aparece um trecho em "ziguezague" (⁄⁄). Isso significa que há um salto na escala, ou seja, naquele trecho não há proporcionalidade. Isso pode ocorrer em cada um dos eixos ou até em ambos os eixos.

Ponto médio do intervalo e polígono de frequências

O ponto que divide o intervalo em duas partes iguais é denominado **ponto médio do intervalo**.

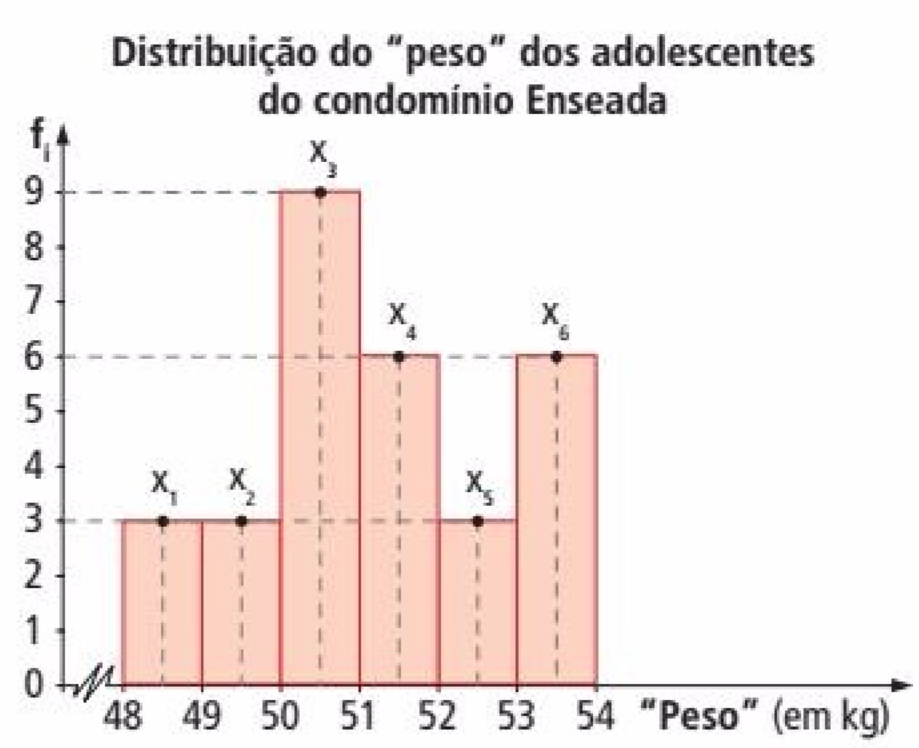
Para determinar o ponto médio de um intervalo devemos adotar a média aritmética entre os extremos do intervalo como abscissa e a sua respectiva frequência absoluta, ou frequência relativa, como ordenada. Por exemplo:

- Primeiro intervalo, [48; 49[, o ponto médio será $x_1 = \dfrac{48+49}{2} = 48{,}5$. Como sua frequência absoluta é 3, o ponto médio desse intervalo será (48,5; 3).
- Segundo intervalo, [49; 50[, temos: $x_2 = \dfrac{49+50}{2} = 49{,}5$. Como sua frequência absoluta é 3, o ponto médio desse intervalo será (49,5; 3).
- Terceiro intervalo, [50; 51[, temos: $x_3 = \dfrac{50+51}{2} = 50{,}5$. Como sua frequência absoluta é 9, o ponto médio desse intervalo será (50,5; 9). E assim por diante.

Ao lado temos marcado no gráfico os pontos médios dos respectivos intervalos.

Unindo cada um dos pontos médios com segmento de reta formamos uma figura que chamamos de **polígono de frequências**.

Os pontos das extremidades do polígono serão os pontos médios dos intervalos fictícios, inferior e superior, de mesma amplitude cuja ordem é a frequência absoluta, ou relativa, "zero".



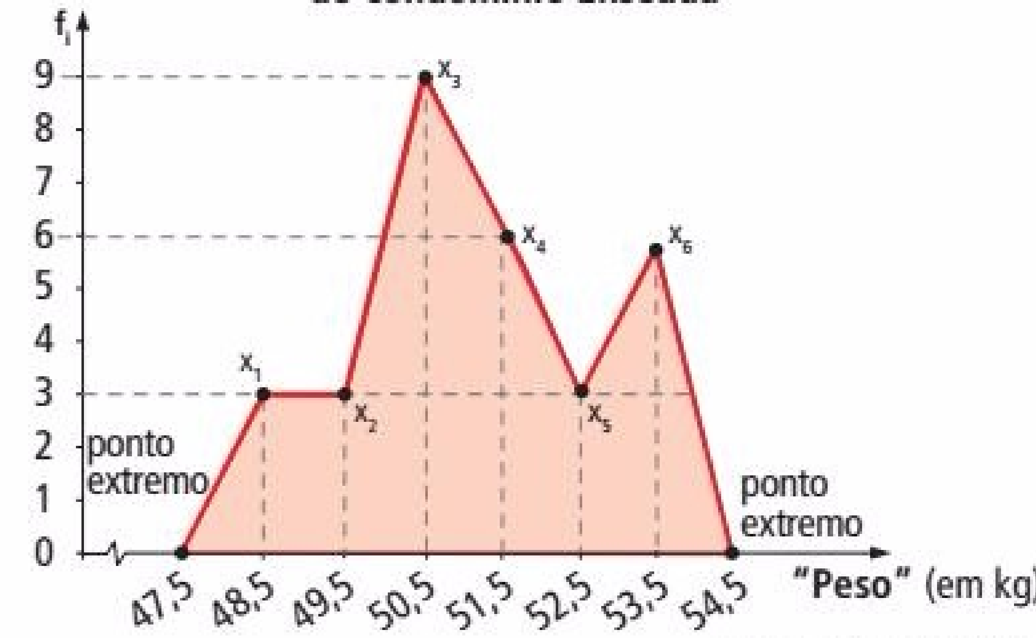
Fonte: Dados fictícios.

Por exemplo, em nossa distribuição o primeiro intervalo é [48; 49[. Para encontrar a primeira extremidade, a inferior, devemos considerar um intervalo de mesma amplitude abaixo desse, ou seja, o intervalo [47; 48[, e encontrar seu valor médio que, nesse caso, é 47,5. Ao associar esse valor à ordenada 0, temos o ponto (47,5; 0) como a extremidade inferior do polígono de frequência.

Analogamente, devemos fazer o mesmo para descobrir a extremidade superior. O último intervalo é [53; 54[, então o próximo intervalo de mesma amplitude é [54; 55[e seu valor médio é 54,5, e o ponto médio da extremidade superior será (54,5; 0).

Ao lado temos o gráfico do polígono de frequência.

Distribuição do "peso" dos adolescentes do condomínio Enseada



Fonte: Dados fictícios.

Ilustrações: Editoria de arte

Exercício resolvido

5 Construa o histograma e o polígono de frequência absoluta da distribuição a seguir.

Estatura dos alunos da escola "NADEBEM"	
Estatura (cm)	**Número de alunos**
152 ⊢— 156	10
156 ⊢— 160	25
160 ⊢— 164	30
164 ⊢— 168	40
168 ⊢— 172	60
172 ⊢— 176	18
176 ⊢— 180	15

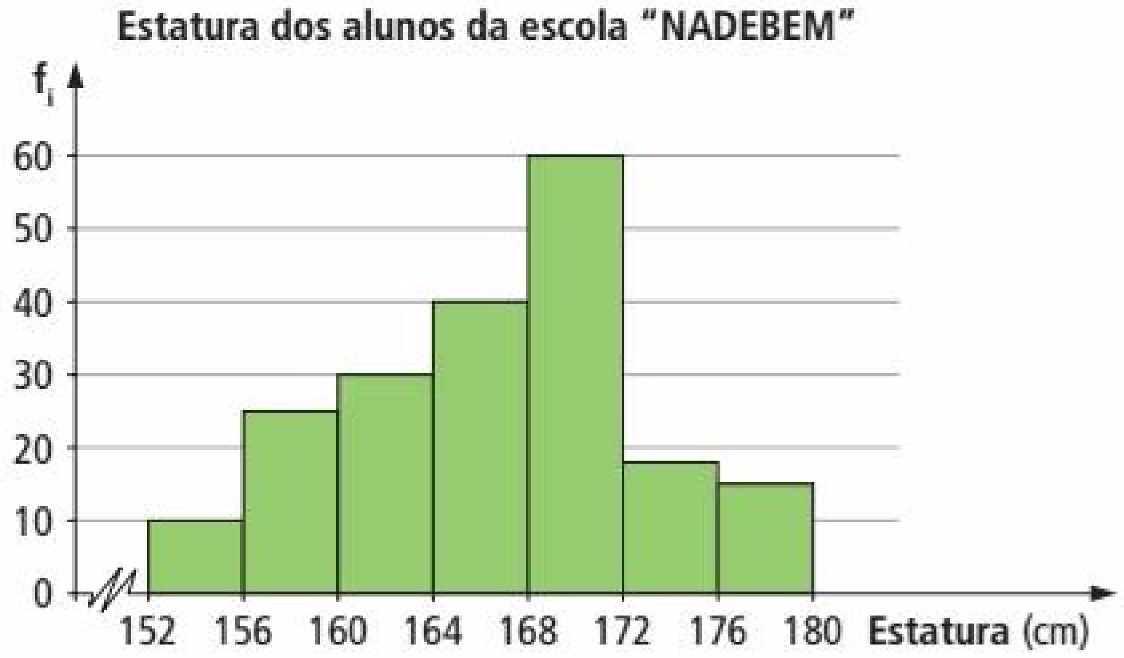
Fonte: Dados fictícios.

Resolução

A partir da distribuição, podemos observar que o histograma deverá ter 7 barras e cada uma possuir amplitude 4 e comprimento equivalente à frequência absoluta de cada classe.

Assim, podemos esboçar o gráfico abaixo.

Estatura dos alunos da escola "NADEBEM"



Fonte: Dados fictícios.

Para construir o polígono de frequência calculamos os pontos médios de cada classe e os extremos inferior e superior. Considerando x_1 o ponto médio do primeiro intervalo, x_2 do segundo intervalo e assim por diante, temos:

$$x_1 = \frac{152+156}{2} = 154$$

A ordenada é 10 e o ponto médio (154; 10).

$$x_2 = \frac{156+160}{2} = 158$$

A ordenada é 25 e o ponto médio (158; 25).

$$x_3 = \frac{160+164}{2} = 162$$

A ordenada é 30 e o ponto médio (162; 30).

$$x_4 = \frac{164+168}{2} = 166$$

A ordenada é 40 e o ponto médio (166; 40).

$$x_5 = \frac{168+172}{2} = 170$$

A ordenada é 60 e o ponto médio (170; 60).

$$x_6 = \frac{172+176}{2} = 174$$

A ordenada é 18 e o ponto médio (174; 18).

$$x_7 = \frac{176+180}{2} = 178$$

A ordenada é 15 e o ponto médio (178; 15).

Para calcular os extremos, consideramos um intervalo inferior e um superior de mesma amplitude e a ordenada 0. Assim:

No extremo inferior, o intervalo será [148; 152[:

$$x_i = \frac{148+152}{2} = 150$$

A ordenada é 0 e o ponto médio (150; 0).

No extremo superior, o intervalo será [180; 184[:

$$x_s = \frac{180+184}{2} = 182$$

A ordenada é 0 e o ponto médio (182; 0).

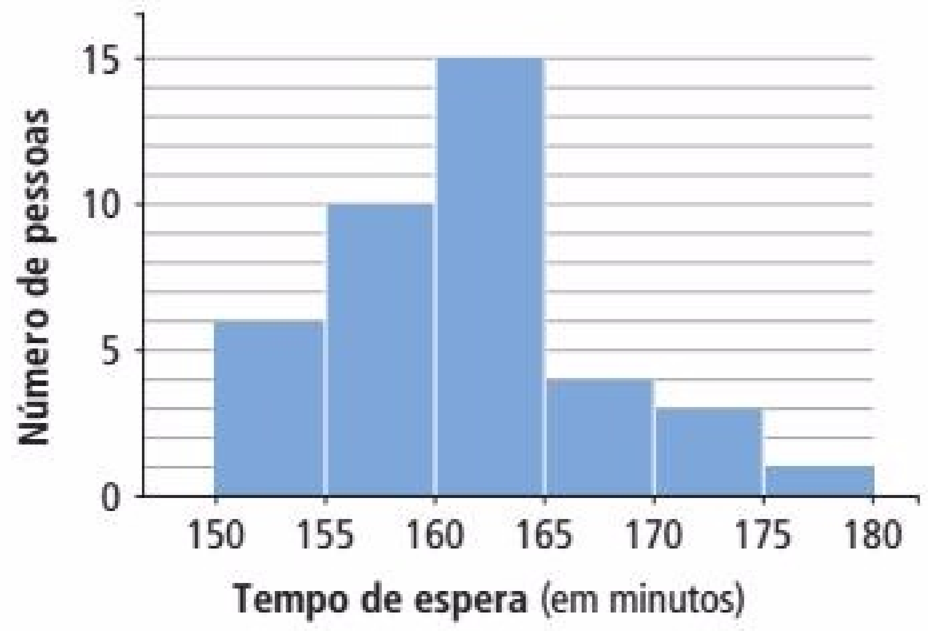
Tomando os pontos médios das classes desse histograma e unindo-os, obtemos o polígono de frequências.

Estatura dos alunos da escola "NADEBEM"

Fonte: Dados fictícios.

Escreva no caderno

14. (IFRS) O gráfico abaixo representa o tempo de espera (em minutos) na fila para comprar ingresso de um *show*.



Nas afirmações a seguir, assinale com (V) as verdadeiras e com (F) as falsas.

( ) A porcentagem do total de pessoas que esperou até 2h45min na fila foi de, aproximadamente, 79,5%.

( ) Mais da metade das pessoas esperam por menos de 2h40min.

( ) Mais da metade das pessoas esperam entre 2h35min e 2h45min.

( ) O número de pessoas que esperou de 150 min até 160 min foi o dobro do número de pessoas que esperou de 2h45min até 3 h.

( ) Apenas 4 pessoas esperaram por mais de 2h45min.

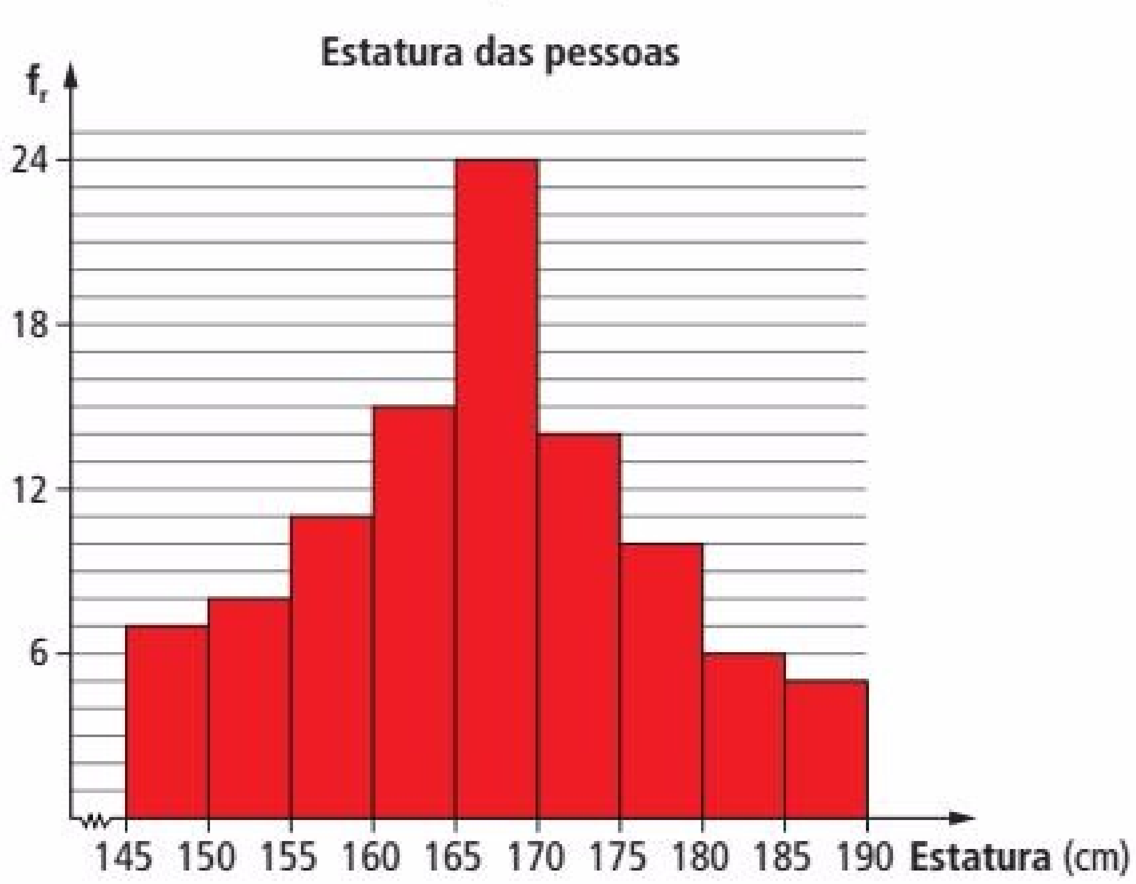
A alternativa que completa, corretamente, de cima para baixo, os parênteses é:

a) V – V – V – V – V
b) V – V – F – F – V
c) V – V – V – F – F
d) F – V – F – V – V
x e) V – F – V – V – F

15. O histograma representa a distribuição das estaturas em centímetros, de 100 pessoas, e as respectivas frequências relativas.

Por exemplo, na primeira classe [145; 150[estão situadas 7% das pessoas com estatura maior ou igual a 145 cm e menor do que 150 cm.

Ilustrações: Editoria de arte



Fonte: Dados fictícios.

Com base no gráfico, responda:

a) Qual o percentual de pessoas com estatura maior ou igual a 150 cm e menor do que 155 cm? 8%

b) Quantas pessoas têm estatura maior ou igual a 170 cm? 35 pessoas

c) Construa a tabela de frequência absoluta correspondente a esse histograma. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

16. No quadro a seguir, estão registradas as massas, em quilograma, de 50 pessoas que frequentam uma academia de ginástica. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

72	81	57	64	87	94	74	69	77	73
71	96	55	58	88	92	47	60	68	80
77	76	59	57	83	81	90	68	65	74
91	97	86	82	73	64	69	81	88	94
77	72	81	91	49	75	52	50	63	70

a) Escolha uma amplitude conveniente e elabore no caderno um quadro de distribuição de frequências absoluta e relativa.

b) Construa no caderno o histograma para a distribuição.

c) Calcule os pontos médios dos intervalos e represente a distribuição por meio de um polígono de frequências.

d) No caderno, represente essa distribuição por meio de um gráfico de setores com as respectivas frequências relativas.

17. A tabela mostra a distribuição dos salários mensais (agrupados em classes) de 40 empregados de uma firma.

Distribuição dos salários mensais dos colaboradores	
Salário (em reais)	**Número de colaboradores** (f_i)
[800; 900[	4
[900; 1 000[	10
[1 000; 1 100[	18
[1 100; 1 200[	5
[1 200; 1 300[	3

Fonte: Dados fictícios.

Nessas condições: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Qual é a amplitude do intervalo de classe?

b) Elabore no caderno um quadro de distribuição de frequências acumuladas, relativas e relativas acumuladas. Em seguida, construa o histograma de frequências.

c) Quantos colaboradores ganham menos que R$ 1 000,00 mensais?

d) Qual é o percentual de colaboradores que ganham mais que R$ 1 000,00 mensais?

e) Quantos colaboradores ganham entre R$ 800,00 (inclusive) e R$ 1 200,00?

Medidas de tendência central

Vimos na abertura dessa unidade que existem alguns índices, como INPC, que medem a variação do custo de vida de famílias assalariadas. Em outras palavras, esse índice nos mostra quanto, em média, os preços dos produtos indispensáveis para uma família sobreviver aumentaram. Porém, isso não significa que todos os preços aumentaram igualmente.

O índice do INPC é um parâmetro que representa uma porcentagem média de quanto os preços aumentaram.

Em um estudo estatístico, depois de se fazer a coleta e a representação dos dados de uma pesquisa, é comum analisarmos as tendências que a amostra apresenta. Assim, se a pesquisa envolve muitos dados, convém "sintetizar" todas essas informações por meio de parâmetros que possam caracterizá-la. Esses parâmetros podem ser de:

- **centralização** → média aritmética, mediana e moda;
- **dispersão** → intervalo de variação, desvio médio, variância e desvio padrão.

Média aritmética

Acompanhe a situação a seguir. Uma livraria vende a seguinte quantidade de livros de literatura em certa semana:

Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado
28	23	22	27	25	13

Fonte: Dados fictícios.

Qual foi a média de livros vendidos durante essa semana?

Para resolver esse problema, devemos fazer:

$$\frac{28+23+22+27+25+13}{6}=\frac{138}{6}=23$$

O número 23 é chamado **média aritmética** dos números 28, 23, 22, 27, 25 e 13. Indicamos $\overline{x} = 23$.

A média aritmética significa que, se a venda diária dessa semana fosse sempre a mesma, ou seja, 23 livros por dia, obteríamos o mesmo total de livros vendidos: 138.

Na quarta-feira e no sábado, a venda da livraria foi abaixo da média, enquanto na segunda-feira, na quinta-feira e na sexta-feira, foi acima.

Assim, podemos definir que a média aritmética é a razão entre a soma total de todos os valores e a quantidade de valores. Portanto, se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são *n* valores, então a média aritmética desse conjunto é calculada por:

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}$$

Como estamos lidando com somas sucessivas, podemos reduzir essa expressão com a utilização do somatório (Σ), ou seja, $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$.

Portanto, $\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, em que o índice *i* é um número natural que varia de 1 até *n*.

Média aritmética ponderada

Agora, acompanhe esta outra situação.

Em um campeonato de futebol foram disputados 40 jogos. O time campeão obteve 25 vitórias, 7 empates e 8 derrotas. Sabendo que o time ganhou 3 pontos por cada vitória (V), 1 ponto por cada empate (E) e nenhum ponto por cada derrota (D), qual foi a pontuação média por partida desse time?

Podemos organizar as informações do problema em uma tabela como a do lado.

Resultados finais do time campeão				
Time campeão	J	V	E	D
	40	25	7	8

Fonte: Dados fictícios.

Para determinar a média precisamos calcular a pontuação total do time e dividir pelo número de jogos. Porém, se aplicarmos a fórmula da média aritmética, a expressão será muito extensa, pois:

$$\overline{x} = \frac{\overbrace{3+3+3+\ldots+3}^{25\text{ vezes}}+\overbrace{1+\ldots+1}^{7\text{ vezes}}+\overbrace{0+\ldots+0}^{8\text{ vezes}}}{25+7+8}$$

Podemos simplificar reescrevendo o cálculo acima da seguinte maneira:

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 25 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 8}{25+7+8} = \frac{82}{40} = 2{,}05$$

Observe que a atribuição para cada resultado (vitória, empate e derrota) é fixa, ou seja, V = 3, E = 1 e D = 0. A quantidade de vitórias, empates e derrotas, chamamos de **pesos**.

Assim, para calcular a pontuação fizemos a soma de todos os produtos dos valores (v) pelos respectivos pesos (p). E para calcular a média, que chamamos de **média aritmética ponderada**, fizemos a razão da soma total pela soma de todos os pesos.

Portanto, podemos definir que a média aritmética ponderada é a razão entre a soma de todos os produtos dos valores pelos respectivos pesos e soma de todos os pesos. Portanto:

$$\overline{x} = \frac{v_1p_1 + v_2p_2 + v_3p_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Podemos reescrever e generalizar a fórmula da média aritmética ponderada utilizando o conceito de somatório:

$$\overline{x} = \frac{v_1p_1 + v_2p_2 + v_3p_3 + \ldots + v_np_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n} \quad \text{ou} \quad \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_ip_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Observação:

Também é possível calcular a média aritmética ponderada em um histograma ou quando os dados estiverem agrupados. Em ambos os casos, basta considerarmos o ponto médio da classe, ou intervalo, como o valor, *v*, e a frequência absoluta como o peso, *p*, e utilizar a fórmula acima.

Mediana

Também podemos representar um conjunto verificando o valor numérico do elemento central, ou seja, aquele que divide o conjunto em dois subconjuntos com o mesmo número de elementos.

Por exemplo, considere o conjunto 37, 28, 40, 41, 45, 37, 37, 41 e 44.

Colocando esses dados em ordem crescente, temos: $\underbrace{28, 37, 37, 37,}_{4\text{ elementos}} \ \underbrace{40,}_{\text{elemento central}} \ \underbrace{41, 41, 44, 45}_{4\text{ elementos}}$

Assim, temos que o elemento que divide o conjunto em partes iguais tem o valor numérico 40. A esse valor damos o nome de **mediana**.

Mediana (M_d) é o valor do elemento central de um conjunto numérico organizado em ordem crescente ou decrescente.

Sempre que uma distribuição tiver um número ímpar de elementos haverá um valor central. Agora, se a distribuição for composta por um número par de elementos, existirão dois valores centrais e, nesse caso, a mediana será a média aritmética entre esses dois elementos. Veja o exemplo abaixo:

$$\underbrace{28, 37, 37, 37,}_{4\text{ elementos}} \ \underbrace{40, 41,}_{\text{elemento central}} \ \underbrace{41, 41, 44, 45}_{4\text{ elementos}} \Rightarrow M_d = \frac{40+41}{2} = 40{,}5$$

Importante: Assim como a média, o valor da mediana não precisa ser necessariamente o valor de um elemento do conjunto.

Moda

Para analisar como se determina a moda, observe o exemplo a seguir.

Feita uma pesquisa para saber o número de irmãos que cada um dos 30 alunos de uma classe possui, obtiveram-se os seguintes dados:

0, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 2, 2, 3, 4, 2, 2, 3, 1, 3, 2, 5, 2, 4, 4

Fazendo a contagem, obtemos:

Número de irmãos	Frequência absoluta
0	3
1	6
2	13
3	4
4	3
5	1

Fonte: Dados fictícios.

Observe que o número de irmãos varia entre 0 e 5 e o que aparece mais vezes é o 2, isto é, 13 alunos têm 2 irmãos. Dizemos que 2 é a **moda** desse conjunto de valores e indicamos:

$$M_o = 2$$

Assim, podemos definir que a moda de um conjunto de valores é o valor que aparece em maior número de vezes, ou seja, é o valor de maior frequência absoluta.

Um conjunto de valores pode ter uma só moda, duas modas, três modas etc., ou nenhuma moda.

Exercícios resolvidos

6 No ano 2016, o número de nascimentos, por mês, em uma maternidade foi:

Mês	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Maio	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
Nascimento	38	25	42	30	29	47	18	36	38	43	49	37

Fonte: Dados fictícios.

a) Calcule a média mensal de nascimentos.

b) Em que meses o número de nascimentos ficou acima da média?

Resolução

a) A média mensal de nascimentos em 12 meses é dada por:

$$\overline{x} = \frac{38 + 25 + 42 + 30 + 29 + 47 + 18 + 36 + 38 + 43 + 49 + 37}{12} \Rightarrow \overline{x} = \frac{432}{12} \Rightarrow \overline{x} = 36$$

Portanto, a média mensal foi de 36 nascimentos.

b) O número de nascimentos ficou acima da média nos seguintes meses: janeiro, março, junho, setembro, outubro, novembro e dezembro.

7 A classificação final para determinado curso é a média ponderada das provas de capacidade geral, com peso 3, e das provas de capacidade específica, com peso 2. Nessas condições, qual é a classificação final de um aluno que obteve 162 pontos na prova de capacidade geral e 147 pontos na prova de capacidade específica?

Resolução

A classificação final é obtida pela média ponderada:

$$\overline{x} = \frac{162 \cdot 3 + 147 \cdot 2}{3 + 2} = \frac{486 + 294}{5} = \frac{780}{5} = 156$$

Portanto, o aluno será classificado com 156 pontos.

8 A tabela de distribuição de frequências abaixo representa os salários semanais de 40 colaboradores de uma empresa.

Classe (em reais)	**Ponto médio da classe** ($\overline{x}_i$)	**Frequência** (f_i)
[180; 200[	190	4
[200; 220[	210	18
[220; 240[	230	10
[240; 260[	250	5
[260; 280[	270	3

Fonte: Dados fictícios.

Calcule o salário médio semanal dos empregados dessa empresa.

Resolução

Quando os dados estão agrupados, aceitamos, por convenção, que as frequências são distribuídas uniformemente ao longo da classe e que, portanto, o ponto médio da classe é o valor representativo do conjunto.

Nesse caso, a média é calculada tendo por base os pontos médios das classes.

Para calcular o salário médio, devemos fazer:

$$\overline{x} = \frac{190 \cdot 4 + 210 \cdot 18 + 230 \cdot 10 + 250 \cdot 5 + 270 \cdot 3}{4 + 18 + 10 + 5 + 3}$$

$$\overline{x} = \frac{760 + 3780 + 2300 + 1250 + 810}{40} \Rightarrow \overline{x} = \frac{8900}{40} = 222{,}50$$

Portanto, o salário médio semanal é R$ 222,50.

9 As marcas obtidas, em metro, pelos alunos numa prova de salto em distância foram as seguintes:

2,20	2,28	2,23	2,20	2,35	2,28	2,25	2,30	2,37	2,30

Fonte: Dados fictícios.

Calcule a média, a mediana e a moda dessa distribuição.

Resolução

Dispondo os valores em ordem crescente e fazendo a contagem, temos:

x_i	2,20	2,23	2,25	2,28	2,30	2,35	2,37
f_i	2	1	1	2	2	1	1

A média aritmética ponderada das marcas obtidas é dada por:

$$\overline{x} = \frac{2{,}20 \cdot 2 + 2{,}23 \cdot 1 + 2{,}25 \cdot 1 + 2{,}28 \cdot 2 + 2{,}30 \cdot 2 + 2{,}35 \cdot 1 + 2{,}37 \cdot 1}{2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1}$$

$$\overline{x} = \frac{22{,}76}{10} \Rightarrow \overline{x} \simeq 2{,}28 \text{ m}$$

Como o número de dados é par (10 dados), a mediana é a média aritmética dos elementos que ocupam a posição central do conjunto dos dados ordenados em ordem crescente.

$$\underbrace{2{,}20;\ 2{,}20;\ 2{,}23;\ 2{,}25}_{\text{4 medidas}} \quad \underbrace{2{,}28;\ 2{,}28}_{\text{mediana}} \quad \underbrace{2{,}30;\ 2{,}30;\ 2{,}35;\ 2{,}37}_{\text{4 medidas}}$$

Logo, $M_d = \dfrac{2{,}28 + 2{,}28}{2} = 2{,}28$ m

A distribuição possui três modas, que são os dados que mais se repetem (duas vezes cada um).

$M_o = 2{,}20$ m $\qquad M_o = 2{,}28$ m $\qquad M_o = 2{,}30$ m

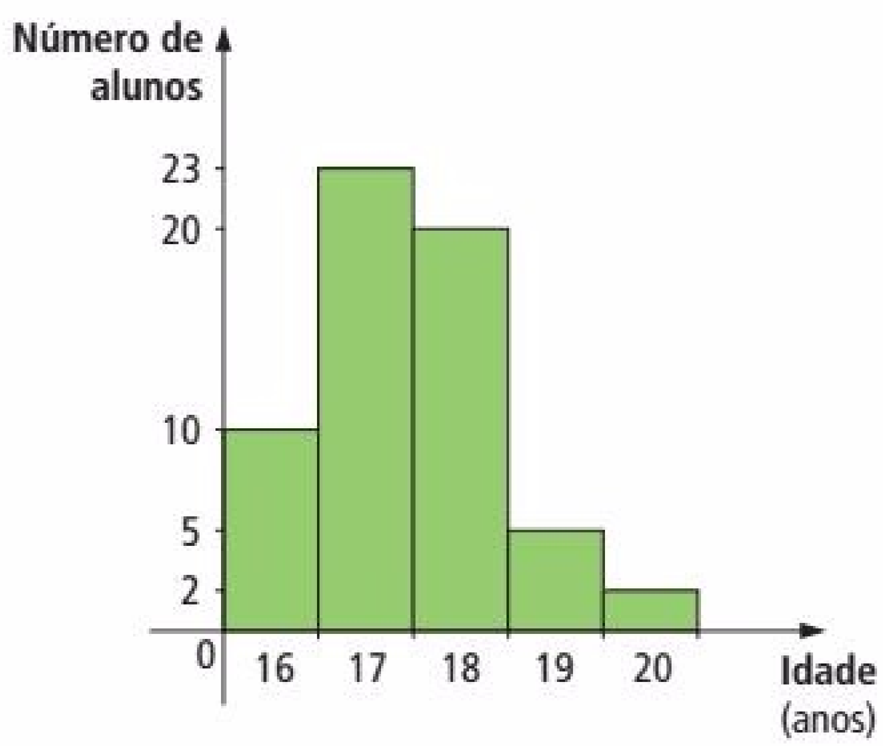
Exercícios propostos

Escreva no caderno

18. As alturas dos jogadores titulares de um time de basquete são 1,98 m, 2,02 m, 2,08 m, 1,92 m e 1,95 m. Qual é a média de altura desse quinteto? 1,99 m

19. Para ser aprovado em uma disciplina, o aluno precisa ter média maior ou igual a 5,0, obtida em um conjunto de 5 provas, sendo 4 parciais, com peso 1 cada, e uma prova-exame, com peso 2. Um aluno obteve, nas 4 provas parciais, notas iguais a 3,0; 6,0; 5,0 e 7,0. Calcule a nota mínima que esse aluno deverá obter na prova-exame para ser aprovado. 4,5

20. (Fuvest-SP) A distribuição das idades dos alunos de uma classe é dada pelo gráfico abaixo. Qual das alternativas representa melhor a média de idade dos alunos?



a) 16 anos e 10 meses
b) 17 anos e 1 mês
X c) 17 anos e 5 meses
d) 18 anos e 6 meses
e) 19 anos e 2 meses

21. Calcule a mediana do seguinte conjunto de dados: 1, 1, 3, 3, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1. 2,5

22. Calcule a mediana do conjunto de dados representado pelo quadro: 22,5

x_i	f_i
10	9
15	21
20	10
25	32
30	8

Fonte: Dados fictícios.

23. Em uma casa de repouso, as pessoas internadas têm as seguintes idades:

67	68	74	67	68	84	75	80	75	84
75	73	67	74	78	77	75	80	74	77
85	85	68	74	72	73	71	73	71	85
68	84	80	77	78	75	71	72	73	84

$M_d = 74{,}5$ e $M_o = 75$

Fonte: Dados fictícios.

Calcule a mediana e a moda dessa distribuição.

24. A tabela abaixo nos dá uma distribuição de frequências. Calcule a média dessa distribuição. $\overline{x} \simeq 22{,}9$

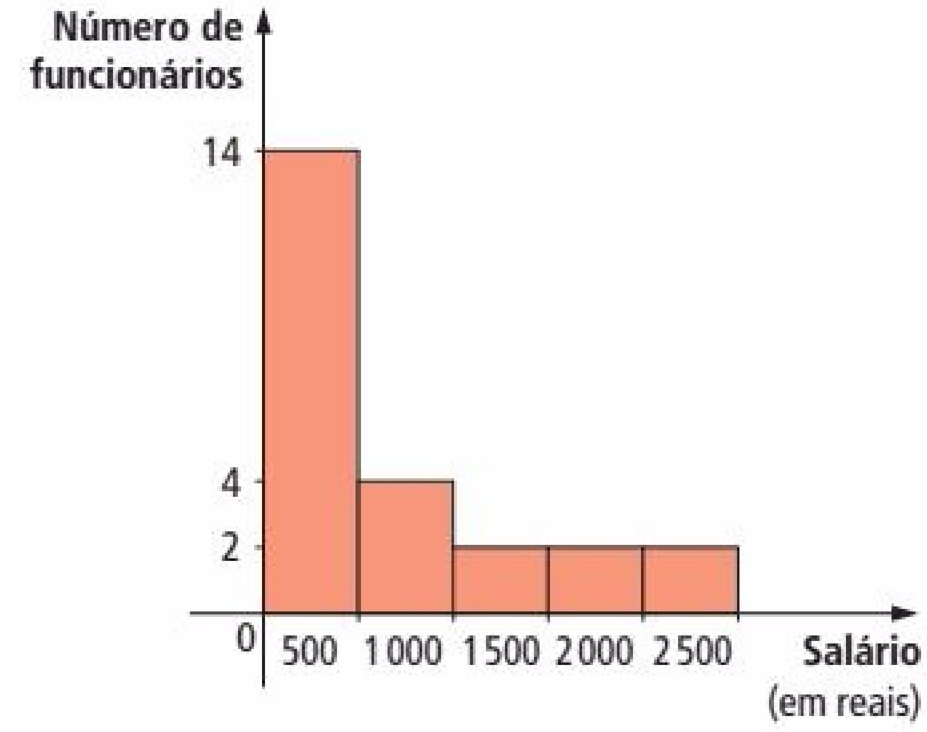
x_i	10	20	30	40
f_i	8	11	7	5

Fonte: Dados fictícios.

25. Determine a média aritmética, a mediana e a moda dos seguintes conjuntos de dados: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) 1, 1, 7, 5, 3, 1, 1, 7, 5, 3, 1, 1, 5, 3
b) 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10, 12, 12, 12

26. (PUC-SP) O histograma abaixo apresenta a distribuição de frequências das faixas salariais numa pequena empresa.



Ilustrações: Editoria de arte

Com os dados disponíveis, pode-se concluir que a média desses salários é, aproximadamente:

a) R$ 420,00
b) R$ 536,00
c) R$ 562,00
d) R$ 640,00
X e) R$ 708,00

27. Feito um levantamento sobre as idades de 25 alunos que cursam o 2º ano de um determinado colégio, chegou-se ao seguinte resultado:

Idade (x_i)	Frequência (f_i)
10	3
11	11
12	8
13	3

Fonte: Dados fictícios.

Nessas condições:

a) Faça um gráfico de setores que represente essa distribuição. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.
b) Determine a média dessa distribuição. $\overline{x} = 11{,}44$
c) Determine a mediana dessa distribuição. $M_d = 11$.

28. (PUC-SP) É dado um conjunto de 20 números cuja média aritmética é 64. Cada número desse conjunto é multiplicado por 2 e, em seguida, acrescido de 5 unidades. Qual é a média aritmética dos 20 números assim obtidos? $\overline{y} = 133$

Medidas de dispersão

Para caracterizar um conjunto de dados, em Estatística, nem sempre são suficientes a média, a moda e a mediana. Principalmente quando esses dados estão "muito espalhados" e queremos medir o grau desse "espalhamento". Em alguns casos, temos de recorrer a outros parâmetros, chamados **medidas de dispersão**.

Neste livro, estudaremos três dessas medidas: **desvio médio**, **variância** e **desvio padrão**.

Desvio médio

Para estudar o desvio médio, vamos considerar as notas bimestrais de um aluno em Matemática durante o ano letivo.

Bimestre	1º	2º	3º	4º
Notas	5	8	6	9

Fonte: Dados fictícios.

Agora, vamos calcular a média aritmética desse aluno:

$$\overline{x} = \frac{5+8+6+9}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

Calculemos, em seguida, as diferenças entre cada uma das notas e a média. Essas diferenças são chamadas de **desvios para a média** $(x_i - \overline{x})$:

- $x_1 - \overline{x} = 5 - 7 = -2$
- $x_2 - \overline{x} = 8 - 7 = 1$
- $x_3 - \overline{x} = 6 - 7 = -1$
- $x_4 - \overline{x} = 9 - 7 = 2$

A média aritmética dos valores absolutos dos desvios para a média é uma medida de dispersão chamada **desvio médio**, que indicamos por d_m.

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^{4}|x_i - \overline{x}|}{4} = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + |x_3 - \overline{x}| + |x_4 - \overline{x}|}{4} = \frac{|-2| + |1| + |-1| + |2|}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

Assim, o desvio médio das notas é 1,5.

Acompanhe outro exemplo: a tabela nos mostra a distribuição dos erros cometidos por 25 alunos em uma prova de Biologia. Nessas condições, qual é o desvio médio dessa distribuição?

Nº de erros (x_i)	Nº de alunos (f_i)
0	3
1	6
2	8
3	5
4	2
5	1

Fonte: Dados fictícios.

Calculando a média aritmética, obtemos:

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{25} = \frac{0 + 6 + 16 + 15 + 8 + 5}{25} = \frac{50}{25} = 2$$

Calculando $x_i - \overline{x}$:

- $0 - 2 = -2$
- $1 - 2 = -1$
- $2 - 2 = 0$
- $3 - 2 = 1$
- $4 - 2 = 2$
- $5 - 2 = 3$

Calculando o desvio médio:

$$d_m = \frac{|-2| \cdot 3 + |-1| \cdot 6 + |0| \cdot 8 + |1| \cdot 5 + |2| \cdot 2 + |3| \cdot 1}{25} = \frac{6 + 6 + 0 + 5 + 4 + 3}{25} = \frac{24}{25} = 0{,}96$$

O desvio médio dos erros da prova de Biologia é 0,96.

Quando os dados da distribuição estão agrupados, a fórmula para o cálculo do desvio médio é:

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot |x_i - \overline{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Variância e desvio padrão

A **variância** indica quanto os valores estão distantes de sua média de valores de um conjunto. Quanto menor a variância mais homogêneo é o conjunto, ou seja, seus elementos possuem valores próximos da média. Por outro lado, quanto maior a variância mais heterogêneos são os elementos de um conjunto, ou seja, alguns elementos possuem valores bem diferentes da média.

A variância (V_a) é calculada pela fórmula:

$$V_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Já o **desvio padrão** indica quanto os pontos estão dispersos em relação à média. Quanto mais próximo de zero o desvio padrão estiver, mais compacto (cada elemento com valores muito próximos) será o conjunto e, por outro lado, quanto maior o desvio padrão, mais disperso (alguns elementos possuem valores muito diferentes dos outros) será o conjunto.

Para calcular o desvio padrão (S) utilizamos a fórmula:

$$S = \sqrt{V_a}$$

Exercício resolvido

10 Concorrendo a uma vaga de representante no conselho da escola, dois candidatos obtiveram votos, por turma, conforme as informações abaixo:

Candidato \ Classe	3º A	3º B	3º C	3º D	3º E	3º F
Vítor	12	15	12	16	14	15
Rafael	12	11	18	9	19	15

Fonte: Dados fictícios.

a) Calcule o desvio padrão do desempenho de cada um.

b) Qual dos dois candidatos tem o desempenho mais regular?

Resolução

a) Inicialmente, vamos calcular a média do desempenho dos candidatos.

$$\overline{x}_V = \frac{12 + 15 + 12 + 16 + 14 + 15}{6} = \frac{84}{6} = 14$$

$$\overline{x}_R = \frac{12 + 11 + 18 + 9 + 19 + 15}{6} = \frac{84}{6} = 14$$

Em seguida, vamos calcular os desvios e os quadrados dos desvios.

Vítor						
$x_i - \overline{x}$	$12 - 14 = -2$	$15 - 14 = 1$	$12 - 14 = -2$	$16 - 14 = 2$	$14 - 14 = 0$	$15 - 14 = 1$
$(x_i - \overline{x})^2$	$(-2)^2 = 4$	$(1)^2 = 1$	$(-2)^2 = 4$	$(2)^2 = 4$	$(0)^2 = 0$	$(1)^2 = 1$

Rafael						
$x_i - \overline{x}$	$12 - 14 = -2$	$11 - 14 = -3$	$18 - 14 = 4$	$9 - 14 = -5$	$19 - 14 = 5$	$15 - 14 = 1$
$(x_i - \overline{x})^2$	$(-2)^2 = 4$	$(-3)^2 = 9$	$(4)^2 = 16$	$(-5)^2 = 25$	$(5)^2 = 25$	$(1)^2 = 1$

Agora, vamos calcular as variâncias:

$$V_{a_V} = \frac{4 + 1 + 4 + 4 + 0 + 1}{6} \simeq 2,33 \qquad V_{a_R} = \frac{4 + 9 + 16 + 25 + 25 + 1}{6} \simeq 13,33$$

Agora, vamos calcular os desvios padrão S_V e S_R:

$$s_V = \sqrt{2,33} \Rightarrow s_V \simeq 1,53 \qquad s_R = \sqrt{13,33} \Rightarrow s_R \simeq 3,65$$

b) Observe que as médias de ambos são iguais a 14. Note também que Rafael tem um desvio padrão superior ao de Vítor ($3,65 > 1,53$), isto é, a dispersão dos votos relativamente à média é maior no caso de Rafael. Por isso, Vítor é o candidato com desempenho mais regular.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

29. As massas dos jogadores de um time de vôlei são, em quilogramas: 95, 98, 101, 92 e 104. Nessas condições, determine:

a) a média das massas; 98 kg

b) o desvio médio. 3,6 kg

30. O tempo gasto por seis alunos para fazer um trabalho foi, em minutos, 6, 5, 5, 3, 3, 2. Nessas condições, calcule a média aritmética, o desvio médio, a variância e o desvio padrão dessa distribuição.
$\overline{x} = 4$; $d_m \simeq 1{,}33$; $V_a = 2$; $S \simeq 1{,}41$

31. Os tempos gastos por cinco operários para fazer um trabalho foram: 7 minutos, 11 minutos, 8 minutos, 14 minutos, 10 minutos. Nessas condições, determine:

a) o tempo médio; $\overline{x} = 10$

b) a mediana desses dados; $M_d = 10$.

c) o desvio médio desse conjunto de dados; $d_m = 2$

d) a variância e o desvio padrão. $V_a = 6$; $S \simeq 2{,}45$

32. As velocidades máximas das cinco voltas dadas em um teste de Fórmula 1, em km/h, foram: 190, 198, 196, 204 e 202. Nessas condições, determine:

a) a média das velocidades; 198 km/h

b) a variância; 24 km^2/h^2

c) o desvio padrão. $\simeq$ 4,9 km/h

33. A seguinte distribuição de frequência nos mostra as terras cultivadas dos sítios de determinada região, em hectare. Nessas condições, determine:

Classes	f_i
[2; 8[	10
[8; 14[	9
[14; 20[	21
[20; 26[	7
[26; 32[	3

Fonte: Dados fictícios.

a) a média aritmética; 15,08

b) o desvio médio; $\simeq$ 5,50

c) a variância; $\simeq$ 45,27

d) o desvio padrão. $\simeq$ 6,73

34. Dez canções concorrentes em um festival foram apreciadas por um júri que lhes atribuiu as seguintes pontuações: 1; 5; 4; 3; 2; 1; 1; 1; 5; 2.

a) Elabore uma tabela com as frequências e com os quadrados dos desvios para a média. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Calcule a moda e a mediana. $M_0 = 1$; $M_d = 2$

c) Determine o desvio padrão. $S \simeq 1{,}57$

35. O quadro mostra as notas de uma prova de Matemática feita pelos alunos do 1º ano do Ensino Médio de um determinado colégio.

Nota				
8	5	4	4	3
3	6	5	4	8
3	5	5	2	4
6	2	4	7	6
9	7	6	6	5

Fonte: Dados fictícios.

Nessas condições:

a) Organize um quadro de distribuição de frequências absolutas, frequências absolutas acumuladas e frequências relativas. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Represente a distribuição das frequências absolutas por meio de um diagrama de barras.

c) Determine a média aritmética da distribuição.

d) Determine a mediana da distribuição.

e) Determine o desvio médio da distribuição.

f) Determine o desvio padrão.

36. O quadro nos mostra o número de defeitos por carro de uma determinada marca, numa frota de 40 carros.

Defeito por carro (x_i)	0	1	2	3	4	5
Frequência (f_i)	6	9	7	4	9	5

Fonte: Dados fictícios.

Nessas condições, determine:

a) a média aritmética; $\overline{x} = 2{,}4$

b) o desvio médio; $d_m \simeq 1{,}49$

c) a variância; $V_a \simeq 2{,}79$

d) o desvio padrão. $S \simeq 1{,}67$

37. O lucro mensal de um jornaleiro está representado a seguir.

Janeiro	1 713,18	Julho	1 709,37
Fevereiro	1 736,25	Agosto	1 763,06
Março	1 674,66	Setembro	1 671,82
Abril	1 671,82	Outubro	1 671,82
Maio	1 731,73	Novembro	1 745,82
Junho	1 704,81	Dezembro	1 648,69

Fonte: Dados fictícios.

Nessas condições, determine:

a) o lucro médio do jornaleiro neste ano; $\simeq$ 1 703,59

b) o desvio médio. $\simeq$ 29,85

38. Leia as informações a seguir e faça o que se pede. Professor, aproveite a oportunidade para conversar com os alunos sobre os problemas ambientais causados pelo desmatamento. O professor de Biologia e o de Geografia podem enriquecer essa discussão.

A Amazônia Legal é uma área que corresponde a 59% do território brasileiro e engloba a totalidade de oito estados (Acre, Amapá, Amazonas, Mato Grosso, Pará, Rondônia, Roraima e Tocantins) e parte do Estado do Maranhão (a oeste do meridiano de 44°W), perfazendo 5,0 milhões de km². Nela residem 56% da população indígena brasileira. O conceito de Amazônia Legal foi instituído em 1953 e seus limites territoriais decorrem da necessidade de planejar o desenvolvimento econômico da região. [...]

IPEA. O que é? Amazônia Legal. Revista **Desafios do Desenvolvimento**, Brasília-DF, ano 5, 8 jun. 2008. Disponível em: <http://www.ipea.gov.br/desafios/index.php?option=com_content&id=2154:catid=28&Itemid=23>. Acesso em: 31 dez. 2015.

Desde 1988, o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe) analisa o desmatamento na Amazônia Legal por meio de imagens de satélite. Esse monitoramento, chamado projeto PRODES, identifica alteração na cobertura florestal por **corte raso**. [...]

A partir de 2004, o Governo Federal instituiu o Plano de Ação para Prevenção e Controle do Desmatamento na Amazônia Legal (PPCDAm). A medida fomenta políticas públicas para manter a floresta em pé, por meio do monitoramento e de ações de fiscalização e controle.

Abaixo estão registradas algumas informações e conquistas alcançadas após a implantação do PPCDAm:

- **25 milhões** de habitantes da Amazônia beneficiados pelo PPCDAm.
- **84%** redução do desmatamento em 2012 em comparação a 2004, ano de implantação do PPCDAm.
- **4.571 km²** menor taxa de desmatamento registrada em 2012.
- **76%** da meta voluntária de redução do desmatamento até 2020 já foi alcançada.

MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. Desmatamento na Amazônia Legal. Disponível em: <http://www.mma.gov.br/mma-em-numeros/desmatamento>. Acesso em: 31 dez. 2015.

Corte raso: É a eliminação de toda e qualquer vegetação existente sobre uma área. Normalmente um corte raso é feito para plantar outra cultura, seja agrícola ou florestal, ao que chamamos de conversão, ou seja, estamos fazendo uma conversão de uma área que tinha floresta para plantar nela soja, milho, ou reflorestar, etc.

Série histórica de monitoramento

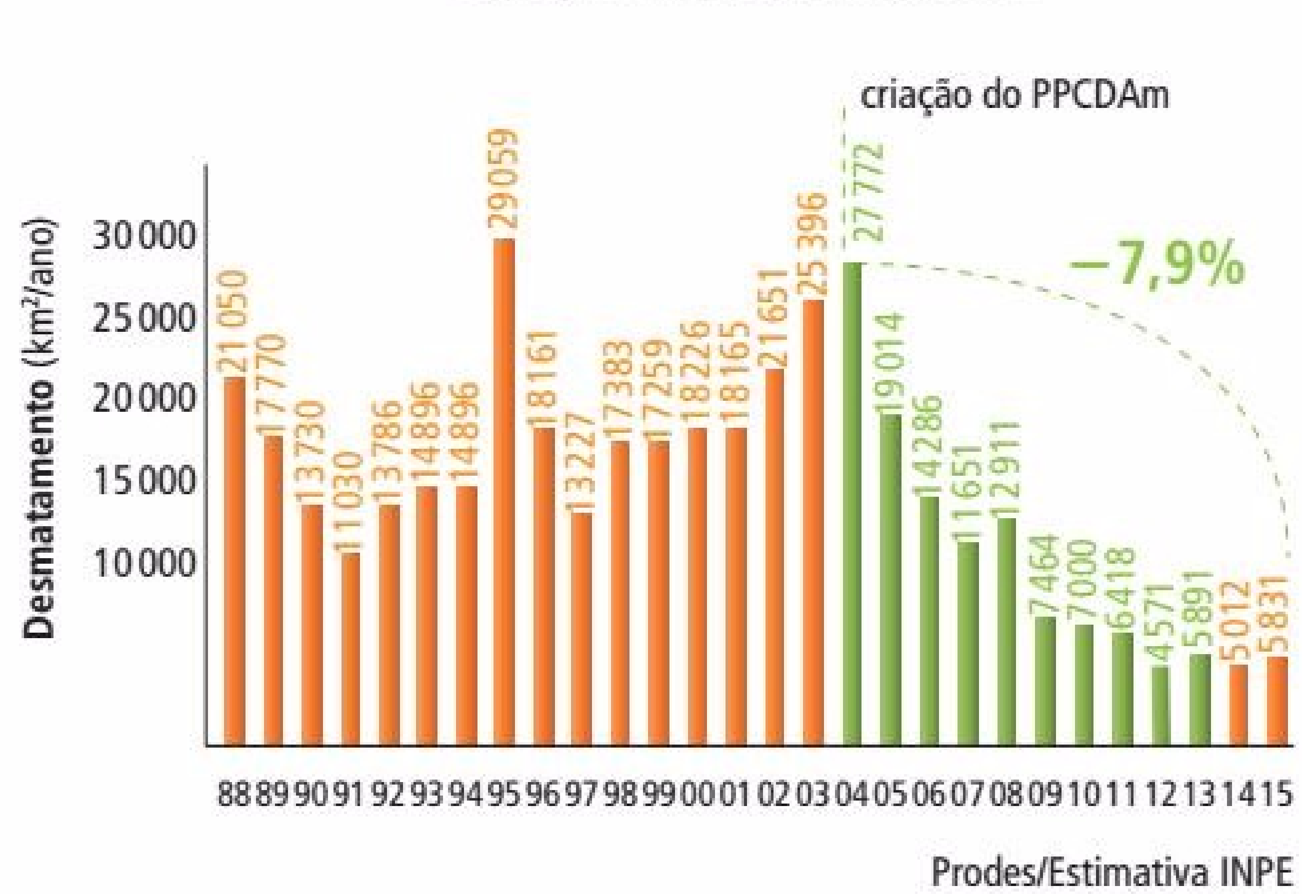
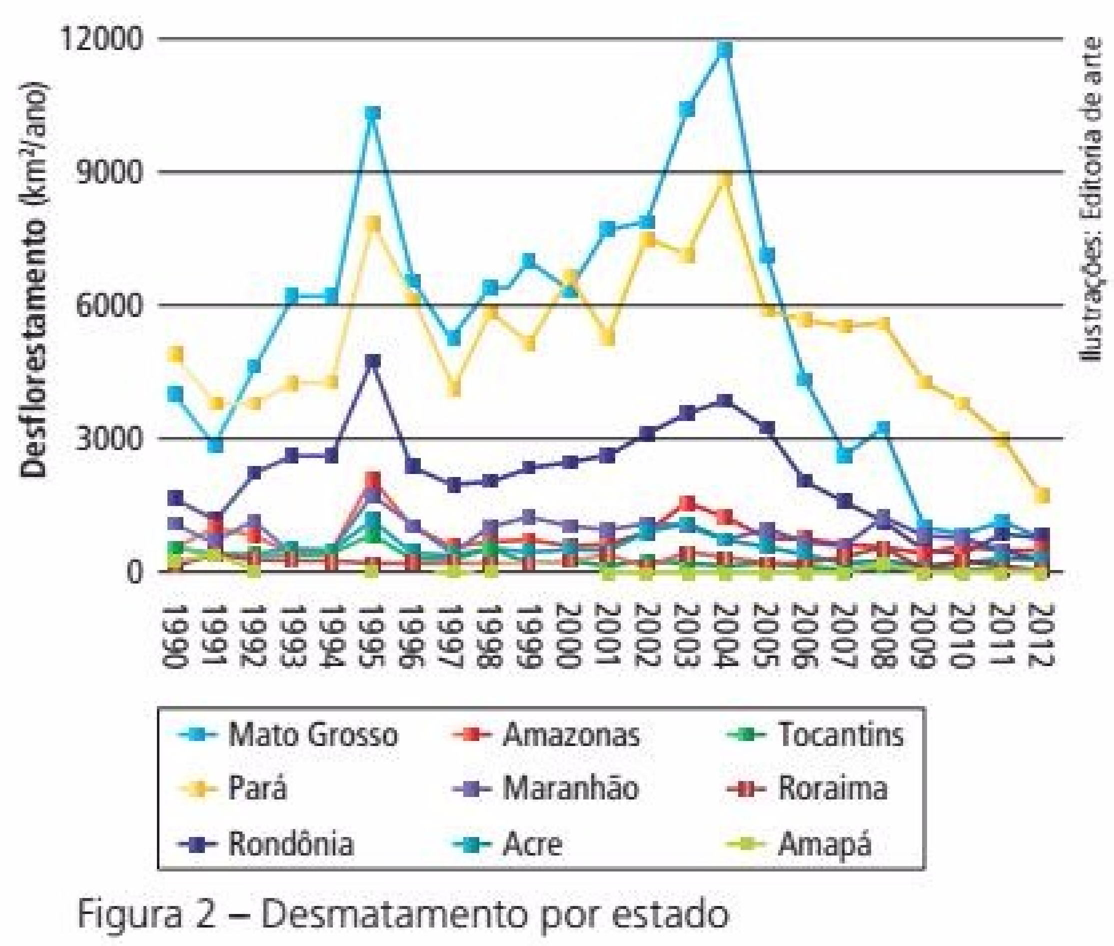


Figura 1 – Desmatamento total

Fonte: MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. Desenvolvimento na Amazônia Legal. Disponível em: <http://www.mma.gov.br/mma-em-numeros/desmatamento>. Acesso em: dez. 2015.



Ilustrações: Editoria de arte

Figura 2 – Desmatamento por estado

Fonte: MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. PPCDAm. Disponível em: <http://www.mma.gov.br/images/arquivo/80120/PPCDAm/DESMAT_ESTADOS.png>. Acesso em: 31 dez. 2015.

a) Qual o objetivo do projeto Prodes, no monitoramento da Amazônia Legal? Identificar alteração na cobertura florestal por corte raso, ou seja, desmatamento da floresta nativa.

b) Conforme informações presentes no texto, identifique:

- o estado pertencente à Amazônia Legal que teve o maior pico histórico de desmatamento, em km²/ano. Em que ano isso ocorreu? Mato Grosso, com quase 12 000 km² desmatados em 2004.
- o somatório (∑) de desmatamento da Amazônia Legal, no período de 2004 a 2014. Total de 121 990 km²/ano.
- a média de desmatamento anual da Amazônia Legal, do período de 2004 a 2014. Média de aproximadamente 11 090 km²/ano.

c) De acordo com o gráfico da figura 2, qual Estado possui o menor desvio padrão? Na prática o que isso significa?

d) Você sabe quem foi Chico Mendes? Pesquise sobre as principais lutas desse ambientalista brasileiro em prol da preservação da Floresta Amazônica. Resposta pessoal.

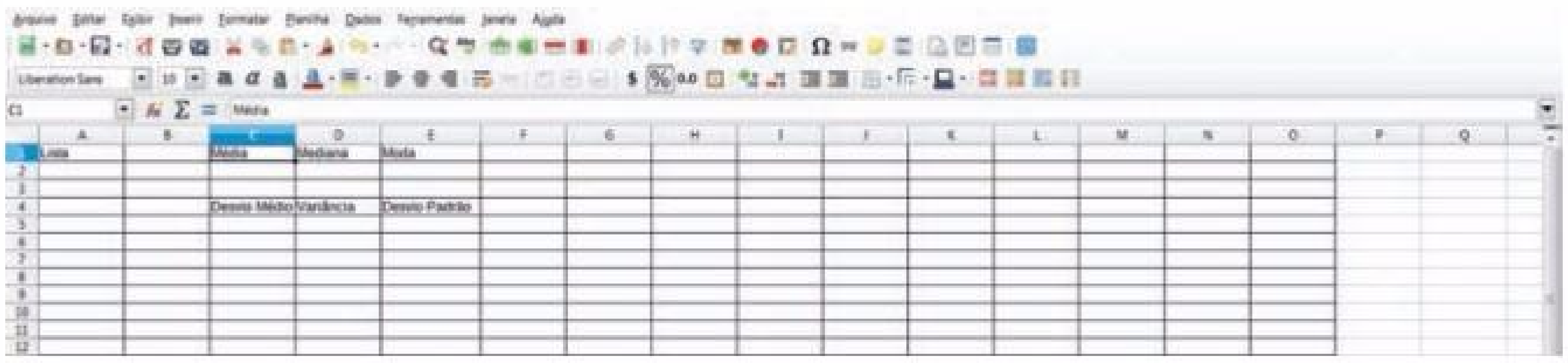
c) Amapá é o Estado que possui menor desvio padrão. Significa que o Amapá é o Estado que teve a menor alteração no índice de desmatamento entre 1990 e 2012.

Explorando a tecnologia

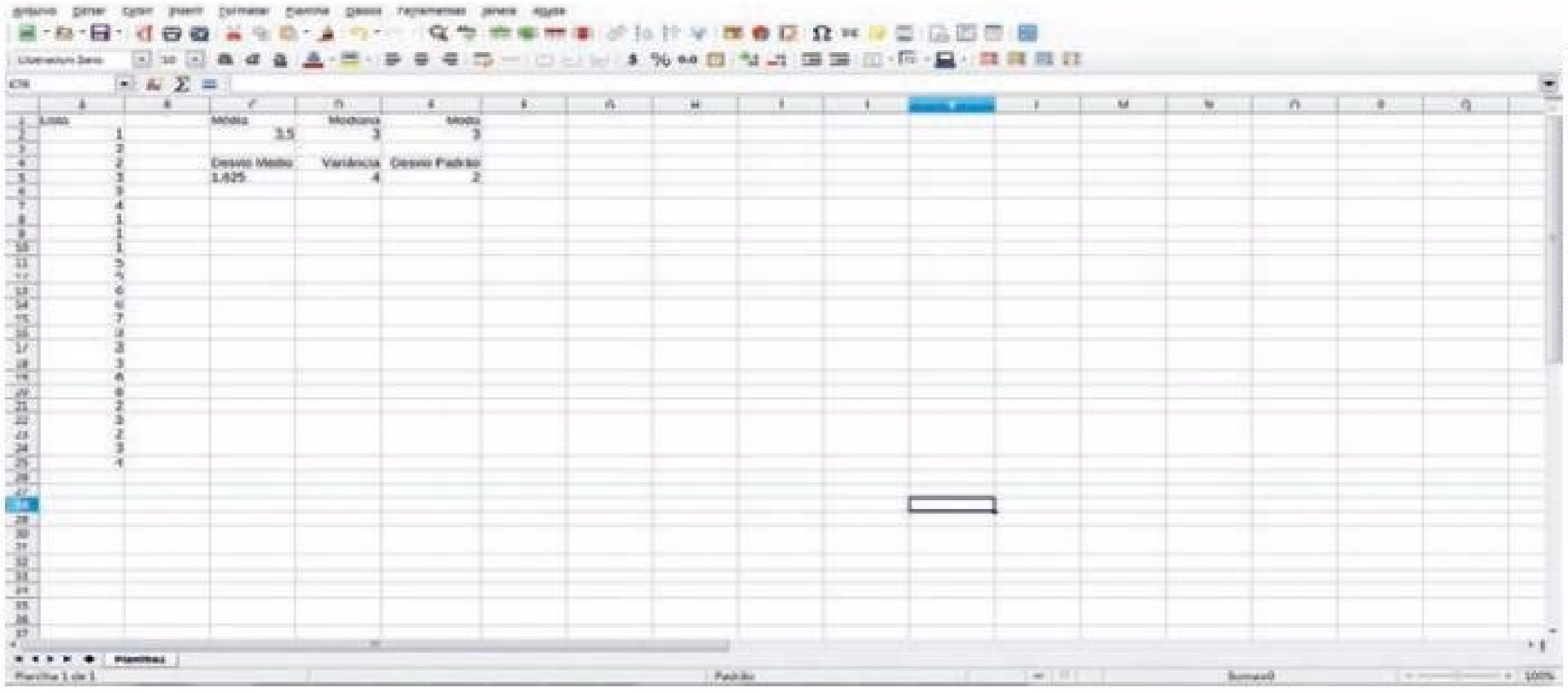
Calculadora de Medidas de Tendência Central

Utilizando a planilha eletrônica do Libre Office, vamos montar uma calculadora que nos forneça a média aritmética, mediana, moda, desvio médio, variância e desvio padrão. Para isso, siga o seguinte roteiro:

1. Na célula A1 digite "Lista"; na célula C1 digite "Média"; na célula D1 digite "Mediana"; na célula E1 digite "Moda"; na célula C4 digite "Desvio Médio"; na célula D4 digite "Variância"; na célula E4 digite "Desvio Padrão". Veja a imagem abaixo:



2. Na coluna A vamos alocar os valores de nossa lista. Como exemplo, vamos utilizar o seguinte conjunto A = {1,2,2,3,3,4,1,1,1,5,5,6,6,7,3,3,3,6,8,2,3,2,3,4}. Assim, na célula A2 devemos digitar o número 1, na célula A3 devemos digitar o número 2 e assim por diante até o último número. Repare que a última célula a ser utilizada é A25.
3. Na célula C2 devemos escrever a função"=MÉDIA(A2:A25)". É necessário acentuar a palavra média e utilizar entre as células os dois pontos (:). O valor fornecido é a média do conjunto.
4. Na célula D2 devemos escrever a função"=MED(A2:A25)". Aqui, não é necessário acentuar a palavra "med". O valor fornecido é a mediana do conjunto.
5. Na célula E2 devemos escrever a função"=MODO(A2:A25)". A função na planilha é modo e não moda. O valor fornecido é a moda do conjunto.
6. Na célula C5 devemos escrever a função"=DESV.MÉDIO(A2:A25)". É necessário acentuar a palavra média. O valor fornecido é o desvio médio do conjunto.
7. Na célula D5 devemos escrever a função"=VAR(A2:A25)". O valor fornecido é a variância do conjunto.
8. Na célula E5 devemos escrever a função"=DESVPAD(A2:A25)". O valor fornecido é o desvio padrão do conjunto.



Crédito de imagens: Libre Office

Atividades

Escreva no caderno

1. Colete as idades dos alunos de sua sala de aula e calcule os valores das medidas de tendência central por meio da planilha eletrônica. Resposta pessoal.
2. Pesquise o número de medalhas alcançadas pelo Brasil em Olimpíadas e calcule os valores de medidas de tendência central. Resposta pessoal.

História da Matemática

William Playfair e a Psicologia dos Gráficos

William Playfair foi o primeiro a elaborar e publicar diversos tipos de gráficos estatísticos (gráficos de linha, gráficos de barras, gráficos de setores e gráficos circulares). Os gráficos da Estatística moderna são praticamente os mesmos utilizados por Playfair. Embora possam ser apontados casos isolados de diagramas anteriores, a publicação de gráficos estatísticos começou com William Playfair em 1786.

Coleção particular

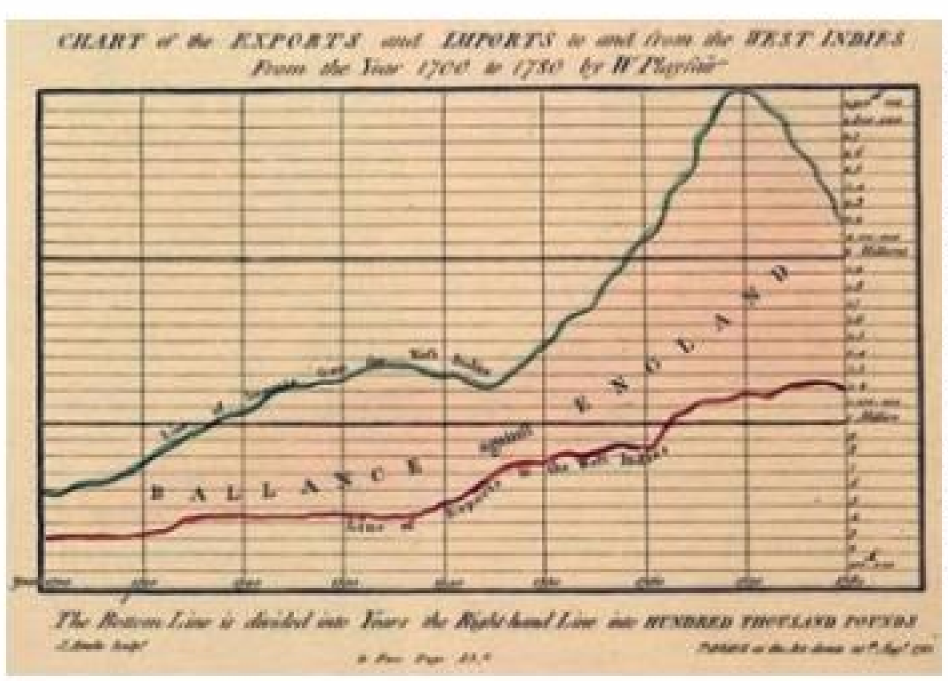
William Playfair (1759-1823)

Playfair tinha convicção de que seus gráficos eram eficazes para a comunicação de dados. [...] Playfair entendia que os gráficos estatísticos poderiam ajudar no processamento de informação, reduzindo exigências sobre atenção, memória de trabalho e memória de longo prazo, apesar de Playfair não ter utilizado esses termos específicos que entraram em pauta no século 20.

As influências que inspiraram Playfair a construir gráficos que exploram a percepção e capacidades cognitivas humanas são diversas. Algumas delas estão associadas a sua educação em ciências e humanidades, a sua formação em engenharia, e suas experiências no comércio e publicação de livros, mas foi sua interação com impressores, gravadores e cartógrafos que forneceram o modelo que ele habilmente adaptou para inventar os primeiros gráficos estatísticos. [...]

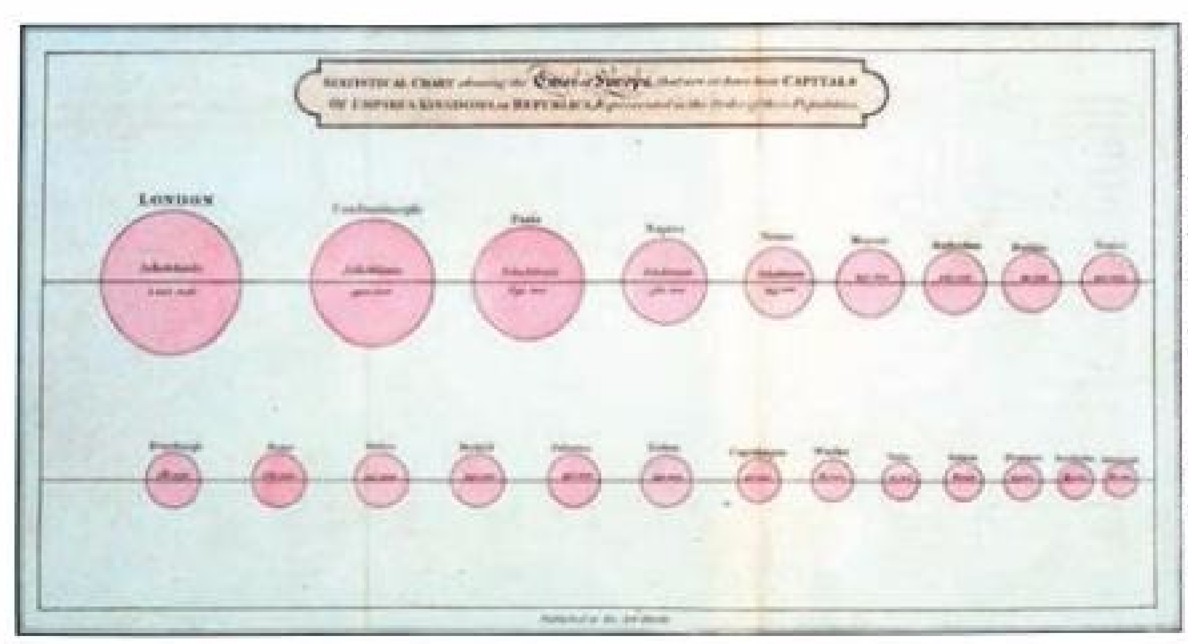
Os gráficos de Playfair quase sempre comparavam diferentes domínios (linhas, cores, faixas etc.) para não exigir atenção e capacidade de memorização.

Os gráficos nunca excediam três ou quatro conjuntos de dados; não se utilizava mais que três ou quatro cores nos gráficos; o nome que representa a informação do gráfico era posicionado próximo a ele, evitando que ficasse distante; as áreas coloridas eram nomeadas diretamente no seu espaço, evitando a aplicação de legendas em outra região.



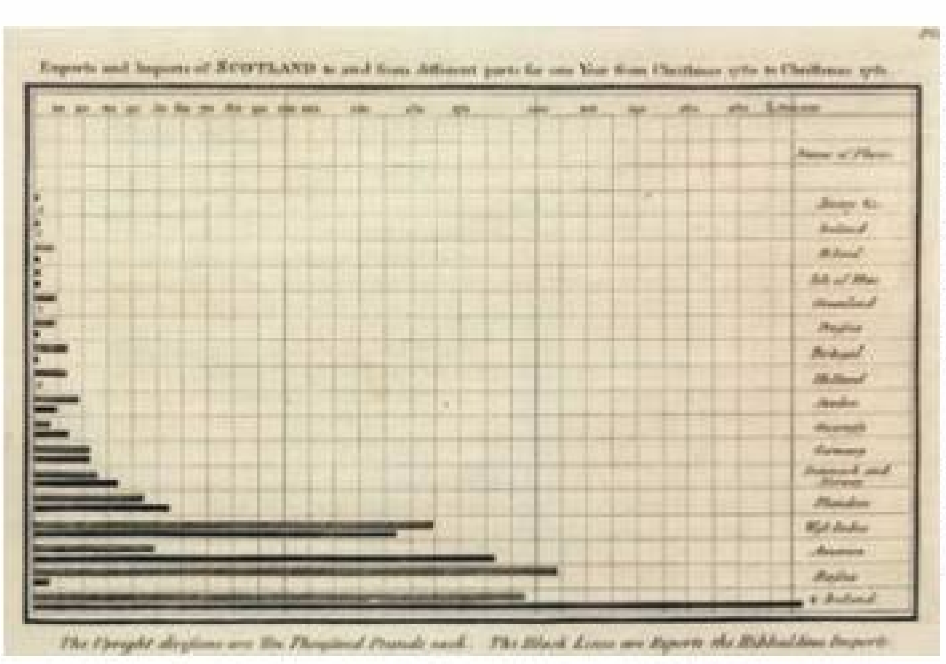
Em The Commercial and Political Atlas. 1786. Coleção particular

Figura 1 – Gráfico da obra Atlas Político e Comercial (1786).



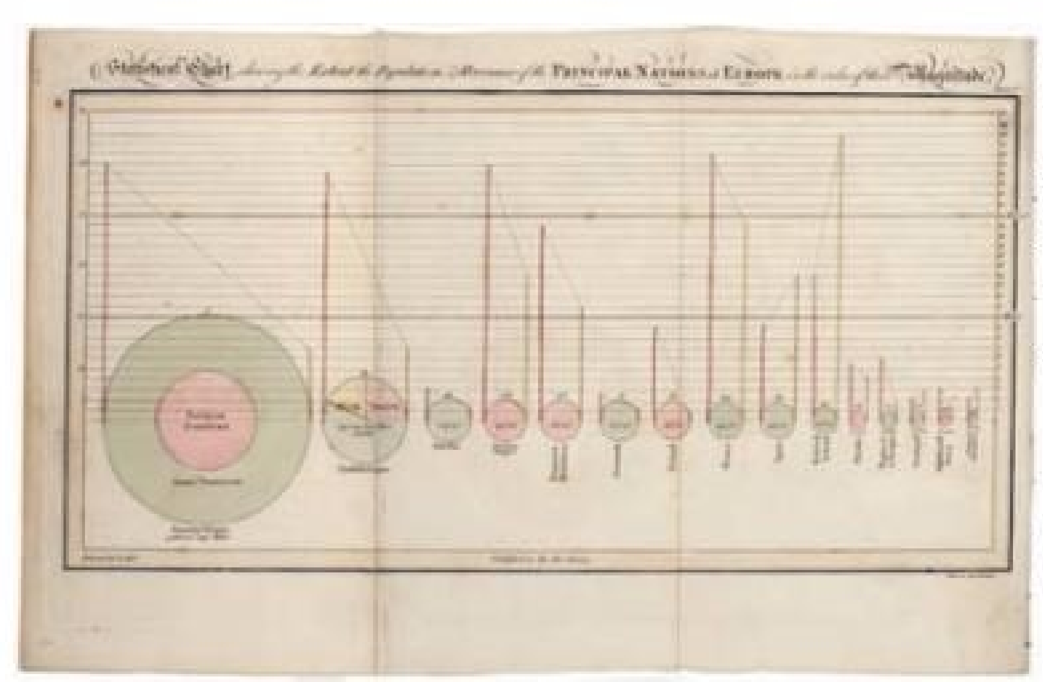
Em The Commercial and Political Atlas. 1786. Coleção particular

Figura 2 – Utilização de diferentes círculos para codificar quantidades.



Em The Commercial and Political Atlas. 1786. Coleção particular

Figura 3 – Utilização de barras para comparar exportação e importação.



Em The Commercial and Political Atlas. 1786. Coleção particular

Figura 4 – Utilização de áreas circulares para codificar quantidades.

Fonte da tradução e imagens: site - http://www.psych.utoronto.ca/users/spence/Spence%20(2006).pdf

Atividades

Escreva no caderno

1. Segundo Playfair, como os gráficos poderiam ajudar no processamento da informação? Reduzindo exigências sobre atenção, memória de trabalho e memória de longo prazo.
2. Entre os gráficos estudados, qual nome poderia receber o gráfico da figura 2? Pictograma
3. Que tipo de gráfico representa a figura 3? Gráfico de barras horizontais.

Exercícios complementares

Escreva no caderno

1. (UFJF-MG) A editora de uma revista de moda resolveu fazer uma pesquisa sobre a idade de suas leitoras. Para isso selecionou, aleatoriamente, uma amostra de 25 leitoras. As idades que constaram da amostra foram:

19 20 21 20 19 20 19 20 21
21 21 22 20 21 22 22 23 19
20 21 21 23 20 21 19

Considerando as informações dadas, faça o que se pede:

a) Construa no caderno a tabela de frequência absoluta (*f*) e relativa (*fr*) a partir dos dados acima. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Foi escrita uma reportagem dirigida às leitoras de 21 anos. Considerando que a pesquisa admite uma margem de erro de 2% para mais e para menos, quantas leitoras dessa idade leram a matéria, sabendo-se que foram vendidas 3 500 revistas? Entre 1 050 e 1 190 leitoras.

2. A tabela mostra o tipo de sobremesa escolhida pelos clientes de um restaurante após o almoço.

Sobremesas	Sorvete	Torta de morango	Frutas	Torta de limão
Número de clientes	32	19	16	13

Fonte: Dados fictícios.

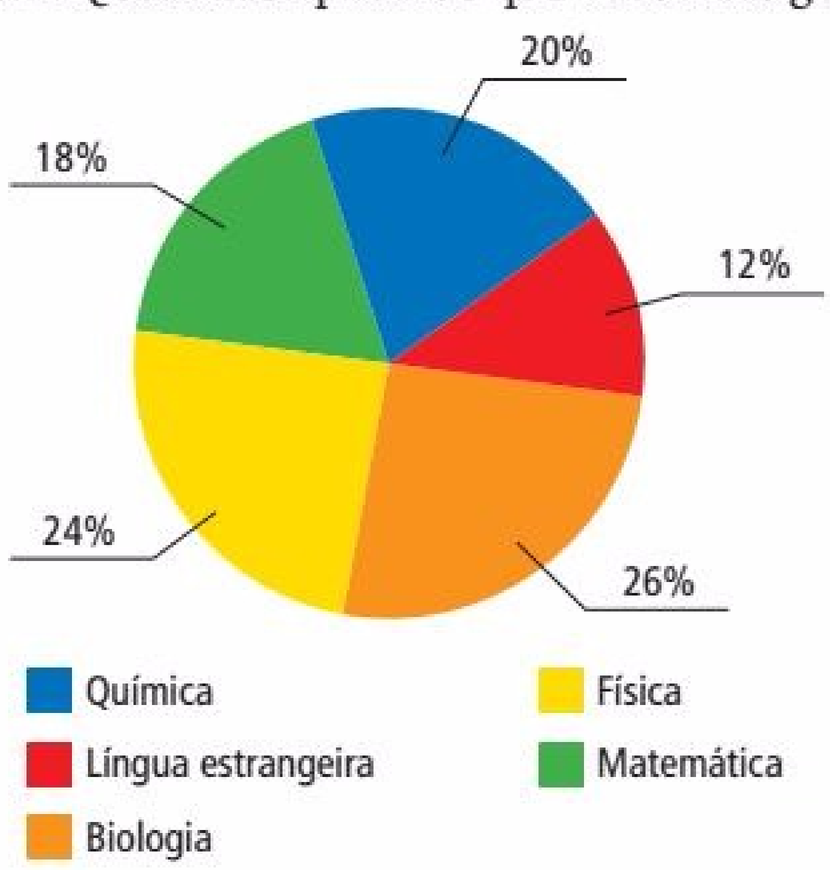
Com base nesses dados, construa o gráfico: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) de colunas das frequências absolutas;

b) de colunas da frequência relativa percentual;

c) de setores da frequência relativa percentual.

3. (Unimontes-MG) O gráfico de setor, abaixo, foi construído após uma pesquisa feita a 450 alunos do Ensino Médio do Colégio Alfa que responderam à seguinte pergunta: Qual a disciplina de que você mais gosta?

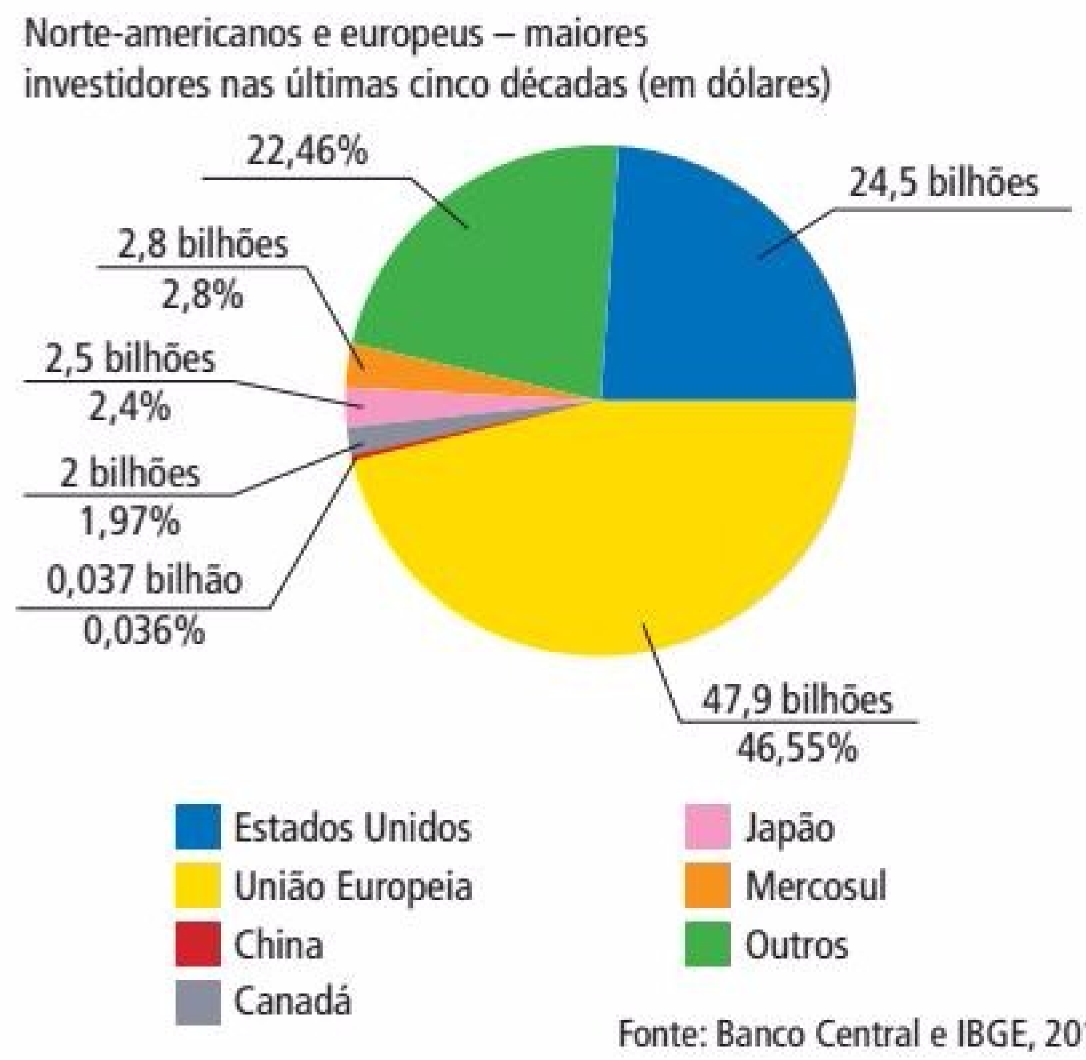


O ângulo do setor que indica o número de alunos que gostam da disciplina Física mede:

x a) 86°24'
b) 86°40'
c) 86°4'
d) 88°4'

4. Observe os dados contidos no gráfico abaixo.

Investimentos estrangeiros no Brasil



Ilustrações: Editoria de arte

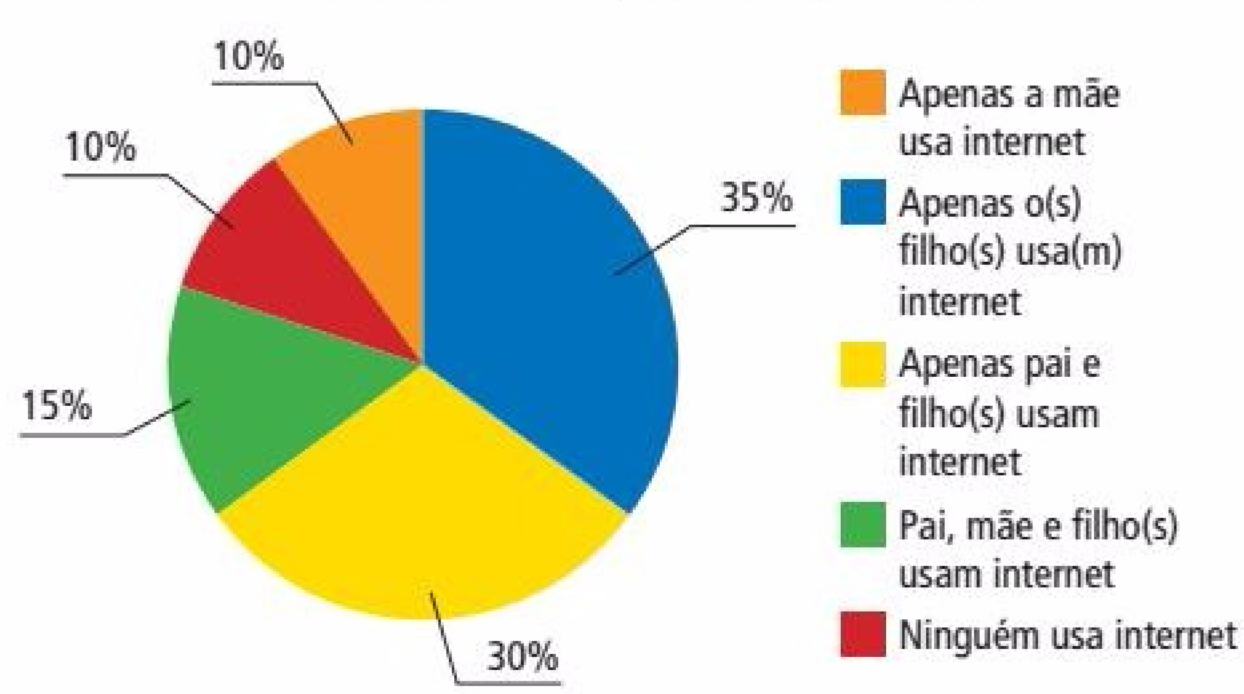
Fonte: Banco Central e IBGE, 2011.

a) Por um erro de impressão, não foi colocado o percentual aproximado dos investimentos dos Estados Unidos no Brasil nas últimas cinco décadas. Determine esse percentual. 23,78%

b) Faça uma tabela com os dados do gráfico, colocando as frequências absolutas (inclusive a denominada **Outros**) e relativas. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

5. (Epcar-MG) O gráfico abaixo representa o resultado de uma pesquisa realizada com 2 000 famílias diferentes constituídas de pai, mãe e filho(s) a respeito do uso da internet em suas respectivas residências.

Consulta a 2 000 famílias sobre o uso da internet



Com base nos dados, é possível afirmar que o número de famílias em que:

a) os filhos usam internet é menor que 700.

x b) mãe e filho(s) usam a internet nunca é menor que 300.

c) o pai usa internet é, no máximo, 600.

d) pai, mãe e filho(s) usam internet é a metade do número de famílias em que apenas filho(s) usa(m) internet.

6. (UAM-SP) A Estatística utiliza medidas de tendência central denominadas média, moda e mediana. Essas medidas representam, respectivamente: a média aritmética, o valor que ocorre com maior frequência e o elemento que ocupa a posição central de um conjunto ordenado de dados.

Sendo assim, considerando um grupo de 9 jogadores de voleibol de um certo time, cujas alturas em centímetros são: 185, 187, 190, 190, 195, 198, 198, 198 e 205, podemos dizer que a média, a moda e a mediana da altura dos componentes desse time são, respectivamente:

a) 190 cm, 195 cm e 198 cm

b) 194 cm, 198 cm e 200 cm

c) 198 cm, 195 cm e 192 cm

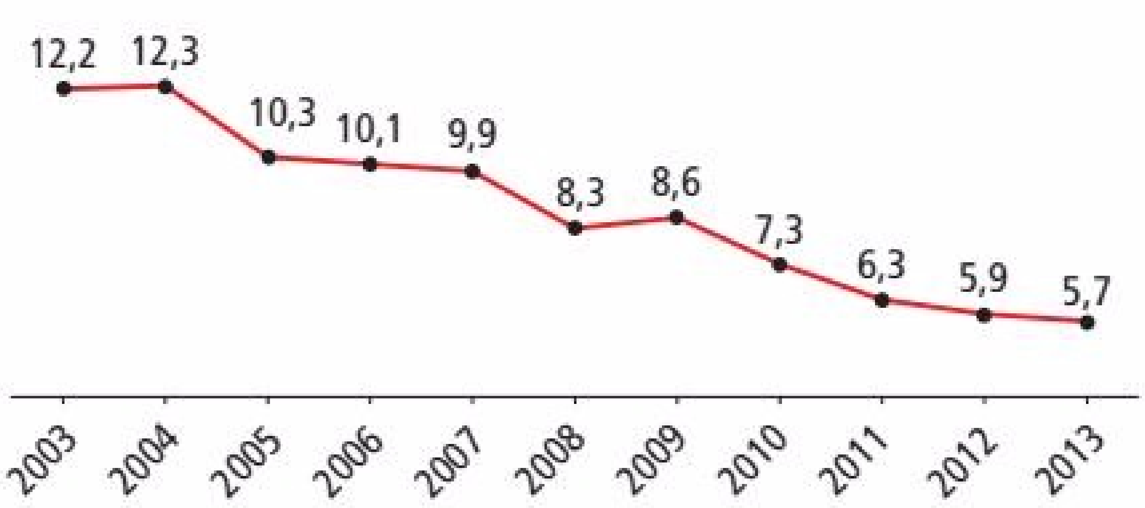
x d) 194 cm, 198 cm e 195 cm

e) 198 cm, 192 cm e 190 cm

7. (IFRN) O gráfico 1, segundo dados do IBGE, apresenta a taxa média de desemprego no 1º semestre de cada ano, no período de 2003 a 2013. A partir do gráfico 1, é correto afirmar que a média dos percentuais de desemprego no primeiro semestre no período apresentado, foi, aproximadamente, de:

Taxa média de desemprego no 1º semestre, em %

(Taxas mensais de desemprego no 1º sem/6)



a) 6,5% b) 7,1% x c) 8,8% d) 9,1%

8. (Unimontes-MG) A tabela a seguir representa as alturas de 40 alunos de uma classe do 1º ano do Ensino Médio de uma determinada escola.

Altura	Número de alunos
150 – 155	7
155 – 160	9
160 – 165	15
165 – 170	5
170 – 175	3
175 – 180	1

A mediana e a média dessas turmas são, respectivamente,

a) 160,00 e 165,00

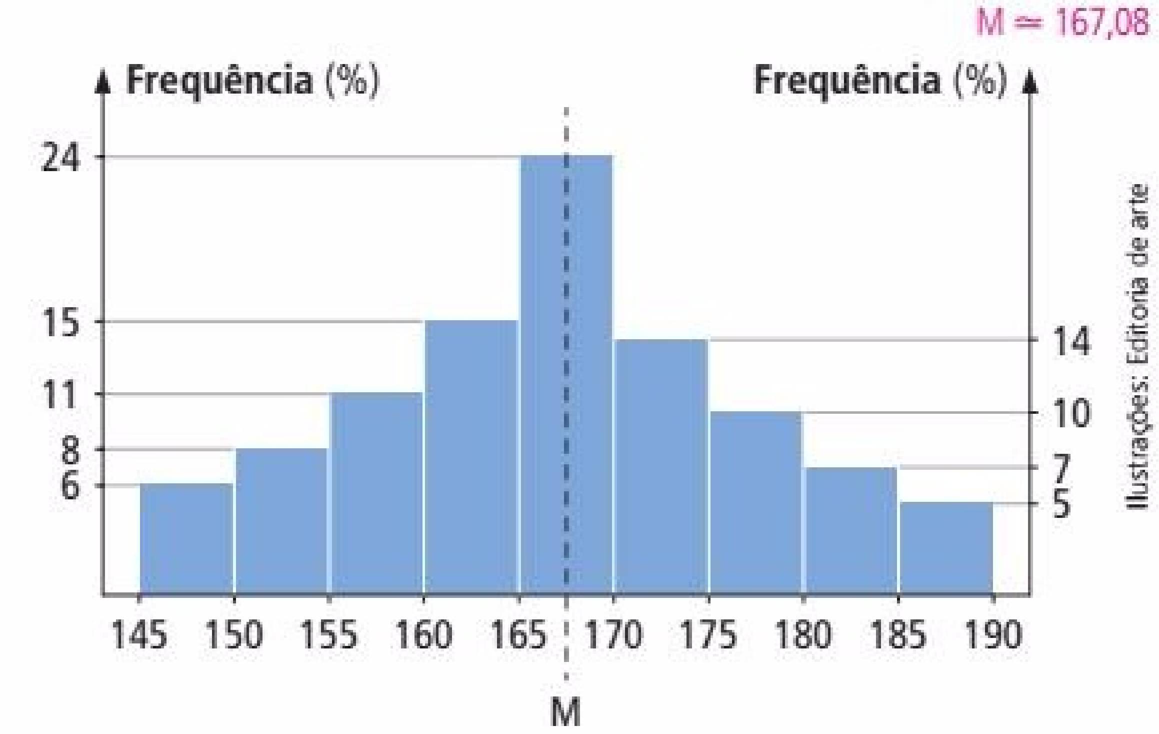
b) 162,50 e 161,22

c) 161,00 e 165,00

x d) 161,32 e 162,50

9. (PUC-SP) O histograma representa a distribuição das estaturas de 100 pessoas e as respectivas frequências. Por exemplo, na 3ª classe (155 – 160) estão situadas 11% das pessoas com estatura de 1,55 m a 1,59 m. A 5ª classe (165 – 170) chama-se classe mediana. Pelo ponto *M* situado na classe mediana, traça-se uma reta paralela ao eixo das frequências, de modo a dividir a área da figura formada pelos nove retângulos das frequências em duas regiões de mesma área. Determine a abscissa do ponto *M* (mediana das observações).

M ≃ 167,08



10. (PUC-GO) Um determinado concurso público avaliou *n* candidatos, atribuindo-lhes notas de 0 a 100 pontos. Sabe-se que:

- Exatamente 30 deles obtiveram nota máxima;
- A média aritmética dos *n* candidatos foi de 80 pontos;
- Se consideradas apenas as notas inferiores a 100 pontos, a média passa a ser de 70 pontos.

Nessas condições, pode-se afirmar que o número de candidatos, *n*, é igual a:

a) 60

b) 70

c) 80

x d) 90

11. (FEI-SP) A média das idades de um grupo de estudantes é 22 anos. Excluindo-se o mais novo deles, que tem 17 anos, a média do novo grupo formado passa a ser 23 anos. Quantos estudantes há no primeiro grupo? 6

12. (Unicamp-SP) O peso médio (média aritmética dos pesos) dos 100 alunos de uma academia de ginástica é igual a 75 kg. O peso médio dos homens é 90 kg e o das mulheres é 65 kg.

a) Quantos homens frequentam a academia? 40

b) Se não são considerados os 10 alunos mais pesados, o peso médio cai de 75 kg para 72 kg. Qual é o peso médio desses 10 alunos? 102

13. (Unicamp-SP) A média aritmética das idades de um grupo de 120 pessoas é de 40 anos. Se a média aritmética das idades das mulheres é de 35 anos e a dos homens é de 50 anos, qual o número de pessoas de cada sexo, no grupo? 40 homens e 80 mulheres.

14. (IFG-GO) A tabela abaixo contém os dados referentes ao número de clientes de uma agência bancária que procuraram atendimento no setor de ouvidoria no período de janeiro a julho desse ano.

Mês	Número de clientes
Janeiro	55
Fevereiro	29
Março	42
Abril	38
Maio	32
Junho	26
Julho	30
Total	252

Com base nessas informações, é correto afirmar que:

a) O valor da moda do número de clientes atendidos é igual ao valor da mediana do número de clientes atendidos.

b) O valor da moda do número de clientes atendidos é menor que o valor da média do número de clientes atendidos.

x c) O valor da média do número de clientes atendidos é maior que o valor da mediana do número de clientes atendidos.

d) O valor da mediana do número de clientes atendidos é igual ao valor da média do número de clientes atendidos.

e) O valor da mediana do número de clientes atendidos supera o valor da média do número de clientes atendidos em 3 clientes.

15. As idades das quarenta pessoas que prestam um concurso de seleção para um banco são as seguintes:

18, 18, 20, 22, 21, 18, 19, 20, 22, 18,
19, 20, 21, 18, 20, 19, 20, 19, 22, 19,
20, 21, 20, 18, 19, 18, 22, 21, 20, 19,
20, 18, 21, 18, 18, 19, 20, 19, 18, 18

Nessas condições: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Elabore um quadro de distribuição de frequências absolutas, de frequências absolutas acumuladas e de frequências relativas.

b) Construa um gráfico de barras que represente essa distribuição.

c) Quantas pessoas têm 20 ou menos de 20 anos?

d) Determine a média do quadro de distribuição.

e) Determine a mediana da distribuição.

f) Calcule o desvio médio e o desvio padrão da distribuição.

16. (UFCG-PB) Em uma determinada região, no período de um ano, um agrônomo esteve monitorando o uso de um determinado agrotóxico em 20 propriedades rurais, para estudar os seus efeitos nas lavouras, e obteve o quadro a seguir mostrando quantas vezes as propriedades aplicaram tal agrotóxico.

Números de aplicações por propriedade (x_i)	Número de propriedades (F_i)
0	3
1	10
2	7

Usando uma distribuição de frequência representada no quadro, determine:

a) A média aritmética $\bar{x} = 1,2$ c) A variância $V_a = 0,46$

b) O desvio médio $d_m = 0,56$

17. (FGV-SP) Numa pequena ilha, há 100 pessoas que trabalham na única empresa ali existente. Seus salários (em moeda local) possuem a seguinte distribuição de frequências:

Salário	Frequência
$ 50,00	30
$ 100,00	60
$ 150,00	10

a) Qual a média dos salários das 100 pessoas? $ 90,00

b) Qual a variância dos salários? Qual o desvio padrão dos salários? $V_a = 900$. $S = \$ 30,00$

18. (Enem/MEC) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular.

Dados dos candidatos no concurso

	Marco	Paulo
Matemática	14	8
Português	15	19
Conhecimentos Gerais	16	18
Média	15	15
Mediana	15	18
Desvio Padrão	0,32	4,97

No quadro acima são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é:

a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.

x b) Marco, pois obteve menor desvio padrão.

c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.

d) Paulo, pois obteve maior mediana.

e) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

19. (Fuvest-SP) Numa classe com vinte alunos as notas do exame final podiam variar de 0 a 100 e a nota mínima para aprovação era 70. Realizado o exame, verificou-se que oito alunos foram reprovados. A média aritmética das notas desses oito alunos foi 65, enquanto a média dos aprovados foi 77. Após a divulgação dos resultados, o professor verificou que uma questão havia sido mal formulada e decidiu atribuir cinco pontos a mais para todos os alunos.

Com essa decisão, a média dos aprovados passou a ser 80 e a dos reprovados 68,8.

a) Calcule a média aritmética das notas da classe toda antes da atribuição dos cinco pontos extras. $x = 72{,}2$

b) Com a atribuição dos cinco pontos extras, quantos alunos, inicialmente reprovados, atingiram nota para aprovação? 3 alunos

20. As informações a seguir mostram o número de operários acidentados por mês numa fábrica, durante o ano de 2000.

Mês	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Maio	Jun.
Número de operários	4	8	3	6	7	7

Fonte: Dados fictícios.

Mês	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
Número de operários	3	8	4	4	3	3

Fonte: Dados fictícios.

Organize uma tabela de distribuição de frequências e determine:

a) a média aritmética dessa distribuição; $\bar{x} = 5$

b) o desvio médio. $d_m = 1{,}83$

21. O quadro mostra a distribuição das idades de 400 funcionários de uma empresa.

Classes	f_i
[20; 25[	14
[25; 30[	80
[30; 35[	46
[35; 40[	120
[40; 45[	100
[45; 50[	32
[50; 55[	8

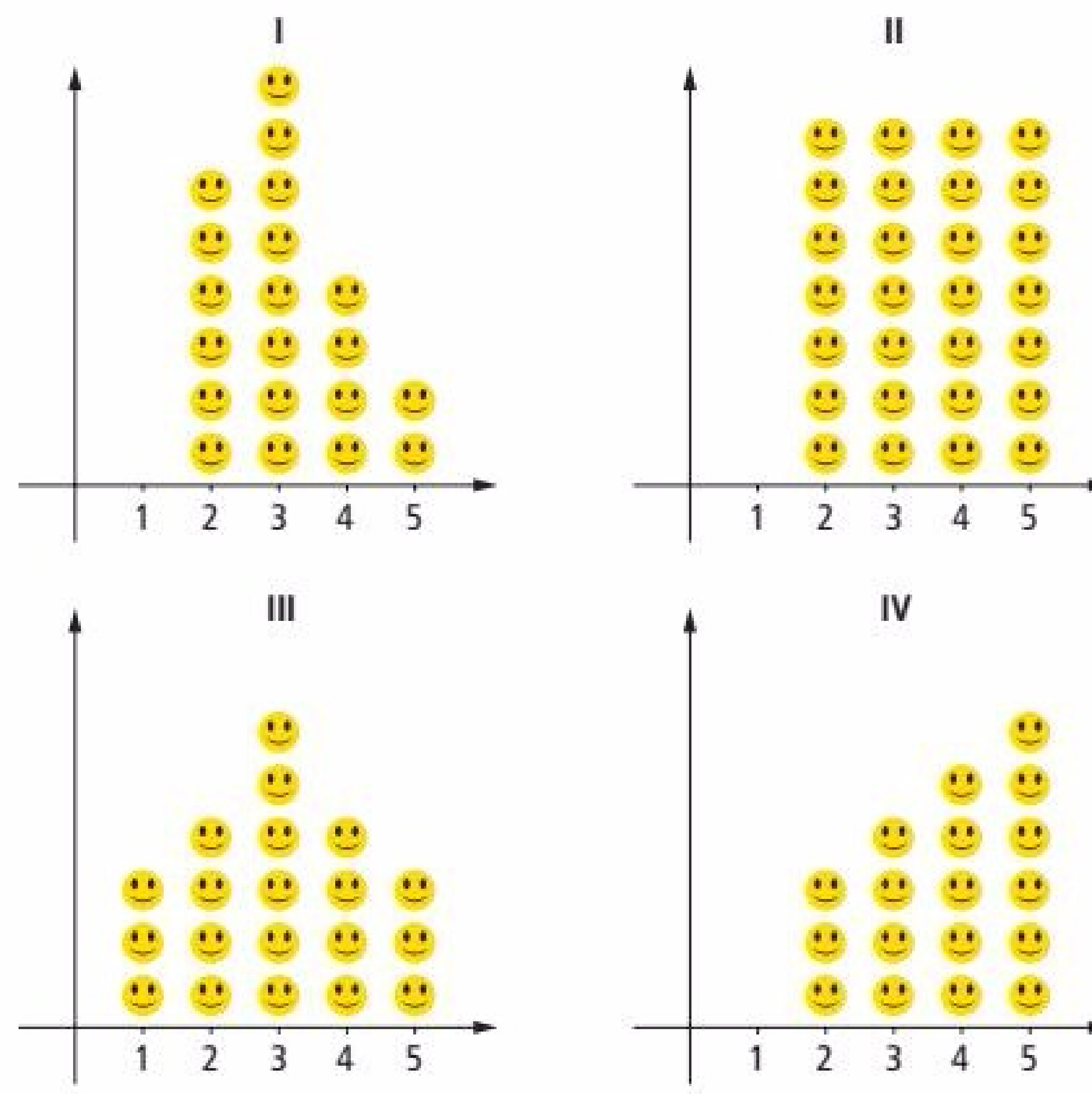
Fonte: Dados fictícios.

Nessas condições, calcule:

a) a média das idades; $\bar{x} = 36{,}75$

b) o desvio médio. $d_m = 5{,}675$

22. (UERJ) Às vésperas das eleições, verificou-se que todos os dois mil eleitores pesquisados tinham pelo menos dois nomes em quem, com certeza, iriam votar. Nos quatro gráficos a seguir, o número de candidatos que cada eleitor já escolheu está indicado no eixo horizontal e cada "carinha" representa 100 eleitores.



Ilustrações: Editoria de arte

O gráfico que está de acordo com os dados da pesquisa é o de número:

x a) I
b) II
c) III
d) IV

23. (UFVJM-MG) O desemprego voltou a cair em dezembro de 2013, segundo dados divulgados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). A taxa de 4,3% é a menor desde o início da série histórica do instituto, iniciada em março de 2002.

As taxas para o dezembro de 2012 e para o ano de 2013 estão indicadas neste gráfico.

Taxa de desemprego mensal (em %)

Fonte: IBGE

Fonte: http://g1.globo.com/economia/noticia/2014/01/desemprego-fica-em-43-em-dezembro-diz-ibge.html. Acesso em 10 de fev. 2014 (Fragmento).

A média e a mediana da taxa de desemprego mensal do ano de 2013, em pontos percentuais, são aproximadamente

x a) 5,4 e 5,5
b) 5,4 e 6
c) 5,8 e 6
d) 5,8 e 5,5

Retomando e pesquisando

Na abertura desta unidade, você viu que o IPCA é o índice oficial utilizado pelo Governo Federal para aferir as metas de inflação.

Mas o que é inflação?

Na economia, inflação é um fenômeno em que ocorre o crescimento persistente e generalizado no nível geral dos preços dos produtos e serviços disponíveis para a população. O aumento da inflação é considerado prejudicial quando a alta dos preços acontece com muita frequência, isso pode gerar instabilidade na economia e desvalorização na moeda de um país. Mais é importante não confundir inflação com desequilíbrios sazonais, pois esses últimos são causados por uma questão pontual, como falta de chuva em uma determinada produção ou a entressafra de um produto, por exemplo.

Existem outros indicadores além do IPCA, que são utilizados para o cálculo da inflação. Por exemplo, o IGP-M (Índice Geral de Preços de Mercado) registra a inflação de preços variados, desde matérias-primas agrícolas e industriais até bens e serviços finais. É muito usado na correção de aluguéis e tarifas públicas, como conta de luz. E não há restrição na renda dos pesquisados.

Melinda Fawver/Shutterstock.com

A alta dos preços dos combustíveis pode provocar alta da inflação.

Natalia Mylova/Shutterstock.com

Custo com a alimentação pode variar de acordo com a inflação.

Dmytro Zinkevych/Shutterstock.com

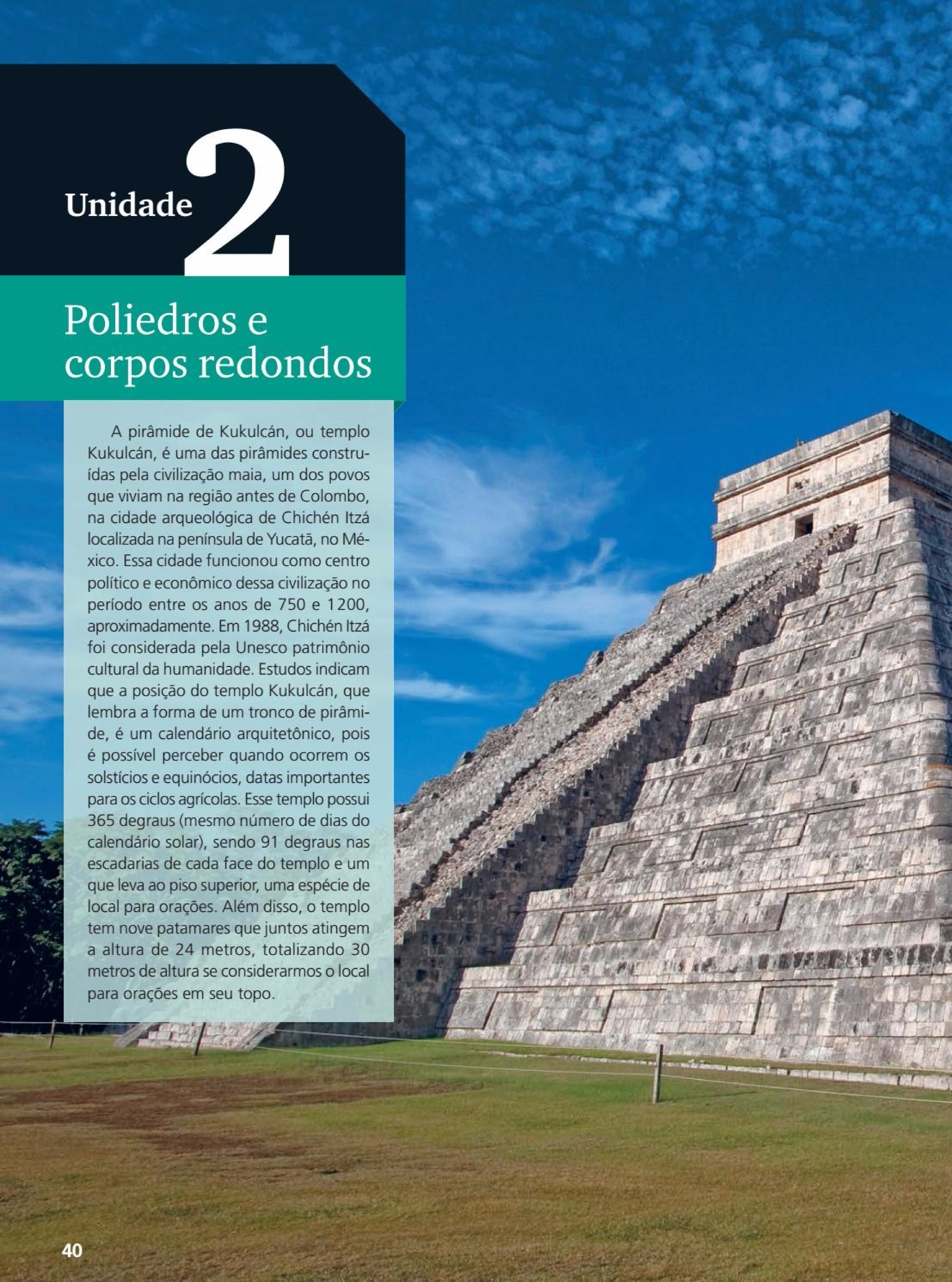
O preço de alguns serviços, como cortar o cabelo, pode sofrer variação com a inflação.

Escreva no caderno

1. Suponha que o índice de inflação do mês passado foi de 0,9% para produtos de higiene pessoal, 2,3% para alimentos e 4,8% para bebidas. Considerando que os produtos de higiene pessoal e alimentos têm peso 4 e as bebidas possuem peso 2, calcule a inflação média do período. 2,24%

2. Com mais um colega faça uma pesquisa sobre o preço de três produtos em três lugares diferentes e calculem o preço médio de cada produto. Lembre-se de que devem ser comparados apenas os preços de um mesmo produto. Resposta pessoal.

3. Reúna-se com mais dois colegas e pesquisem a variação sobre o preço de um imóvel residencial, de sua cidade, nos últimos 5 anos. Resposta pessoal.



Unidade 2

Poliedros e corpos redondos

A pirâmide de Kukulcán, ou templo Kukulcán, é uma das pirâmides construídas pela civilização maia, um dos povos que viviam na região antes de Colombo, na cidade arqueológica de Chichén Itzá localizada na península de Yucatã, no México. Essa cidade funcionou como centro político e econômico dessa civilização no período entre os anos de 750 e 1200, aproximadamente. Em 1988, Chichén Itzá foi considerada pela Unesco patrimônio cultural da humanidade. Estudos indicam que a posição do templo Kukulcán, que lembra a forma de um tronco de pirâmide, é um calendário arquitetônico, pois é possível perceber quando ocorrem os solstícios e equinócios, datas importantes para os ciclos agrícolas. Esse templo possui 365 degraus (mesmo número de dias do calendário solar), sendo 91 degraus nas escadarias de cada face do templo e um que leva ao piso superior, uma espécie de local para orações. Além disso, o templo tem nove patamares que juntos atingem a altura de 24 metros, totalizando 30 metros de altura se considerarmos o local para orações em seu topo.

Wolfgang Kaehler/LightRocket via Getty Images

Foto da pirâmide de Kukulcán, também conhecida como "el Castillo", na cidade de Chichén Itzá, México (2012).

Escreva no caderno

1. Você já ouviu falar da cidade de Chichén Itzá? Onde ela está localizada e qual foi sua importância para a civilização maia? Veja no Manual do Professor.

2. Qual é a altura do local de orações situado no topo do templo Kukulcán?

3. Em 2007, por votação realizada pela internet, o templo Kukulcán foi considerado uma das sete maravilhas do mundo moderno pela organização suíça New Open World Corporation. Reúna-se com mais dois colegas e pesquise quais são as outras seis maravilhas do mundo moderno e onde estão localizadas.

CAPÍTULO 2

Poliedros

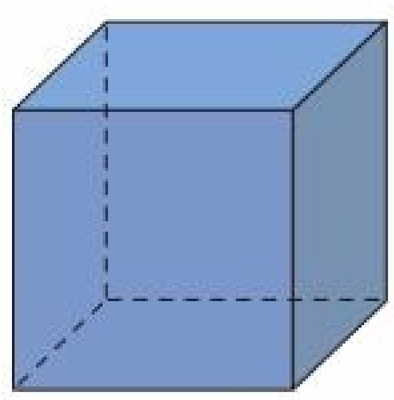
Os sólidos geométricos estão presentes na arquitetura, na engenharia, nas artes plásticas, entre outras. É comum nos depararmos com essas formas no dia a dia, basta observar as construções e alguns objetos ao seu redor. Neste capítulo vamos estudar os sólidos geométricos conhecidos como poliedros.

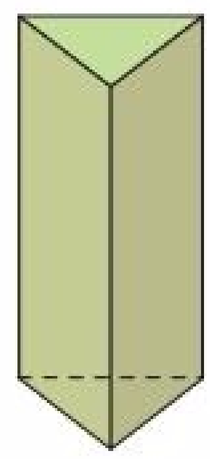
Poliedros

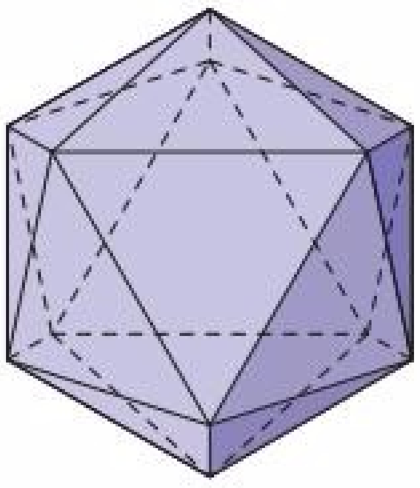
Os **poliedros** são sólidos formados pela reunião de um número finito de polígonos e a região do espaço limitada por eles, em que:

- cada lado de um desses polígonos é comum a dois e somente dois polígonos;
- a intersecção de dois polígonos quaisquer é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

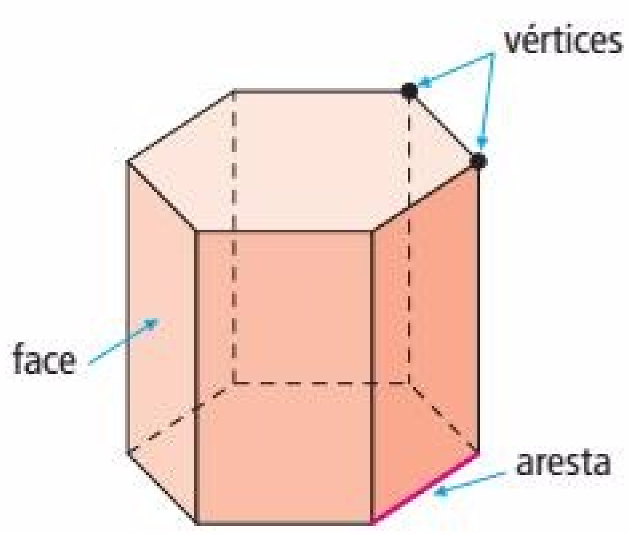
Observe alguns exemplos de poliedros:







Ilustrações: Editoria de arte



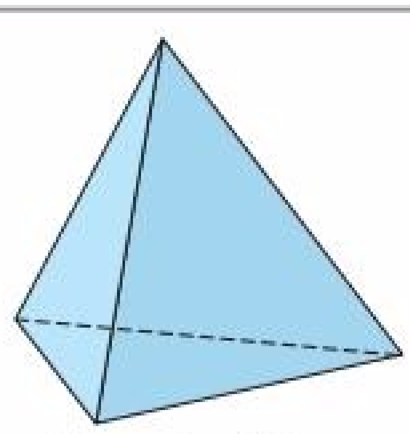
Em um poliedro, destacamos os seguintes elementos:

- **faces**: são os polígonos que formam a superfície do poliedro;
- **arestas**: são os lados comuns a duas faces do poliedro;
- **vértices**: são os vértices das faces do poliedro.

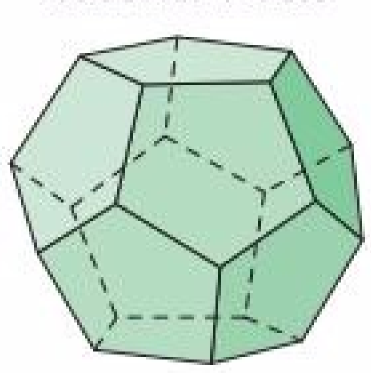
Assim como os polígonos são nomeados pelo seu número de lados, os poliedros são nomeados pelo seu número de faces. Observe a seguir uma tabela com o número de faces e o respectivo nome de alguns poliedros.

Poliedro: **poli** vem do grego *polys* (muito ou vários) e **edro** vem do grego *hedra* (face), ou seja, figura de **muitas faces**.

Número de faces	Nome do poliedro
4	tetraedro
5	pentaedro
6	hexaedro
7	heptaedro
8	octaedro
9	eneaedro
10	decaedro
11	undecaedro
12	dodecaedro
20	icosaedro



Tetraedro: 4 faces



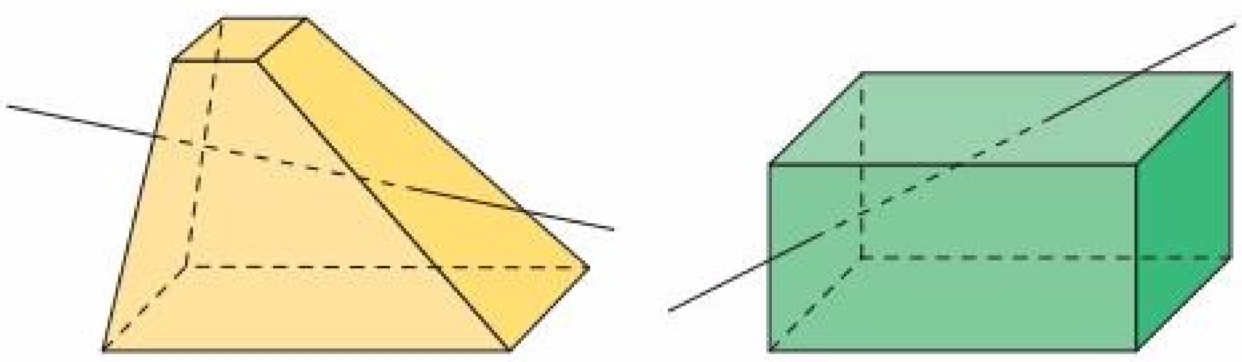
Dodecaedro: 12 faces

Poliedros convexos e não convexos

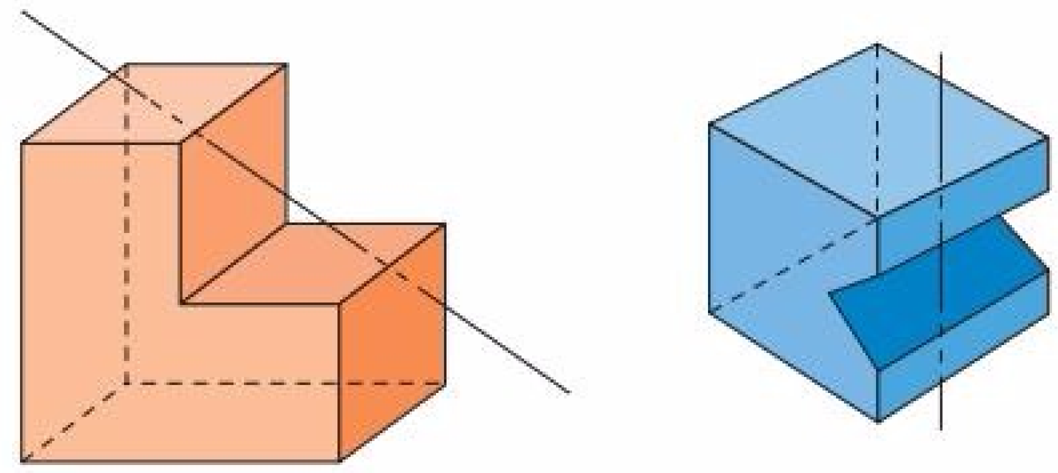
Em um poliedro, se qualquer reta, não paralela a nenhuma das faces, intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos, dizemos que ele é **convexo**, caso contrário, ele é **não convexo**.

Exemplos:

Poliedros convexos



Poliedros não convexos



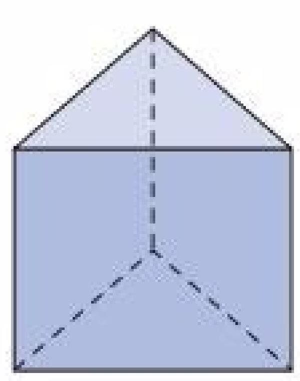
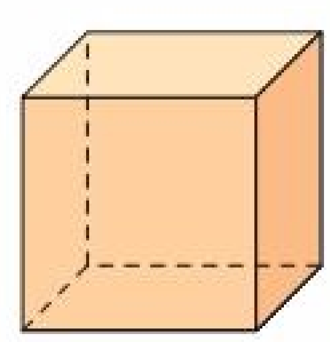
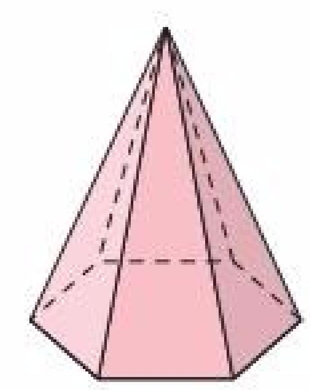
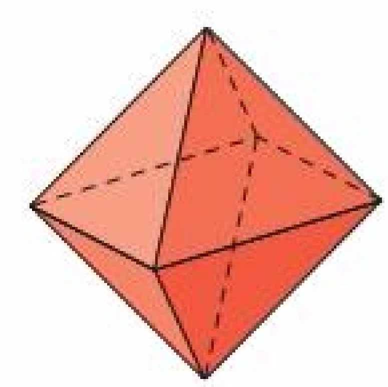
Neste capítulo, concentraremos nossos estudos nos poliedros convexos.

rook76/Shutterstock.com

Selo postal da Suíça em homenagem a Leonhard Euler.

Relação de Euler

Existe uma relação importante que envolve o número de faces (*F*), o número de arestas (*A*) e o número de vértices (*V*) de um poliedro. Essa relação é válida para todo poliedro convexo (e alguns poliedros não convexos) e recebe o nome de **relação de Euler**, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Veja:

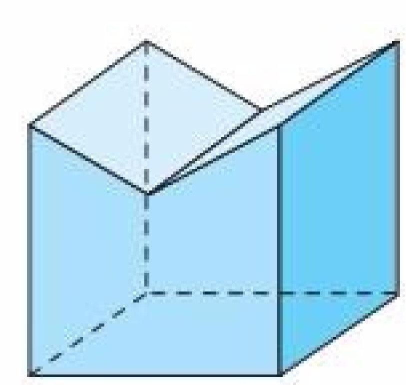
Poliedro				
F	5	6	7	8
A	9	12	12	12
V	6	8	7	6
V − A + F = 2	6 − 9 + 5 = 2	8 − 12 + 6 = 2	7 − 12 + 7 = 2	6 − 12 + 8 = 2

Ilustrações: Editoria de arte

Pelos resultados, podemos observar que a relação V − A + F = 2 se mantém constante para os poliedros considerados.

A relação de Euler pode ser empregada para determinar o número de um dos elementos (faces, arestas ou vértices) de um poliedro convexo, desde que os outros dois sejam conhecidos.

Os poliedros em que é válida a relação de Euler são conhecidos como **poliedros eulerianos**. Os poliedros convexos são eulerianos, mas nem todo poliedro euleriano é convexo. Veja ao lado um exemplo.



A = 15
V = 10
F = 7
V − A + F = 2
10 − 15 + 7 = 2

Poliedro não convexo em que a relação de Euler é válida.

Portanto, em todo poliedro convexo vale a relação V − A + F = 2, em que *V* é o número de vértices, *A* é o número de arestas e *F* é o número de faces do poliedro. Comente com os alunos que nem todos os conjuntos de três números que verificam a relação de Euler têm um poliedro associado. Por exemplo, V = 1, A = 4 e F = 5.

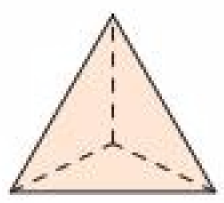
Poliedros regulares

Um poliedro convexo é **regular** quando suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si e quando, em todos os vértices, concorre o mesmo número de arestas.

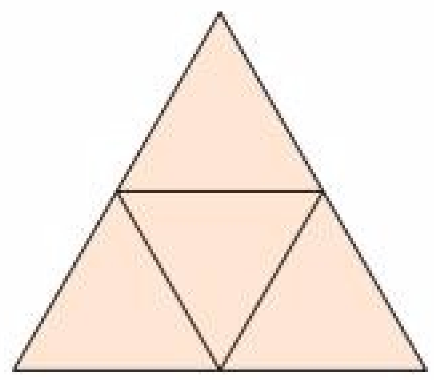
Existem somente cinco poliedros regulares.

Observe as ilustrações dos cinco poliedros regulares e as respectivas planificações de suas superfícies a seguir.

> Planificar um poliedro consiste em estender a sua superfície em um plano.

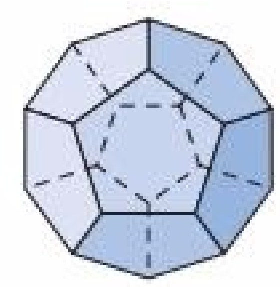


Tetraedro regular

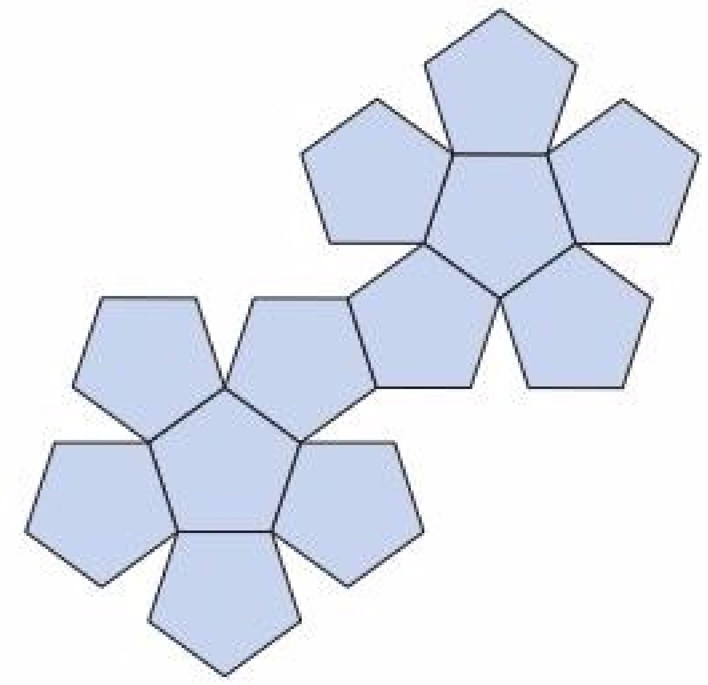


Planificação

- 4 faces triangulares
- 4 vértices
- 6 arestas



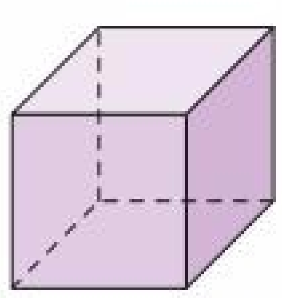
Dodecaedro regular



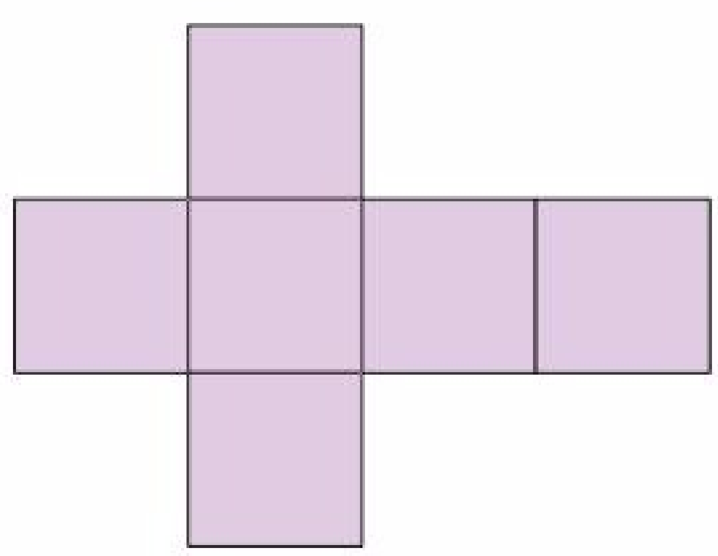
Planificação

- 12 faces pentagonais
- 20 vértices
- 30 arestas

Ilustrações: Editoria de arte

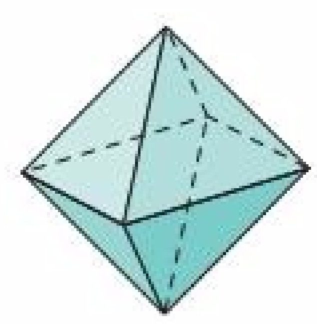


Hexaedro regular

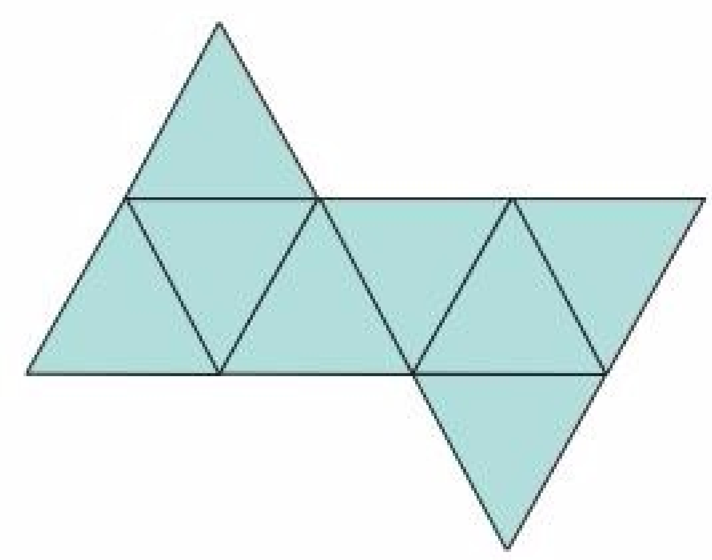


Planificação

- 6 faces quadrangulares
- 8 vértices
- 12 arestas

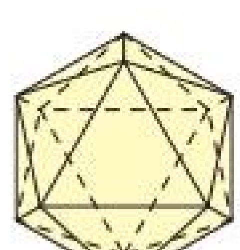


Octaedro regular

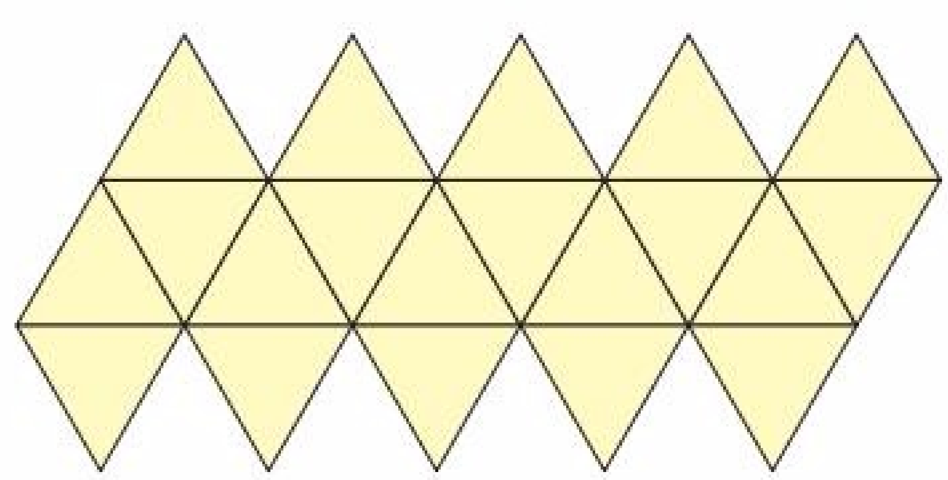


Planificação

- 8 faces triangulares
- 6 vértices
- 12 arestas



Icosaedro regular



Planificação

- 20 faces triangulares
- 12 vértices
- 30 arestas

Poliedros de Platão

Os poliedros de Platão levam o nome do filósofo grego Platão (427-347 a.C.), que os utilizava para explicar alguns fenômenos naturais.

Para que um poliedro seja considerado um **poliedro de Platão**, é necessário que suas faces tenham o mesmo número de arestas, em todos os vértices concorra o mesmo número de arestas e seja válida a relação de Euler. Assim, os poliedros de Platão englobam todos os poliedros regulares convexos, e existem **somente cinco classes** de poliedros de Platão: tetraedros, hexaedros, octaedros, dodecaedros e icosaedros.

Nos poliedros de Platão, suas faces não precisam ser polígonos regulares; assim, nem todo poliedro de Platão é regular.

Exercícios resolvidos

1 Em um poliedro convexo, o número de faces é 11 e o número de vértices é 18. Calcule o número de arestas.

Resolução

Pela relação de Euler, $V - A + F = 2$, válida para qualquer poliedro convexo, temos: $F = 11$ e $V = 18$. Logo, $V - A + F = 2 \Rightarrow 18 - A + 11 = 2 \Rightarrow A = 27$.

Portanto, o poliedro tem 27 arestas.

2 Um poliedro convexo tem seis faces quadrangulares e duas hexagonais. Calcule o número de vértices desse poliedro.

Resolução

Pelo enunciado, o poliedro possui 8 faces, 6 quadrangulares e 2 hexagonais.

Vamos determinar agora o número de arestas.

6 faces quadrangulares: $6 \cdot 4 = 24$ arestas

2 faces hexagonais: $2 \cdot 6 = 12$ arestas

Como cada aresta foi contada duas vezes, temos:

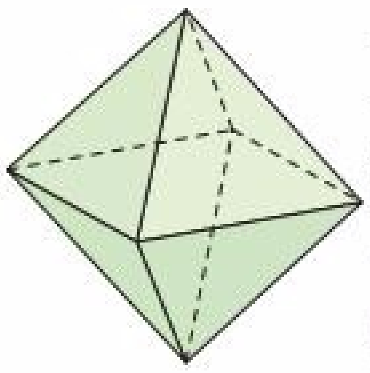
$2A = 24 + 12 \Rightarrow 2A = 36 \Rightarrow A = 18$

Aplicando a relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 18 + 8 = 2 \Rightarrow V = 12$

Assim, o número de vértices é 12.

3 (UFSC) Dado o poliedro regular, é correto afirmar:



Ilustrações: Editoria de arte

(01) É um tetraedro.
(02) É um octaedro.
(04) Todas as arestas são iguais.
(08) Obedece a relação de Euler.
(16) Suas faces são triângulos equiláteros.
(32) Tem 12 arestas.

Resolução

Vamos analisar cada sentença:

(01) Um tetraedro possui 4 faces, e o poliedro da figura possui 8 faces (incorreta);
(02) O poliedro é um octaedro, pois possui 8 faces;
(04) Pelo enunciado, o poliedro da figura é regular e, portanto, as arestas são iguais;
(08) O poliedro possui 8 faces, 6 vértices e 12 arestas. Pela relação de Euler, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 6 - 12 + 8 = 2$. Logo, o poliedro obedece a relação de Euler.
(16) Como o poliedro é regular, suas faces são compostas por polígonos regulares. No caso do octaedro regular, suas faces são triângulos equiláteros.
(32) O poliedro possui 12 arestas.

Em questões como essa, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

Resposta: 62 $(2 + 4 + 8 + 16 + 32)$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Em um poliedro convexo, o número de arestas é 16 e o número de faces é 9. Determine o número de vértices. $V = 9$

2. Um poliedro convexo tem cinco faces quadrangulares e duas faces pentagonais. Determine o número de arestas e o número de vértices. 15 arestas e 10 vértices.

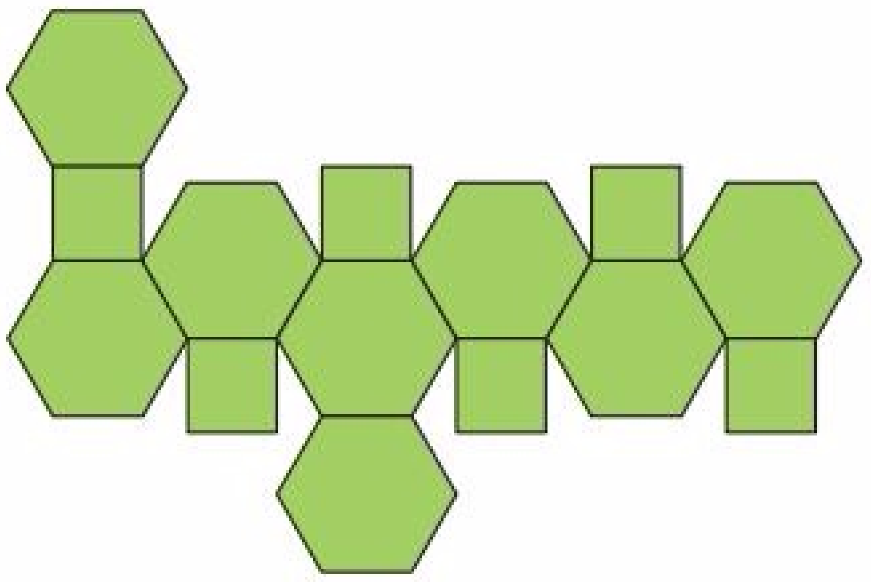
3. Um poliedro convexo tem onze faces, das quais cinco são triangulares, cinco são retangulares e uma é pentagonal. Quantos vértices tem esse poliedro? $V = 11$

4. (UECE) Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos. O número de vértices deste polígono é:

a) 90
b) 72
X c) 60
d) 56

5. (Mack-SP) Determine o número de vértices de um poliedro que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais. $V = 10$

6. A figura representa a planificação de um poliedro.



a) Esse poliedro é regular? Justifique sua resposta. Não, pois os polígonos das faces não são congruentes (quadrados e pentágonos).

b) Verifique se é válida a relação de Euler nesse poliedro. É válida a relação de Euler.

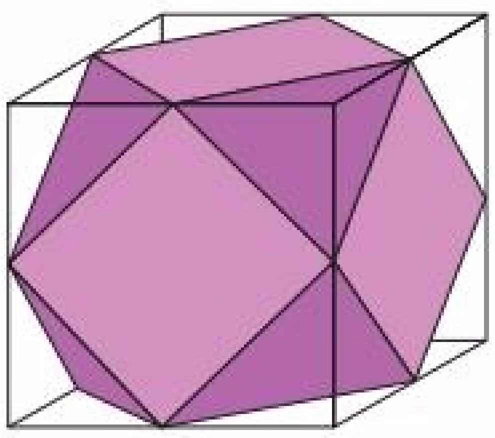
7. Um geólogo encontrou, em uma de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro que satisfaz a Relação de Euler, com 60 faces triangulares. Calcule o número de vértices desse cristal. $V = 32$

8. (UFCG-PB) Um professor de Matemática, em uma aula de Geometria, pediu que cada aluno construísse um poliedro convexo regular com 20 faces triangulares. Podemos afirmar que o número de vértices do poliedro construído por cada aluno é igual a:

a) 28 c) 19 e) 41

x b) 12 d) 27

9. (Unifesp) Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo.



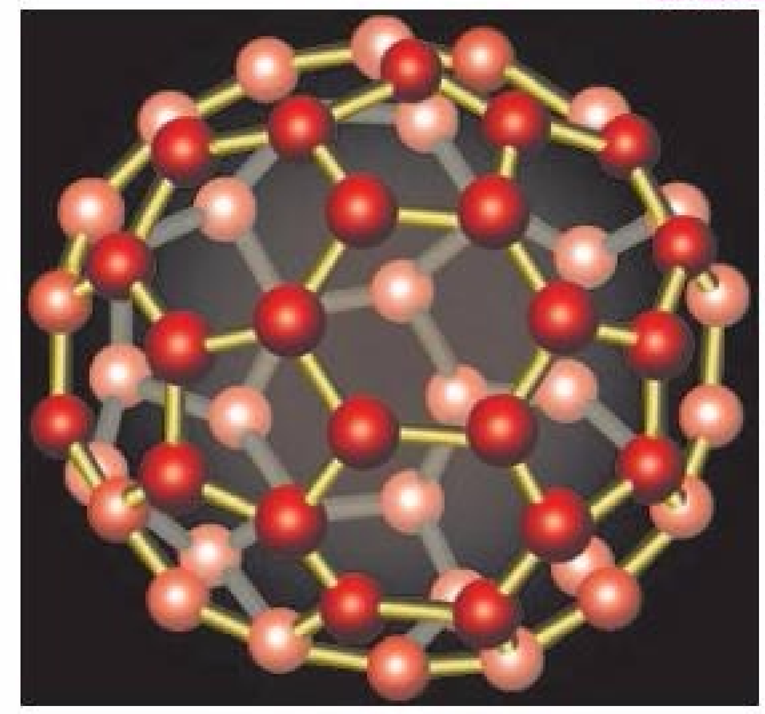
O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente:

a) 8 e 8. c) 6 e 8. e) 6 e 6.

x b) 8 e 6. d) 8 e 4.

10. Em uma publicação científica de 1985, foi divulgada a descoberta de uma molécula tridimensional de carbono, na qual os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo cujas faces são 12 pentágonos e 20 hexágonos regulares. Em homenagem ao arquiteto norte-americano Buckminster Fuller, a molécula foi denominada fulereno. Determine o número de átomos de carbono nessa molécula e o número de ligações entre eles representadas pelas arestas do poliedro.

60 átomos e 90 ligações.



Alexandre Argozino Neto

Molécula de fulereno, representada fora de escala e em cores-fantasia.

História da Matemática

A relação de Euler para poliedros

À medida que se aproximava o fim do século XIX, os matemáticos começaram a desenvolver um novo tipo de geometria, no qual conceitos familiares como comprimentos e ângulos não desempenhavam nenhum papel e não se fazia distinção entre triângulos, quadrados e círculos. Inicialmente foi chamada de *analysis situs*, a análise de posição, mas os matemáticos rapidamente optaram por outro nome: topologia.

A topologia tem suas raízes em um curioso padrão numérico que Descartes notou em 1639, quando pensava sobre os cinco sólidos regulares de Euclides [Euclides descreveu matematicamente os sólidos de Platão]. Descartes foi um polímata nascido na França que passou a maior parte da sua vida na república holandesa. Sua fama reside principalmente na sua filosofia, que provou ser tão influente que durante muito tempo a filosofia ocidental em grande medida consistiu em respostas a Descartes. Nem sempre concordando, é preciso ressaltar, mas não obstante motivadas por seus argumentos. Seu bordão, *cogito ergo sum* - "Penso, logo existo" -, tornou-se moeda cultural corrente. Mas os interesses de Descartes estendiam-se para além da filosofia, abrangendo ciência e matemática.

Em 1639 Descartes voltou sua atenção para os sólidos regulares, e foi então que notou seu curioso padrão numérico. Um cubo tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices; a soma $6 - 12 + 8$ é igual a 2. Um dodecaedro tem 12 faces, 30 arestas e 20 vértices; a soma $12 - 30 + 20 = 2$. Um icosaedro tem 20 faces, 30 arestas e 12 vértices; a soma $20 - 30 + 12 = 2$. A mesma relação vale para o tetraedro e o octaedro. Na verdade, ela se aplica a um sólido de qualquer forma, regular ou não. Se o sólido tem *F* faces, *A* arestas e *V* vértices, então $F - A + V = 2$. Descartes encarou essa fórmula como uma curiosidade menor e não a publicou. Só muito mais tarde os matemáticos viram essa equação simples como um dos primeiros e cuidadosos passos rumo à grande história de sucesso na matemática do século XX, a inexorável ascensão da topologia.

[...] Sobrou para o infatigável Euler, o matemático mais prolífico da história, provar e publicar essa relação, o que foi feito em 1750 e 1751.

STEWART, Ian. **17 equações que mudaram o mundo**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013. p. 115-116.

Atividades

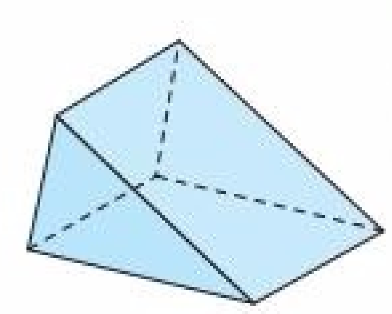
Escreva no caderno

2. Tetraedro: $F - A + V = 2 \Rightarrow 4 - 6 + 4 = 2$
Octaedro: $F - A + V = 2 \Rightarrow 8 - 12 + 6 = 2$

1. De acordo com o texto, a quem é atribuída a descoberta do padrão numérico aplicável a quaisquer poliedros convexos: $F - A + V = 2$? Padrão descoberto por Descartes (1639), apesar de provado em 1750 e publicado somente em 1751, por Euler.

2. O texto afirma que a relação é válida para o tetraedro e para o octaedro. Verifique.

3. Conforme apresentado no texto, a relação também é válida para sólidos não regulares. Verifique a relação para o poliedro não regular ao lado.



Ilustrações: Editoria de arte

$F - A + V = 2 \Rightarrow 5 - 9 + 6 = 2$

Prismas

Em nosso cotidiano nos deparamos com vários objetos que lembram a forma de um grupo particular de poliedros denominado **prisma**. Veja alguns exemplos ao lado.

Agora, vamos estudar os prismas, suas características, seus elementos e maneiras de calcular a área da superfície e o volume de um prisma.

Vamos considerar dois planos paralelos α e β, o polígono convexo ABCDEF, contido em α, e uma reta r secante a esses planos e que não intercecta o polígono.

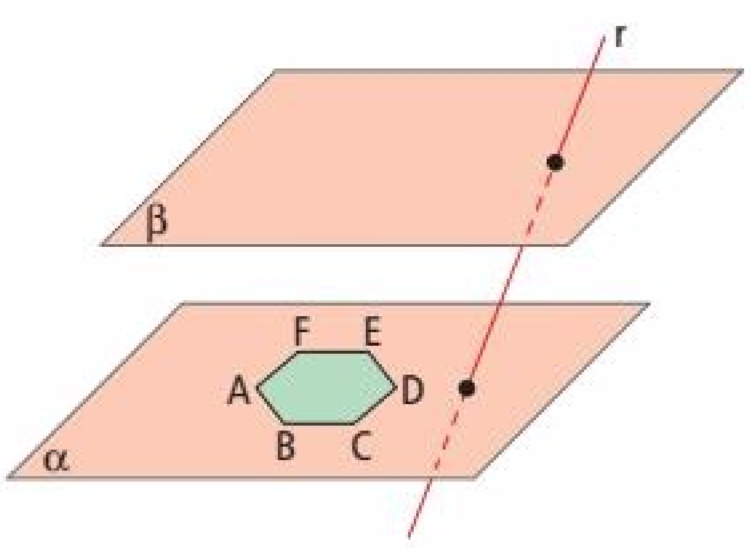

LovePHY/ Shutterstock.com

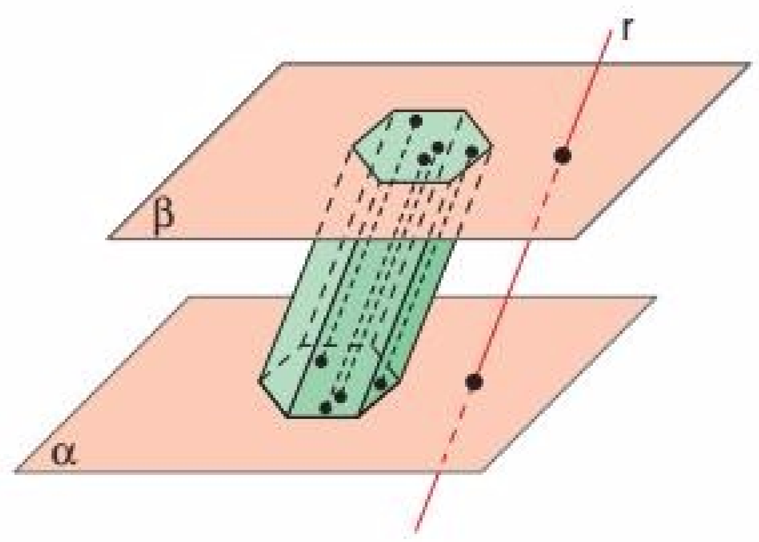
O contêiner é utilizado para transportar diversos tipos de produtos.


T.W. van Urk/Shutterstock.com

Pavimento hexagonal utilizado na pavimentação de vias públicas, como ruas e praças.

Ilustrações: Editoria de arte

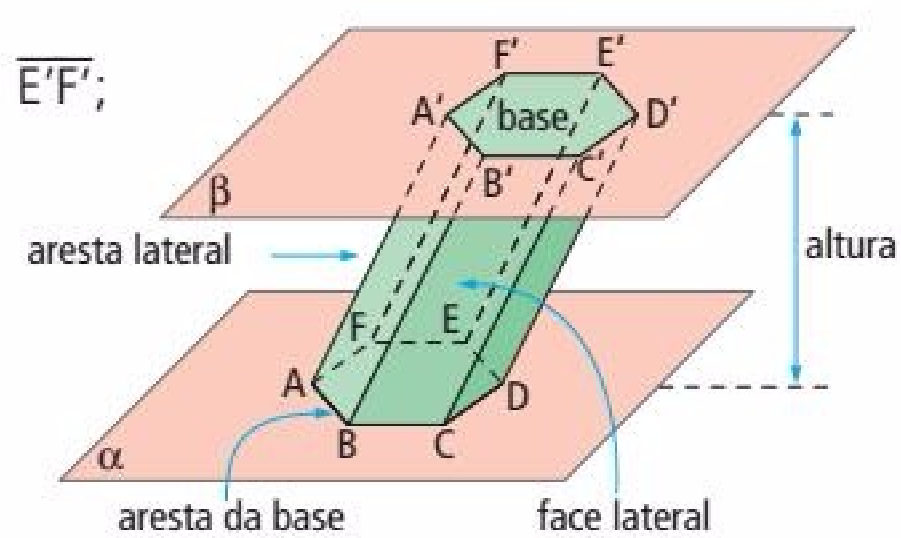




A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta r, com uma extremidade em um ponto do polígono ABCDEF e a outra no plano β, é denominada **prisma**.

Considerando o prisma representado na figura abaixo, destacamos os seguintes elementos:

- **bases**: são os polígonos convexos congruentes ABCDEF e A'B'C'D'E'F' situados nos planos paralelos α e β (planos das bases);
- **faces laterais**: são os paralelogramos ABB'A', BCC'B', ..., AFF'A';
- **vértices**: são os vértices das faces do prisma, A, B, ..., F';
- **arestas das bases**: são os lados dos polígonos das bases $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{E'F'}$;
- **arestas laterais**: são os segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, ..., $\overline{FF'}$;
- **altura**: é a distância entre os planos das bases.



Podemos classificar os prismas de acordo com o número de lados dos polígonos das bases. Por exemplo, os prismas são:

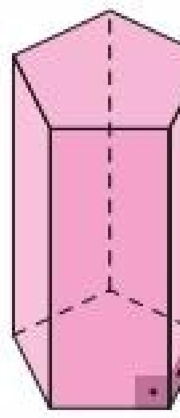
- **triangulares** quando as bases são triângulos;
- **quadrangulares** quando as bases são quadriláteros;
- **pentagonais** quando as bases são pentágonos, e assim por diante.

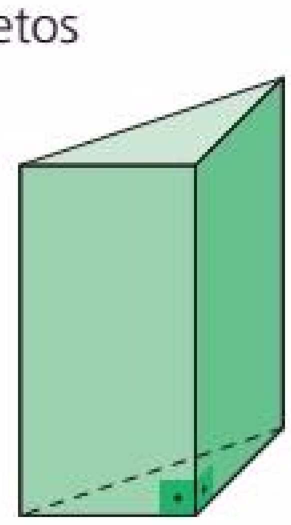
De acordo com a inclinação das arestas laterais em relação aos planos das bases, os prismas podem ser **retos** ou **oblíquos**.

O prisma é reto quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases e é oblíquo quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

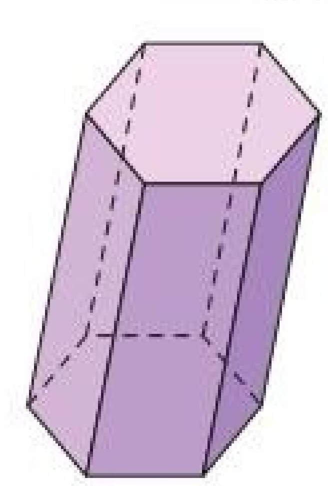
Exemplos:

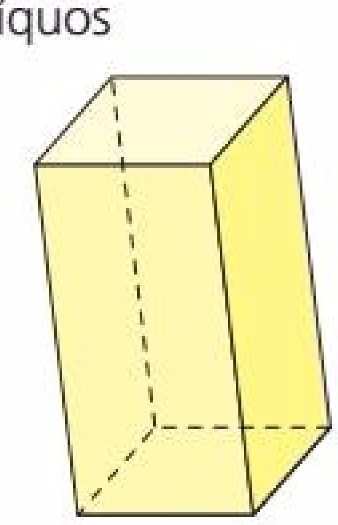
Prismas retos


Prisma pentagonal


Prisma triangular

Prismas oblíquos

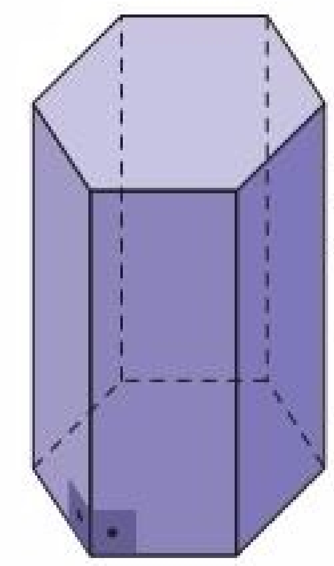

Prisma hexagonal


Prisma quadrangular

Prisma regular

Se o prisma for reto e as bases forem polígonos regulares, o prisma é **regular**.
Por exemplo, a figura ao lado representa um prisma hexagonal regular; assim:

- as bases são hexágonos regulares;
- as faces laterais são retângulos congruentes.

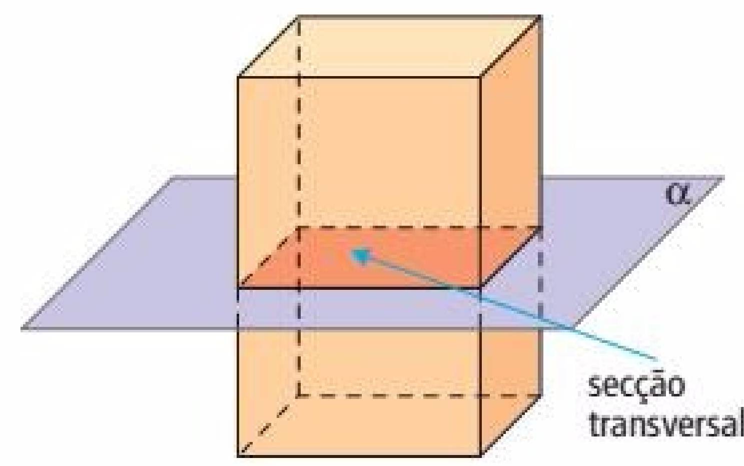


Ilustrações: Editoria de arte

Secção transversal de um prisma

A intersecção de um prisma com um plano paralelo às suas bases é denominada **secção transversal do prisma**.

Observe na figura ao lado que a secção transversal de um prisma é um polígono congruente aos polígonos das bases.

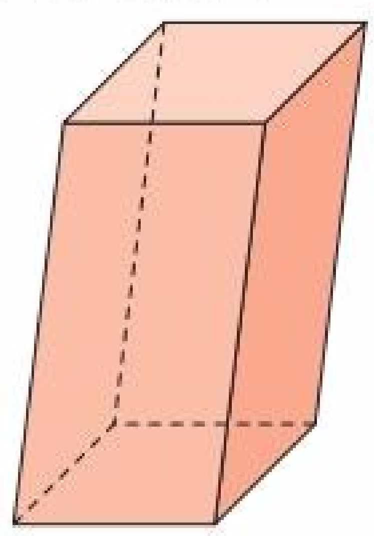


Paralelepípedos

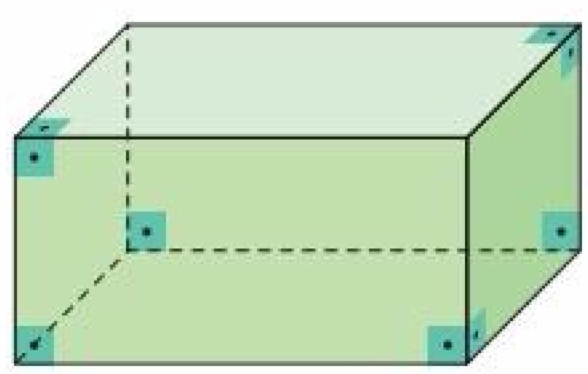
Os prismas cujas bases são paralelogramos recebem nomes especiais.

- **Paralelepípedo**: é um prisma cujas bases são paralelogramos.
- **Paralelepípedo reto retângulo** ou **bloco retangular**: é um prisma reto cujas bases e as faces laterais são retângulos. O paralelepípedo reto retângulo é um caso particular do paralelepípedo.
- **Cubo** ou **hexaedro regular**: é um prisma reto cujas faces são todas quadradas. O cubo é um caso particular do paralelepípedo reto retângulo.

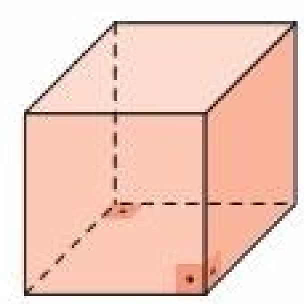
Exemplos:



Paralelepípedo



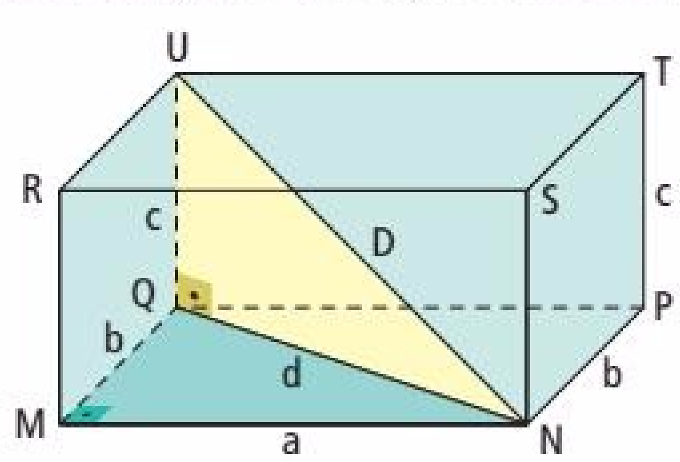
Paralelepípedo reto retângulo



Cubo

Medida da diagonal de um paralelepípedo reto retângulo e de um cubo

Vamos considerar um paralelepípedo reto retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*.



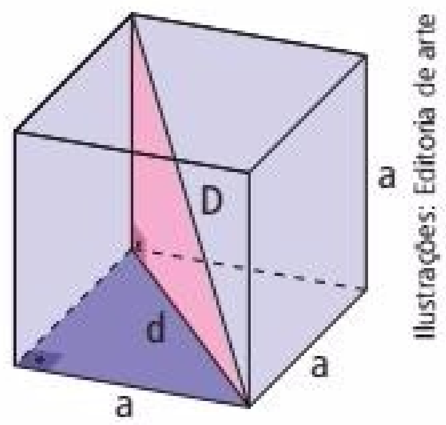
Sejam *d* e *D* as diagonais da base e do paralelepípedo, respectivamente. Assim, temos:

- O triângulo QMN é retângulo em *M* e, pelo teorema de Pitágoras, temos:
  $(QN)^2 = (MN)^2 + (MQ)^2$
  $d^2 = a^2 + b^2$ (I)
- O triângulo NQU é retângulo em *Q* e, pelo teorema de Pitágoras, temos:
  $(UN)^2 = (QN)^2 + (QU)^2$
  $D^2 = d^2 + c^2$ (II)
  Substituindo (I) em (II):
  $D^2 = (a^2 + b^2) + c^2$

$$\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Medida da diagonal de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*.

Como o cubo tem as três dimensões com a mesma medida e indicando-a por a, temos:



- Diagonal d da base:
$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2$ (I)

- Diagonal D do cubo:
$D^2 = d^2 + a^2$ (II)

Substituindo (I) em (II):
$D^2 = 2a^2 + a^2 \Rightarrow D^2 = 3a^2$

$$\boxed{D = a\sqrt{3}}$$ → Medida da diagonal de um cubo de aresta de medida a.

Área da superfície de um prisma

Em um prisma, definimos:

- **área da base** (S_b): é a área de um dos polígonos das bases;
- **área lateral** (S_ℓ): é a soma das áreas de todas as faces laterais;
- **área total** (S_t): é a soma da área lateral e das áreas das bases.

Então, podemos escrever:

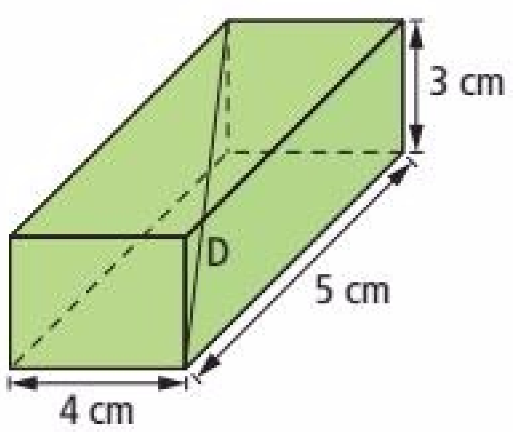
$$\boxed{S_t = S_\ell + 2S_b}$$

Exercícios resolvidos

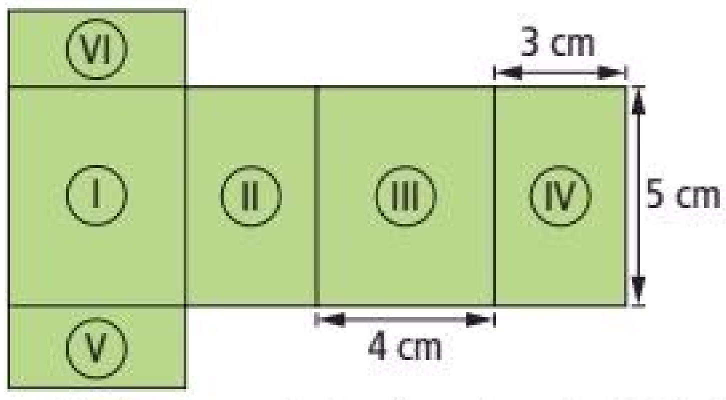
4 Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 3 cm, determine:

a) a medida de sua diagonal.

b) a área total da superfície do paralelepípedo.



Resolução



a) A diagonal do paralelepípedo é definida por $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Logo:

$D = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} \Rightarrow D = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow D = 5\sqrt{2}$.

Portanto, a diagonal do paralelepípedo é $5\sqrt{2}$ cm.

b) A superfície do paralelepípedo é formada por 6 faces retangulares, indicadas na planificação acima. Note que I = III, II = IV e V = VI. Calculando cada área, temos:

$S_{I} = 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 20\text{ cm}^2$

$S_{II} = 3\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$

$S_{V} = 4\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 12\text{ cm}^2$

Então:

$S_t = 2S_{I} + 2S_{II} + 2S_{V}$

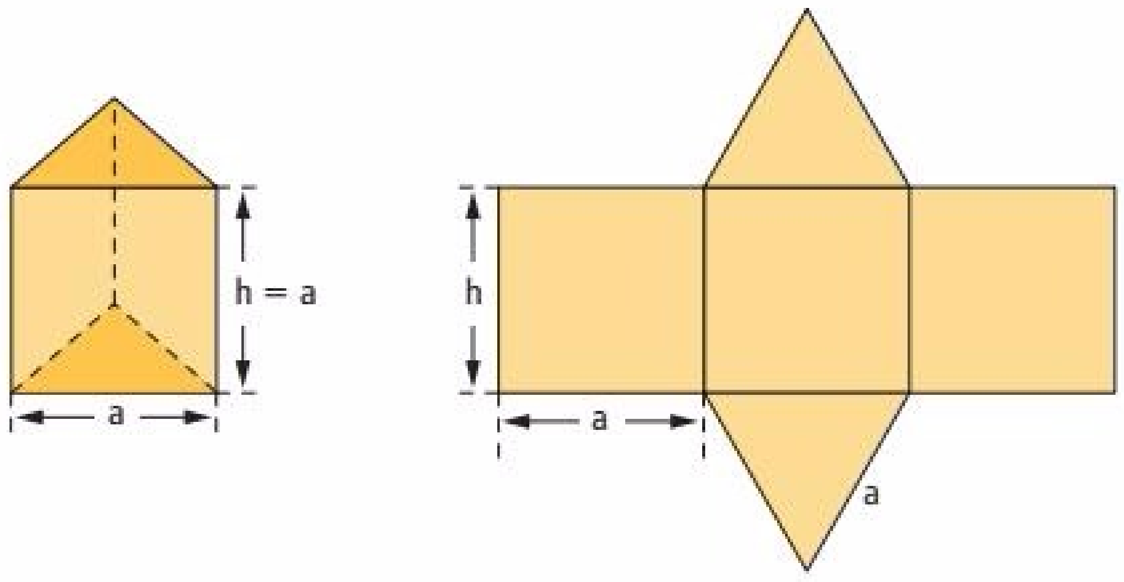
$S_t = 2(20 + 15 + 12) = 2 \cdot 47 = 94$

Portanto, a área total da superfície é 94 cm².

5 Em um prisma triangular regular, a medida a da aresta da base é igual à medida h da altura do prisma. Sabendo-se que a área lateral é 10 m², calcular a área total do prisma.

Resolução

Planificando a superfície do prisma, temos:



A face lateral é um retângulo de dimensões a e h.

$S_\ell = 3 \cdot (a \cdot h) \Rightarrow S_\ell = 3 \cdot (a \cdot a) \Rightarrow S_\ell = 3a^2$

Como $S_\ell = 10\text{ m}^2$, temos:

$$3a^2 = 10 \Rightarrow a^2 = \frac{10}{3} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{30}{9}} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{30}}{3}\text{m}$$

A base é um triângulo equilátero cujo lado mede a:

$$S_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{10}{3}\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = \frac{10\sqrt{3}}{12}\text{m}^2$$

Cálculo da área total:

$$S_t = S_\ell + 2 \cdot S_b = 10 + 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{12} = 10\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

Portanto, $S_t = 10\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\text{m}^2$.

11. Dado um cubo de aresta 8 cm, calcule:

a) a medida da diagonal do cubo. $8\sqrt{3}$ cm

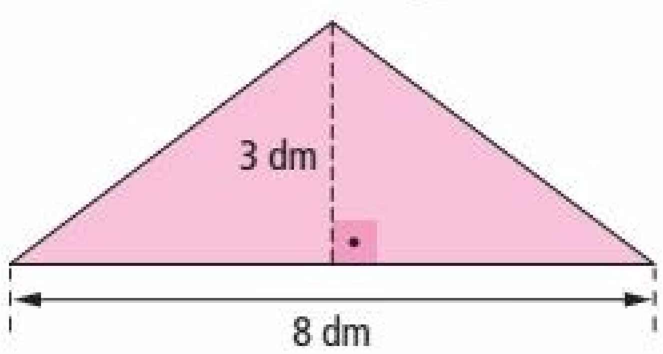
b) a área total do cubo. 384 cm²

12. A diagonal de um paralelepípedo reto retângulo mede 13 dm, e a diagonal da base, 5 dm. Determine as três dimensões do paralelepípedo, sendo a soma das medidas de todas as suas arestas igual a 76 dm. 3 dm, 4 dm e 12 dm

13. Um paralelepípedo reto retângulo tem arestas medindo 5, 4 e k. Sabendo que sua diagonal mede $3\sqrt{10}$, calcule k. $k = 7$

14. Um prisma pentagonal regular tem 20 cm de altura. A aresta da base do prisma mede 4 cm. Determine a sua área lateral. 400 cm²

15. Um prisma reto tem por base um triângulo isósceles com medidas indicadas na figura.



Sabendo que a altura do prisma é igual a $\frac{1}{3}$ do perímetro da base, calcule a área total da superfície do prisma. $S_t = 132$ dm²

16. Em um paralelepípedo reto retângulo, o comprimento é o dobro da largura, e a altura é 15 cm. Sabendo que a área total é 424 cm², calcular as dimensões desconhecidas desse paralelepípedo. 8 cm e 4 cm.

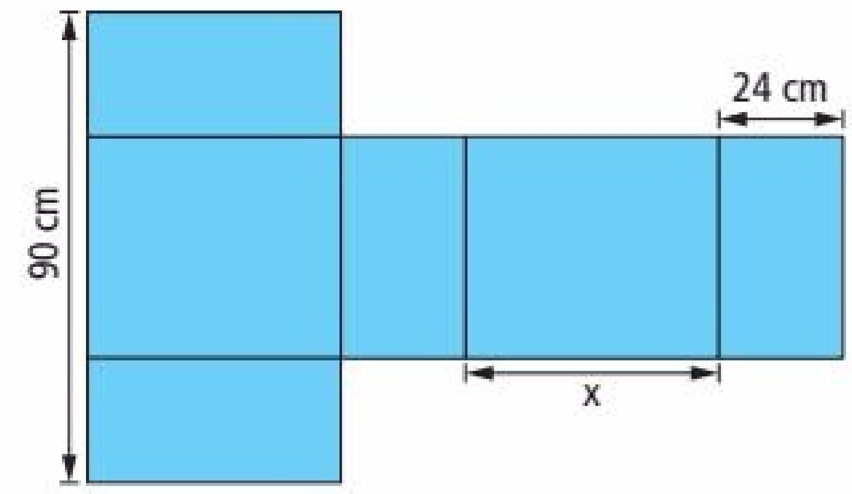
17. As dimensões de um paralelepípedo reto retângulo são números consecutivos. Sabendo que a soma das medidas de todas as suas arestas é 84 cm, calcule a área total da superfície desse paralelepípedo. 292 cm²

18. (UERJ) Para construir um poliedro convexo, um menino dispõe de folhas retangulares de papel de seda, cada uma com 56 cm de comprimento por 32 cm de largura, e de 9 varetas de madeira, cada uma com 40 cm de comprimento. Na construção da estrutura desse poliedro todas as faces serão triangulares e cada aresta corresponderá a uma vareta. Admita que o menino usará as 9 varetas e que todas as faces serão revestidas com o papel de seda.

Determine o número mínimo de folhas de papel de seda necessárias para revestir o poliedro. 3 folhas.

19. (Enem/MEC) Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.

A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é:

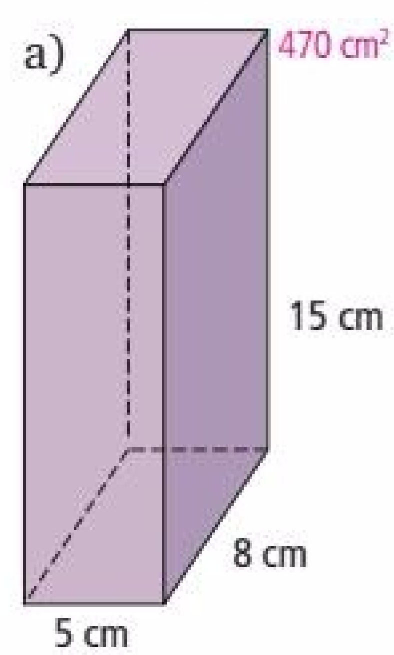
a) 25 b) 33 c) 42 d) 45 x e) 49

20. (UFRGS-RS) O custo de uma embalagem é diretamente proporcional à superfície do sólido que se deseja embalar. Se o custo para embalar um cubo de 40 cm de aresta é R$ 10,00, a embalagem de um cubo de 80 cm de aresta custa, em reais:

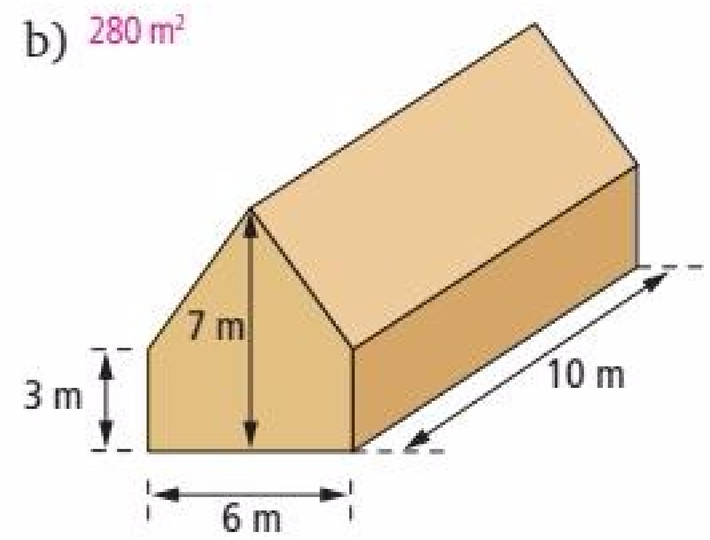
a) 15 b) 20 c) 25 x d) 40 e) 80

21. Calcule a área total dos prismas retos ilustrados e faça a planificação da superfície de cada um deles no caderno.

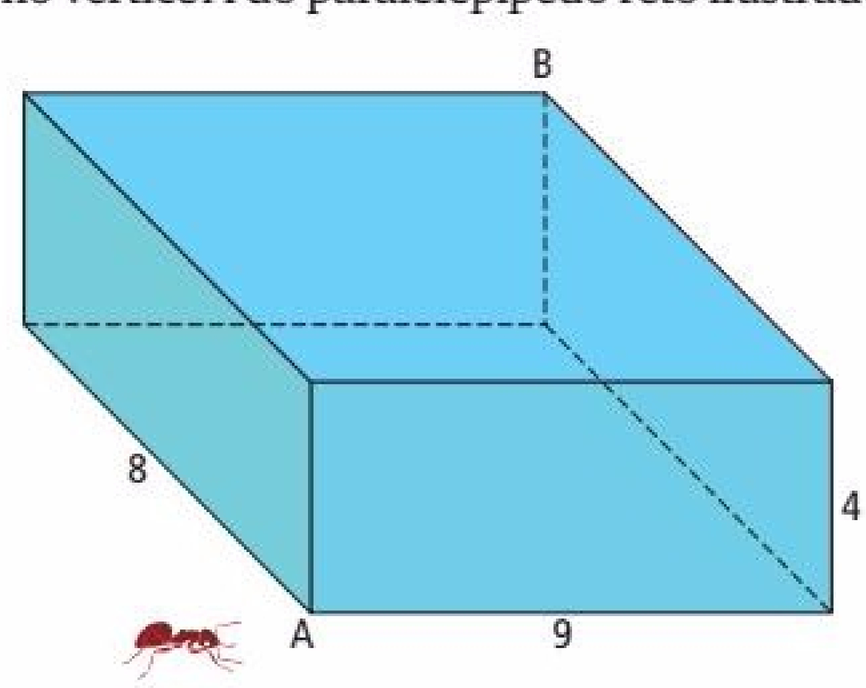
a) 470 cm²



b) 280 m²



22. (UFPE) Uma formiga (ignore seu tamanho) encontra-se no vértice A do paralelepípedo reto ilustrado abaixo.



Ilustrações: Editoria de arte

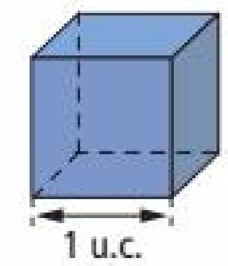
Qual a menor distância que ela precisa percorrer para chegar ao vértice B (caminhando sobre a superfície do paralelepípedo)? 15 u. m.

Volume

Já estudamos como calcular a área da superfície de um sólido. Agora, vamos estudar como calcular seu volume.

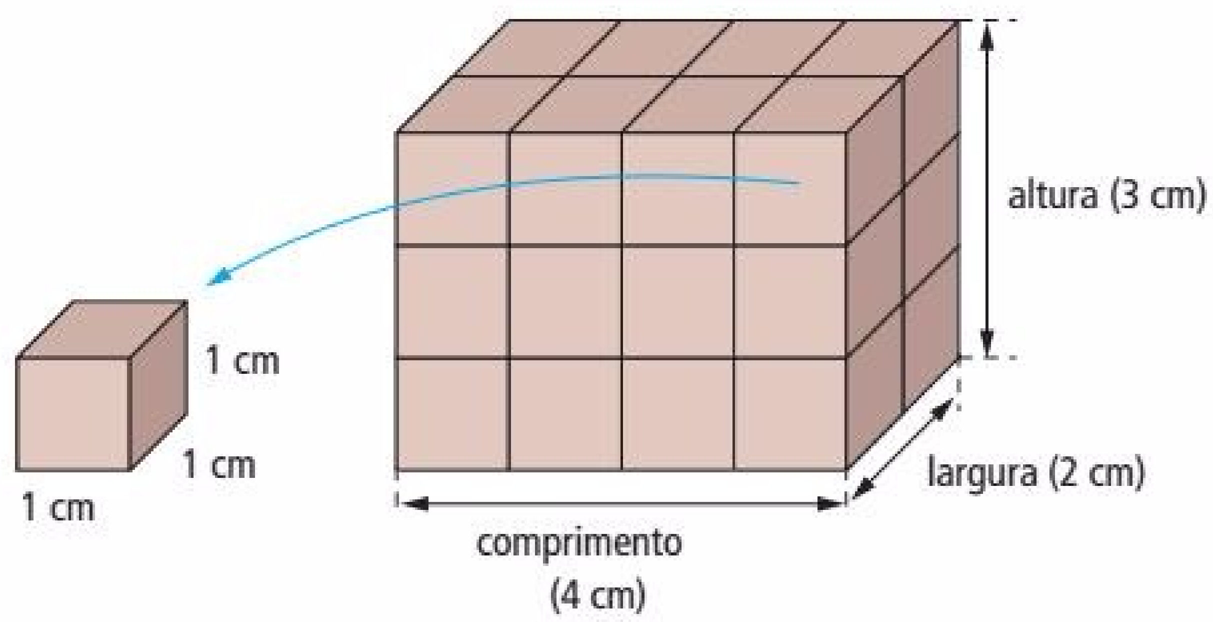
Para medir a quantidade de espaço que um sólido S ocupa, precisamos comparar esse sólido com uma unidade de medida de volume. O número real V positivo, obtido por essa comparação, é chamado de volume do sólido.

Vamos considerar como unidade de medida padrão um cubo cuja aresta mede 1 u.c. (unidade de comprimento), conhecido como **cubo unitário**. Assim, o volume desse cubo unitário é de 1 (u.c.)^3.

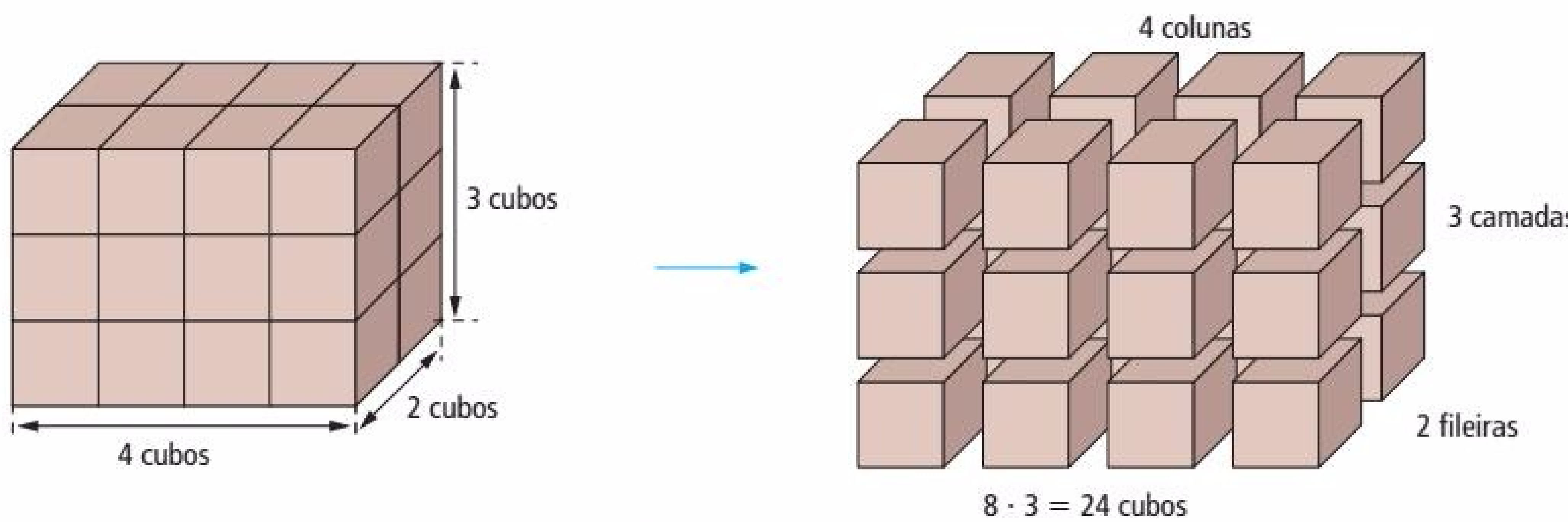


Volume de um paralelepípedo

Podemos decompor um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 4 cm, 2 cm e 3 cm, em cubos de 1 cm de aresta, ou seja, 1 cm^3 de volume cada um. Observe:



Para determinar quantos cubos de 1 cm^3 formam esse paralelepípedo, fazemos a separação em três camadas.



Ilustrações: Editoria de arte

As camadas do paralelepípedo são formadas por duas fileiras com quatro cubos cada uma. Então, temos:

$$4 \cdot 2 = 8 \rightarrow 8 \text{ cubos por camada}$$

Como o paralelepípedo é formado por três camadas, temos:

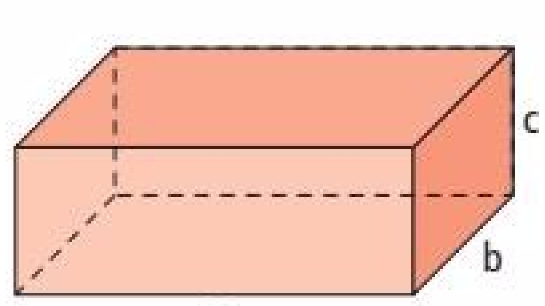
$$8 \cdot 3 = 24 \rightarrow 24 \text{ cubos}$$

Cada cubo possui 1 cm^3 de volume, e, portanto, o volume do paralelepípedo é 24 cm^3.

Esse resultado também pode ser obtido multiplicando-se as três dimensões do paralelepípedo: **comprimento**, **largura** e **altura**. Observe:

$$V = 4 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^3$$

O volume V de um paralelepípedo de dimensões com medidas a, b e c é dado por:



$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

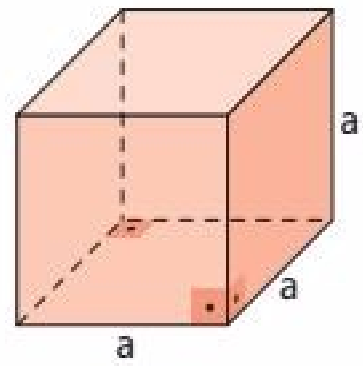
A unidade de medida de volume do Sistema Internacional de Unidades (SI) é o metro cúbico (m^3). No entanto, o **litro** (L) é outra unidade de medida bastante utilizada no dia a dia. Um litro equivale a um decímetro cúbico, ou seja:

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$$

Como o produto $a \cdot b$ equivale à área da base A_b e c é a medida h da altura, podemos dizer que o volume do paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela medida da altura: $V = S_b \cdot h$.

Volume de um cubo

Como, no cubo, as três dimensões têm a mesma medida e indicando-a por *a*, seu volume é dado por:

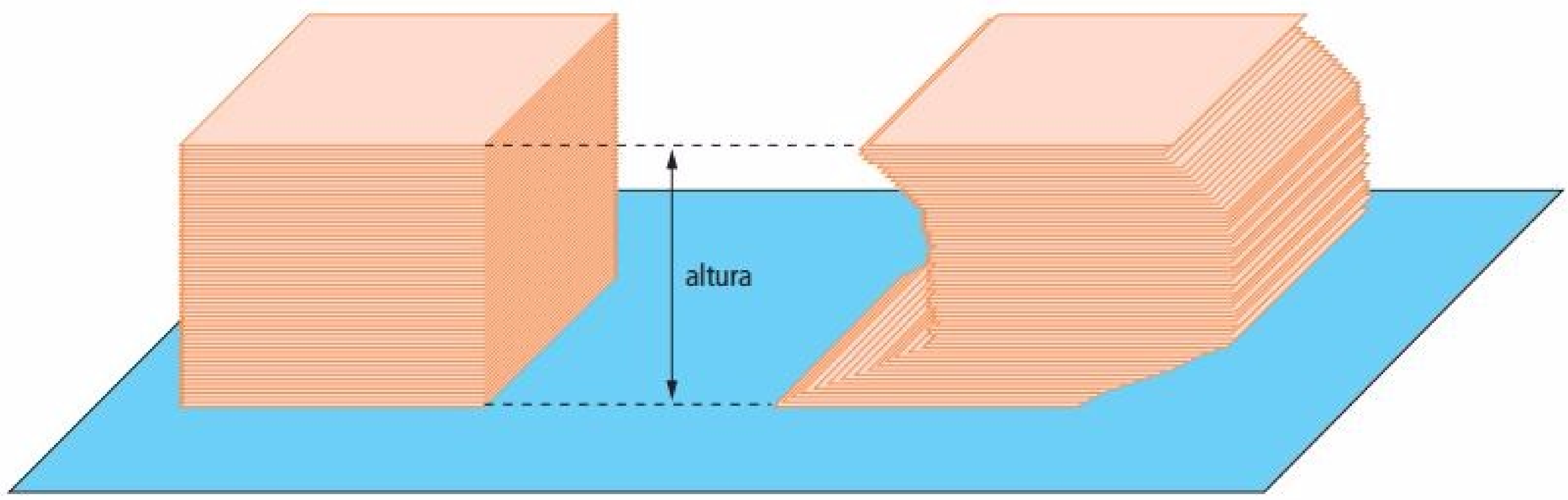


$$V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow V = a^3$$

Princípio de Cavalieri

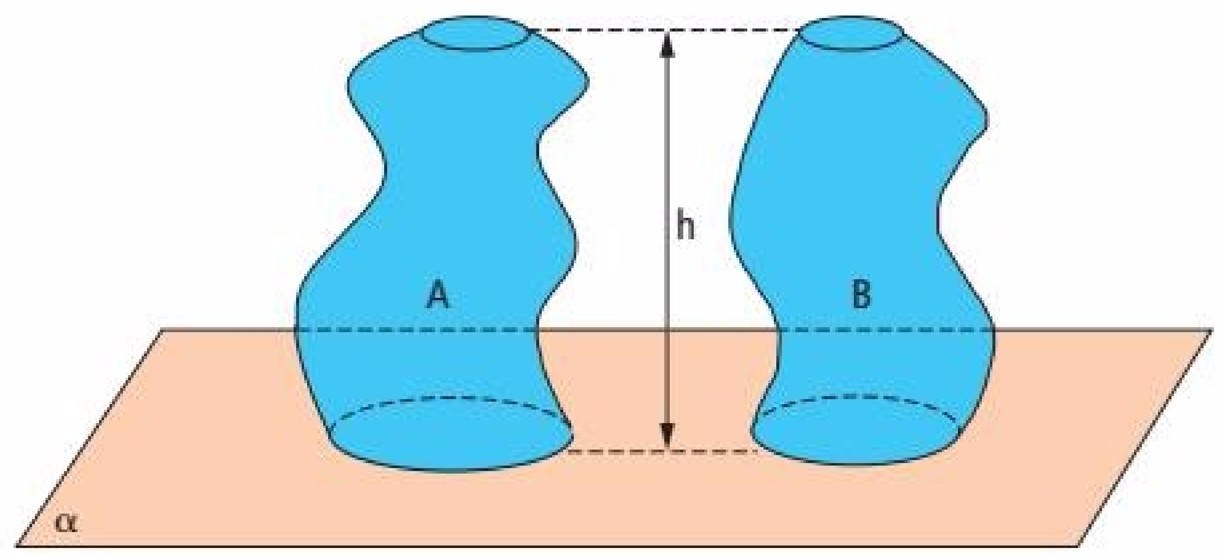
Vimos como calcular o volume do paralelepípedo reto retângulo e do cubo. No entanto, determinar a fórmula para o cálculo do volume de outros sólidos pode não ser tão simples assim. Para estabelecer essas fórmulas, utilizaremos um resultado conhecido como **princípio de Cavalieri**, que apresentaremos a seguir. Mas, antes, vamos apresentar um exemplo intuitivo desse princípio.

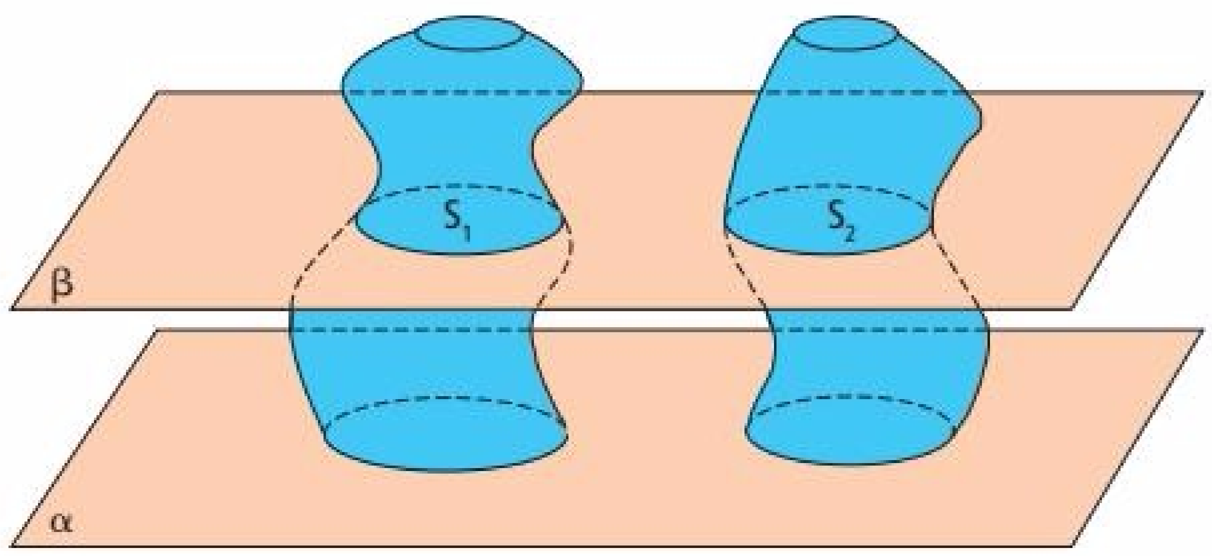
Vamos considerar duas pilhas de papel sulfite idênticas com a mesma quantidade de folhas em cada pilha, colocadas sobre uma mesa.



Essas pilhas podem ser dispostas sobre a mesa de diferentes formas, como podemos observar na figura. Observe que qualquer plano paralelo ao plano da mesa que intersecte as pilhas determinará intersecções de mesma área, que é a folha de sulfite. Além disso, em ambas as pilhas, temos a mesma quantidade de folhas de papel, ou seja, as pilhas têm o mesmo volume. Essa é a ideia do princípio de Cavalieri, que será apresentado a seguir.

Considere dois sólidos *A* e *B* de mesma altura com as bases contidas em um mesmo plano horizontal α. Traçando um plano β, paralelo a α e secante aos sólidos, determinamos duas secções transversais cujas áreas são S_1 e S_2.





Ilustrações: Editoria de arte

O princípio de Cavalieri foi desenvolvido pelo matemático italiano Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

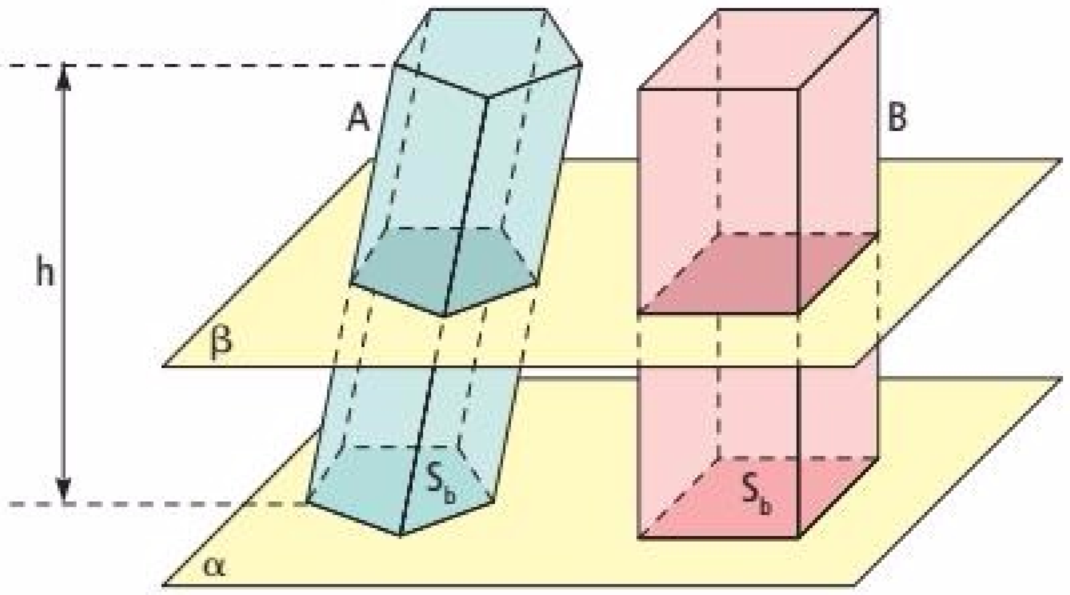
Nessas condições, o princípio de Cavalieri afirma que, se para todo plano β tivermos $S_1 = S_2$, então os sólidos *A* e *B* terão o mesmo volume.

O princípio de Cavalieri pode ser demonstrado, no entanto não o faremos aqui por envolver conceitos matemáticos que não são estudados no Ensino Médio. Vamos considerá-lo verdadeiro e aplicá-lo para a determinação do volume de alguns sólidos.

Volume de um prisma

Considere um prisma A e um paralelepípedo reto retângulo B de mesma altura h e áreas das bases iguais a S_b contidas no plano α.

Qualquer plano β, paralelo ao plano α, que intersecte os sólidos A e B, determina secções transversais congruentes às respectivas bases. Como as áreas das bases de A e B são iguais e valem S_b, então as secções transversais também têm área igual a S_b. Portanto, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que o volume do prisma A é igual ao volume do paralelepípedo reto retângulo B.



Como o volume do paralelepípedo reto retângulo é dado pelo produto da área da base S_b pela medida da altura h, então o volume do prisma V_{prisma} também será e podemos escrever:

$$V_{prisma} = S_b \cdot h$$

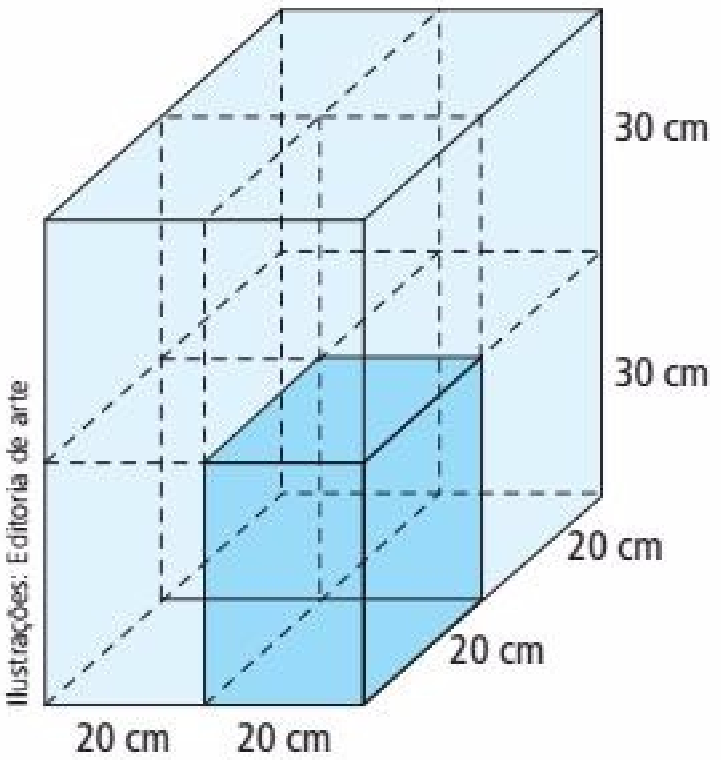
Exercícios resolvidos

6 (Enem/MEC) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm × 20 cm × 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm × 40 cm × 60 cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é:

a) 9 c) 13 e) 17
b) 11 d) 15

Resolução

Em cada uma das caixas, é possível acomodar 8 pacotes de 20 cm × 20 cm × 30 cm (duas fileiras com 4 pacotes cada uma). Observe:



Ilustrações: Editoria de arte

Como cada caixa acomoda 8 pacotes de livros e a editora pretende despachar 100 desses pacotes, temos: $\frac{100}{8} = 12{,}5$. Portanto, são necessárias, no mínimo, 13 caixas.
Resposta: alternativa **c**.

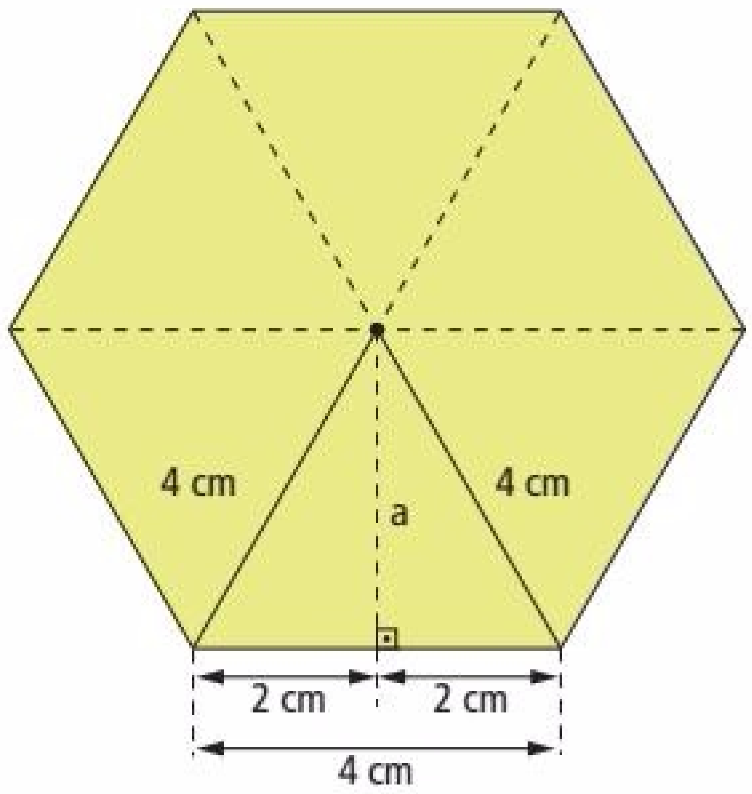
Outro modo de resolver esse problema é determinando a razão entre o volume da caixa (V_{caixa}) e o volume dos pacotes (V_{pacote}) para saber a quantidade de pacotes que cabem em cada caixa:

$\frac{V_{caixa}}{V_{pacote}} = \frac{40 \cdot 40 \cdot 60}{20 \cdot 20 \cdot 30} = \frac{96\,000}{12\,000} = 8$. Como serão 100 pacotes despachados, temos: $\frac{100}{8} = 12{,}5$.

7 Calcule o volume de um prisma hexagonal regular, em que a aresta da base mede 4 cm e a altura do prisma mede $10\sqrt{3}$ cm.

Resolução

O volume do prisma é dado por $V = S_b \cdot h$.
Primeiro, precisamos determinar a área da base do hexágono que é composta de 6 triângulos equiláteros.



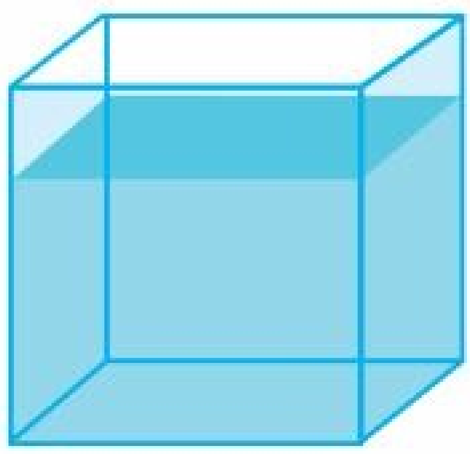
Observe que a é altura do triângulo equilátero de lado igual a 4 cm. Pelo teorema de Pitágoras, temos: $4^2 = 2^2 + a^2 \Rightarrow 16 - 4 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, ou seja, $2\sqrt{3}$ cm. Logo, a área da base do prisma hexagonal é $6 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$, ou seja, $24\sqrt{3}$ cm^2.

Agora, vamos determinar o volume do prisma:

$V = S_b \cdot h \Rightarrow V = 24\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} = 240 \cdot 3 = 720$

Portanto, o volume do prisma hexagonal regular é 720 cm^3.

8 Em um reservatório com formato cúbico de aresta 2 m foi colocado água até atingir 1,5 m de altura.



a) Qual é a capacidade desse reservatório, em litro?

b) Qual é o volume de água dentro do reservatório?

Resolução

a) Vamos determinar o volume do reservatório (V_R) cúbico de aresta igual a 2 m. Como $V = a \cdot a \cdot a = a^3$, temos: $V_R = 2^3 = 8$.

Assim, o volume do reservatório é 8 m^3. Como queremos saber a capacidade do reservatório em litros, precisamos fazer a conversão. Como cada m^3 equivale a 1000 L, temos: $8 \cdot 1000 = 8000$ ou seja, 8000 L. Portanto, a capacidade do reservatório é 8000 L.

b) Sabemos que as arestas do cubo medem 2 m; porém, devemos considerar a altura de água dentro do reservatório, que é 1,5 m. Seja V_A o volume de água no reservatório, temos: $V_A = 2 \cdot 2 \cdot 1{,}5 = 6$, ou seja, 6 m^3. Convertendo para litros, temos: $6 \cdot 1000 = 6000$. Portanto, o volume de água dentro do reservatório é 6000 L.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

23. Qual é o volume de argila necessário para produzir 5000 tijolos, tendo cada tijolo a forma de um paralelepípedo com dimensões 18 cm, 9 cm e 6 cm? 4,86 m^3

24. As medidas das arestas de um paralelepípedo reto retângulo formam uma progressão geométrica. Se a menor das arestas mede $\frac{1}{2}$ cm e o volume de tal paralelepípedo é 64 cm^3, calcule as medidas das outras arestas. 4 cm e 32 cm

25. Ao congelar-se, a água aumenta de $\frac{1}{15}$ o seu volume. Que volume de água deverá congelar-se para se obter um bloco de gelo de 8 dm × 4 dm × 3 dm? 90 dm^3

26. (UEPB) Um reservatório em forma de cubo, cuja diagonal mede $2\sqrt{3}$ m, tem capacidade igual a:

a) 4000 litros

b) 6000 litros

x c) 8000 litros

d) 2000 litros

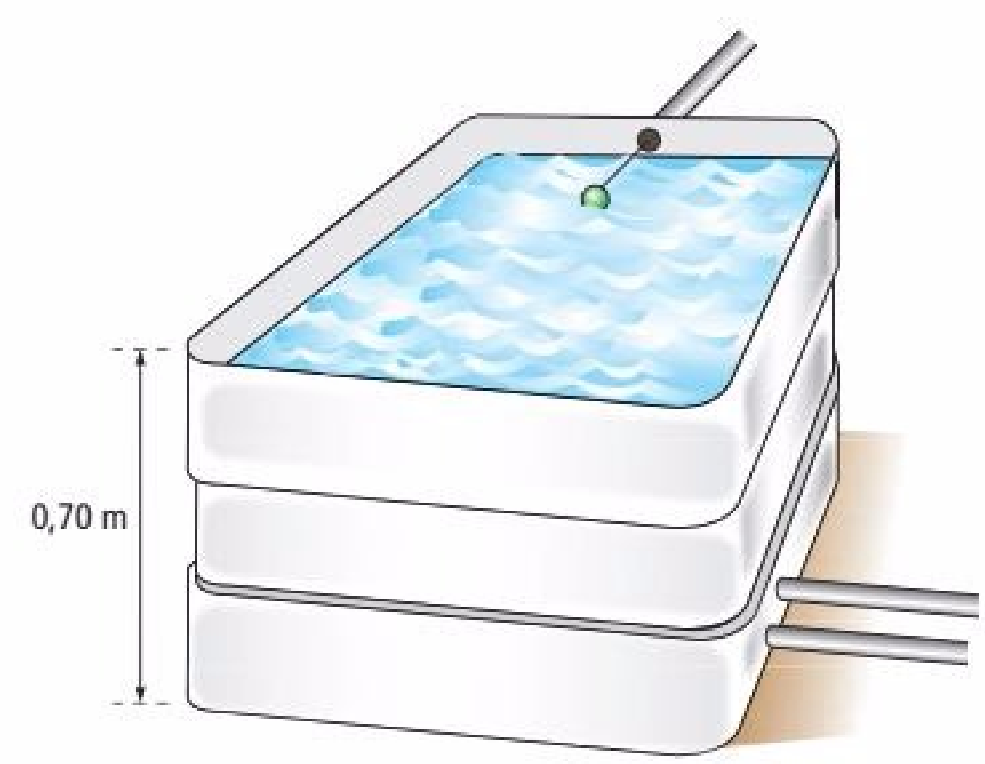
e) 1000 litros

27. É muito comum ouvirmos falar em falta de água em cidades litorâneas no período de veraneio.

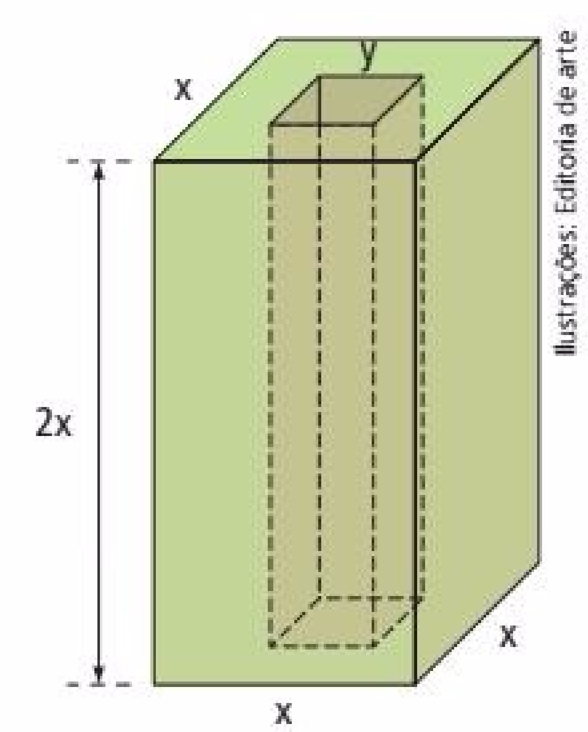
Para prevenir-se desse problema, o sr. José instalou uma caixa-d'água, cujas dimensões são 0,80 m, 1,00 m e 0,70 m.

Sabe-se que uma caixa-d'água nunca fica completamente cheia por causa da posição do cano de entrada. Nesse caso, os últimos 10 cm de altura do reservatório ficam vazios.

Lembre-se de que 1 litro de água equivale a um volume de 1 dm^3. Calcule a capacidade, em litros, dessa caixa-d'água, que tem a forma de um paralelepípedo. 480 L



28. (UFLA-MG) Em um paralelepípedo retangular com dimensões dadas na figura, foi feita uma cavidade em forma de um paralelepípedo retangular com base quadrada de lado y. Calcule y em função de x, tal que o sólido resultante tenha volume igual à metade do volume do paralelepípedo inicial. $y = \frac{x\sqrt{2}}{2}$



Ilustrações: Editoria de arte

29. (UEPG-PR) As medidas internas de uma caixa-d'água em forma de paralelepípedo retângulo são: 1,2 m, 1 m e 0,7 m, Sua capacidade é de:

a) 8 400 L
b) 84 L
X c) 840 L
d) 8,4 L
e) n.d.a.

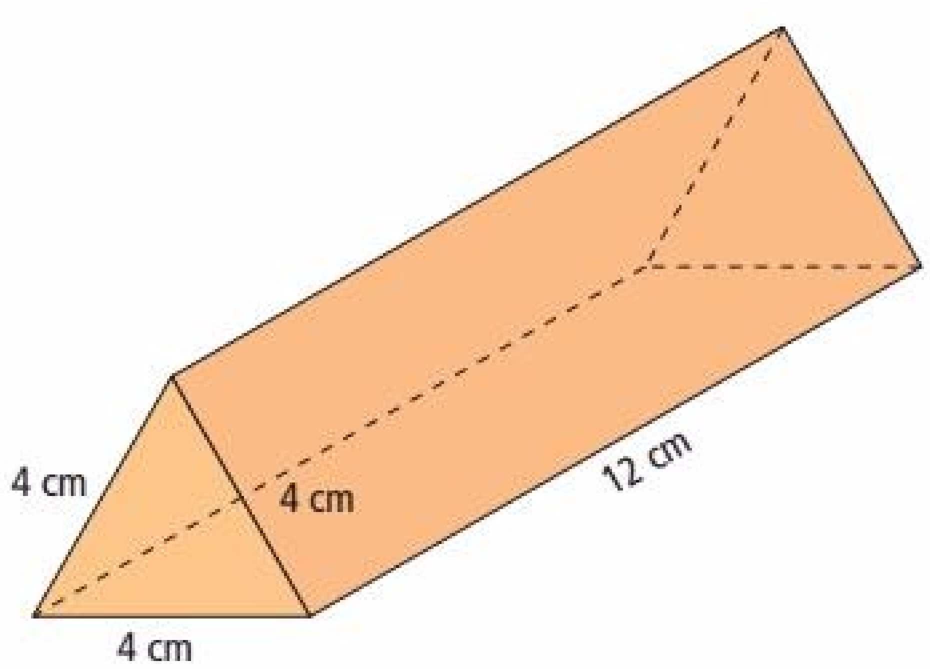
30. (UFRN) Quando se diz que, numa região, caiu uma chuva com precipitação de 10 mm de água, isso significa que cada metro quadrado dessa região recebeu 10 litros de água da chuva.

Uma caixa-d'água de 1,5 m de altura, 0,8 m de largura e 1,4 m de comprimento, com uma abertura na face superior, na forma de um quadrado com 40 cm de lado, recebeu água diretamente de uma chuva de 70 mm.

Admitindo-se que a caixa só tenha recebido água da chuva, pode-se afirmar que o nível da água nessa caixa aumentou:

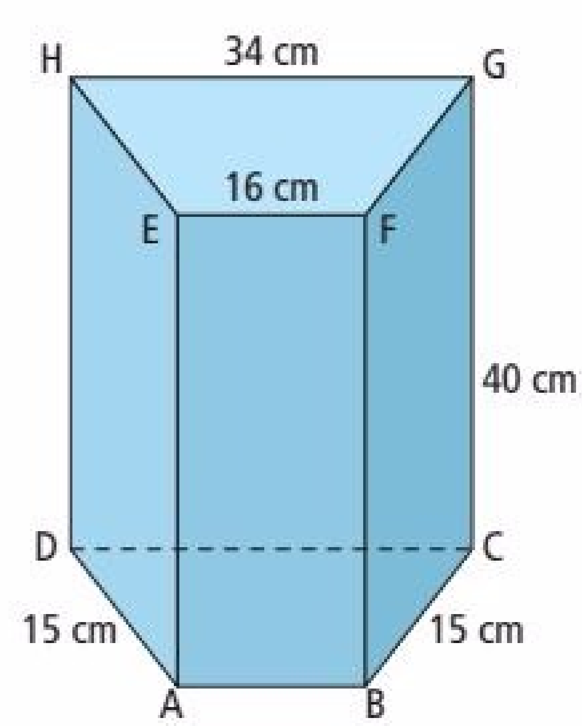
a) 0,8 cm
X b) 1 cm
c) 1,2 cm
d) 2 cm

31. Uma barra de chocolate tem o formato da figura abaixo. Calcule o volume de chocolate contido nessa barra. (Use $\sqrt{3} = 1{,}73$.) 83,04 cm³



Ilustrações: Editoria de arte

32. Um prisma reto, de ferro, de densidade aproximada 7,5 g/cm³, tem por base um trapézio isósceles como indica a figura.



Determine:

a) o volume desse sólido. 12 000 cm³

b) a massa desse sólido. 90 kg

33. Um arquiteto fez o projeto para construir uma coluna de concreto que vai sustentar uma ponte. A coluna tem a forma de um prisma hexagonal regular de aresta de base 2 m e altura do prisma 8 m.

Calcule:

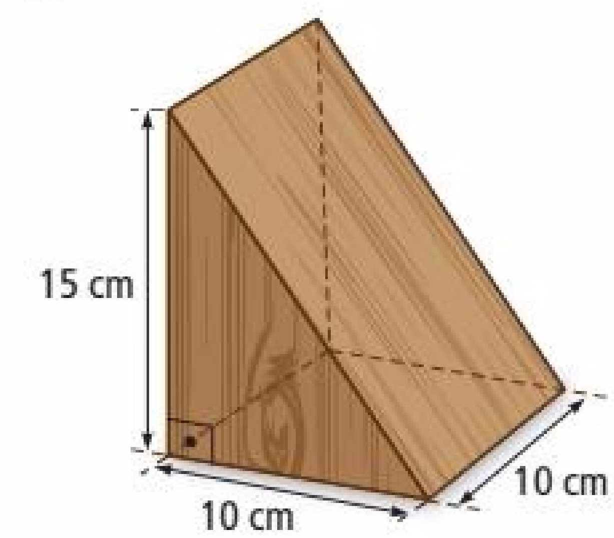
a) a área lateral da estrutura de madeira que deve ser utilizada para a construção da coluna; 96 m²

b) o volume de concreto necessário para preencher a forma da coluna. $48\sqrt{3}$ m³

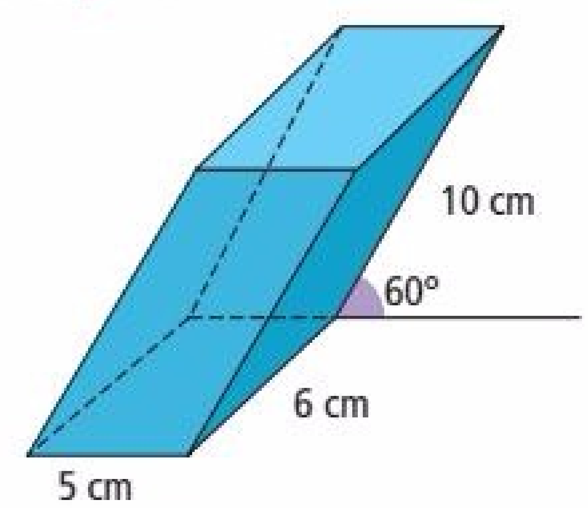
34. (Ufersa-RN) De uma viga de madeira de secção quadrada de lado $\ell = 10$ cm, extrai-se uma cunha de altura h = 15 cm, conforme a figura.

O volume da cunha é:

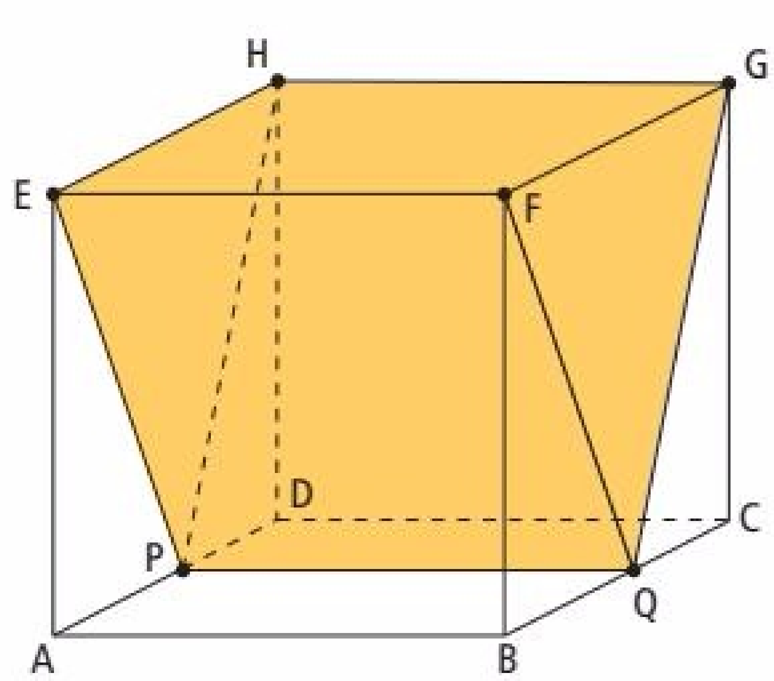
a) 250 cm³
b) 500 cm³
X c) 750 cm³
d) 1 000 cm³



35. Determine o volume do prisma oblíquo representado na figura. $150\sqrt{3}$ cm³



36. (UFRGS-RS) Um sólido geométrico foi construído dentro de um cubo de aresta 8, de maneira que dois de seus vértices, *P* e *Q*, sejam os pontos médios respectivamente das arestas AD e BC, e os vértices da face superior desse sólido coincidam com os vértices da face superior do cubo, como indicado na figura a seguir.



O volume desse sólido é:

a) 64
b) 128
X c) 256
d) 512
e) 1 024

37. Leia o texto a seguir a respeito do consumo consciente e da geração de lixo e faça o que se pede.

A geração de lixo é um dos problemas da sociedade moderna.

Lixo: um grave problema no mundo moderno

[...] O aumento na geração de resíduos sólidos tem várias consequências negativas: custos cada vez mais altos para coleta e tratamento do lixo; dificuldade para encontrar áreas disponíveis para sua disposição final; grande desperdício de matérias-primas. Por isso, os resíduos deveriam ser integrados como matérias-primas nos ciclos produtivos ou na natureza. [...]

Como resolver o problema do lixo?

Um caminho para a solução dos problemas relacionados com o lixo é apontado pelo Princípio dos Três Erres (3R's) – reduzir, reutilizar e reciclar. Fatores associados com estes princípios devem ser considerados, como o ideal de prevenção e não geração de resíduos, somados à adoção de padrões de consumo sustentável, visando poupar os recursos naturais e conter o desperdício. [...]

Decomposição de materiais	
Materiais	**Tempo de decomposição**
Papel	De 3 a 6 meses
Panos	De 6 meses a 1 ano
Filtro de cigarro	Mais de 5 anos
Madeira pintada	Mais de 13 anos
Náilon	Mais de 20 anos
Metal	Mais de 100 anos
Alumínio	Mais de 200 anos
Plástico	Mais de 400 anos
Vidro	Mais de 1 000 anos
Borracha	Indeterminado

Embalagem: quanto mais simples, melhor

Você já prestou atenção na quantidade e variedade de embalagens que acompanham os produtos que consumimos? Será que precisamos de todas elas? É certo que as embalagens são muito úteis: protegem os produtos contra sujeira e o ataque de insetos e roedores, conservam os produtos por mais tempo e os deixam mais atraentes, facilitam o transporte e trazem informações importantes para o consumidor. O problema é que, depois de cumprir sua função, elas acabam indo para o lixo.

O pior é que as embalagens estão ficando cada vez mais sofisticadas e complexas. Com o aperfeiçoamento das técnicas de conservação de produtos, novos materiais foram agregados às embalagens para torná-las mais eficientes. Essas misturas, no entanto, dificultam tanto a sua degradação natural como a sua reciclagem.

Por esse motivo, o setor de embalagens poderá contribuir de forma substancial para o consumo sustentável se encarar o desafio de atender à demanda e ao mesmo tempo eliminar os resíduos pós-consumo que comprometam o futuro. Isso implica desenvolver tecnologias mais limpas e que privilegiem a redução da geração de resíduos, utilizar materiais menos agressivos ao meio ambiente, reduzir o uso de materiais desnecessários, promover a reutilização e a reciclagem. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. **Consumo Sustentável**: manual de educação. Brasília: Consumers International/MMA/MEC/IDEC,2005. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/publicacao8.pdf>. Acesso em: 29 dez. 2015.

a) De acordo com o texto, qual é uma das possibilidades para solucionar os problemas relacionados à geração de lixo? Por que as embalagens modernas são cada vez mais difíceis de reciclar? Reduzir, reciclar e reutilizar. Por serem compostas por misturas de muitos componentes.

b) As embalagens longa vida são compostas por papel, plástico e alumínio. Se uma dessas embalagens tem as medidas de comprimento, largura e altura iguais a 9,5 cm, 6,5 cm e 16,5 cm, respectivamente, determine quantos cm² são necessários para sua confecção, seu volume em cm³ e sua capacidade em litros. (Considere não serem necessárias partes extras para colagem, apenas considerando a área total da superfície.) $S_t = 651{,}5\ \text{cm}^2$; $V \simeq 1018{,}9\ \text{cm}^3 \simeq 1{,}0189\ \text{L}$

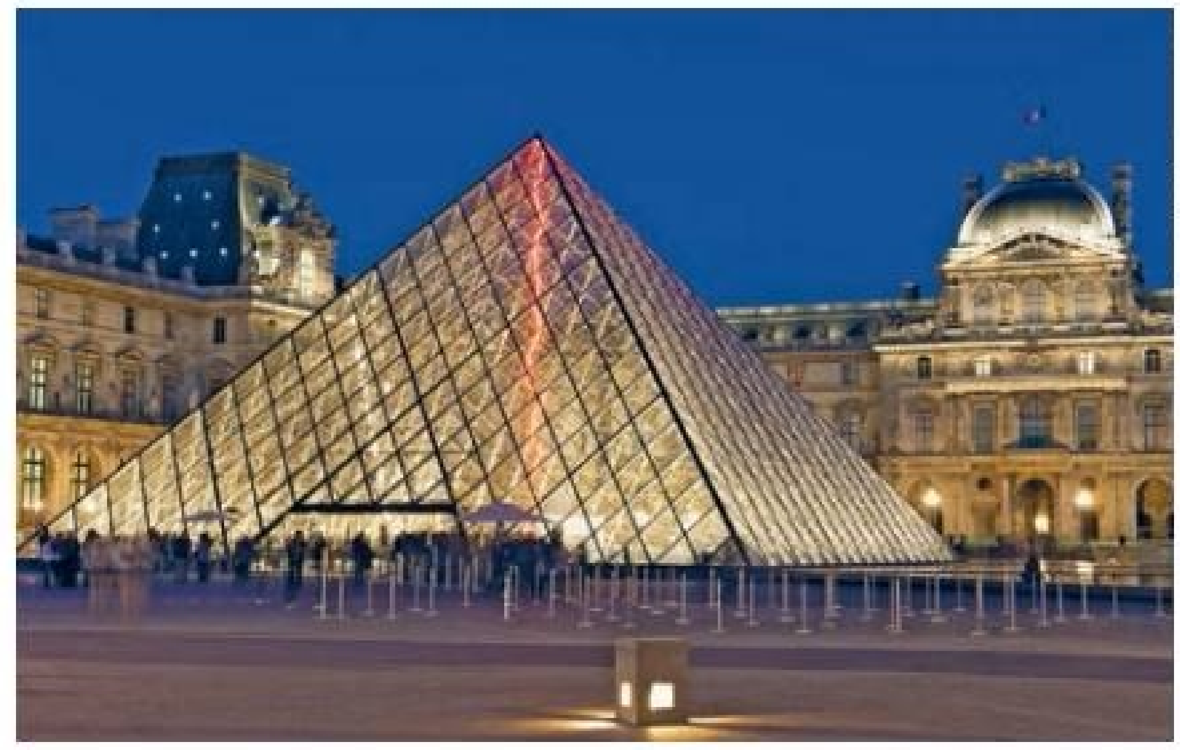
c) Reflita e enumere ações que podemos adotar para minimizar os problemas causados pelo lixo em nosso dia a dia. Discuta com os colegas sobre essas ações, e elaborem um quadro-resumo, contendo todas as boas práticas sugeridas. Resposta pessoal.

Pirâmides

Além dos prismas, há um outro grupo de poliedros, cuja forma pode ser associada a objetos do cotidiano, como mostram alguns exemplos abaixo.

Joana Kruse/Alamy/Latinstock

Foto da pirâmide de Queóps, localizada em Gizé, no Egito em 2015. Ela é a única das sete maravilhas do mundo antigo que se mantém até hoje.

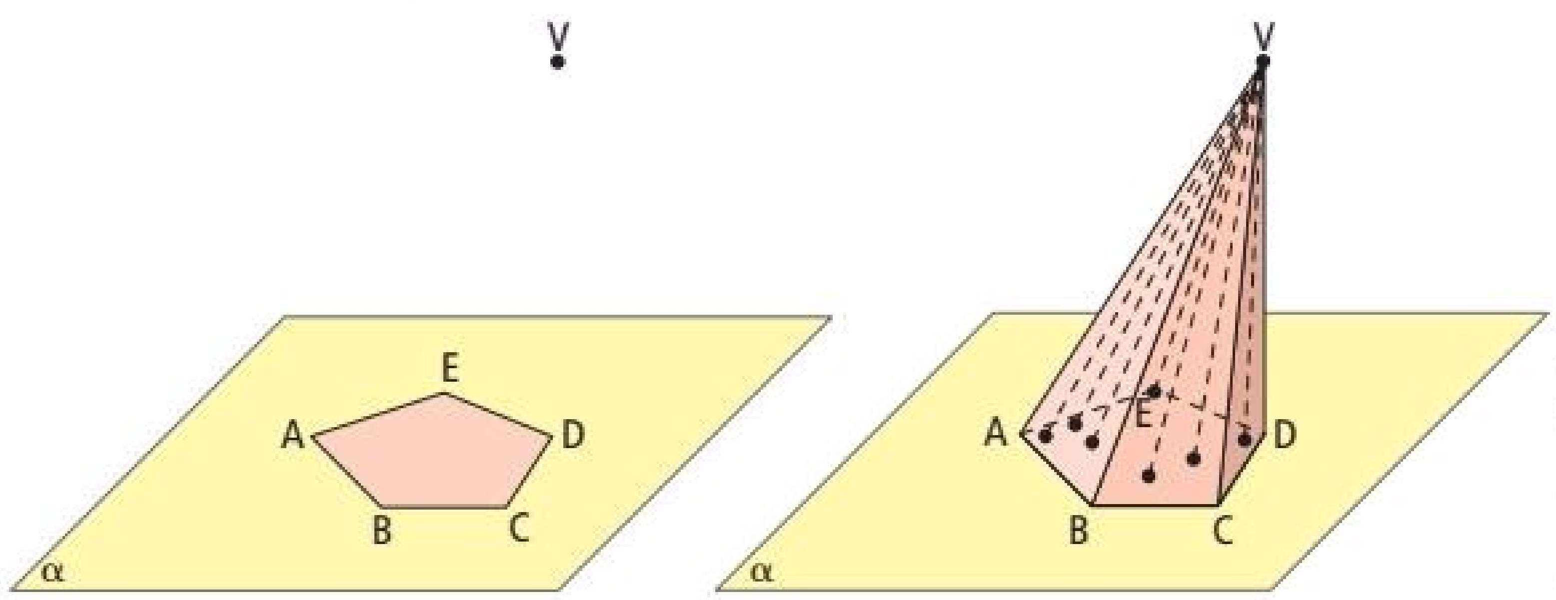


Javier Gil/Only France/AFP

Foto da entrada do Museu do Louvre, em Paris, na França, 2016. A pirâmide feita de vidro e aço foi planejada pelo arquiteto I. M. Pei e inaugurada em 1989 como uma nova entrada para suportar o fluxo de pessoas no museu.

Esse tipo de poliedro é denominado **pirâmide** e estudaremos a seguir suas características, seus elementos e maneiras de calcular a área da superfície e o volume de uma pirâmide.

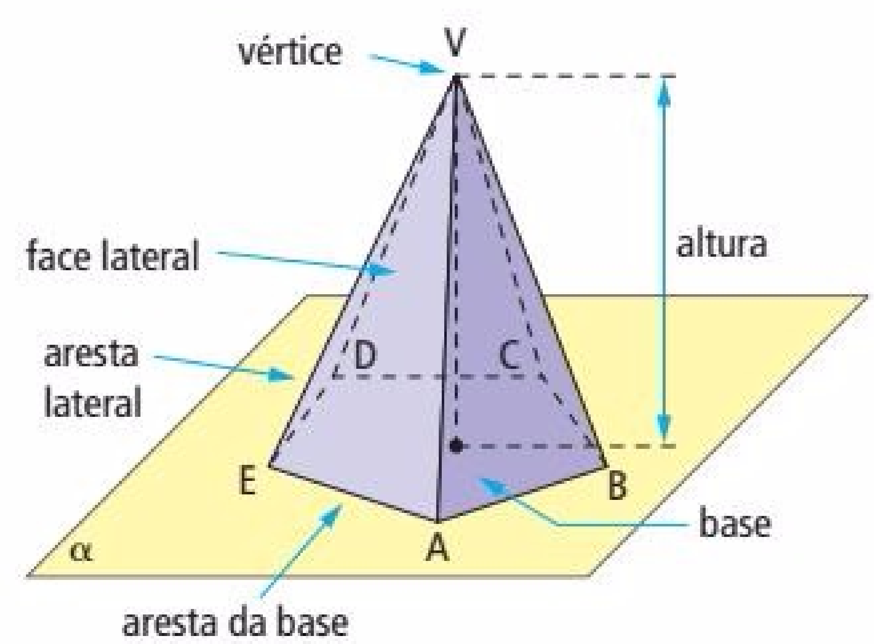
Vamos considerar um plano α, o polígono convexo ABCDE, contido em α, e um ponto V que não pertence a α.



Ilustrações: Editoria de arte

A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra em um ponto do polígono é denominada **pirâmide**.

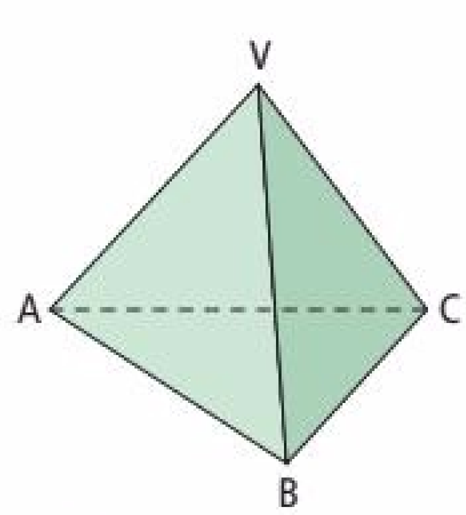
Considerando a pirâmide representada na figura ao lado, destacamos os seguintes elementos:



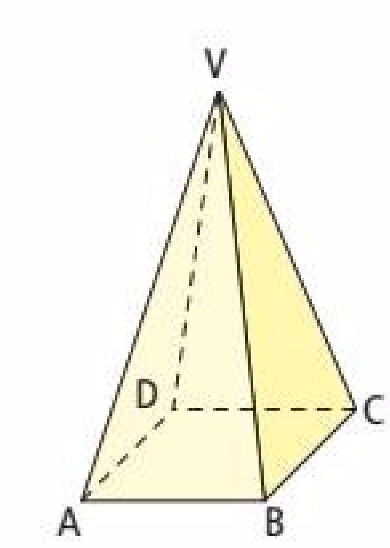
- **base**: é o polígono convexo ABCDE contido no plano α;
- **vértice da pirâmide**: é o ponto V, e os **vértices da base** são os pontos A, B, C, D, E;
- **faces laterais**: são os triângulos VAB, VBC, ..., VEA;
- **arestas da base**: são os lados do polígono da base $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{DE}$;
- **arestas laterais**: são os segmentos de reta $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, ..., $\overline{VE}$;
- **altura**: é a distância entre o ponto V e o plano da base, α.

Podemos classificar as pirâmides de acordo com o número de lados do polígono da base. Por exemplo, as pirâmides são:

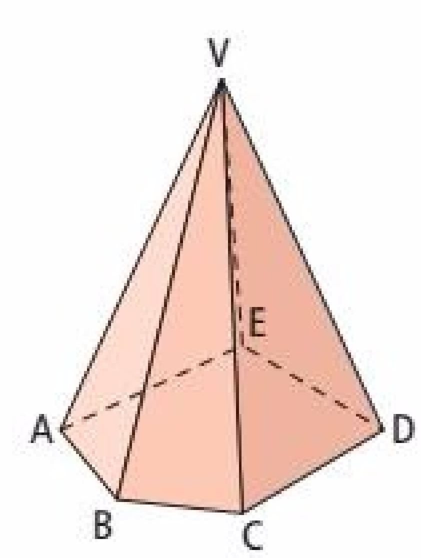
- **triangulares** quando a base é um triângulo;
- **quadrangulares** quando a base é um quadrilátero;
- **pentagonais** quando a base é um pentágono, e assim por diante.



Pirâmide triangular



Pirâmide quadrangular



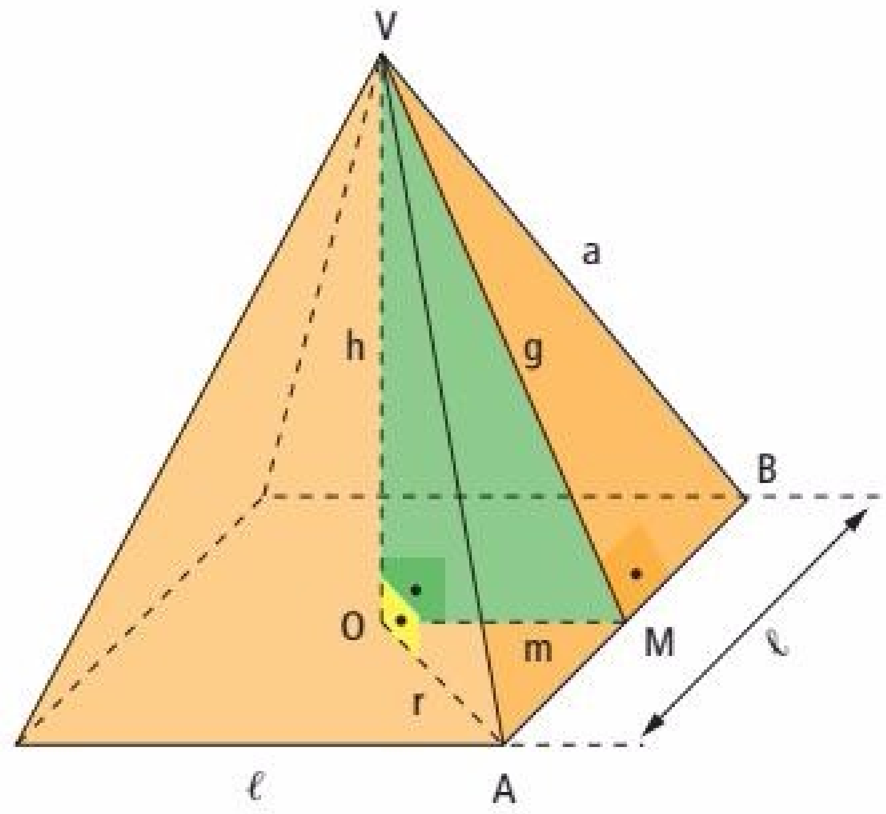
Pirâmide pentagonal

Pirâmide regular

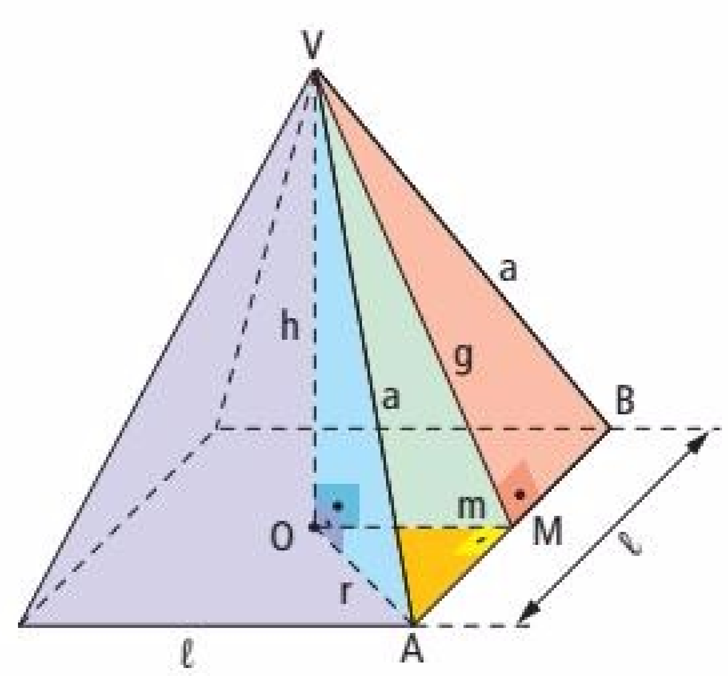
Uma pirâmide é **regular** quando sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro *O* da base; ou seja, o centro da circunferência circunscrita.

Considerando a pirâmide regular de base quadrada representada na figura ao lado, destacamos os seguintes elementos:

- **altura da pirâmide**: é o segmento de reta VO que liga o vértice *V* ao plano da base, e indicaremos sua medida por *h*;
- **faces laterais**: são triângulos isósceles congruentes;
- **arestas laterais**: são congruentes, e indicaremos sua medida por *a*;
- **arestas da base**: são congruentes e compõem o polígono que forma a base, e indicaremos sua medida por ℓ;
- **apótema da base**: é o apótema do polígono regular da base, e indicaremos sua medida por *m*;
- **raio da base**: é o raio da circunferência de centro *O* na qual o polígono da base está inscrito, e indicaremos sua medida por *r*.
- **apótema da pirâmide**: é a altura de cada face lateral (correspondente à altura relativa à base de um triângulo isósceles), e indicaremos sua medida por *g*.

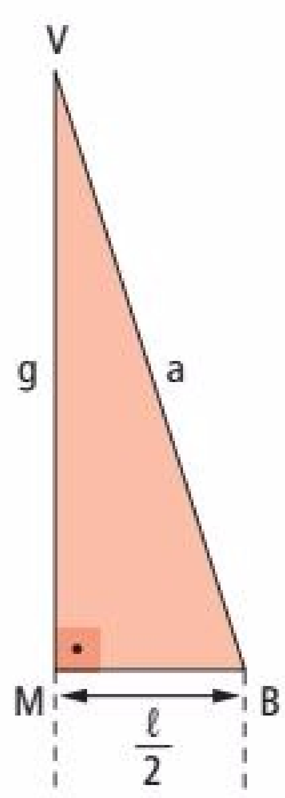


Nas pirâmides regulares, podemos determinar as medidas de todos os seus elementos conhecendo alguns deles. Considere a pirâmide regular representada na figura a seguir e observe os triângulos retângulos VMB, VOM, VOA e OMA.



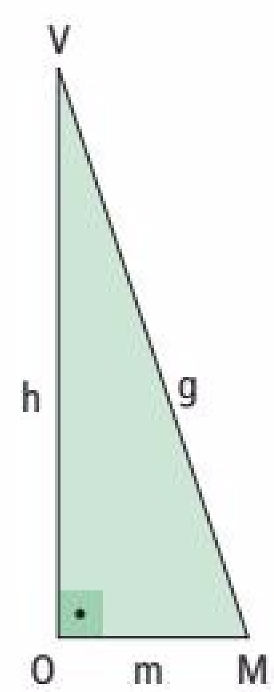
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos as seguintes relações:

- $\triangle$VMB



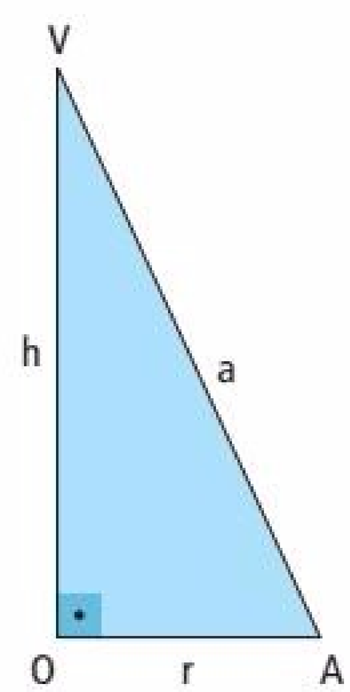
$a^2 = g^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

- $\triangle$VOM



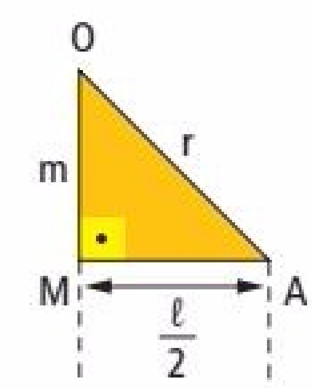
$g^2 = h^2 + m^2$

- $\triangle$VOA



$a^2 = h^2 + r^2$

- $\triangle$OMA



$r^2 = m^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

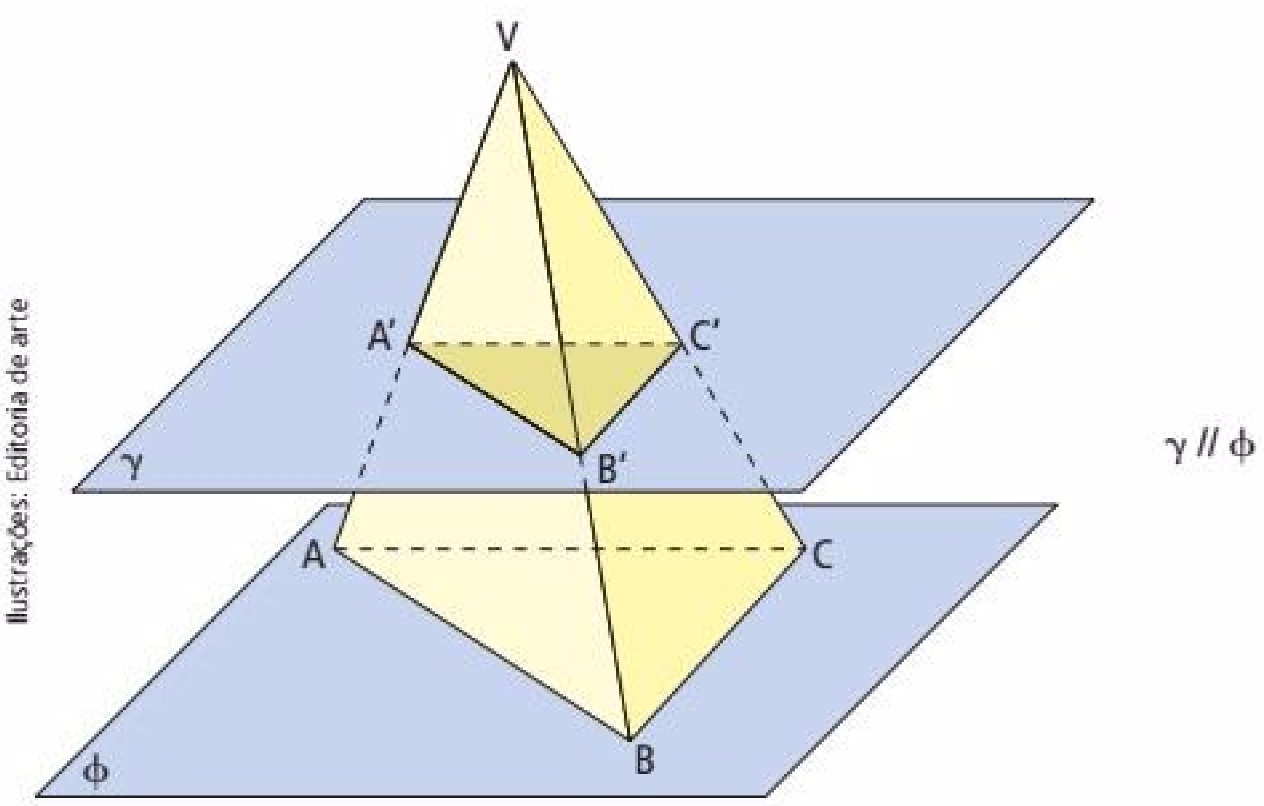
Ilustrações: Editoria de arte

Secção transversal de uma pirâmide

A intersecção de uma pirâmide com um plano paralelo à sua base é denominada **secção transversal** da pirâmide.

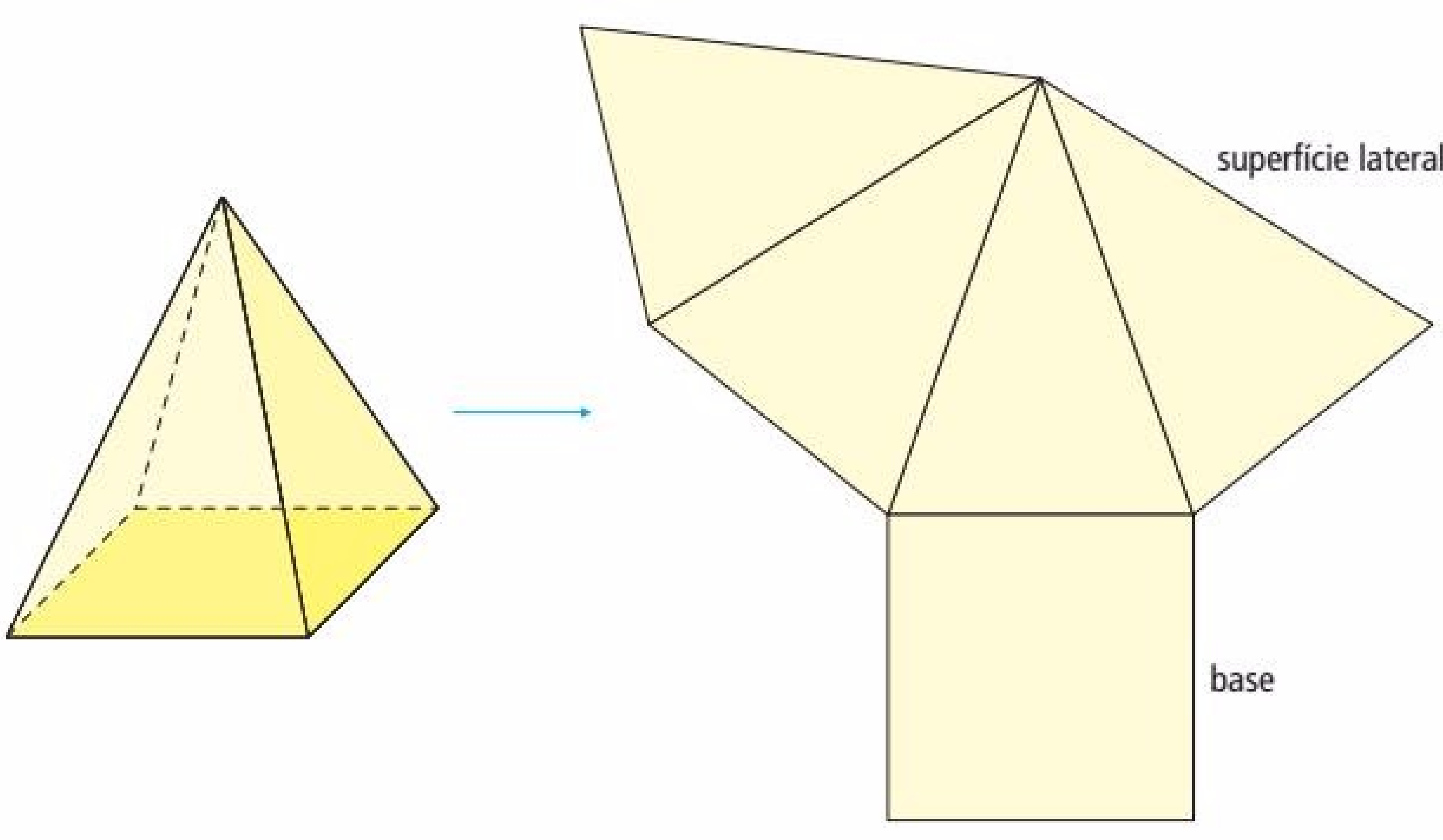
Observe na figura abaixo que a secção transversal de uma pirâmide é um polígono semelhante ao polígono da base.

Ilustrações: Editoria de arte



Área da superfície de uma pirâmide

A figura abaixo representa a planificação da superfície de uma pirâmide quadrangular regular.



Em uma pirâmide, definimos:

- **área da base** ($\mathbf{S_b}$): é a área do polígono da base pirâmide;
- **área lateral** ($\mathbf{S_\ell}$): é a soma das áreas de todas as faces laterais;
- **área total** ($\mathbf{S_t}$): é a soma da área lateral e da área da base.

Então, podemos escrever:

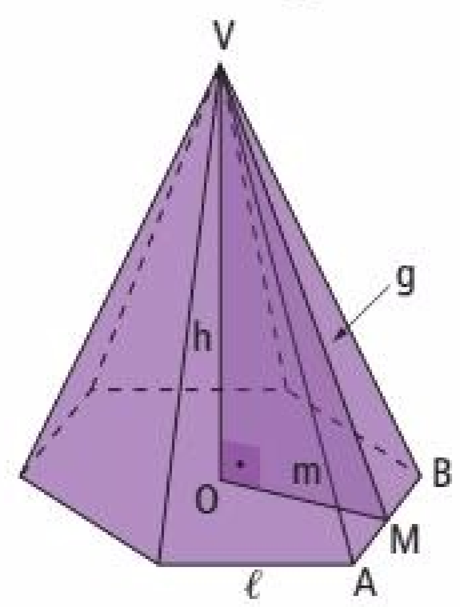
$$S_t = S_\ell + S_b$$

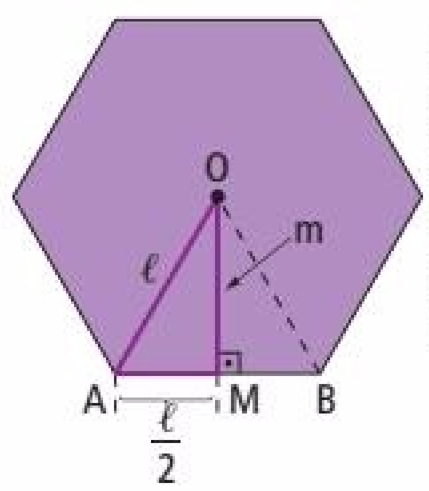
Exercício resolvido

9 Em uma feira de artesanato, foi construída uma tenda com tecido no formato de uma pirâmide hexagonal regular com 8 m de altura e aresta da base medindo $4\sqrt{3}$ m. Considerando que quem armou a tenda deixou uma das faces laterais como porta (sem fechamento do tecido), calcule a quantidade de tecido necessária para a cobertura da tenda.

Resolução

Primeiro vamos representar a tenda e sua base:





Ilustrações: Editoria de arte

No triângulo AOB, *m* é a medida do apótema da base, então:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 6 \Rightarrow m = 6$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos:

$$g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow g^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow g = 10$$

Cálculo de área S_f de uma face da pirâmide:

$$S_f = \frac{\ell\cdot g}{2} \Rightarrow S_f = \frac{4\sqrt{3}\cdot 10}{2} = 20\sqrt{3} \Rightarrow S_f = 20\sqrt{3}$$

Como uma das faces laterais não usará tecido (porta), temos que a área lateral será dada por:

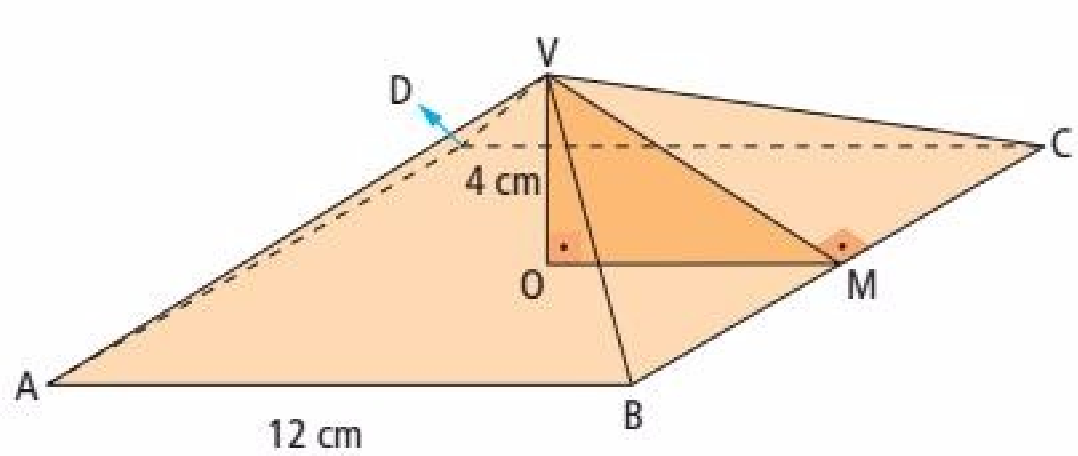
$$5\cdot 20\sqrt{3}\ \text{m}^2 = 100\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

Portanto, serão necessários $100\sqrt{3}\ \text{m}^2$ de tecido.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

38. Considere a pirâmide quadrangular regular indicada na figura e determine o que se pede.



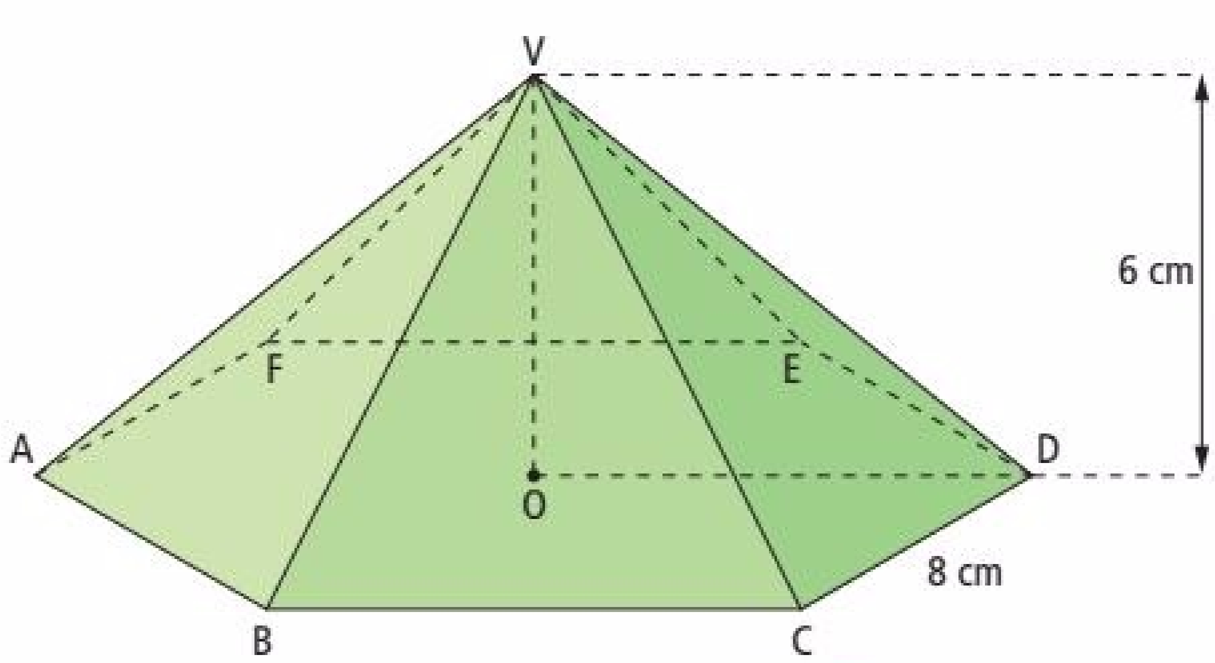
a) A medida do apótema da base. 6 cm

b) A medida do apótema da pirâmide. $2\sqrt{13}$ cm

c) A medida da aresta lateral. $2\sqrt{22}$ cm

d) A área total da superfície da pirâmide. $48(3+\sqrt{13})$ cm²

39. Considere a pirâmide hexagonal regular indicada na figura e determine o que se pede.



a) A medida do apótema da base. $4\sqrt{3}$ cm

b) A medida do apótema da pirâmide. $2\sqrt{21}$ cm

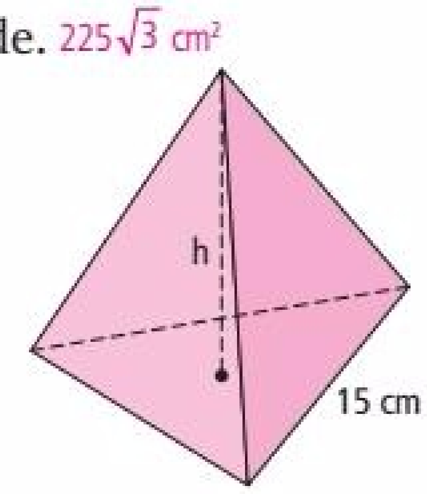
c) A medida da aresta lateral. 10 cm

d) A área total da superfície da pirâmide. $48\sqrt{3}(2+\sqrt{7})$ cm²

40. Em uma pirâmide regular de base quadrada, a medida do perímetro da base é 40 cm. Sabendo que a altura da pirâmide mede 12 cm, calcule a área lateral da superfície dessa pirâmide. 260 cm²

41. Calcule a área lateral da superfície de uma pirâmide triangular regular cuja aresta lateral mede 13 cm e o apótema da pirâmide mede 12 cm. 180 cm²

42. A figura abaixo mostra uma pirâmide de base triangular em que todas as arestas têm mesma medida, igual a 15 cm. Determine a área total da superfície dessa pirâmide. $225\sqrt{3}$ cm²

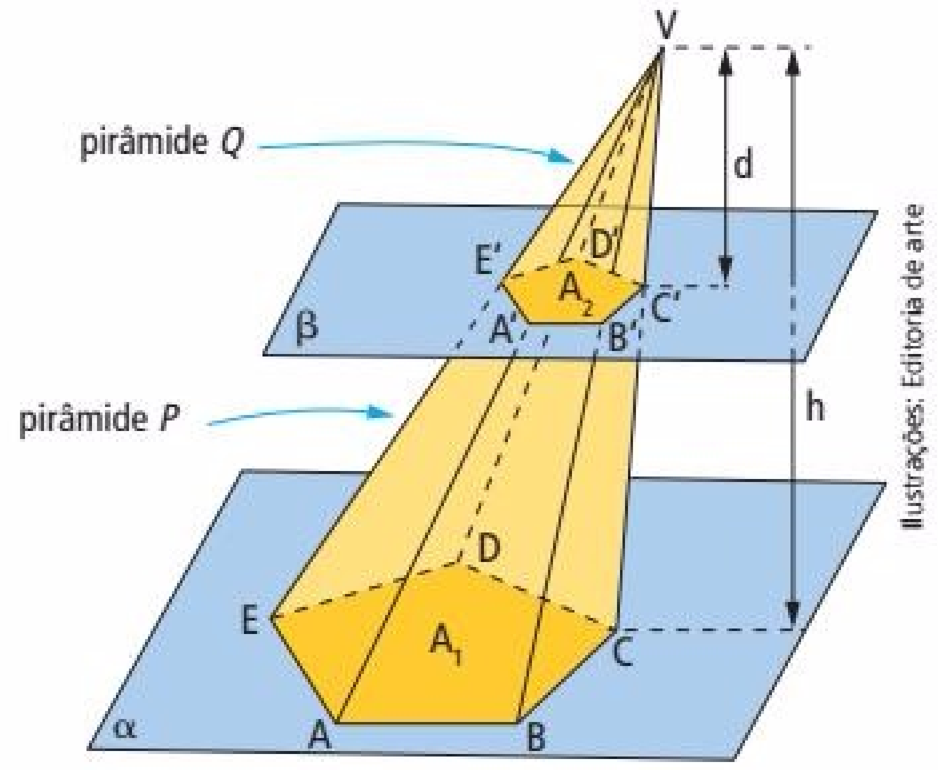


43. (UFPel-RS) Um campista confeccionou um piso circular de lona para inscrever a base de sua barraca, que tem a forma de uma pirâmide quadrangular regular. O apótema dessa pirâmide é 2 m e a área lateral, $8\sqrt{2}$ m². Calcule a área do piso circular confeccionado. 4π m²

44. (ITA-SP) Calcular a área lateral de uma pirâmide regular quadrangular de altura 4 cm e área da base 64 cm². $S_\ell = 64\sqrt{2}$ cm²

Volume de uma pirâmide

Considere a pirâmide *P* de altura medindo *h* e base ABCDE de área A_1, contida em um plano horizontal α, e um plano β, paralelo a α e secante à pirâmide. O plano β determina uma secção transversal A'B'C'D'E' de área A_2, que é base da pirâmide *Q* de altura *d* (pirâmide menor) e semelhante à base ABCDE.



No capítulo 11 do volume 1 desta coleção estudamos a semelhança de polígonos e vimos que se dois polígonos são semelhantes e têm razão k, então a razão entre as respectivas alturas também é *k* e a razão entre as respectivas áreas é igual a k². Esse conceito também é válido para outras figuras geométricas, como a pirâmide.

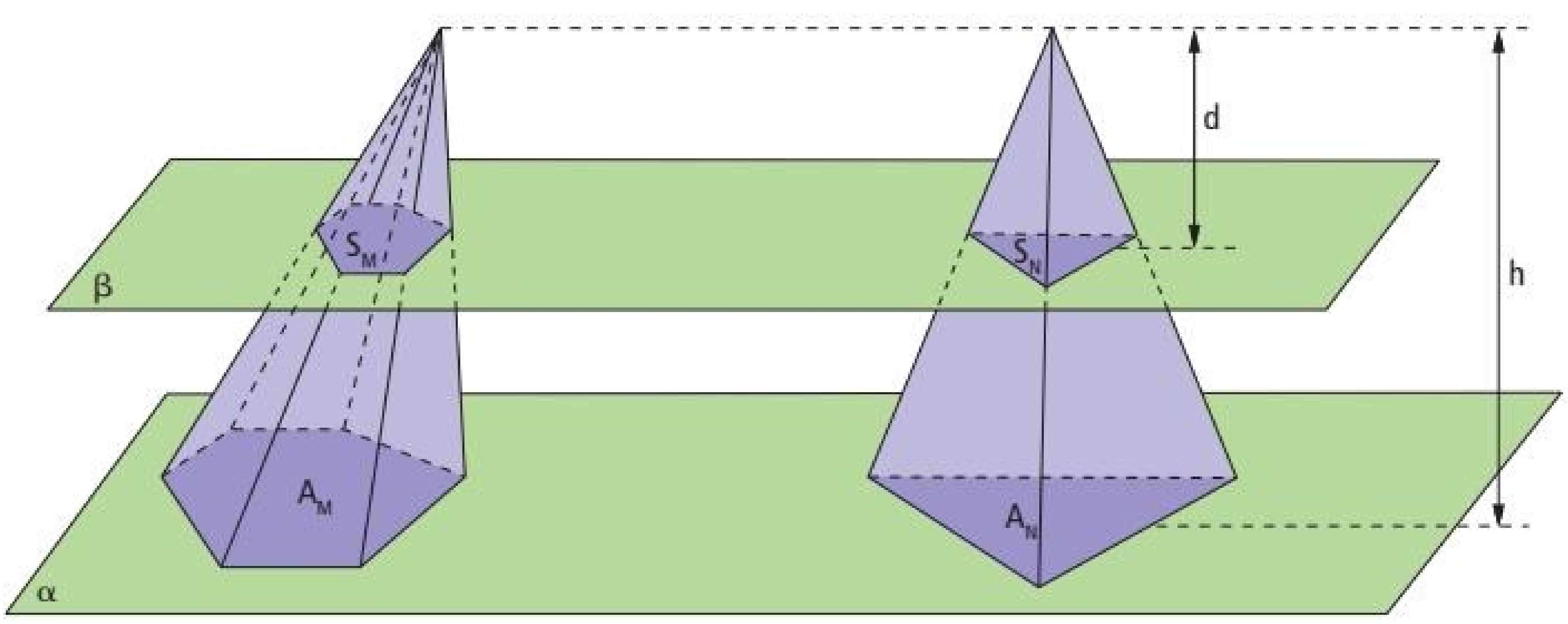
Assim, as pirâmides *P* e *Q* são semelhantes com razão de semelhança $k = \dfrac{AB}{A'B'}$. Mas a razão entre as alturas de *P* e *Q* também é igual a *k*. Então, sendo *h* a medida da altura de *P* e *d* a medida da altura de *Q*, podemos escrever: $k = \dfrac{h}{d}$. Como a razão entre as áreas é igual a k², podemos escrever:

$$k = \frac{h}{d} \Rightarrow k^2 = \left(\frac{h}{d}\right)^2$$

Como as bases das pirâmides *P* e *Q* são semelhantes, temos:

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{h}{d}\right)^2$$

Agora, considere duas pirâmides *M* e *N* de mesma altura de medida *h*, com bases de mesma área A_M e A_N contidas em um plano horizontal α. Qualquer plano β, paralelo a α e secante às pirâmides, determina duas secções transversais de áreas S_M e S_N, respectivamente.



Sabemos que $\dfrac{A_M}{S_M} = \left(\dfrac{h}{d}\right)^2$ e $\dfrac{A_N}{S_N} = \left(\dfrac{h}{d}\right)^2$.

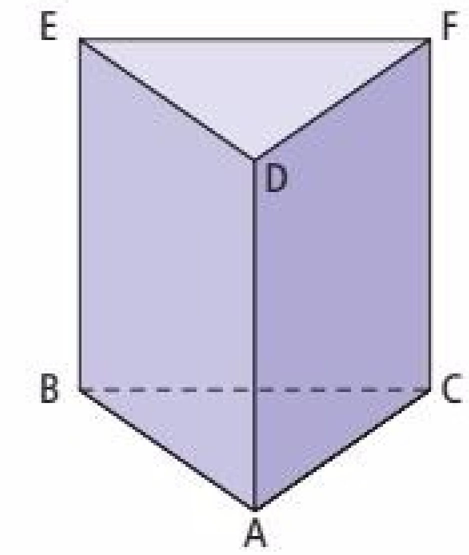
Logo, $\dfrac{A_M}{S_M} = \dfrac{A_N}{S_N}$.

Como $A_M = A_N$, concluímos que $S_M = S_N$ para qualquer plano β paralelo a α.

Com isso, pelo princípio de Cavalieri, temos que, se todas as secções transversais de duas pirâmides de mesma altura têm áreas iguais, então seus volumes são iguais.

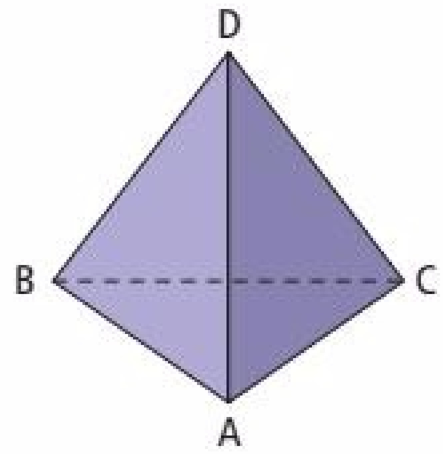
Esse fato será utilizado a seguir para determinar o volume de uma pirâmide.

Para calcular o volume de uma pirâmide, vamos considerar o prisma de base triangular ao lado.

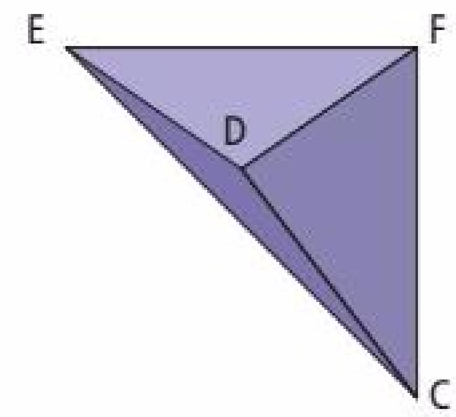


Esse prisma pode ser decomposto em três pirâmides triangulares: **1**, **2** e **3**, como mostram as figuras abaixo.

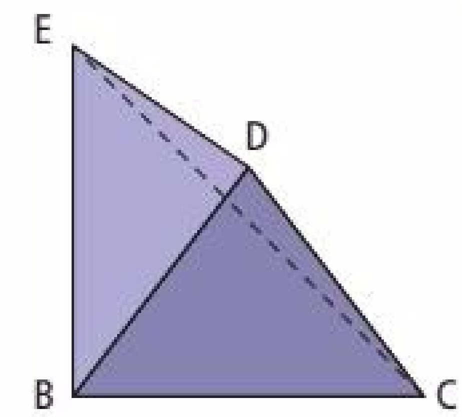
Ilustrações: Editoria de arte



Pirâmide 1



Pirâmide 2



Pirâmide 3

Observe que:

- as pirâmides **1** e **2** têm a mesma altura (altura do prisma), têm bases congruentes ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$, pois cada triângulo é uma base do prisma) e, portanto, as pirâmides **1** e **2** têm o mesmo volume;
- as pirâmides **2** e **3** têm a mesma altura (em relação às bases consideradas, a altura é a distância do ponto *D* ao retângulo BCFE), têm bases congruentes ($\triangle CEF \cong \triangle BCE$, pois cada um desses triângulos é a metade do retângulo BCFE) e, portanto, as pirâmides **2** e **3** têm o mesmo volume.

Logo, as pirâmides **1**, **2** e **3** têm o mesmo volume, ou seja, $V_1 = V_2 = V_3$.

Seja $V_{prisma} = V_1 + V_2 + V_3$ (soma dos volumes das três pirâmides) e considerando $V_1 = V_2 = V_3 = V$, temos:

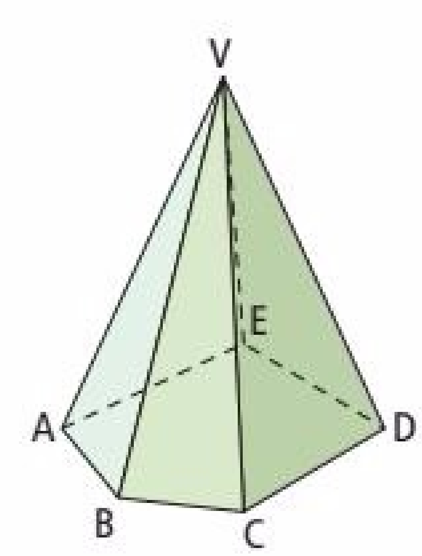
$$V_{prisma} = V + V + V \Rightarrow V_{prisma} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Assim, o volume de cada pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma triangular dado. Como o volume do prisma é $V_{prisma} = S_b \cdot h$, podemos escrever:

$$V = \frac{V_{prisma}}{3} \Rightarrow V = \frac{S_b \cdot h}{3}$$

Essa é a fórmula de cálculo do volume de uma pirâmide triangular. Vamos mostrar que ela também é válida para uma pirâmide qualquer. Para isso, considere uma pirâmide de altura medindo *h* e cuja base é um polígono de *n* lados com área S_b. A figura ao lado mostra um exemplo para *n* igual a 5.

A partir de um dos vértices da base, traçamos todas as $n - 2$ diagonais do polígono da base, obtendo $n - 2$ triângulos. Podemos dividir a pirâmide em $n - 2$ pirâmides triangulares de mesma altura da pirâmide original e área da base $S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$ traçando planos determinados por essas diagonais e pelo vértice *V*. O volume *V* da pirâmide será igual à soma dos volumes das $n - 2$ pirâmides triangulares. Então:

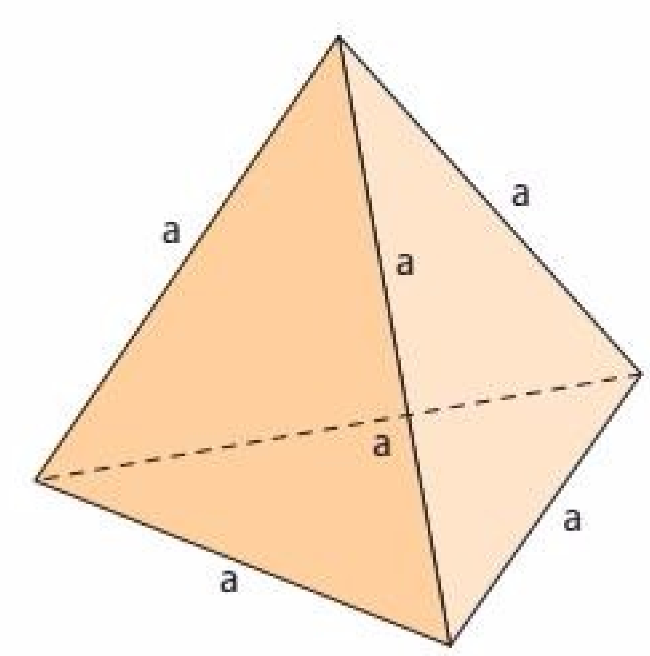


$$V = \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot S_2 \cdot h + \ldots + \frac{1}{3} \cdot S_{n-2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot h\,(S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-2})$$

Mas $S_b = S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-2}$. Então, o volume de uma pirâmide qualquer de altura medindo *h* e área da base S_b é igual a:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_b \cdot h}$$

Tetraedro regular



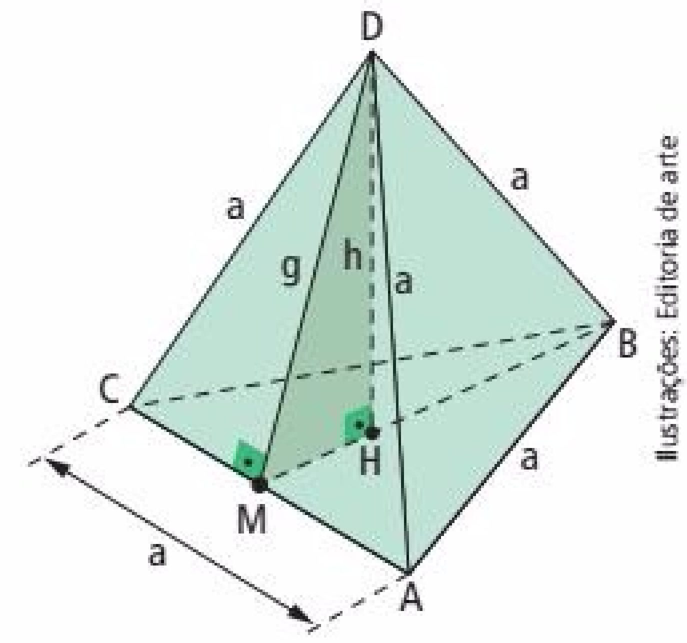
A pirâmide que possui quatro faces idênticas, sendo todas elas triângulos equiláteros, é chamada de **tetraedro regular**.

Como todas as faces são triângulos equiláteros, todas as arestas (da base e da lateral) são congruentes, e podemos determinar a altura (*h*) e a área total da superfície (S_t) da pirâmide em função de sua aresta de medida *a*.

Altura do tetraedro regular

Seja ABCD um tetraedro regular de aresta de medida *a*.

O apótema de uma face do tetraedro é a altura de um triângulo equilátero de lado de medida *a*.



Considerando o triângulo retângulo DMC e aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + g^2 \Rightarrow g^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow g^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Como o tetraedro é regular, o ponto *H* coincide com o circuncentro do triângulo ABC. No entanto, como ABC é equilátero, *H* também é o baricentro (ponto de encontro das medianas) do triângulo e, portanto, $MH = \frac{1}{3}g$.

Considerando o triângulo retângulo DHM e aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$g^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3}g\right)^2 \Rightarrow h^2 = g^2 - \frac{1}{9}g^2 \Rightarrow h^2 = \frac{8}{9}g^2$$

Como $g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$h^2 = \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{24a^2}{36}} \Rightarrow h = \frac{2a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

A área total da superfície (S_t) do tetraedro regular é igual a quatro vezes a área de uma face (S_f). Assim:

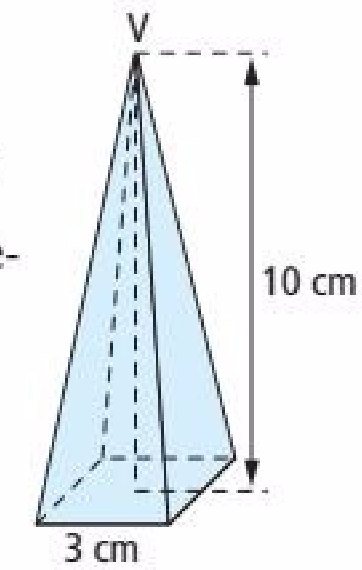
$$S_t = 4 \cdot S_f \Rightarrow S_t = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_t = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{S_t = a^2\sqrt{3}}$$

Exercícios resolvidos

10 Em uma pirâmide cuja base é um quadrado de lado 3 cm e sua altura mede 10 cm, calcular o volume dessa pirâmide.

Resolução

Observe a pirâmide da figura ao lado:



Como $V = \frac{1}{3}\cdot S_b \cdot h$, precisamos determinar a área da base (S_b).

A base é um quadrado, logo:

$S_b = \ell^2 \Rightarrow S_b = 3^2 = 9 \Rightarrow S_b = 9\ cm^2$

Cálculo do volume (V):

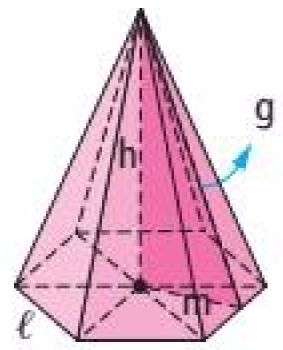
$$V = \frac{1}{3}\cdot S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 9 \cdot 10 = 30 \Rightarrow V = 30\ cm^3$$

Portanto, o volume da pirâmide é 30 cm³.

11 Em uma pirâmide hexagonal regular, a aresta da base mede $\ell = 2$ cm. Sabendo que a área lateral da pirâmide é 30 cm², calcule o volume da pirâmide.

Resolução

Seja a pirâmide:



Apótema da base (m):

A base é um hexágono regular, logo:

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

Como a base é hexagonal, a pirâmide tem seis faces laterais:

$$S_f = \frac{S_\ell}{6} \Rightarrow S_f = \frac{30}{6} = 5 \Rightarrow S_f = 5$$

Apótema da pirâmide (g):

$$S_f = \frac{\ell \cdot g}{2} \Rightarrow 5 = \frac{2g}{2} \Rightarrow g = 5$$

Altura da pirâmide (h):

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow 5^2 = h^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{22}$$

Área da base (S_b):

Como a base é um hexágono regular, sua área é igual a seis vezes a área do triângulo equilátero de aresta $\ell = 2$ cm.

$$S_b = 6\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = 6\cdot\frac{4\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow S_b = 6\sqrt{3}\ cm^2$$

Volume da pirâmide (V):

$$V = \frac{1}{3}S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot\sqrt{22} = 2\sqrt{66} \Rightarrow V = 2\sqrt{66}$$

Portanto, o volume da pirâmide é $2\sqrt{66}\ cm^3$.

12 Considere um tetraedro regular ABCV de aresta de medida a = 4 cm, em que $\overline{AM}$ é uma mediana do triângulo equilátero ABC, base do tetraedro.

A partir dessas informações, determine:

a) a medida da mediana $\overline{AM}$;

b) a medida da altura do tetraedro;

c) a área total da superfície do tetraedro.

Resolução

a) Em um triângulo equilátero, a mediana coincide com a altura. Assim, a medida da mediana $\overline{AM}$ é igual à medida da altura relativa ao lado BC do triângulo equilátero ABC de lado de medida *a*, ou seja:

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Portanto, a medida da mediana $\overline{AM}$ é $2\sqrt{3}$ cm.

b) Vimos que a medida *h* da altura de um tetraedro regular é dada por $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Então:

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Portanto, a medida da altura do tetraedro é $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm.

c) A área total S_t da superfície de um tetraedro regular é dada por $S_t = a^2\sqrt{3}$. Então:

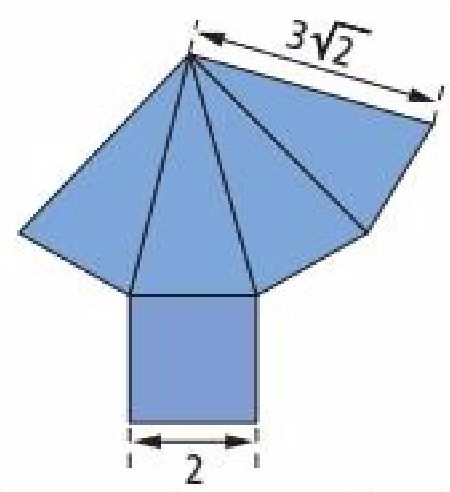
$$S_t = a^2\sqrt{3} = 4^2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$$

Portanto, a área total da superfície do tetraedro é $16\sqrt{3}$ cm².

Exercícios propostos

Escreva no caderno

45. (FUC-MT) Determine o volume de uma pirâmide cuja planificação é: $V = \frac{16}{3}$

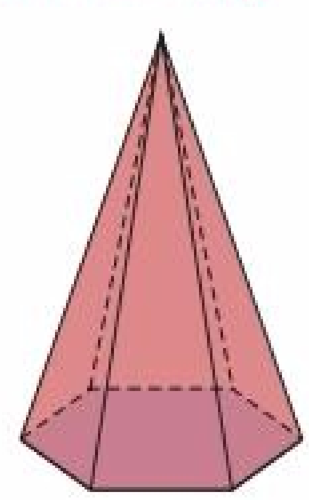


46. (UFPA) Uma pirâmide triangular regular tem 9 cm³ de volume e $4\sqrt{3}$ cm de altura. Qual a medida de aresta da base?

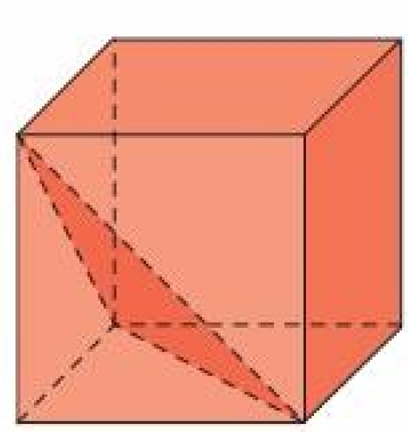
a) $\sqrt{2}$ cm
X b) 3 cm
c) $2\sqrt{2}$ cm
d) $\sqrt{3}$ cm
e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

47. (Unicamp-SP) Uma pirâmide regular, de base quadrada, tem altura igual a 20 cm. Sobre a base dessa pirâmide constrói-se um cubo de modo que a face oposta à base do cubo corte a pirâmide em um quadrado de lado igual a 5 cm. Faça uma figura representativa dessa situação e calcule o volume do cubo.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

48. (UFPE) Uma pirâmide hexagonal regular tem a medida da área da base igual à metade da área lateral. Se a altura da pirâmide mede 6 cm, assinale o inteiro mais próximo do volume da pirâmide, em cm³. Dado: use a aproximação: $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$. $\simeq 83$

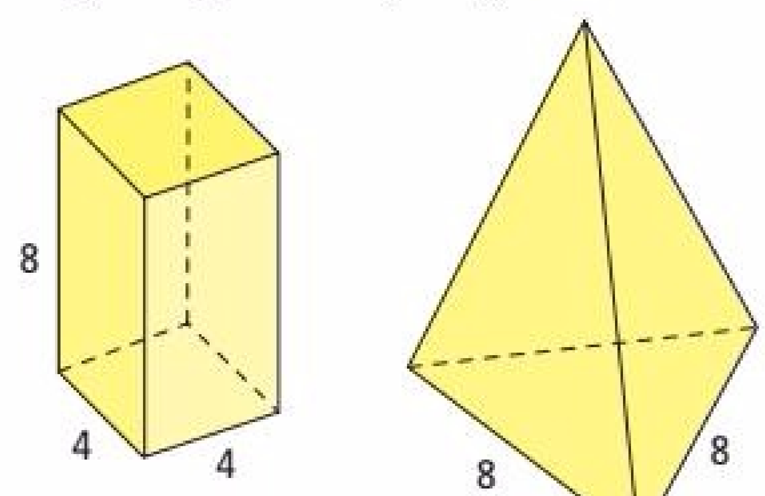


49. (UFPE) Os vértices de um tetraedro são um dos vértices de um cubo de aresta 30 cm e os três vértices ligados a ele por uma aresta do cubo, como ilustrado na figura ao lado. Se *V* é o volume do tetraedro, em cm³, assinale $\frac{V}{100}$.



$\frac{V}{100} = 45$

50. (UFPR) As figuras abaixo apresentam um bloco retangular de base quadrada, uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero, e algumas de suas medidas.



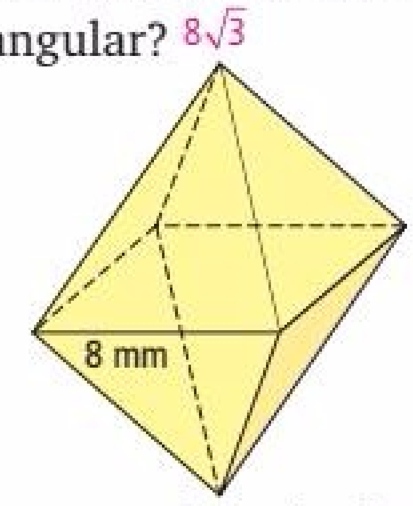
a) Área da base da pirâmide: $16\sqrt{3}$

a) Calcule o volume do bloco retangular e a área da base da pirâmide. Volume do bloco retangular: 128

b) Qual deve ser a altura da pirâmide, para que seu volume seja igual ao do bloco retangular? $8\sqrt{3}$

51. Uma pedra preciosa tem a forma de um octaedro regular de aresta 8 mm, conforme indica a figura. Calcule o volume dessa pedra.

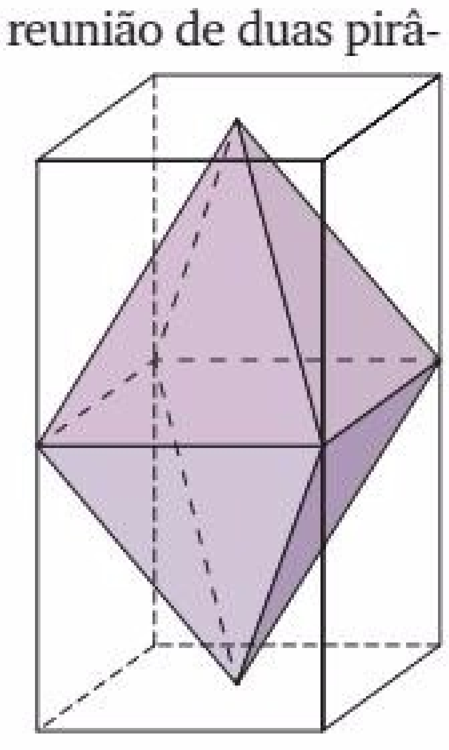
$\frac{512\sqrt{2}}{3}$ mm³



52. (UFMA) A figura abaixo representa um paralelepípedo retângulo, no qual está inscrito um octaedro cujas 8 faces são triângulos equiláteros com 1 cm de lado. (Obs.: octaedro é o sólido resultante da reunião de duas pirâmides quadrangulares de bases congruentes.)

Nessas condições, é correto afirmar que o volume do paralelepípedo, em centímetros cúbicos, é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
X c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{3}$
e) $2\sqrt{2}$



Ilustrações: Editoria de arte

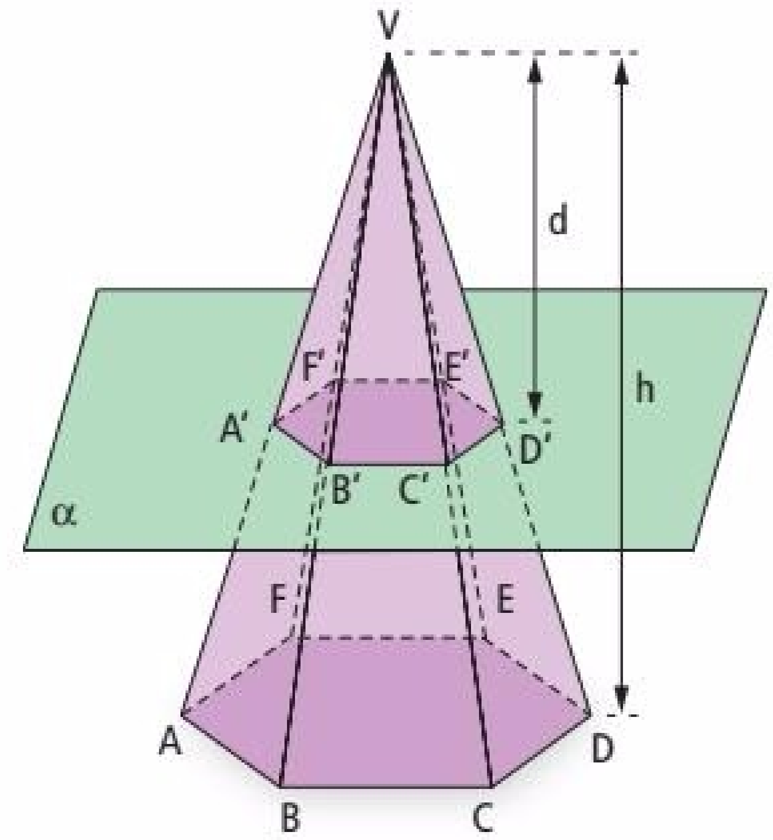
Tronco de pirâmide

Considerar uma pirâmide hexagonal de vértice *V* e altura de medida *h*, traçamos um plano α, paralelo à sua base a uma distância de medida *d* do vértice *V* da pirâmide.

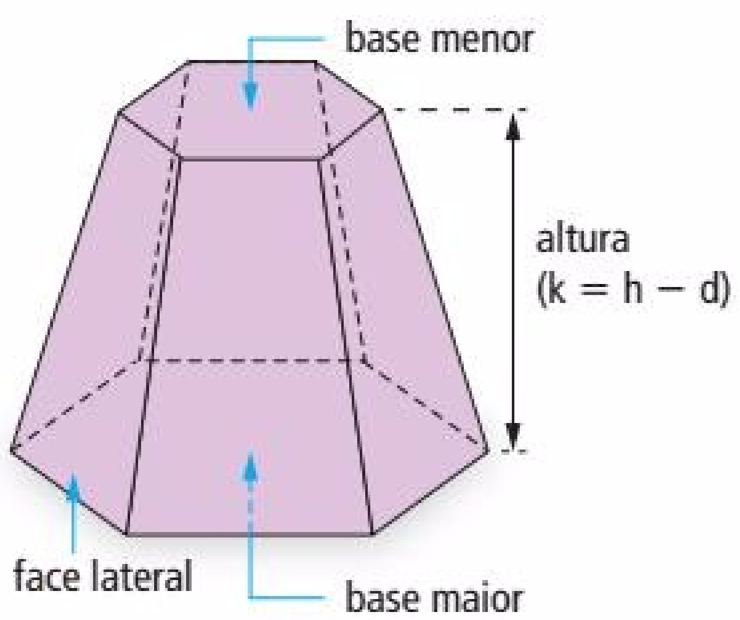
O plano α separa a pirâmide inicial em dois sólidos: uma pirâmide de altura de medida *d* e um poliedro denominado **tronco de pirâmide**.

Em um tronco de pirâmide destacamos os seguintes elementos:

- **base maior do tronco**: é a base da pirâmide inicial;
- **base menor do tronco**: é a secção transversal obtida com a intersecção do plano α com a pirâmide inicial;
- **faces laterais**: são trapézios;
- **altura do tronco**: é a distância entre as bases do tronco, e indicaremos sua medida por $k = h - d$.



Ilustrações: Editoria de arte



Quando a pirâmide inicial é regular, dizemos que o tronco da pirâmide é regular. Em um tronco de pirâmide regular:

- as bases são polígonos regulares semelhantes;
- as faces laterais são trapézios isósceles congruentes;
- a altura de cada trapézio é chamada de **apótema** do tronco, e indicaremos sua medida por *f*.

Área da superfície de um tronco de pirâmide

Em um tronco de pirâmide definimos:

- **áreas das bases (S_B e S_b)**: área da base maior (S_B) é a área do polígono da base maior, e área da base menor (S_b) é a área do polígono da base menor;
- **área lateral (S_ℓ)**: é a soma das áreas de todas as faces laterais;
- **área total (S_t)**: é a soma das áreas das duas bases e da área lateral.

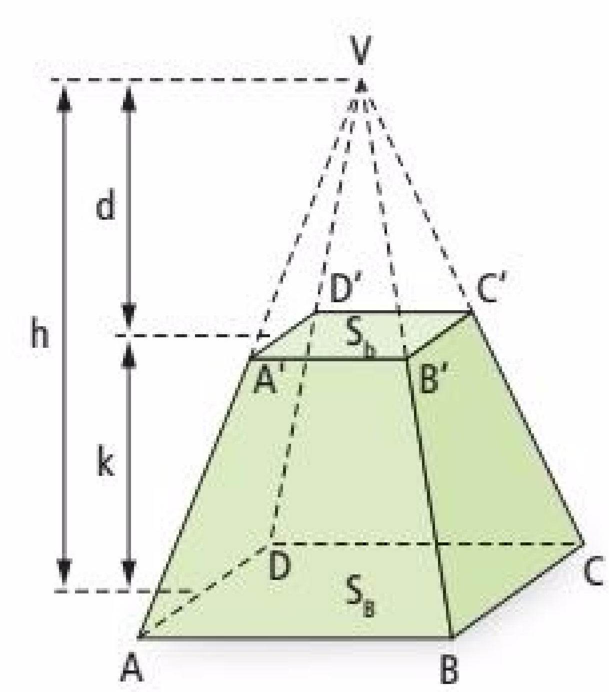
Então, podemos escrever:

$$S_t = S_B + S_b + S_\ell$$

Volume de um tronco de pirâmide

Considere o tronco de pirâmide representado na figura ao lado. Nele, identificamos as seguintes medidas:

- área da base maior: S_B;
- área da base menor: S_b;
- altura da pirâmide VABCD: *h*;
- altura da pirâmide VA'B'C'D': *d*;
- altura do tronco: *k*.



Pode ser demonstrado que o volume *V* de um tronco de pirâmide, cujas áreas das bases são S_B e S_b e com altura de medida *k*, é dado por:

$$V = \frac{k}{3}\left(S_B + \sqrt{S_B \cdot S_b} + S_b\right)$$

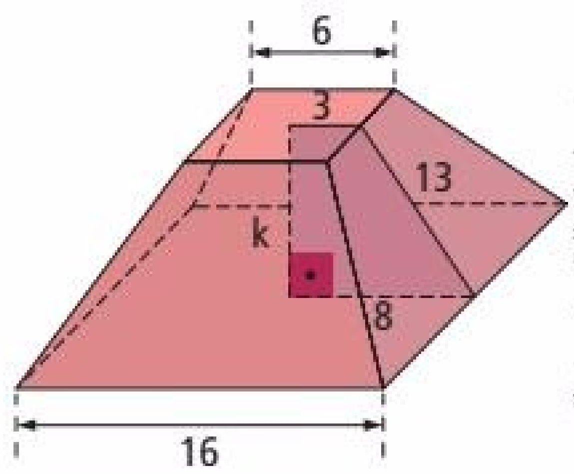
O volume do tronco também pode ser determinado pela diferença entre o volume da pirâmide maior de base ABCD e o volume da pirâmide menor de base A'B'C'D'. Dependendo das informações que se têm, opta-se pelo processo mais prático em cada caso.

Exercícios resolvidos

13 Dado um tronco de pirâmide regular cujas bases são quadrados de lados $\ell = 16$ m e $\ell' = 6$ m e considerando a altura de uma face lateral do tronco medindo 13 m, calcule o volume desse tronco.

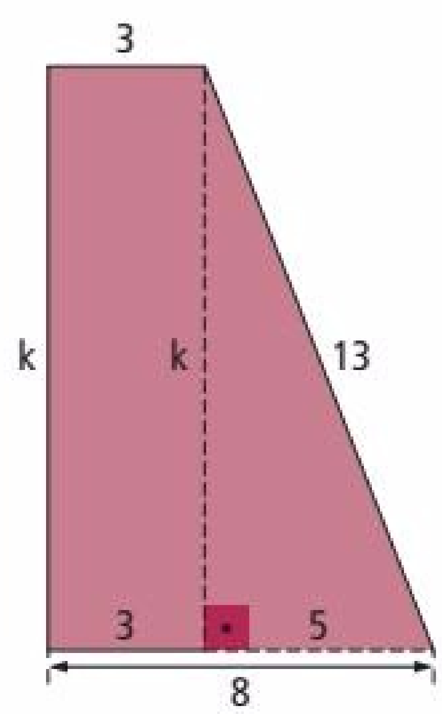
Resolução

Observe a figura:



Ilustrações: Editoria de arte

Cálculo da altura do tronco (k):



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$13^2 = k^2 + 5^2$

$k^2 = 169 - 25$

$k^2 = 144$

$k = \sqrt{144} = 12$

$k = 12$ m

Cálculo do volume (V):

$S_B = \ell^2 \Rightarrow S_B = 16^2 = 256$

$S_B = 256$ m²

$S_b = (\ell')^2 \Rightarrow S_b = 6^2 = 36 \Rightarrow S_b = 36$ m²

$$V = \frac{k}{3}\left(S_B + \sqrt{S_B \cdot S_b} + S_b\right)$$

$$V = \frac{12}{3}\left(256 + \sqrt{9216} + 36\right)$$

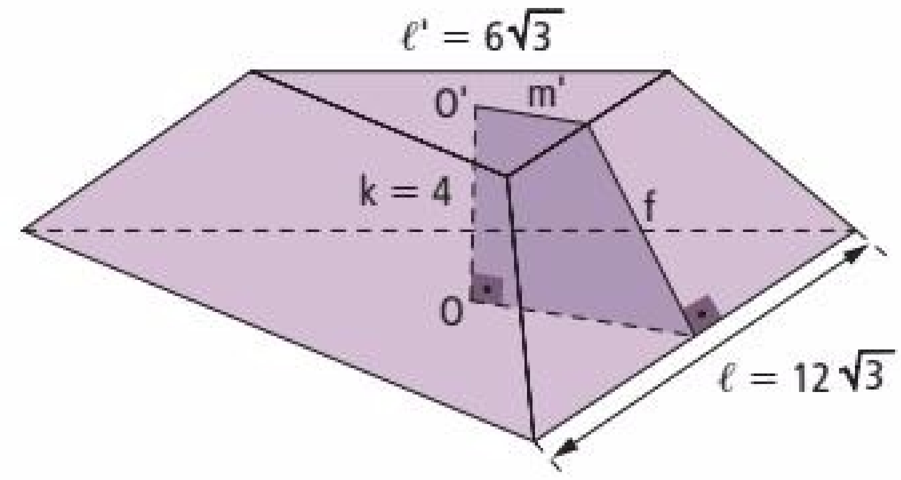
$V = 4 \cdot 388 = 1\,552$

Portanto, o volume desse tronco é 1 552 m³.

14 Um tronco de pirâmide regular tem como bases triângulos equiláteros de lados $12\sqrt{3}$ cm e $6\sqrt{3}$ cm, respectivamente. A altura do tronco é 4 cm. Calcular a área total da superfície do tronco de pirâmide.

Resolução

Observe o tronco de pirâmide triangular regular:



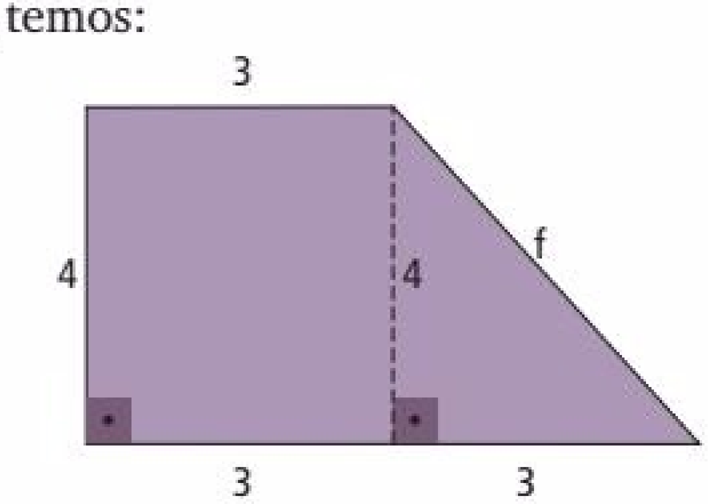
Inicialmente, vamos calcular a medida de altura f do apótema do tronco.

$$m' = \frac{1}{3} \cdot \ell' \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m' = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \Rightarrow m' = 3 \text{ cm}$$

$$m = \frac{1}{3} \cdot \ell \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \Rightarrow$$

$\Rightarrow m = 6$ cm

Substituindo os valores e aplicando o teorema de Pitágoras, temos:



$f^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow f^2 = 9 + 16$

$f^2 = 25 \Rightarrow f = 5$

Vamos calcular, a seguir, a área da face lateral do tronco:

$$S_f = \frac{(\ell + \ell') \cdot f}{2} \Rightarrow S_f = \frac{(12\sqrt{3} + 6\sqrt{3}) \cdot 5}{2} = 45\sqrt{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_f = 45\sqrt{3}$ cm²

Como a base é triangular, temos 3 faces laterais, e a área lateral será:

$S_\ell = 3 \cdot S_f \Rightarrow S_\ell = 3 \cdot 45\sqrt{3} = 135\sqrt{3} \Rightarrow S_\ell = 135\sqrt{3}$ cm²

Área total da superfície do tronco de pirâmide:

$$S_B = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_B = \frac{\left(12\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_B = 108\sqrt{3}$ cm²

$$S_b = \frac{(\ell')^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = \frac{\left(6\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3} \Rightarrow$$

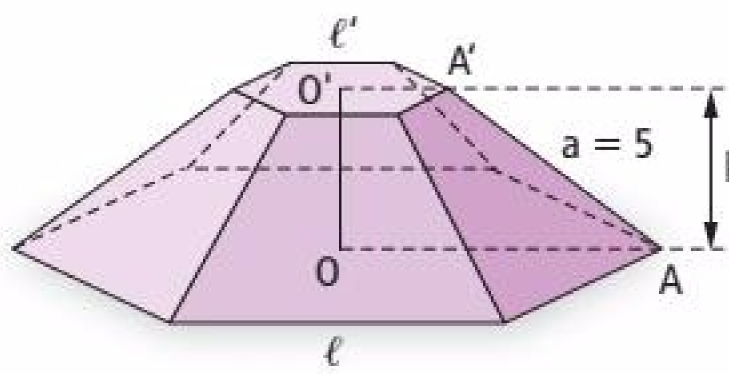
$\Rightarrow S_b = 27\sqrt{3}$ cm²

Logo:

$S_t = S_\ell + S_B + S_b \Rightarrow S_t = 135\sqrt{3} + 108\sqrt{3} + 27\sqrt{3} =$

$= 270\sqrt{3} \Rightarrow S_t = 270\sqrt{3}$ cm²

15 O tronco da pirâmide regular hexagonal indicado na figura tem aresta lateral 5 cm e áreas das bases $54\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ e $6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Calcule seu volume.



Resolução

Vamos, inicialmente, calcular a medida das arestas das bases.

As bases são hexágonos regulares:

$$S_B = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3} \Rightarrow 6\ell^2\sqrt{3} = 216\sqrt{3} \Rightarrow$$

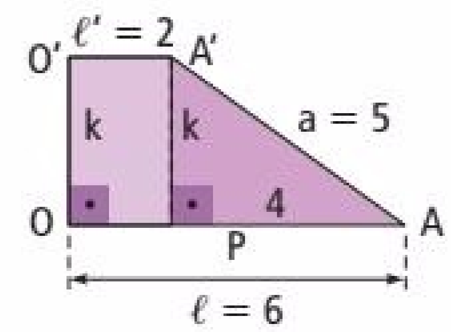
$$\Rightarrow \ell = 6\ \text{cm}$$

$$S_b = \frac{6(\ell')^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{6(\ell')^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow 6(\ell')^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell' = 2\ \text{cm}$$

Desenhando o trapézio OAA'O' e aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$5^2 = 4^2 + k^2 \Rightarrow 25 = 16 + k^2 \Rightarrow k = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow k = 3\ \text{cm}$$



Ilustrações: Editoria de arte

Substituindo na fórmula de volume do tronco:

$$V = \frac{k}{3}\left(S_B + \sqrt{S_B \cdot S_b} + S_b\right)$$

$$V = \frac{3}{3}\left(54\sqrt{3} + \sqrt{54\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}} + 6\sqrt{3}\right)$$

$$V = 54\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$$

$$V = 78\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

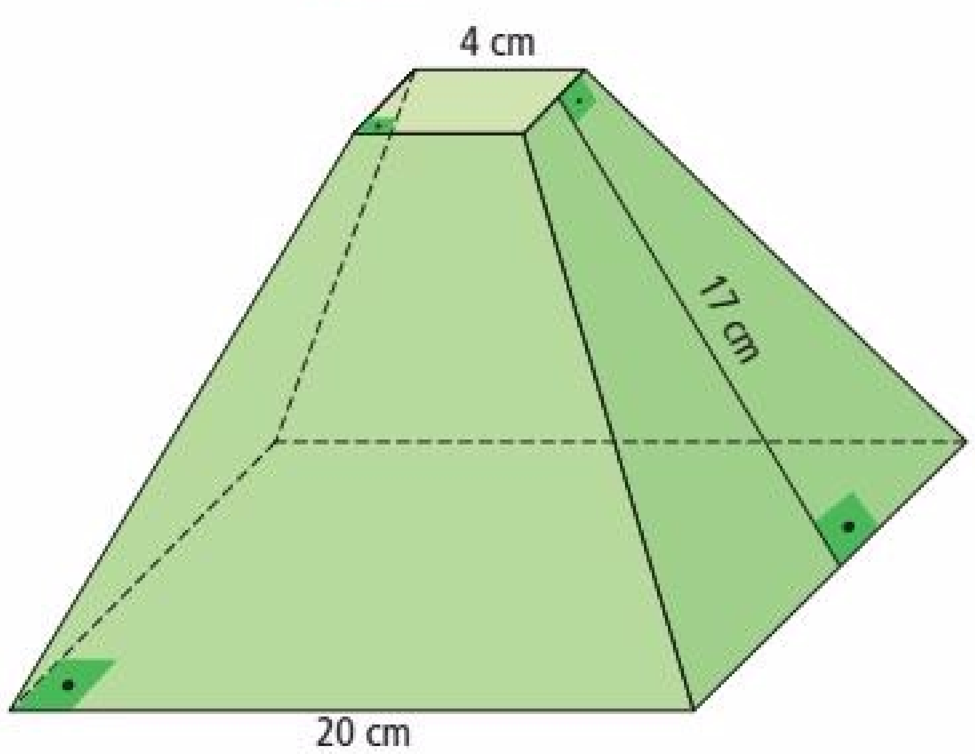
Exercícios propostos

Escreva no caderno

53. As bases de um tronco de pirâmide são triângulos equiláteros de lados 4 cm e 8 cm, e a altura do tronco mede $2\sqrt{3}$ cm. Calcule o volume desse tronco. 56 cm³

54. As bases de um tronco de pirâmide têm área de 25 dm² e 16 dm², respectivamente. Sabendo que a altura do tronco mede 12 dm, calcule o volume do tronco. 244 dm³

55. Calcule o volume do tronco de pirâmide regular indicado na figura. 2 480 cm³



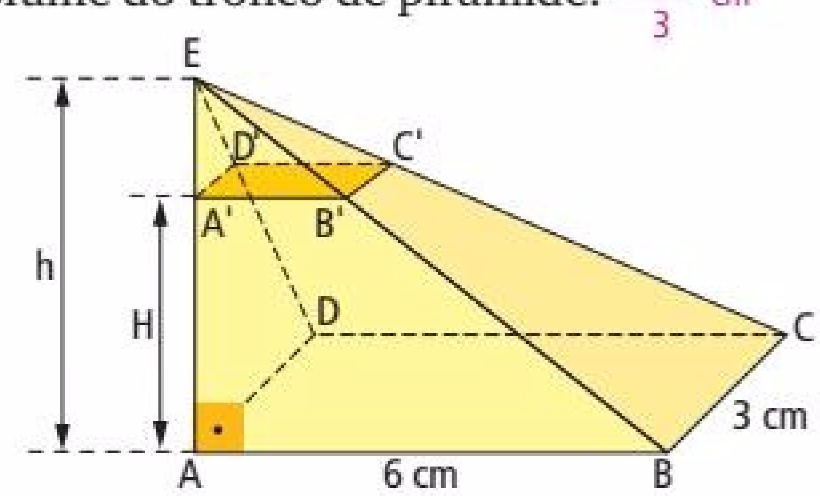
56. A base de uma pirâmide regular é um triângulo de 8 cm de lado, e sua altura mede 10 cm. Calcular a medida da aresta da base menor do tronco de pirâmide obtido quando seccionamos a pirâmide por um plano paralelo à base e distando 5 cm de seu vértice. 4 cm

57. A área da base de um tetraedro é 24 cm², e a altura do tetraedro é 4 cm. A que distância do vértice deve passar um plano paralelo à base para que a área da região plana formada seja 15 cm²? $\sqrt{10}$ cm

58. A figura representa uma pirâmide com vértice em um ponto *E*. A pirâmide apresenta-se cortada por um plano paralelo à base, na altura *H*. Esse plano divide a pirâmide em dois sólidos. Sabendo-se que H = 4 cm, AB = 6 cm, BC = 3 cm e h = AE = 6 cm, determine:

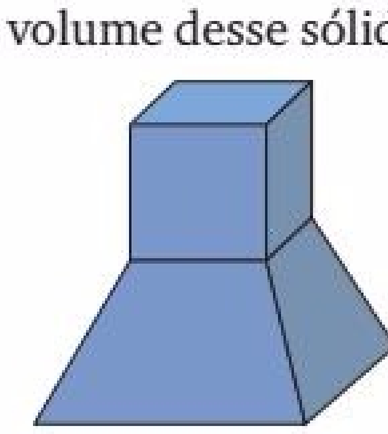
a) o volume da pirâmide EA'B'C'D'. $\frac{4}{3}$ cm³

b) o volume do tronco de pirâmide. $\frac{104}{3}$ cm³



59. O sólido indicado na figura é formado por um tronco de pirâmide regular quadrangular, com apótema de 20 cm e arestas das bases de 50 cm e 30 cm, e um cubo com uma face coincidente com a base menor do tronco. Determine o volume desse sólido. Use $\sqrt{3} = 1{,}7$.

$\frac{164\,300}{3}$ cm³



Explorando a tecnologia

Conhecendo o GeoGebra

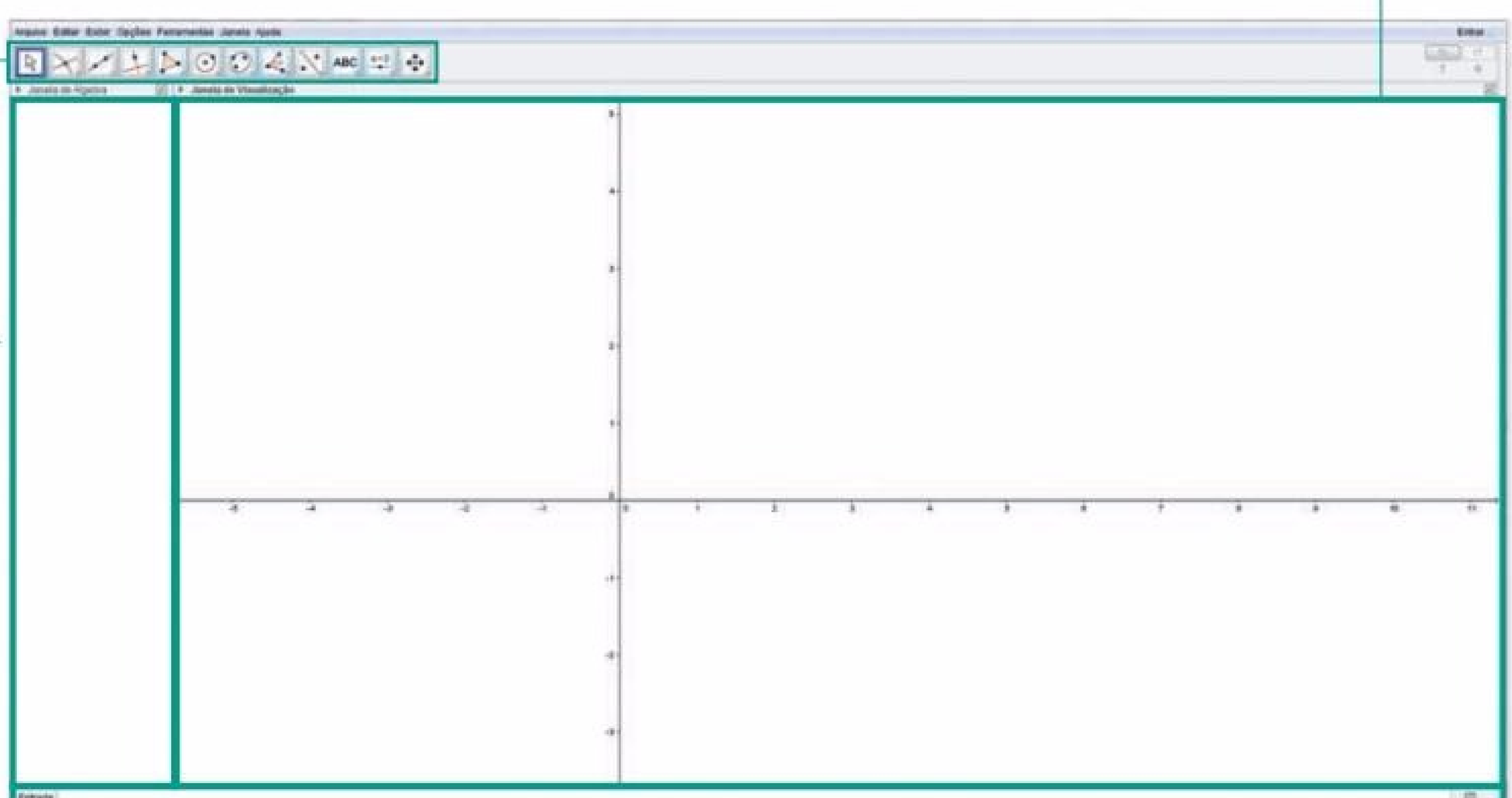
O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Ele é multiplataforma, ou seja, possui portabilidade entre todos os sistemas operacionais e pode ser instalado em computadores, *tablets* e também em *smartphones*.

Sua instalação pode ser feita pelo *site* oficial <www.geogebra.org> (acesso em: 29 mar. 2016) baixando o *software* na aba *Downloads*, e seguindo as orientações de instalação.

Uma vez instalado, ao iniciar o *software*, a tela inicial é exibida. Ela é composta de várias janelas, com ferramentas e exibições específicas de acordo com a utilização feita. A seguir apresentamos a tela inicial com algumas de suas funções.

A **Barra de Ferramentas** é composta por 12 submenus contendo ferramentas diversas, relacionadas de alguma maneira dentro do seu subgrupo. Para acessá-las, basta clicar no triângulo localizado no canto inferior direito de cada submenu.

A **Janela de Visualização** mostra as representações gráficas, como polígonos, circunferências e gráficos de funções, das construções feitas.



GeoGebra

A **Janela de Álgebra** mostra as representações algébricas, como equações e coordenadas, das construções feitas.

No **Campo de Entrada** é possível inserir coordenadas, equações comandos ou funções. Ao pressionar a tecla *Enter*, a representação algébrica do objeto é apresentada na Janela de Álgebra, enquanto a representação gráfica é mostrada na Janela de Visualização.

Além da **Janela de Álgebra** e da **Janela de Visualização**, que são mostradas na tela inicial padrão, o GeoGebra possui outras janelas, dependendo da construção que se deseje realizar, que podem ser acionadas no menu "Exibir". Quando necessário, essas outras janelas serão exibidas durante a realização das atividades.

Todas as janelas do GeoGebra estão relacionadas dinamicamente, ou seja, ao realizar uma alteração em algum objeto em uma delas, todas as representações desse mesmo objeto nas demais janelas serão alteradas automaticamente, se possível.

O GeoGebra utiliza linguagem e notação próprias, que podem diferir um pouco da utilizada nesta coleção. Por exemplo, para a separação da parte decimal de um número, o *software* usa o ponto no lugar da vírgula; para indicar as coordenadas de um ponto *A* qualquer, a notação é A = (0,0) no lugar de A(0, 0). Ao longo das atividades, conforme a necessidade, apresentaremos outras particularidades do GeoGebra.

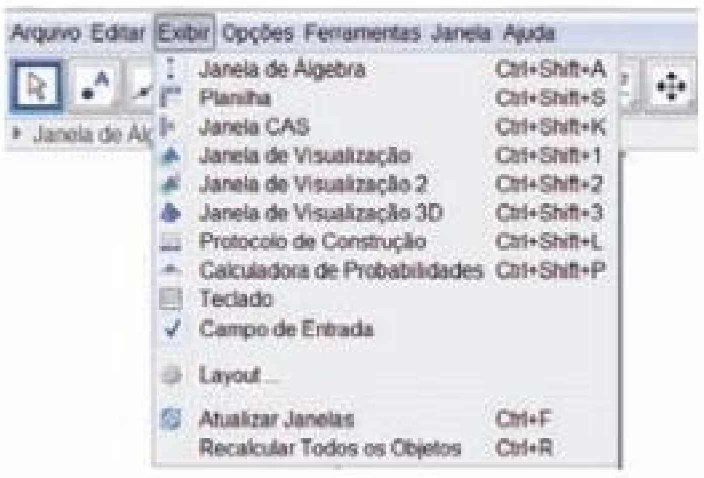
Professor, certifique-se de que a versão instalada é a 5.0 ou posterior.

Construção de modelos de sólidos geométricos

Vamos utilizar o GeoGebra para construir um modelo de sólido geométrico e, em seguida, observar sua planificação. Para isso, siga a sequência de passos abaixo.

1. Utilizando a ferramenta **Polígono Regular**, ,marque os pontos A(0,0) e B(0,2) no plano cartesiano e, em seguida, digite '3' na caixa de diálogo que será aberta para informar o número de lados. Na Janela de Visualização será criado um triângulo equilátero de lado de medida 2 unidades. Automaticamente, o GeoGebra vai nomear esse polígono como **pol1**.

2. No menu "Exibir", clique sobre a opção "Janela de Visualização 3D". Ao lado da **Janela de Visualização** aparecerá uma outra janela, mostrando um sistema cartesiano tridimensional que está interligado com o sistema cartesiano da **Janela de Visualização**. O plano cinza na **Janela de Visualização 3D** representa o plano da **Janela de Visualização** em que construímos o triângulo equilátero.



3. Ao clicar na **Janela de Visualização 3D**, uma nova **Barra de Ferramentas** (Figura 1) substitui a anterior, com instrumentos para a construção de elementos no campo tridimensional, como planos e sólidos geométricos.

Professor, estimule os alunos a investigarem essa nova **Barra de Ferramentas** da **Janela de Visualização 3D**, para conhecer as novas opções existentes.

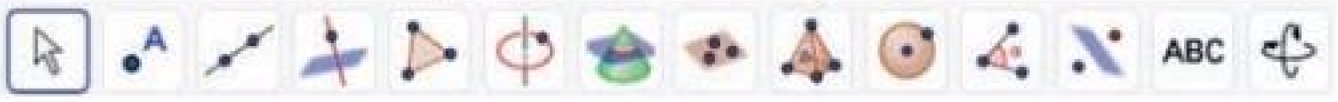
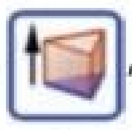
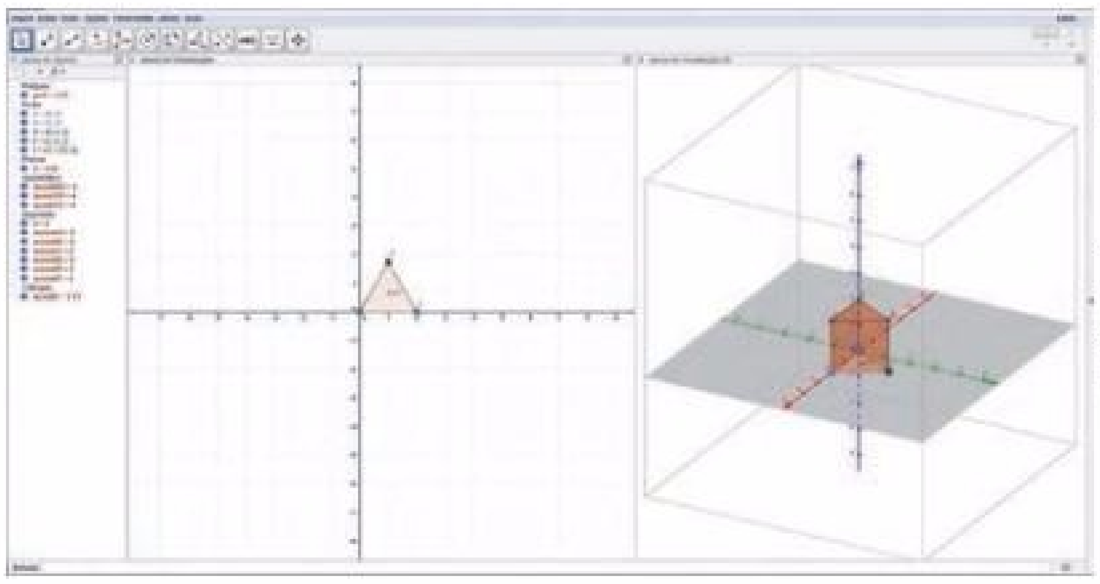


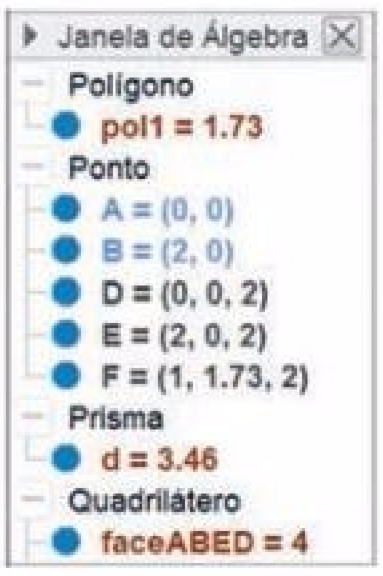
Figura 1

4. Clique sobre a seta do menu com o ícone, , e escolha a ferramenta **Extrusão para Prisma ou Cilindro**, , e, em seguida, clique sobre o triângulo na **Janela de Visualização 3D**. Na sequência, digite '2' na caixa de diálogo aberta para informar a altura do prisma. Desse modo, será construído um prisma regular de base triangular com altura medindo 2 unidades. A tela do *software* ficará semelhante à imagem ao lado.

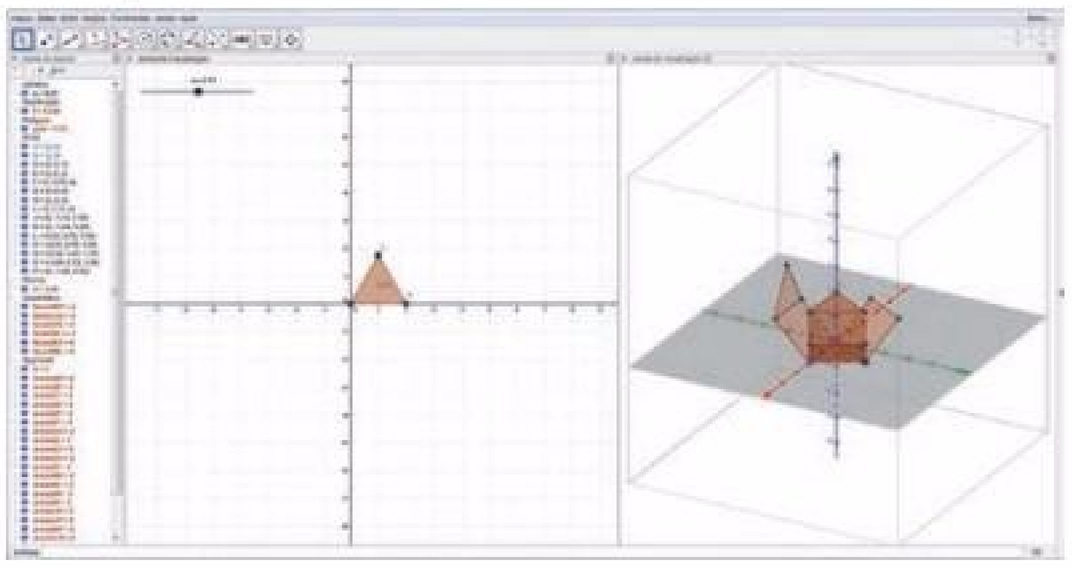


Crédito das imagens: GeoGebra

5. Para planificar o prisma, no mesmo menu do item anterior, escolha a ferramenta **Planificação**  e, na **Janela de Álgebra**, clique sobre o item que está abaixo da palavra "Prisma", como mostra a imagem ao lado.



6. Você perceberá que alguns elementos foram acrescentados à construção e um **Controle Deslizante** foi criado. Os novos elementos são as faces do prisma que, juntas, formam a respectiva planificação. Ao alterar o valor do **Controle Deslizante**, é possível visualizar o processo de planificação do prisma na **Janela de Visualização 3D**. Ao final, a tela do *software* ficará semelhante à imagem abaixo.



Atividades

Escreva no caderno

1. Considere dois prismas regulares: o primeiro, cuja base é um triângulo equilátero de lado 4, e o segundo, cuja base é um hexágono regular de lado 2. Utilizando o GeoGebra, faça o que se pede.

a) Determine as alturas dos prismas, de modo que o volume de ambos sejam iguais. A altura do prisma de base triangular deve ser 1,5 vezes maior que a altura do prisma de base hexagonal.

b) Qual desses prismas apresenta maior área lateral? O prisma de base triangular.

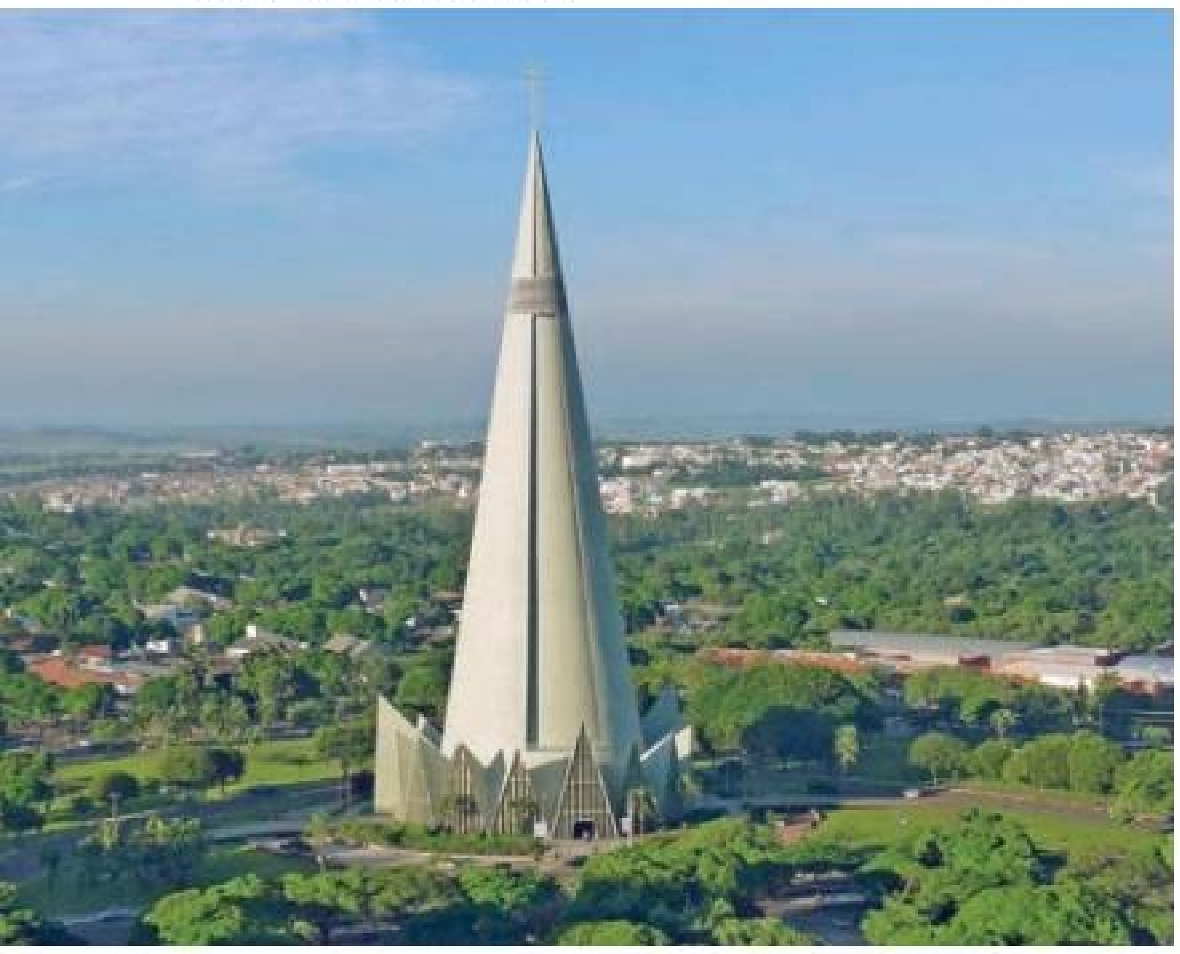
CAPÍTULO 3

Corpos redondos

Diversos objetos que utilizamos no dia a dia apresentam formas arredondadas, como copos, panelas etc. Na arquitetura, também observamos formas arredondadas, como nas construções. Na indústria, os tanques de gás natural têm o formato esférico, modelo mais recomendado para esse tipo de produto.

No capítulo anterior, estudamos os poliedros, sólidos geométricos formados por polígonos e a região do espaço limitada por eles (prismas, pirâmides e troncos de pirâmide). Neste capítulo, iremos estudar os sólidos geométricos que têm pelo menos uma superfície curva, denominados **corpos redondos**: cilindro, cone, tronco de cone e esfera.

www.laeti.com.br/Getty Images

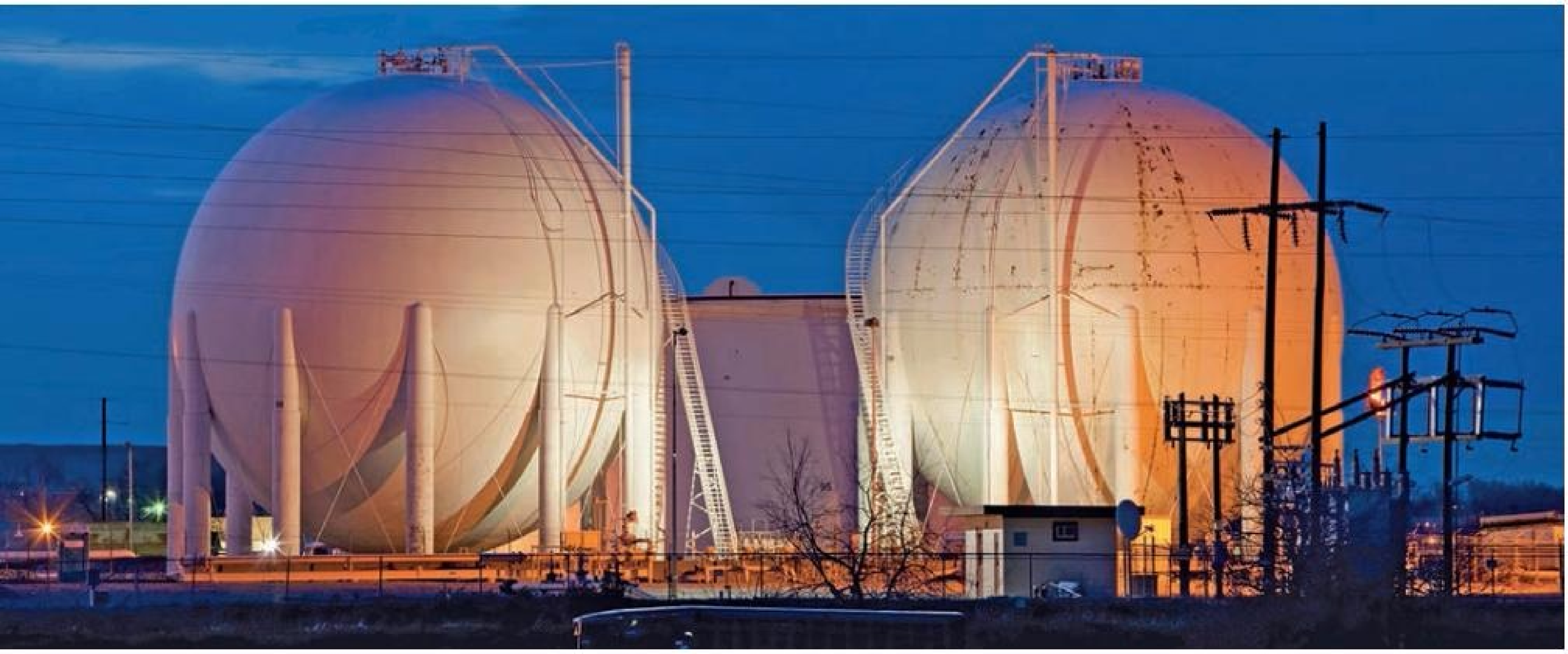


A Catedral Basílica Menor Nossa Senhora da Glória, também conhecida como Catedral de Maringá, localizada no Paraná, lembra o formato de um cone. Fotografia de 2010.

Bloomberg via Getty Images

Estação de tratamento de água no Rio de Janeiro. Alguns reservatórios dessas estações possuem formato cilíndrico. Fotografia de 2016.

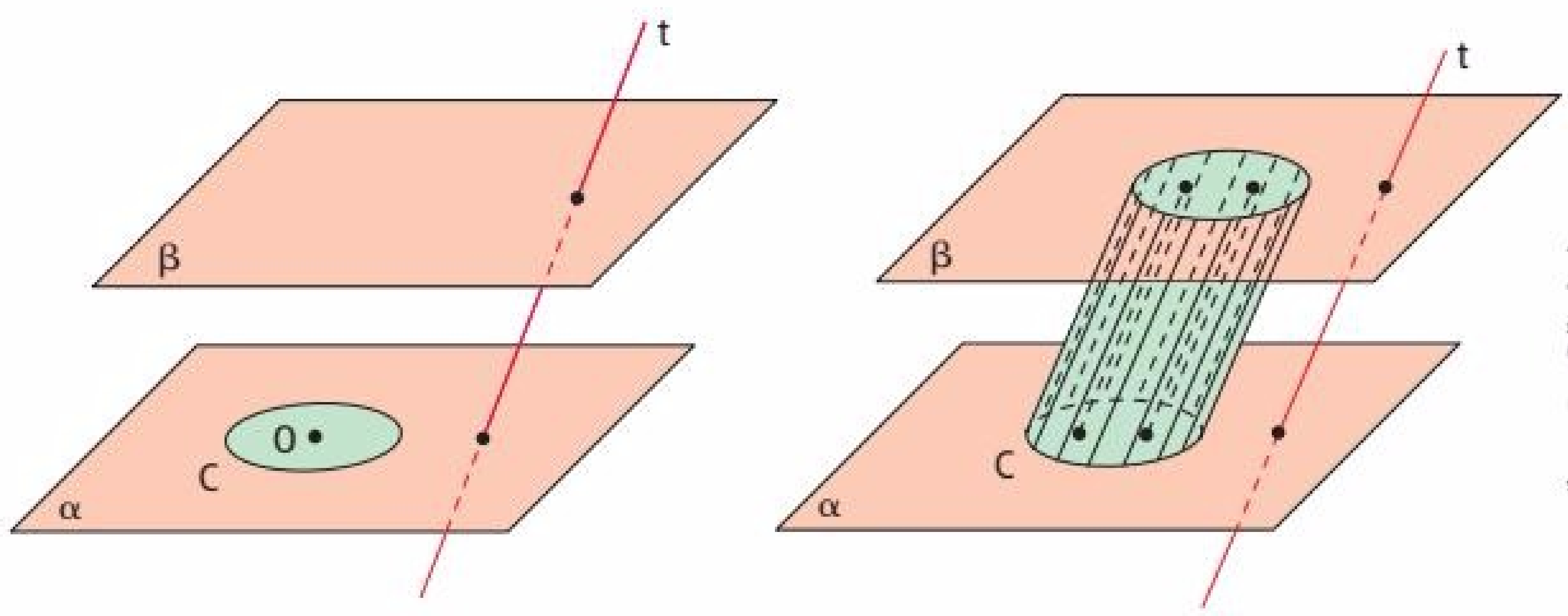
Danita Delimont/Getty Images



Tanques de armazenamento de gás natural em Cenex, Montana, EUA. Fotografia de 2011.

Cilindro

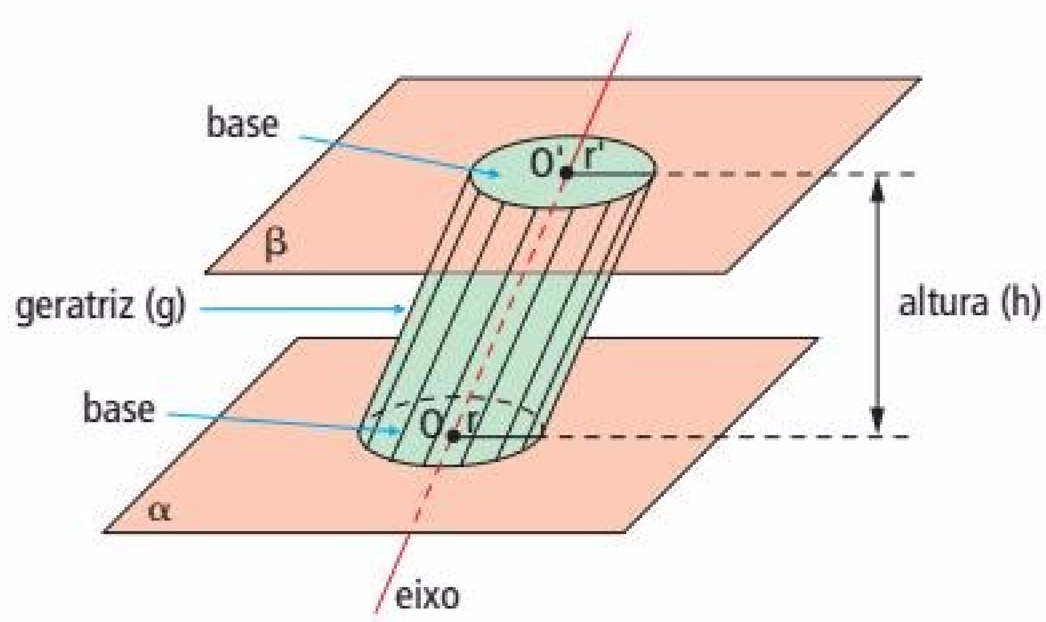
Dados dois planos paralelos α e β, um círculo *C* de centro *O* e raio *r* contido em α e uma reta *t* secante aos planos α e β que não intercecta *C*, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta *t*, com uma extremidade em um ponto do círculo *C* e a outra no plano β, é denominada **cilindro circular** ou simplesmente **cilindro**.



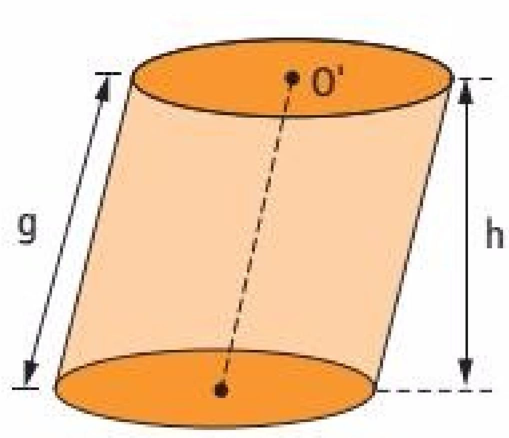
Ilustrações: Editoria de arte

Considerando o cilindro representado na figura abaixo, destacamos os seguintes elementos:

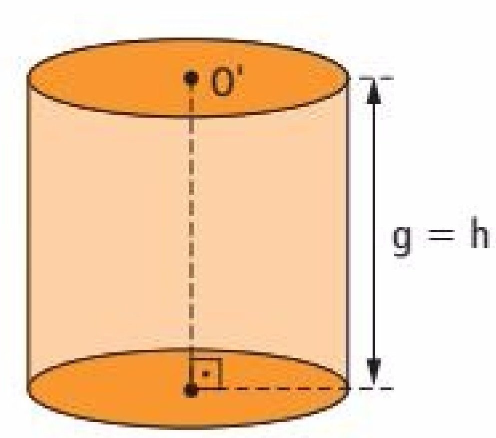
- **bases**: são os círculos de raio *r* e centros *O* e *O'* situados nos planos paralelos α e β, respectivamente;
- **altura**: é a distância entre os planos paralelos α e β, cuja medida indicaremos por *h*;
- **eixo**: é a reta *OO'* que contém os centros das bases;
- **geratrizes**: são os segmentos de reta paralelos ao eixo e cujas extremidades são pontos das circunferências das bases, cuja medida indicaremos por *g*.



De acordo com a inclinação das geratrizes em relação aos planos das bases, os cilindros podem ser **retos** ou **oblíquos**.



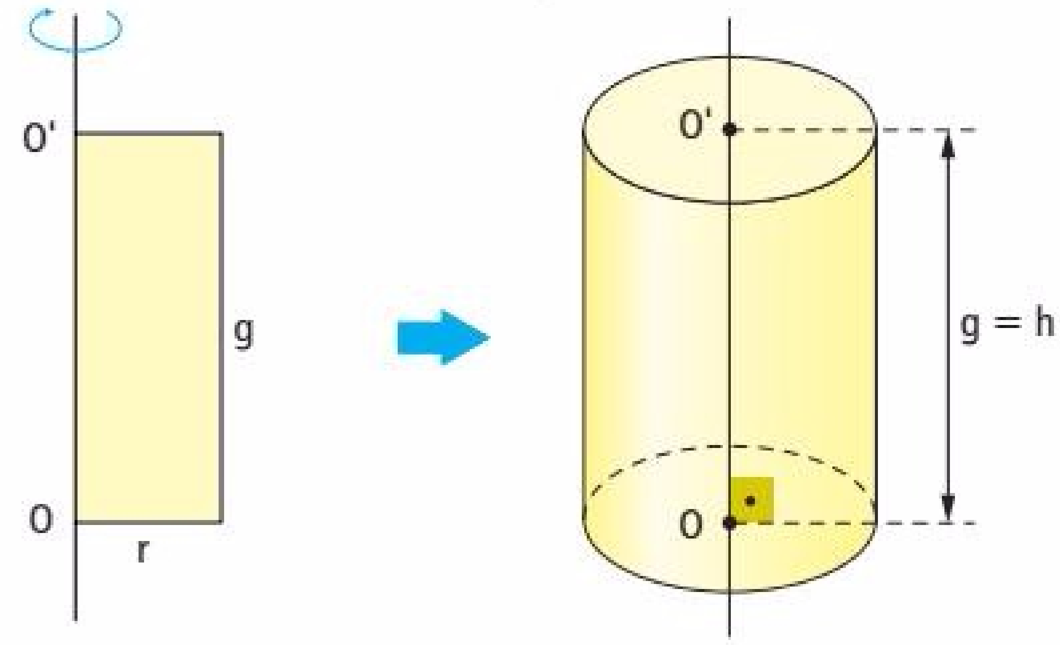
Cilindro oblíquo



Cilindro reto

Um cilindro é dito oblíquo quando as geratrizes são oblíquas aos planos das bases e é reto quando as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases. Nesse último caso, a altura do cilindro tem a mesma medida da geratriz, ou seja, $g = h$.

Um cilindro reto também pode ser obtido pela rotação completa de um retângulo de lados de medidas *r* e *g* em torno do eixo OO'. Assim, o cilindro reto também é denominado **cilindro de revolução**.

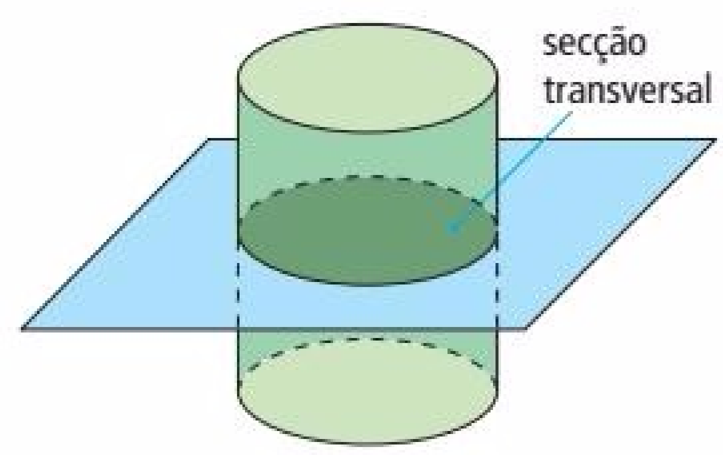


Secções de um cilindro

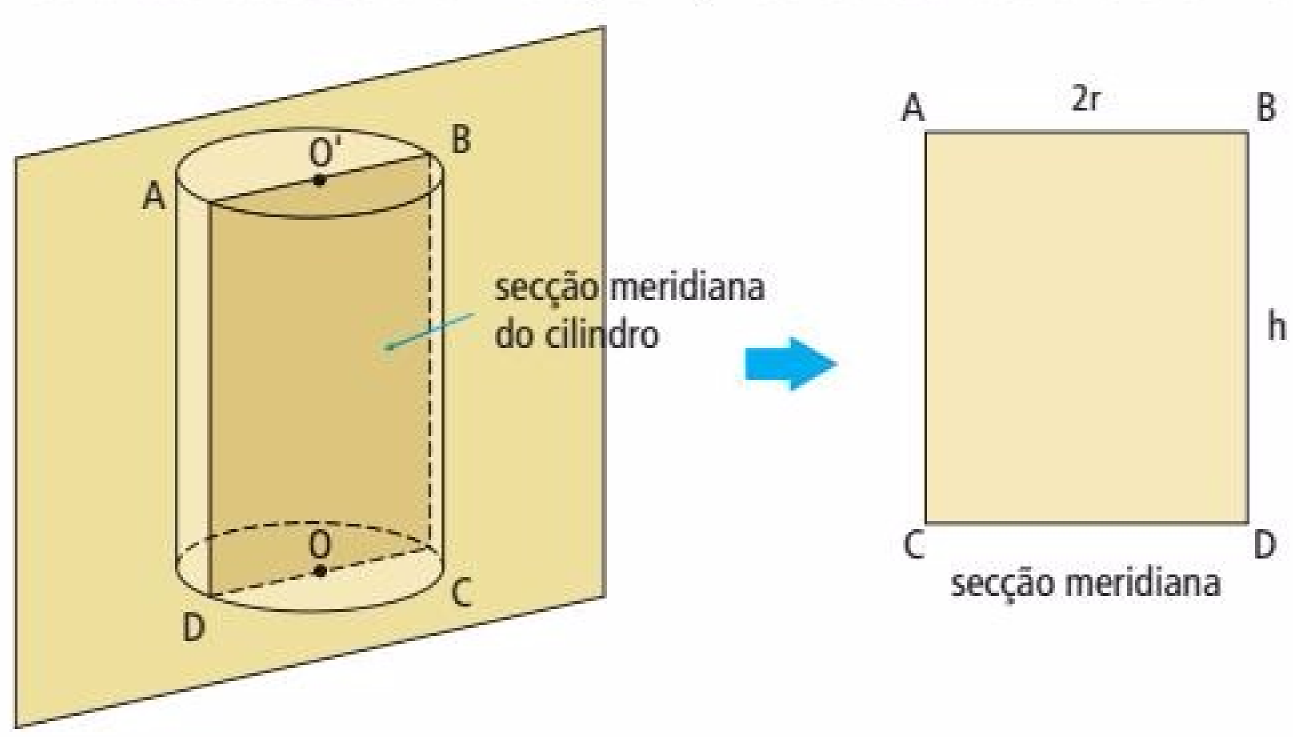
A secção obtida a partir da intersecção de um cilindro com um plano paralelo às suas bases é denominada **secção transversal do cilindro**.

Observe que a secção transversal é um círculo congruente às bases.

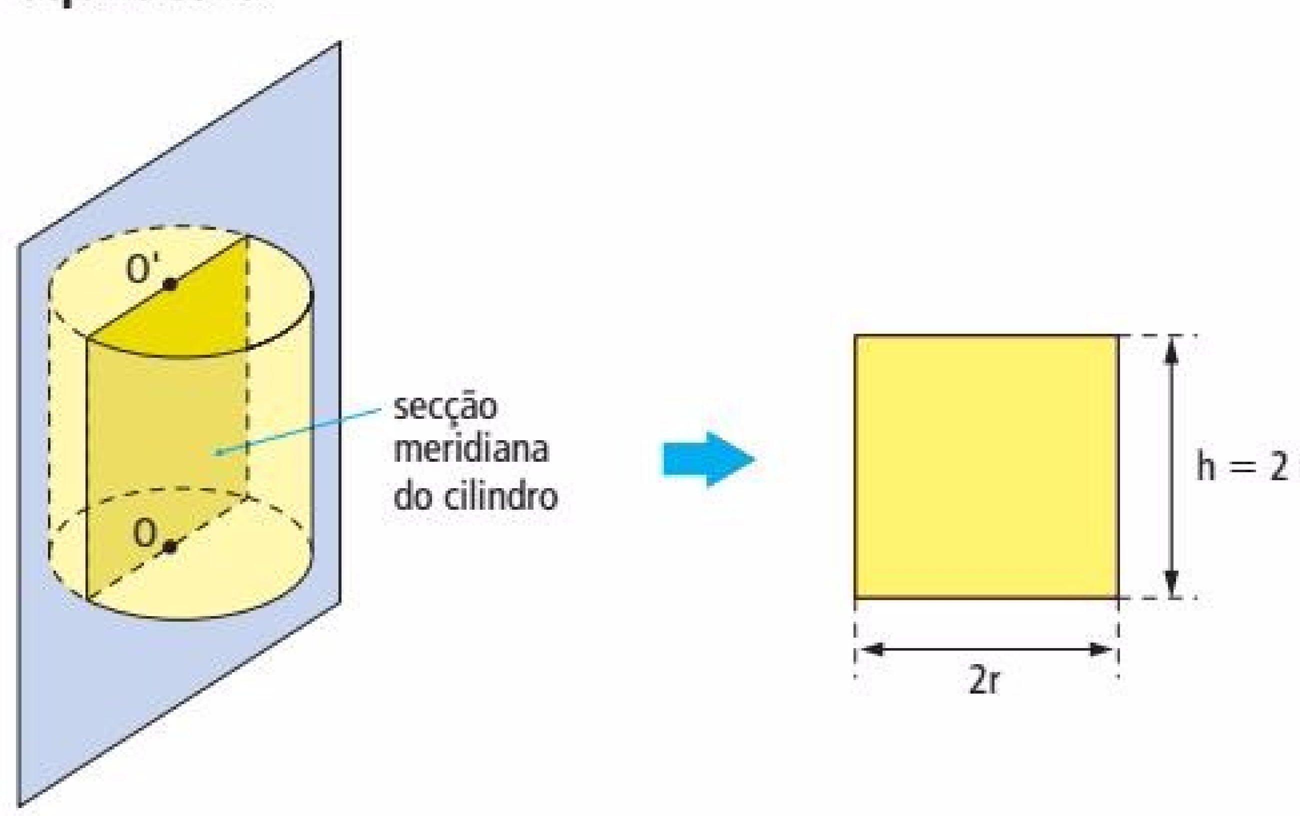
A secção obtida a partir da intersecção de um cilindro com um plano que contém seu eixo é denominada **secção meridiana do cilindro**.



A secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo de dimensões 2r (medida do diâmetro das bases do cilindro) e *h* (medida da altura do cilindro).



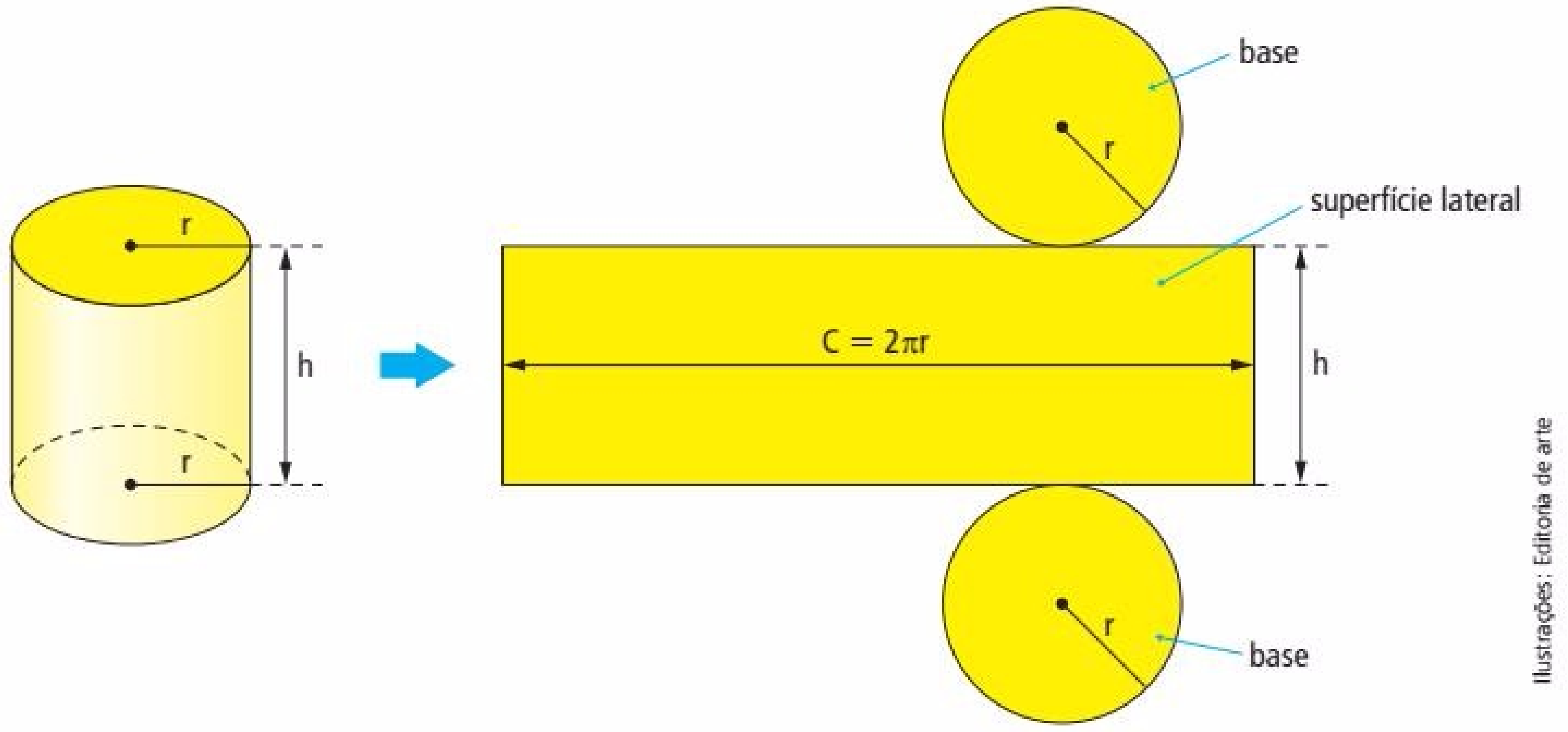
Se a medida da altura do cilindro for igual à medida do diâmetro da base, ou seja, h = 2r, então a secção meridiana é um quadrado, e o cilindro é chamado de **cilindro equilátero**.



Ilustrações: Editoria de arte

Área da superfície de um cilindro reto

Vamos planificar a superfície de um cilindro reto de altura medindo *h* e raio da base *r* para determinar sua área.



A superfície total do cilindro é formada pela superfície lateral mais as superfícies das bases. Assim, temos:

- **área da base (S_b)**: é a área de um dos círculos de raio *r*:

$$S_b = \pi r^2$$

- **área lateral (S_ℓ)**: é a área do retângulo de dimensões $2\pi r$ e *h*:

$$S_\ell = 2\pi r h$$

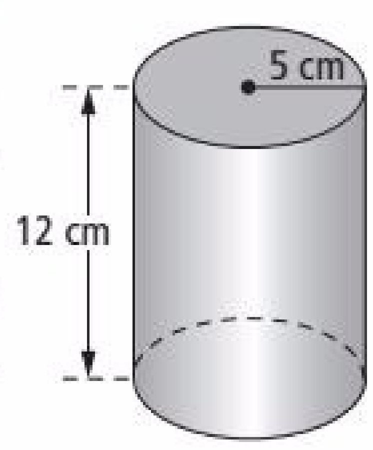
- **área total (S_t)**: é a soma da área lateral e das áreas das duas bases do cilindro:

$$S_t = S_\ell + 2S_b \Rightarrow S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$S_t = 2\pi r(h + r)$$

Exercícios resolvidos

1 Uma lata tem a forma cilíndrica, com as medidas indicadas na figura. Nessas condições, responda:

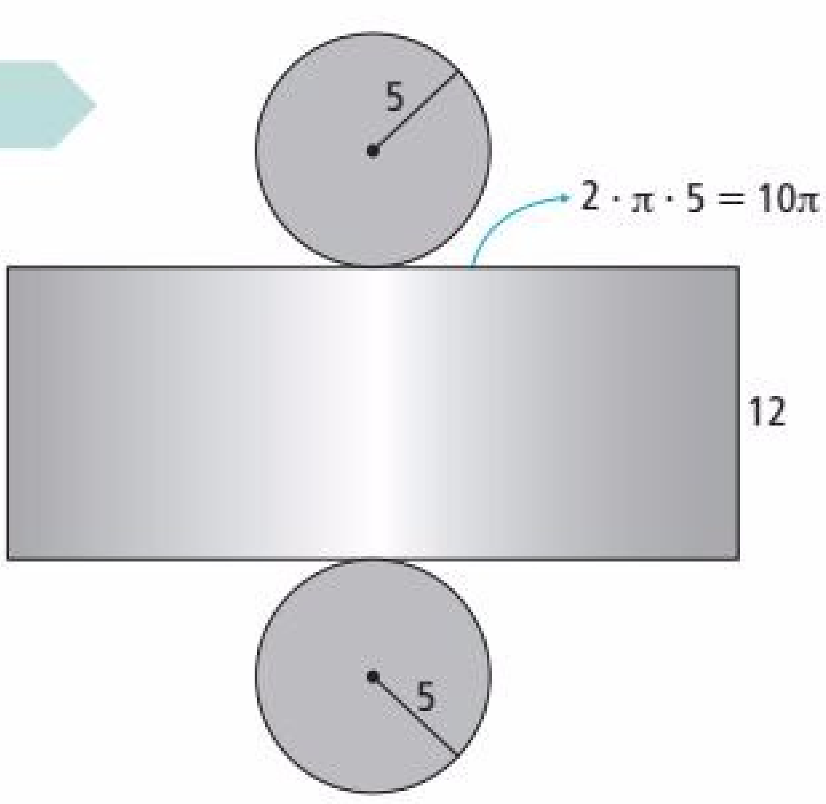


a) Qual é a quantidade mínima de papel, em cm², necessária para cobrir a superfície lateral dessa lata?

b) Qual é a área total da superfície dessa lata? Use $\pi = 3,14$.

Resolução

Planificando o cilindro, temos:



a) Área lateral (S_ℓ):

$S_\ell = 10\pi \cdot 12 = 120\pi \Rightarrow S_\ell = 120\pi\ cm^2$

Considerando $\pi = 3,14$, temos:

$S_\ell = 120 \cdot 3,14 = 376,8$

A quantidade mínima de papel é 376,8 cm².

b) Área total (S_t):

$S_t = S_\ell + 2 \cdot S_b = 376,8 + 2 \cdot (\pi 5^2) =$

$= 376,8 + 50\pi = 376,8 + 50 \cdot 3,14 = 533,8 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_t = 533,8\ cm^2$

Podemos também calcular diretamente pela fórmula

$S_t = 2\pi r(h + r) \Rightarrow S_t = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot (12 + 5) = 10\pi \cdot 17$

$S_t = 170 \cdot (3,14) = 533,8$

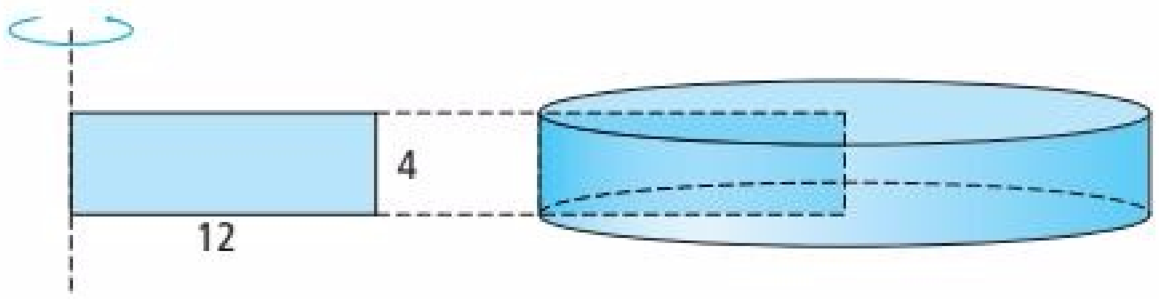
Portanto, a área total da superfície da lata é 533,8 cm².

2 Calcule a área total do sólido obtido pela rotação completa de um retângulo de dimensões 4 cm e 12 cm em torno do lado:

a) menor; b) maior.

Resolução

a) O sólido obtido nesse caso é um cilindro reto de raio da base 12 cm e altura 4 cm.



$S_t = 2\pi r(h + r)$

$S_t = 2\pi \cdot 12\ (4 + 12) \Rightarrow S_t = 384\pi$

Portanto, $S_t = 384\pi\ cm^2$.

b) O sólido obtido nesse caso é um cilindro reto de raio da base 4 cm e altura 12 cm. Assim:

Ilustrações: Editoria de arte

$S_t = 2\pi r(h + r) \Rightarrow S_t = 2\pi \cdot 4(12 + 4) \Rightarrow S_t = 128\pi$

Portanto, $S_t = 128\pi\ cm^2$.

3 Um tanque, na forma de um cilindro circular reto, tem altura igual a 3 m e superfície total igual a $20\pi\ m^2$. Calcule, em metros, o raio da base desse tanque.

Resolução

Sendo $h = 3$ m e $S_t = 20\pi\ m^2$, temos:

$S_t = 2\pi r(h + r)$

$20\pi = 2\pi r(3 + r)$

$10 = r(3 + r)$

$r^2 + 3r - 10 = 0$

Resolvendo a equação, obtemos:

$r_1 = 2$ ou $r_2 = -5$ (não convém)

Portanto, o raio da base do tanque é de 2 m.

4 O raio de um cilindro de revolução mede 2 m. Sabendo que a área da base desse cilindro é igual à área da secção meridiana, determine a área lateral do cilindro. Use $\pi = 3$.

Resolução

A secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo cuja área é $S = 2rh$.

Como $S_b = S$, temos $\pi r^2 = 2rh \Rightarrow h = \dfrac{\pi r}{2}$

Área lateral do cilindro:

$S_\ell = 2\pi rh \Rightarrow S_\ell = 2\pi r \cdot \dfrac{\pi r}{2} \Rightarrow S_\ell = \pi^2 r^2$

Substituindo pelos dados do enunciado:

$S_\ell = \pi^2 \cdot r^2 \Rightarrow S_\ell = 3^2 \cdot 2^2 \Rightarrow S_\ell = 36\ m^2$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Um cilindro reto tem altura igual a 5 cm e raio da base medindo 6 cm. Determine:

a) área da base; $36\pi\ cm^2$ b) área lateral; $60\pi\ cm^2$ c) área total. $132\pi\ cm^2$

2. Determine a área lateral de um cilindro cujo perímetro da base é 62,8 cm e cuja altura é a metade do raio da base. Adote $\pi = 3{,}14$. $314\ cm^2$

3. Da rotação completa de um retângulo de dimensões 5 cm e 9 cm obtém-se um cilindro reto cuja área da base é $25\pi\ cm^2$. Calcule a área total desse cilindro. $140\pi\ cm^2$

4. A área lateral de um cilindro é $20\pi\ cm^2$. Se o raio da base mede 5 cm, calcule a altura h desse cilindro. 2 cm

5. Calcule a área lateral de um cilindro de $6\ dm^2$ de área total, sabendo que o raio da base é um quinto da altura. $5\ dm^2$

6. Quantos centímetros quadrados de folha de flandres são necessários para construir uma lata de óleo, com tampa, na forma de um cilindro reto, tendo 8 cm de diâmetro de base e 18 cm de altura? $176\pi\ cm^2$

7. Em um cilindro equilátero, a área da secção meridiana vale $400\ cm^2$. Calcule:

a) a altura do cilindro; 20 cm

b) a área total da superfície do cilindro. $600\pi\ cm^2$

8. A secção meridiana de um cilindro equilátero é um quadrado de área $196\ dm^2$. Determine a área total da superfície do cilindro. $294\pi\ dm^2$

9. (UEMG) Uma empresa de produtos de limpeza deseja fabricar uma embalagem com tampa para seu produto. Foram apresentados dois tipos de embalagens com volumes iguais. A primeira é um cilindro de raio da base igual a 2 cm e altura igual a 10 cm; e a segunda, um paralelepípedo de dimensões iguais a 4 cm, 5 cm e 6 cm. O metro quadrado do material utilizado na fabricação das embalagens custa R$ 25,00.

Considerando-se $\pi = 3$, o valor da embalagem que terá o menor custo será:

x a) R$ 0,36 c) R$ 0,54

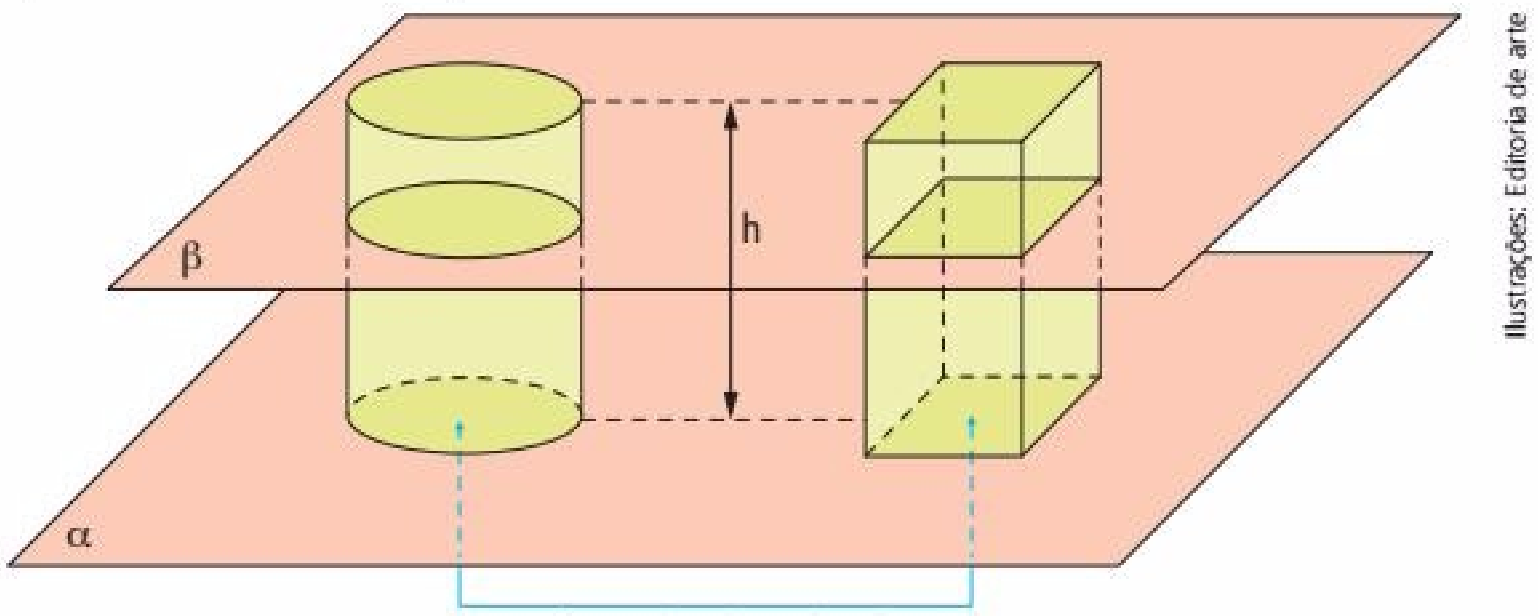
b) R$ 0,27 d) R$ 0,41

10. Considere os cilindros C_1 e C_2, obtidos pela rotação do retângulo OMNP em torno de $\overleftrightarrow{OM}$ e $\overleftrightarrow{OP}$, respectivamente. Na referida ordem, determine as razões entre as áreas:

a) das bases; $\frac{9}{4}$ b) laterais; 1 c) totais. $\frac{3}{2}$

Volume de um cilindro

Considere um cilindro e um prisma com mesma altura *h* e bases de áreas iguais a S_b e contidas em um plano α.



As bases têm áreas iguais.

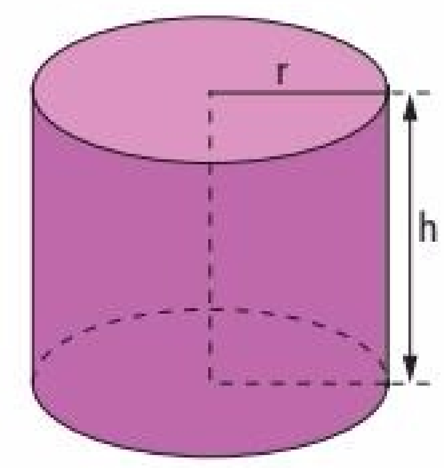
Qualquer plano β paralelo às bases e que intersecte os dois sólidos determina neles secções transversais congruentes às respectivas bases. Como as áreas das bases do cilindro e do prisma são iguais e valem S_b, então as secções transversais também têm área igual a S_b.

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que o volume do cilindro é igual ao volume do prisma.

Como o volume do prisma é dado pelo produto da área da base pela medida da altura, então o volume do cilindro também o será, e podemos escrever:

volume do cilindro = volume do prisma

volume do cilindro = (área da base) · (medida da altura)



Em um cilindro circular reto de raio *r*, a área da base é dada por $S_b = \pi r^2$. Portanto, o volume do cilindro é dado por:

$$V = S_b \cdot h \Rightarrow \boxed{V = \pi r^2 h}$$

Exercícios resolvidos

5 Uma comunidade consome 30 000 litros de água por dia. Para isso, conta com um reservatório de forma cilíndrica cuja medida do raio e também da altura é 10 metros. Por quanto tempo, aproximadamente, o reservatório poderá abastecer essa comunidade?

Resolução

O volume que o reservatório cheio pode conter é dado por:

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 10 \Rightarrow V = 1\,000\pi$

$V = 1\,000\pi \text{ m}^3$

Fazendo $\pi = 3{,}14$, temos:

$V = 1000 \cdot 3{,}14 \text{ m}^3 \Rightarrow V = 3140 \text{ m}^3$

Como $1 \text{ m}^3 = 1\,000$ L, temos:

$V = 3\,140 \cdot 1\,000 = 3\,140\,000$

$V = 3\,140\,000$ litros

A comunidade consome 30 000 litros de água por dia.

Para consumir 3 140 000 litros levará *t* dias. Assim:

$t = \dfrac{3140000}{30000} \simeq 105$

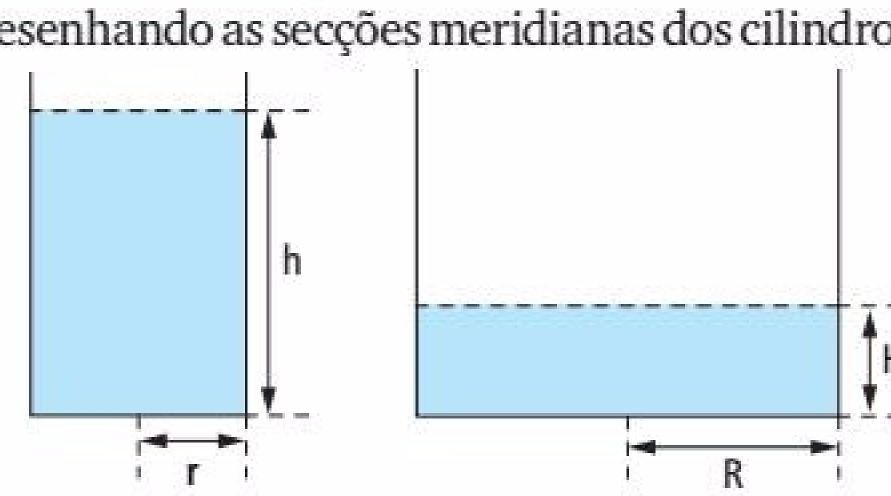
$t \simeq 105$ dias

Portanto, o reservatório abastecerá a comunidade por aproximadamente 105 dias.

6 Um líquido que ocupa uma altura de 10 cm em determinado recipiente cilíndrico será transferido para outro recipiente, também cilíndrico, com diâmetro duas vezes maior que o primeiro. Qual será a altura ocupada pelo líquido nesse segundo recipiente?

Resolução

Desenhando as secções meridianas dos cilindros, temos:



1º recipiente 2º recipiente

Vamos indicar o volume de líquido no primeiro recipiente por V_1, e no segundo, por V_2.

$V_1 = \pi r^2 h$ e $V_2 = \pi R^2 H$

Do enunciado: $R = 2r$ e $h = 10$ cm.

Como o volume de líquido é o mesmo, obtemos:

$V_1 = V_2 \Rightarrow \pi r^2 h = \pi (2r)^2 H$

$r^2 h = 4r^2 H \Rightarrow H = \dfrac{h}{4} = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$

Portanto, $H = 2{,}5$ cm.

Exercícios propostos

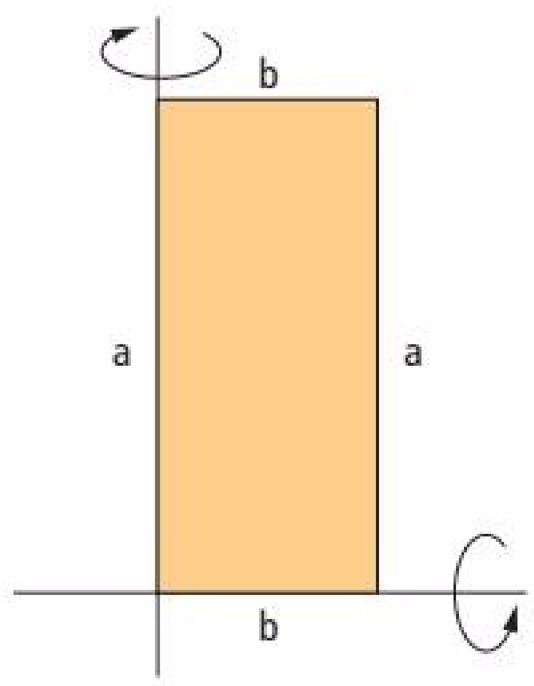
Escreva no caderno

11. Um cilindro reto tem área lateral de 30π cm^2 e área total de 80π cm^2. Determine seu volume. 75π cm^3

12. Calcule a área total e o volume de um cilindro equilátero de altura 12 cm. 216π cm^2; 432π cm^3

13. (Ufla-MG) Um retângulo de lados a e b, girando em torno de b, gera um cilindro de volume 324π cm^3 e, girando em torno de a, gera outro cilindro de volume de 144π cm^3. Calcule os valores de a e b.

$a = 9$ cm e $b = 4$ cm

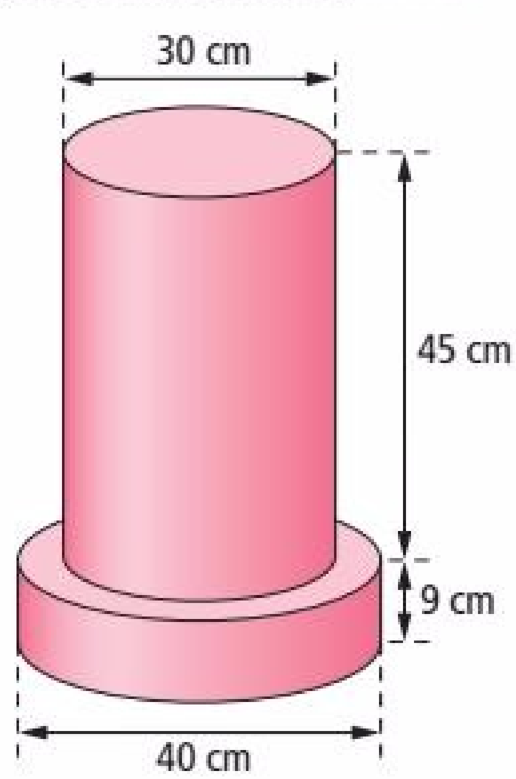


Ilustrações: Editoria de arte

14. Considere o sólido composto de dois cilindros retos, conforme indica a figura. Calcule:

a) a área total da superfície desse sólido. $2\,510\pi$ cm^2

b) o volume total desse sólido. $13\,725\pi$ cm^3



15. (Enem/MEC) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

a) 0,5 X c) 2,0 e) 8,0
b) 1,0 d) 3,5

16. (UEG-GO) Em uma festa, um garçom, para servir refrigerante, utilizou uma jarra no formato de um cilindro circular reto. Durante o seu trabalho, percebeu que com a jarra completamente cheia conseguia encher oito copos de 300 mL cada. Considerando-se que a altura da jarra é de 30 cm, então a área interna da base dessa jarra, em cm^2, é:

a) 10 b) 30 c) 60 X d) 80

17. Certo produto de limpeza é vendido em dois recipientes cilíndricos:

(1) lata de raio da base igual a 3,1 cm e altura 11,6 cm;

(2) lata de raio da base igual a 3,1 cm e altura 16,6 cm.

Os preços desse produto são R$ 0,70 e R$ 1,10, respectivamente, para as latas (1) e (2).

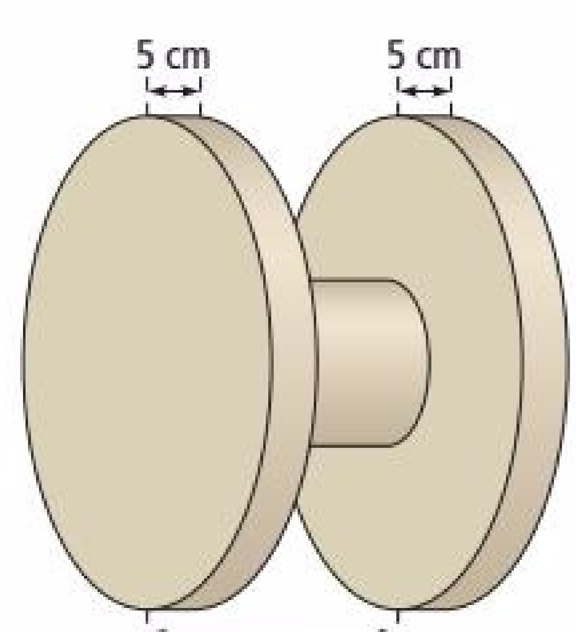
a) Calcule os volumes em cada recipiente. $V_1 \simeq 350$ cm^3; $V_2 \simeq 500$ cm^3

b) Qual das duas embalagens apresenta melhor preço para o consumidor? A lata (1) apresenta melhor preço para o consumidor.

18. (Ulbra-RS) A Gestão Ambiental visa ao uso de práticas que garantem a conservação e a preservação da biodiversidade, a reciclagem das matérias-primas e a redução do impacto ambiental das atividades humanas sobre os recursos naturais. Consciente da importância de reaproveitar sobras de madeira, uma serraria que trabalha apenas com madeira de reflorestamento resolveu calcular a sobra de madeira na confecção de peças cilíndricas. Para confeccionar uma peça cilíndrica, a serraria faz os cortes adequados em um prisma quadrangular de arestas da base 5 cm e altura 0,8 m e obtém um cilindro de 5 cm de diâmetro e 0,8 m de altura. A sobra de madeira na fabricação de mil destas peças é, em cm^3 (utilize $\pi = 3{,}14$), a seguinte:

a) $4{,}3 \cdot 10^{-5}$ X c) $4{,}3 \cdot 10^{5}$ e) 2000
b) 430 d) 1570

19. O sólido de madeira indicado na figura é utilizado para enrolar cabos telefônicos.



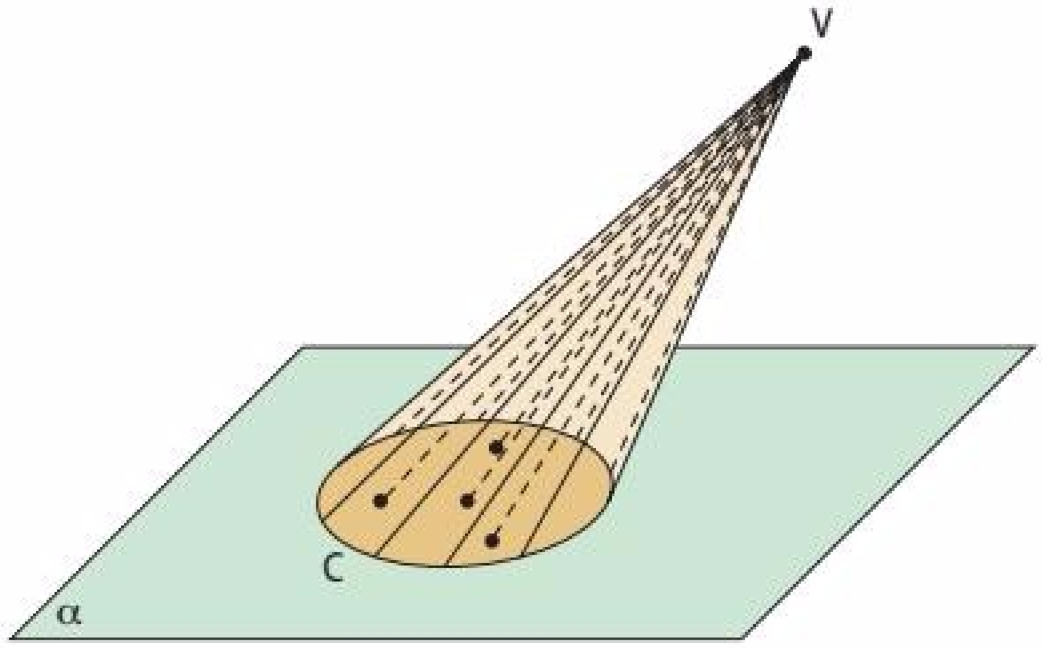
Os cilindros das extremidades têm 80 cm de diâmetro e o cilindro interno, 20 cm de diâmetro. Determine o volume de madeira gasto para construir esse sólido.

$19\,000\pi$ cm^3

Cone

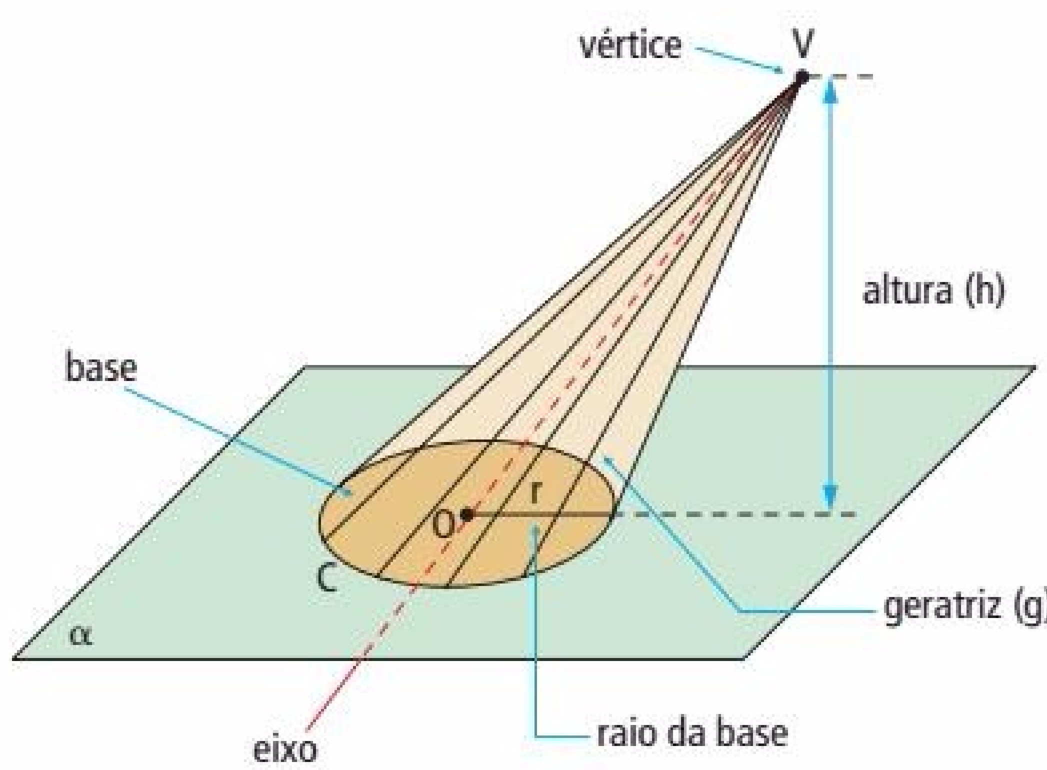
Além do cilindro, há outro grupo de corpos redondos, cuja forma pode ser associada a objetos do cotidiano, como funis, casquinha de sorvete e cones de trânsito. Esse tipo de corpo redondo é denominado cone, que estudaremos a seguir.

Dado um plano α, um círculo C contido em α e um ponto V que não pertence a α, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra em um ponto do círculo C é denominada **cone circular** ou, simplesmente, **cone.**

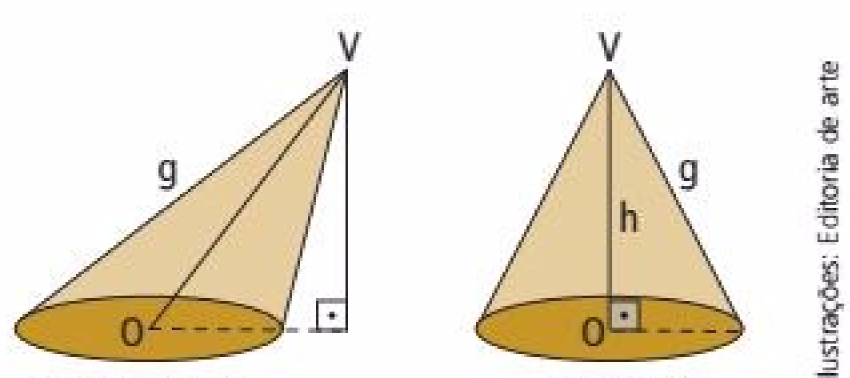


Considerando o cone representado na figura ao lado destacamos os seguintes elementos:

- **base**: é o círculo C de raio r e centro O situado no plano α;
- **eixo**: é a reta OV;
- **vértice**: é o ponto V;
- **raio da base**: é o raio do círculo C;
- **altura**: é a distância do ponto V ao plano da base, e indicaremos sua medida por h;
- **geratriz**: é qualquer segmento de reta cujos extremos são o vértice V e um ponto qualquer da circunferência da base, e indicaremos sua medida por g.



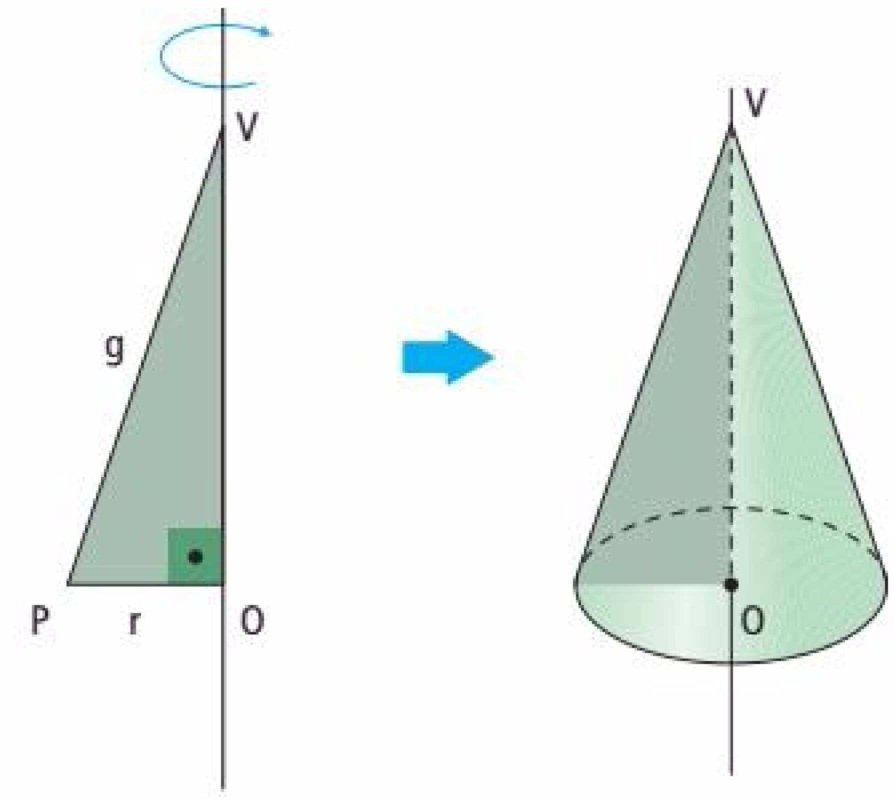
De acordo com a inclinação do eixo do cone em relação ao plano da base, um cone pode ser **oblíquo** ou **reto**.



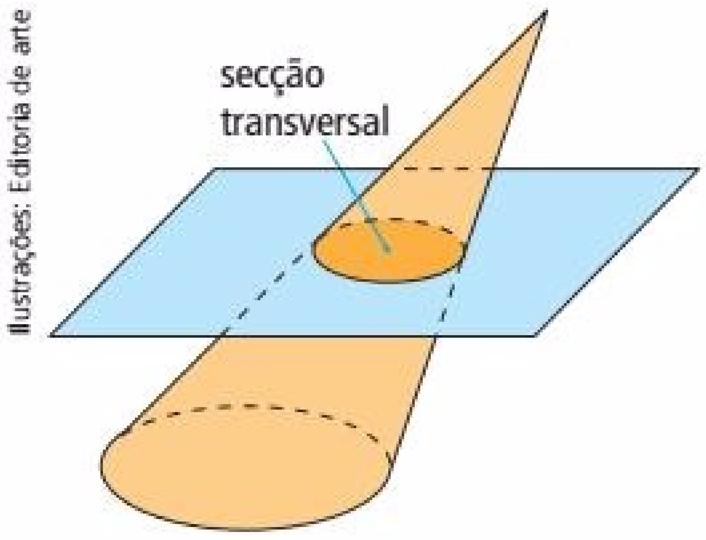
Cone oblíquo Cone reto

Um cone é **oblíquo** quando seu eixo é oblíquo ao plano da base e é **reto** quando seu eixo é perpendicular ao plano da base.

Um cone circular reto também pode ser obtido pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno do eixo de um dos catetos. Assim, o cone reto também é denominado **cone de revolução**.



Secções de um cone

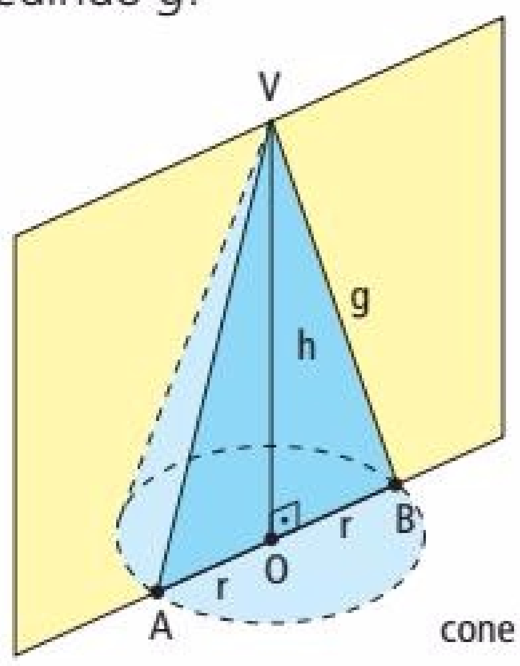


A secção obtida a partir da intersecção de um cone com um plano paralelo à sua base é denominada **secção transversal do cone**.

Observe que a secção transversal é um círculo.

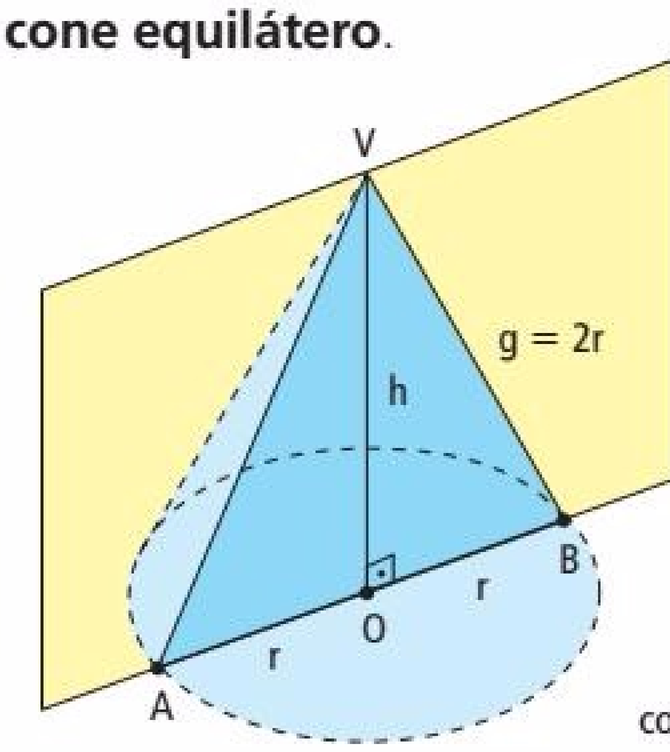
A secção obtida a partir da intersecção de um cone com um plano que contém seu eixo é denominada **secção meridiana do cone**.

No cone circular reto, a secção meridiana é um **triângulo isósceles** de base 2r e lados congruentes medindo *g*.



cone isósceles

Quando a secção meridiana for um triângulo equilátero, ou seja, $g = 2r$, o cone é chamado de **cone equilátero**.



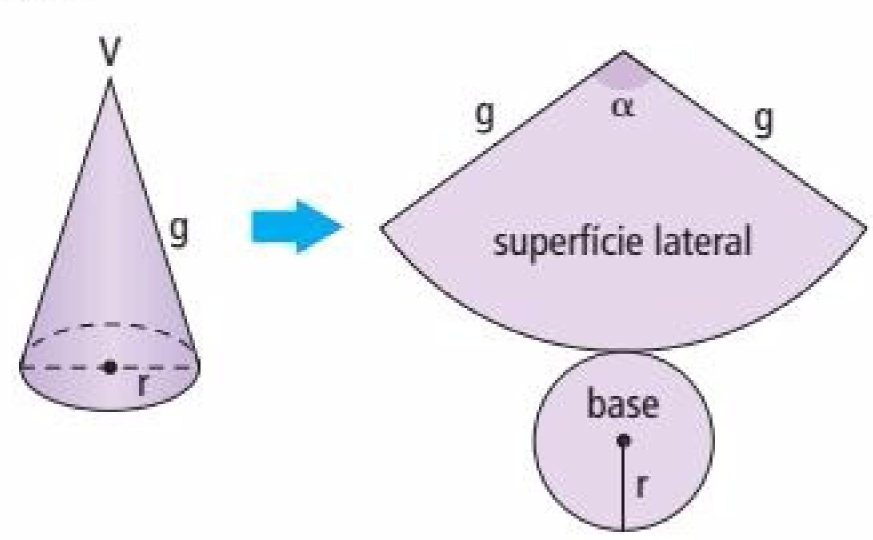
cone equilátero

Pelo teorema de Pitágoras podemos estabelecer a seguinte relação em um cone circular reto:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Área da superfície de um cone reto

Vamos planificar a superfície de um cone reto de raio da base *r* e geratriz *g* para determinar sua área.



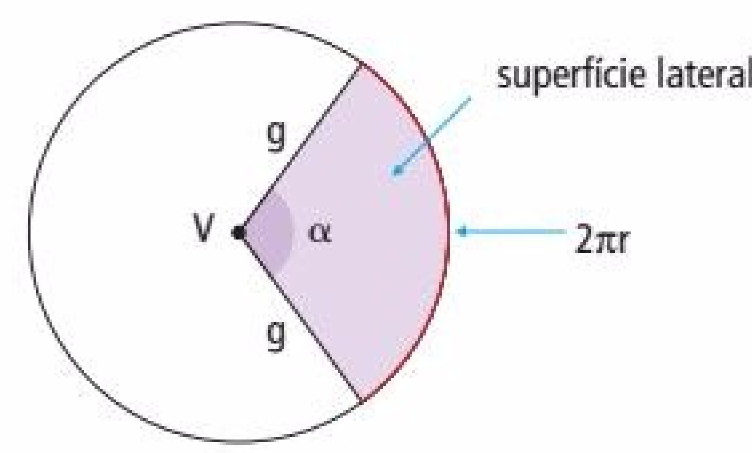
A superfície total do cone é formada pela superfície da base (círculo) mais a superfície lateral (um setor circular). Assim, temos:

- **área da base (S_b)**: é a área do círculo de raio *r*.

$$S_b = \pi r^2$$

- **área lateral (S_ℓ)**: a área da superfície lateral de um cone corresponde à área de um setor circular de raio *g* (geratriz do cone) e arco de comprimento $2\pi r$.

  Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do arco correspondente, é possível determinar a área da superfície lateral (S_ℓ) pela regra de três a seguir:



Setor circular correspondente à superfície lateral do cone

Comprimento do arco do setor	Área do setor
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	S_ℓ

$$2\pi r \cdot \pi g^2 = 2\pi g \cdot S_\ell \Rightarrow S_\ell = \frac{\cancel{2\pi} r \cdot \pi g^{\cancel{2}}}{\cancel{2\pi g}} \Rightarrow \boxed{S_\ell = \pi r g}$$

- **área total (S_t)**: é a soma da área lateral e da área da base:

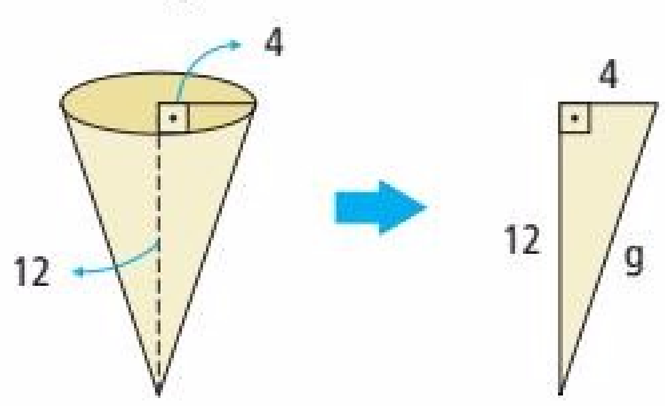
$$S_t = S_\ell + S_b \Rightarrow S_t = \pi r g + \pi r^2 \Rightarrow \boxed{S_t = \pi r(g + r)}$$

Exercícios resolvidos

7 Um fabricante resolveu fazer a embalagem para um de seus produtos na forma de um cone reto, com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura. Qual será a quantidade mínima do material utilizado para cobrir toda a superfície dessa embalagem? Use $\pi = 3{,}14$.

Resolução

Modelo de embalagem:



Ilustrações: Editoria de arte

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$g^2 = 12^2 + 4^2 = 144 + 16 = 160$

$g = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

$g = 4\sqrt{10}$ cm

Vamos agora determinar a área da base (S_b):

$S_b = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \Rightarrow S_b = 16\pi \text{ cm}^2$

Cálculo da área lateral (S_ℓ):

$S_\ell = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{10} = 16\pi\sqrt{10} \Rightarrow S_\ell = 16\pi\sqrt{10} \text{ cm}^2$

Cálculo da área total (S_t):

$S_t = S_b + S_\ell = 16\pi + 16\pi\sqrt{10} = 16\pi\left(1 + \sqrt{10}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_t = 16\pi\left(1 + \sqrt{10}\right) \text{ cm}^2$

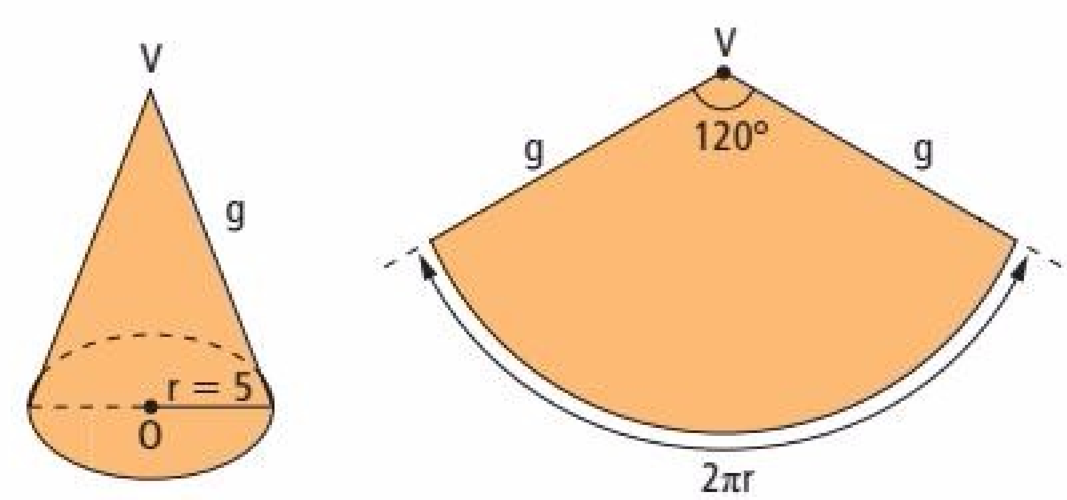
Fazendo $\sqrt{10} = 3{,}16$, obtemos:

$S_t = 16 \cdot (3{,}14) \cdot (1 + 3{,}16) = 50{,}24 \cdot (4{,}16) \simeq 209$

Portanto, a quantidade mínima será de 209 cm² de material.

8 Um cone é construído de modo que o raio da base mede 5 cm e a medida do ângulo central do setor circular correspondente à área lateral desse cone é igual a 120°. Determine a área lateral (S_ℓ) do cone.

Resolução



Seja $S_\ell = \pi r g$, temos que determinar a geratriz do cone. Aplicando a regra de três, temos:

Comprimento do arco do setor	Medida do ângulo central (em grau)
$2\pi g$	$360°$
$2\pi r$	α

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2\pi g}{2\pi r} = \frac{360°}{\alpha} \Rightarrow g = \frac{360° \cdot r}{\alpha}$$

Substituindo os valores, obtemos: $g = \dfrac{360° \cdot r}{\alpha} \Rightarrow$

$$\Rightarrow g = \frac{360° \cdot 5}{120°} = 15 \Rightarrow g = 15 \text{ cm}$$

Cálculo da área lateral (S_ℓ):

$S_\ell = \pi r g = \pi \cdot 4 \cdot 15 = 60\pi \Rightarrow S_\ell = 60\pi \text{ cm}^2$

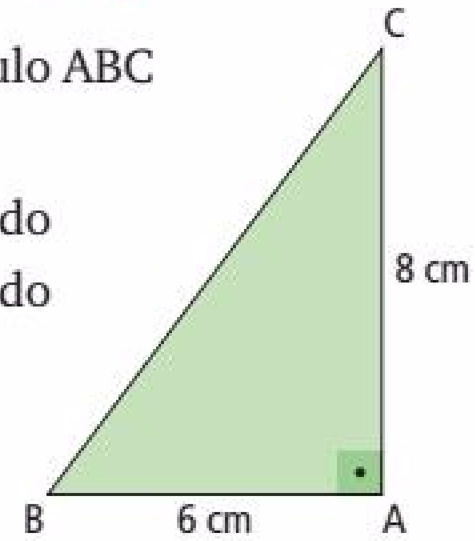
Portanto, a área lateral do cone é 60π cm².

Exercícios propostos

Escreva no caderno

20. Um funil de papel na forma de um cone reto tem 6 cm de diâmetro e 4 cm de altura. Qual é a área lateral desse funil? (Use $\pi = 3{,}14$.) 47,1 cm²

21. Considere o triângulo retângulo ABC da figura.



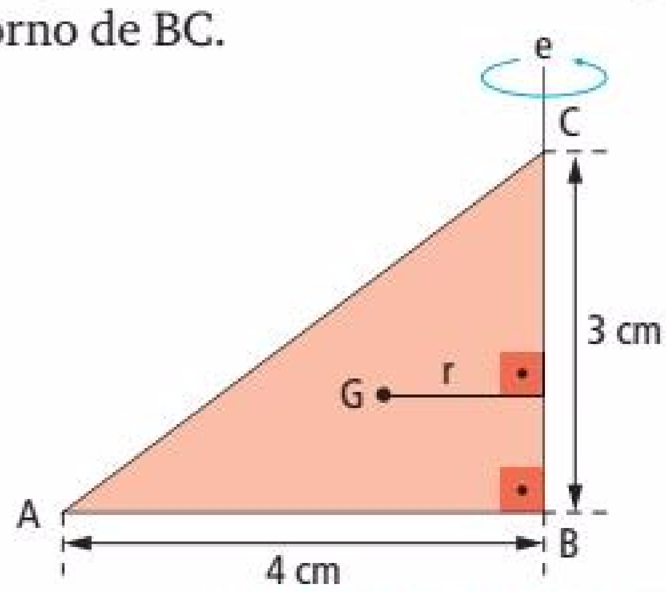
Determine a área total do sólido obtido pela rotação completa do triângulo em torno do lado:

a) $\overline{AC}$. 96π cm²

b) $\overline{AB}$. 144π cm²

22. (UERJ) Uma linha poligonal fechada de três lados limita um triângulo de perímetro ℓ. Se ela gira em torno de um de seus lados, gera uma superfície de área S igual ao produto de ℓ pelo comprimento da circunferência descrita pelo baricentro G da poligonal.

A figura a seguir mostra a linha (ABCA) que dá uma volta em torno de BC.



Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Esboce a figura gerada e indique o cálculo da área de sua superfície que é igual a 36π cm².

b) Calcule a distância r do baricentro G dessa linha ao eixo de rotação.

23. (UFPA) Num cone reto, a altura é 3 m e o diâmetro da base é 8 m. Então, a área total, em metros quadrados, vale:

a) 52π
X b) 36π
c) 20π
d) 16π
e) 12π

24. A geratriz de um cone circular reto mede $5\sqrt{2}$ cm, e a altura, 7 cm. Calcular:

a) a área lateral; $S_\ell = 5\sqrt{2}\,\pi$ cm²
b) a área total. $S_t = (5\sqrt{2}+1)\cdot\pi$ cm²

25. A geratriz de um cone equilátero mede 20 cm. Calcule a área da base (S_b) desse cone. 100π cm²

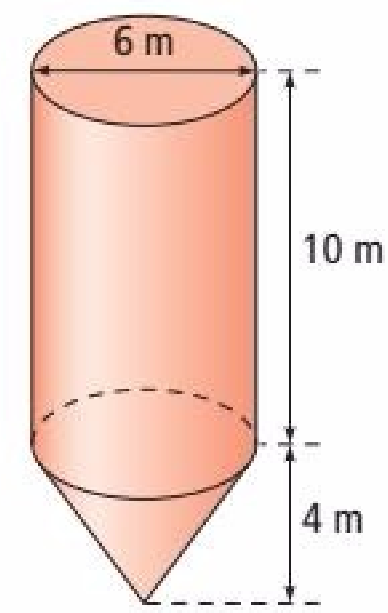
26. A medida r do raio, a altura h e a medida g de uma geratriz formam, nessa ordem, uma PA de três termos e de razão 3. Determine a área total do cone com essas dimensões. 216π

27. Determine a altura de um chapéu de cartolina de forma cônica construído a partir de um setor circular de raio 15 cm e ângulo central de 120°. $10\sqrt{2}$ cm

28. A superfície lateral de um cone circular reto é feita a partir de uma peça circular de papel de 20 cm de diâmetro cortando-se fora um setor de $\frac{\pi}{5}$ radianos. Calcule a altura do cone que tem essa superfície lateral. $\sqrt{19}$ cm

29. A altura de um cone circular reto é igual a $2\sqrt{21}$ m e o raio da base mede 4 m. Qual é, em radianos, a medida do ângulo central do setor circular que se obtém quando se desenvolve no plano a superfície lateral desse cone? $\frac{4\pi}{5}$ rad

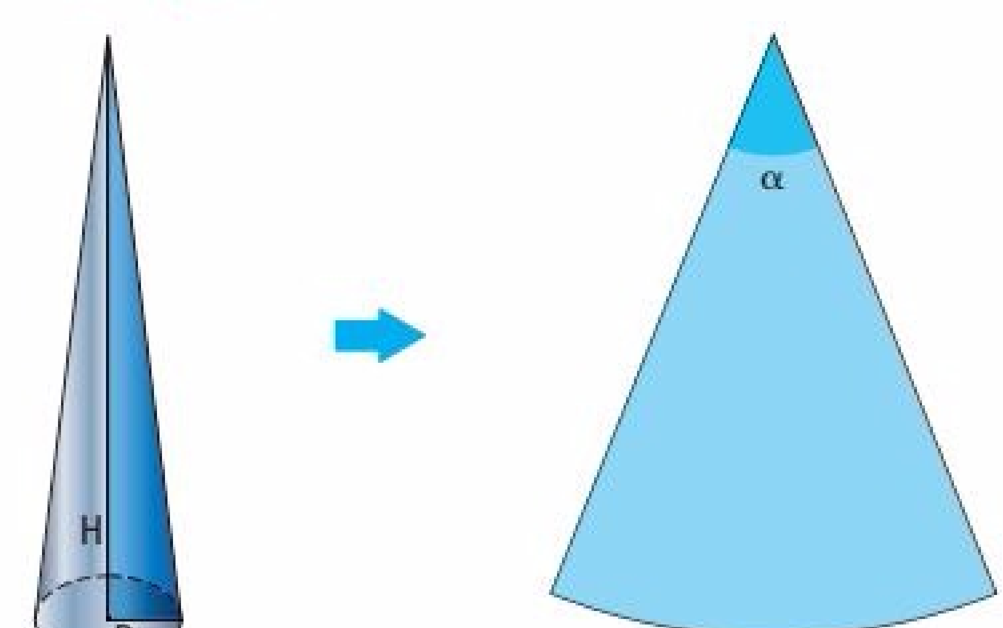
30. Uma cooperativa agrícola vai construir um silo para armazenamento de cereais em grãos. O silo terá a forma indicada na figura. Seu corpo será cilíndrico e sua base terminará por um funil cônico.



Para que a superfície desse silo não enferruje, será necessário pintá-lo externamente. Se com uma lata de tinta pode-se pintar 10 m², qual é o número mínimo de latas para pintar a superfície total desse silo? Use $\pi = 3{,}14$. 27 latas.

31. É dada a superfície de um cone circular reto (sem fundo) de raio R e altura H. Cortando-o por uma de suas geratrizes e abrindo tal superfície, obtém-se um setor circular plano (ver figura).

Qual é a relação entre R e H para que o ângulo α seja 45°? $H = 3\sqrt{7}\,R$



Ilustrações: Editoria de arte

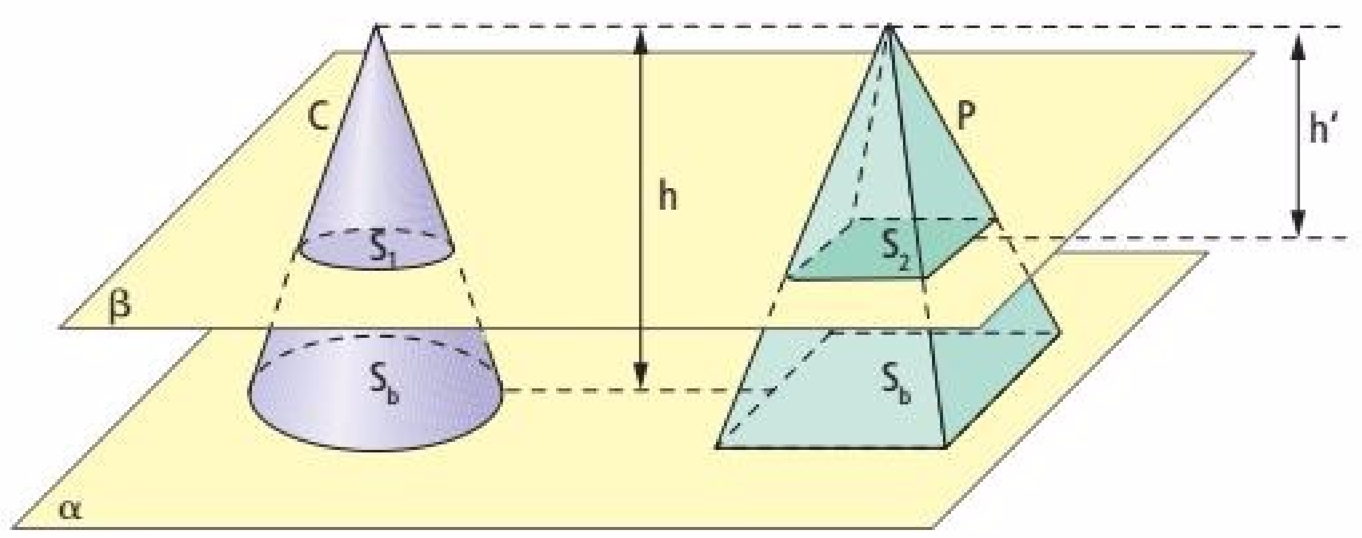
32. (ITA-SP) As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m². 96π m²

Volume de um cone

Assim como fizemos para determinar o volume de uma pirâmide, no capítulo anterior, aplicando o princípio de Cavalieri, podemos utilizar o mesmo raciocínio para determinar o volume de um cone.

Considere um cone *C* e uma pirâmide *P* de mesma altura de medidas *h* e bases de mesma área S_b, contidas em um plano horizontal α. Qualquer plano β, paralelo ao plano α, distante h' do vértice e secante aos sólidos *C* e *P* determina duas secções transversais de áreas S_1 e S_2, respectivamente.

Como o cone *C* e o cone com área da base S_1 são semelhantes, então a razão entre as áreas das respectivas bases pode ser escrita em função das alturas de cada cone. Assim: $\frac{S_1}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$. De maneira análoga, a pirâmide *P* é semelhante à pirâmide com área da base S_2 e podemos escrever $\frac{S_2}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$. Logo, $\frac{S_1}{S_b} = \frac{S_2}{S_b}$ e, portanto, $S_1 = S_2$.



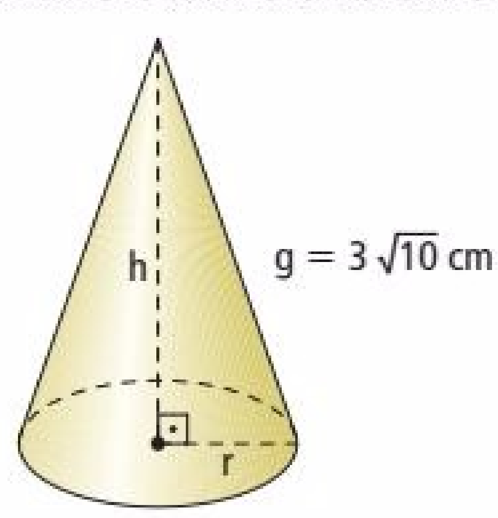
Assim, pelo princípio de Cavalieri podemos concluir que o volume da pirâmide *P* é igual ao volume do cone *C* e podemos escrever:

$$V_{\text{pirâmide}} = V_{\text{cone}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h}$$

Exercícios resolvidos

9 Em um cone reto, a área da base é 9π cm² e a geratriz mede $3\sqrt{10}$ cm. Determine o volume do cone.



Resolução

Primeiro vamos determinar o raio do cone:

$S_b = 9\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow \pi r^2 = 9\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$, ou seja, r = 3 cm

Cálculo da altura do cone:

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{10}\right)^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 90 - 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 81 \Rightarrow h = 9$,

ou seja, h = 9 cm

Cálculo do volume do cone:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 9 \Rightarrow V = 27\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 27\pi \text{ cm}^3$

Portanto, o volume do cone é 27π cm³.

10 (UFV-MG) O trapézio retângulo abaixo sofre uma rotação de 360° em torno da base maior. Sabendo-se que AB = 3 cm, CE = 5 cm e que o volume do sólido obtido é 84π cm³, determine AC.

Resolução

O volume do cilindro pode ser determinado pela diferença entre o volume do sólido e o volume do cone.

O triângulo CDE é retângulo em *D* e indicando a medida de DE por *h*, aplicamos o teorema de Pitágoras no $\triangle$CDE e obtemos:

$5^2 = h^2 + 3^2 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$, ou seja, h = 4 cm.

Cálculo do volume do cone:

$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow V_{cone} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$,

ou seja, $V_{cone} = 12\pi \text{ cm}^3$

Cálculo do volume do cilindro:

$V_{cilindro} = V_{sólido} - V_{cone} = 84\pi - 12\pi = 72\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cilindro} = 72\pi \text{ cm}^3$

Seja a medida AC = x, temos:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot x \Rightarrow 72\pi = \pi \cdot 3^2 \cdot x \Rightarrow x = 8$, ou seja, x = 8 cm

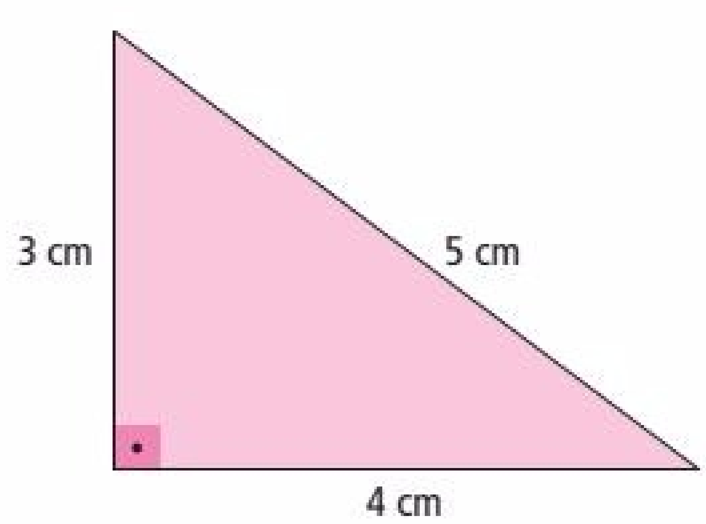
Portanto, AC = 8 cm.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

33. Um cone circular reto tem 3 cm de raio e 15π cm² de área lateral. Calcule seu volume. 12π cm³

34. Observe a figura a seguir. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação completa em torno do cateto menor. 16π cm³



35. Considere um triângulo retângulo e isósceles cuja hipotenusa mede 2 cm. Determine o volume do sólido obtido pela rotação completa desse triângulo em torno da hipotenusa. $\frac{2\pi}{3}$ cm³

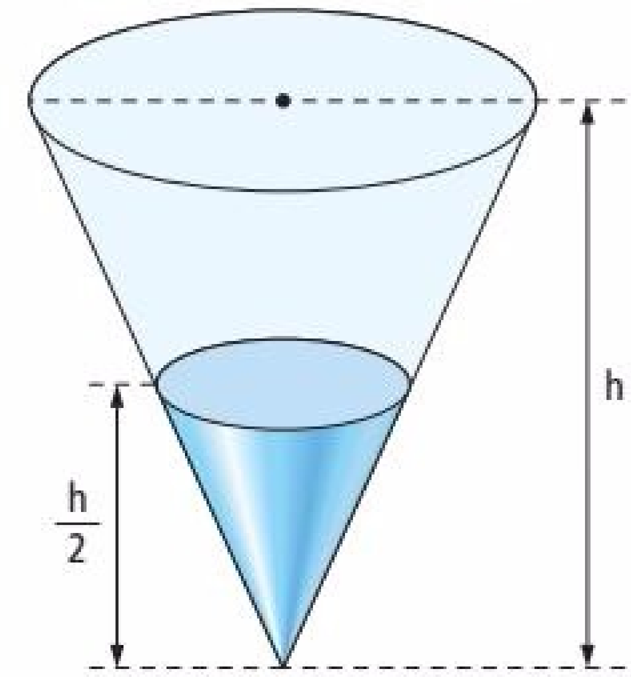
36. O raio da base de um cone de revolução mede 3 cm, e o perímetro de sua secção meridiana mede 16 cm. Determine seu volume. 12π cm³

37. A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é 8π cm, determine o volume desse cone. 64π cm³

38. Uma ampulheta pode ser considerada como formada por dois cones retos idênticos, unidos pelo vértice, inscritos em um cilindro reto. Determine a razão entre o volume de um dos cones e o volume do cilindro. $\frac{1}{6}$

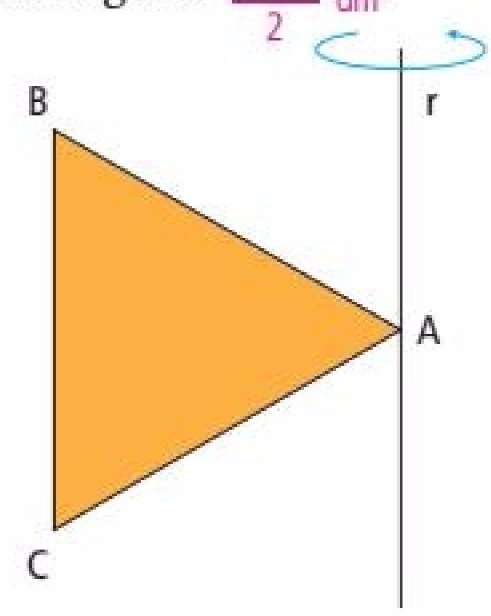
39. Um filtro cônico de papel tem 12 cm de profundidade e 8 cm de diâmetro. Determine sua capacidade em mililitro. 200 mL

40. Na figura a seguir, tem-se um recipiente com a forma de um cone circular reto, com um líquido que atinge metade de sua altura. Se *V* é a capacidade do cone, qual é o volume do líquido? $V' = \frac{V}{8}$



Ilustrações: Editoria de arte

41. A medida dos lados de um triângulo equilátero ABC é 5 dm. O triângulo gira em torno de uma reta *r* do plano do triângulo, paralela ao lado BC e passando pelo vértice *A*. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação desse triângulo. $\frac{125\pi}{2}$ dm³



42. Leia o texto a seguir, a respeito da água como recurso natural e sua disponibilidade no Brasil, e faça o que se pede.

Água: um recurso cada vez mais ameaçado

A água é um recurso natural essencial para a sobrevivência de todas as espécies que habitam a Terra.

[...]

Os alimentos que ingerimos dependem diretamente da água para a sua produção. Necessitamos da água também para a higiene pessoal, para lavar roupas e utensílios e para a manutenção da limpeza de nossas habitações. Ela é essencial na produção de energia elétrica, na limpeza das cidades, na construção de obras, no combate a incêndios e na irrigação de jardins, entre outros. As indústrias utilizam grandes quantidades de água, seja como matéria-prima, seja na remoção de impurezas, na geração de vapor e na refrigeração. Dentre todas as nossas atividades, porém, é a agricultura aquela que mais consome água – cerca de 70% de toda a água consumida no planeta é utilizada pela irrigação. [...]

De maneira geral, o Brasil é um país privilegiado quanto ao volume de recursos hídricos, pois abriga 13,7% da água doce do mundo. Porém, a disponibilidade desses recursos não é uniforme. [...] Mais de 73% da água doce disponível no país encontra-se na bacia Amazônica, que é habitada por menos de 5% da população. Apenas 27% dos recursos hídricos brasileiros estão disponíveis para as demais regiões, onde residem 95% da população do país. [...] Não só a disponibilidade de água não é uniforme, mas a oferta de água tratada reflete os contrastes no desenvolvimento dos Estados brasileiros. Enquanto na região Sudeste 87,5% dos domicílios são atendidos por rede de distribuição de água, no Nordeste a porcentagem é de apenas 58,7%.

Gustavo Frazao / Shutterstock.com

Rio Amazonas, o maior rio do mundo em volume de água.

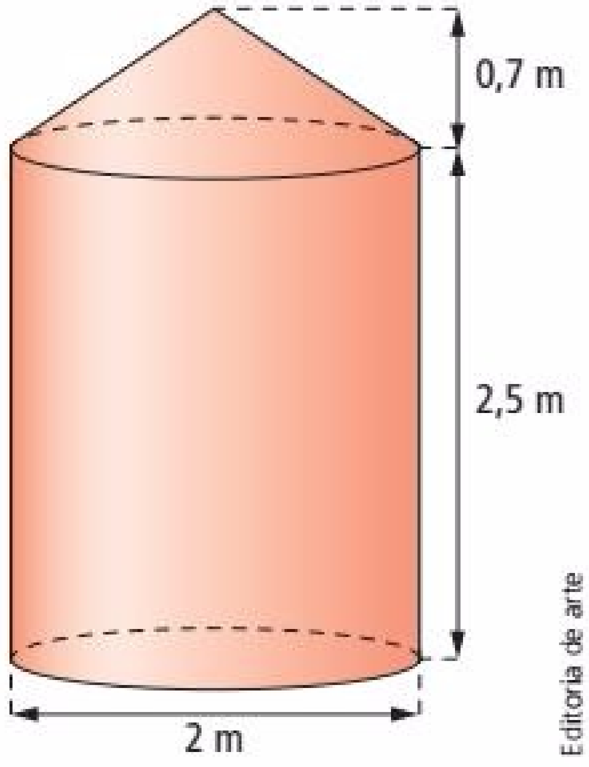
O Brasil registra também elevado desperdício: de 20% a 60% da água tratada para consumo se perde na distribuição, dependendo das condições de conservação das redes de abastecimento. Além dessas perdas de água no caminho entre as estações de tratamento e o consumidor, o desperdício também é grande nas nossas residências, envolvendo, por exemplo, o tempo necessário para tomarmos banho, a própria forma como tomamos banho, a utilização de descargas no vaso sanitário que consomem muita água, a lavagem da louça com água corrente, no uso da mangueira como vassoura na limpeza de calçadas, na lavagem de carros etc. [...]

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. **Consumo sustentável**: manual de educação. Brasília: Consumers International/MMA/MEC/IDEC, 2005. p. 26; 28-29. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/publicacao8.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2016.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Cite alguns exemplos de desperdício de água que ocorrem nas residências. Quais são as atitudes que você toma para evitar o desperdício de água na sua casa?

b) Cisternas são reservatórios de águas pluviais, muito utilizados em cidades com pouca oferta de água e que dependem desses reservatórios (individuais ou de um pequeno grupo de pessoas) para subsistência. Esses reservatórios também podem ser abastecidos com água entregue por caminhões pipa, muito comum em regiões do Nordeste que sofrem com a seca. Ao lado, temos o esboço de uma cisterna. Determine o volume máximo de armazenamento de água desta cisterna, em litros.



Editoria de arte

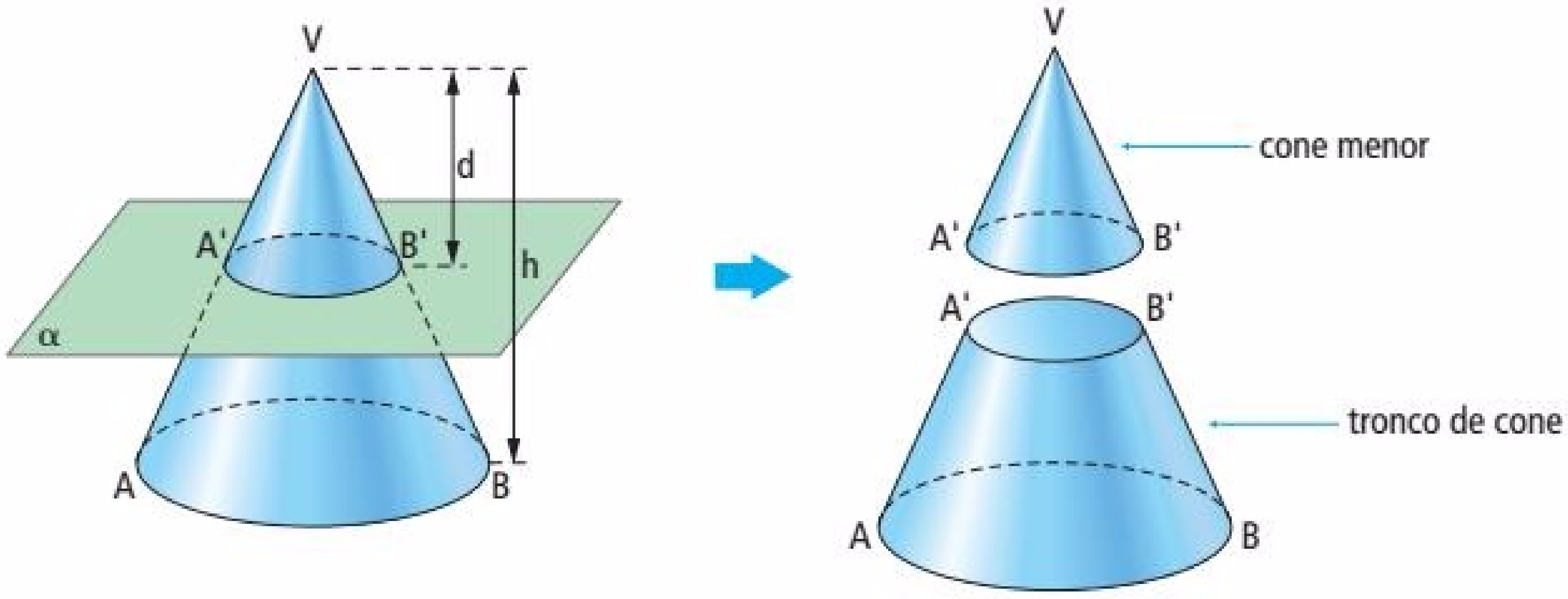
Considere $\pi = 3{,}14$.

c) Faça uma pesquisa com alguma empresa de sua região para avaliar o uso da água nessa empresa. Prepare um material resumo para apresentar como foi essa experiência (se possível, visite a empresa).

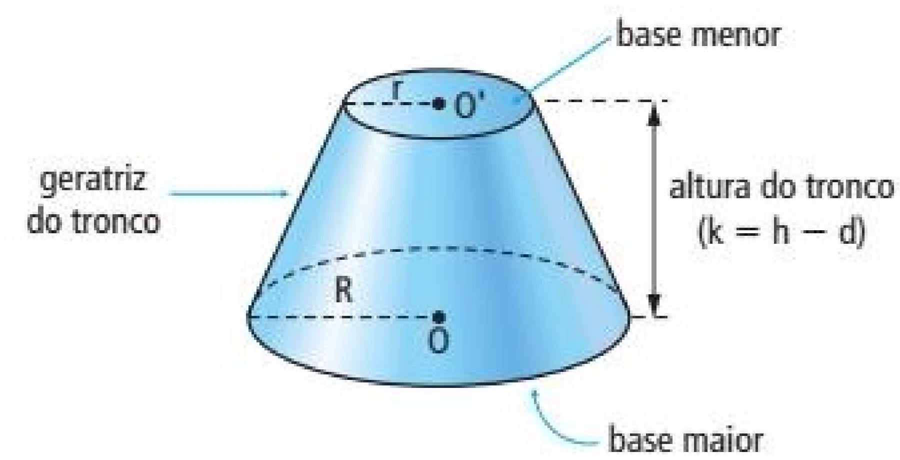
Tronco de cone

Considere um cone reto de altura medindo *h* e vértice *V* e um plano α paralelo ao plano da base que intersecta o cone a uma distância de medida *d* do vértice do cone.

O plano α divide o cone inicial em dois sólidos: um cone menor, de altura de medida *d* e um sólido denominado **tronco de cone**.



Em um tronco de cone, destacamos os seguintes elementos:



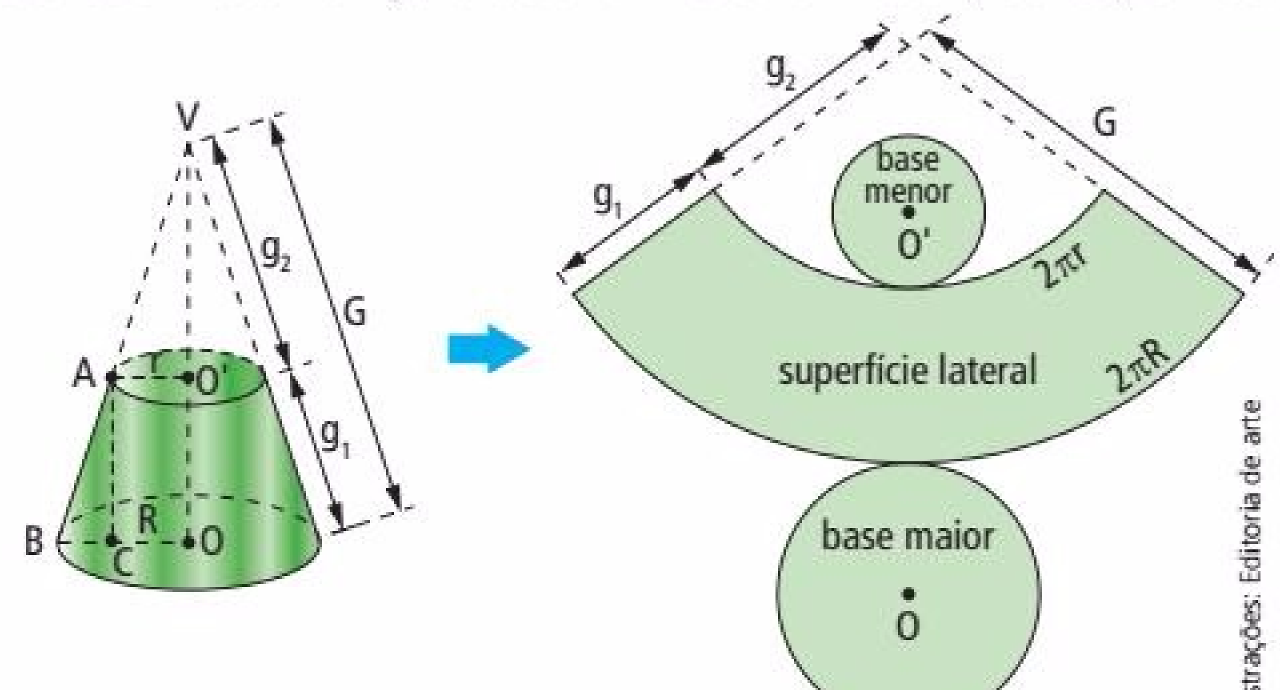
- **base maior do tronco**: é a base do cone inicial;
- **base menor do tronco**: é a secção transversal obtida a partir da intersecção do plano α com o cone inicial e que é um círculo;
- **altura do tronco:** é a distância entre as bases do tronco, e indicaremos sua medida por $k = h - d$;
- **geratriz do tronco**: é qualquer segmento contido em uma geratriz do cone inicial cujas extremidades são pontos das circunferências das bases.

Área da superfície de um tronco de cone

Observe a superfície planificada de um tronco de cone circular reto na figura abaixo. Ela é formada pela superfície lateral mais as superfícies das bases.

Na figura, podemos identificar:

- *R*: medida do raio da base maior do cone;
- *r*: medida do raio da base menor do cone;
- *G*: medida da geratriz do cone maior;
- g_2: medida da geratriz do cone menor;
- g_1: medida da geratriz do tronco.



Planificação do tronco de cone

Ilustrações: Editoria de arte

Da semelhança de triângulos, temos:
$\triangle VO'A \sim \triangle ACB$ e escrevemos:

$$\frac{VA}{AB} = \frac{AO'}{BC} \Rightarrow \frac{g_2}{g_1} = \frac{r}{R - r} \Rightarrow g_2 = \frac{g_1 \cdot r}{R - r} \quad \text{(I)}$$

- **áreas das bases (S_B e S_b)**: são a área da base maior de raio *R* (S_B) e a área da base menor de raio *r* (S_B);

base maior: $\boxed{S_B = \pi R^2}$ base menor: $\boxed{S_b = \pi r^2}$

- **área lateral do tronco de cone (S_ℓ)**: é igual à área lateral do cone maior menos a área lateral do cone menor, isto é:

$$S_\ell = \pi RG - \pi r g_2 \Rightarrow S_\ell = \pi R(g_1 + g_2) - \pi r g_2 \Rightarrow S_\ell = \pi[Rg_1 + Rg_2 - rg_2] \Rightarrow S_\ell = \pi[Rg_1 + (R - r)g_2] \quad \text{(II)}$$

Substituindo g_2 de (I) em (II), temos:

$$S_\ell = \pi\left[Rg_1 + (R - r) \cdot \frac{g_1 \cdot r}{R - r}\right] = \pi(Rg_1 + g_1 r) \Rightarrow \boxed{S_\ell = \pi g_1(R + r)}$$

- **área total (S_t)**: é a soma das áreas das bases e da área lateral.

$$\boxed{S_t = S_B + S_b + S_\ell}$$

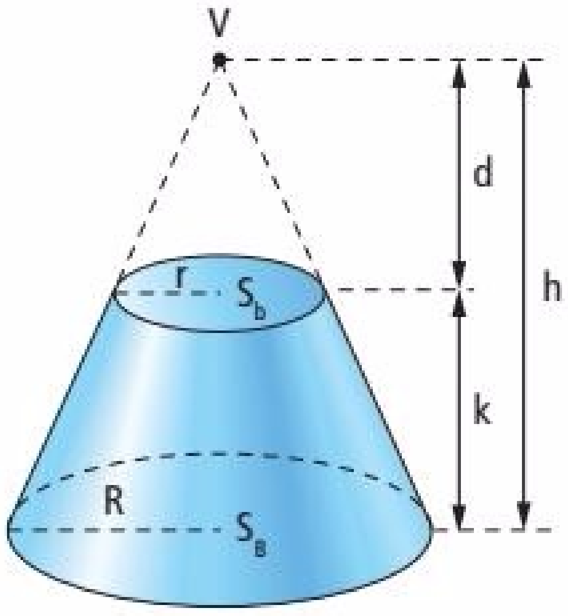
Volume de um tronco de cone circular reto

Considere o tronco de cone representado na figura ao lado.

Pode ser demonstrado que o volume *V* de um tronco de cone cujos raios das bases são *R* e *r* e com altura de medida *k* é dado por:

$$V = \frac{k\pi}{3} \cdot \left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

O volume do tronco de cone também pode ser determinado pela diferença entre o volume do cone maior, de área da base S_B, e o volume do cone menor, de área da base S_b. Dependendo das informações que se têm, opta-se pelo processo mais prático em cada caso.

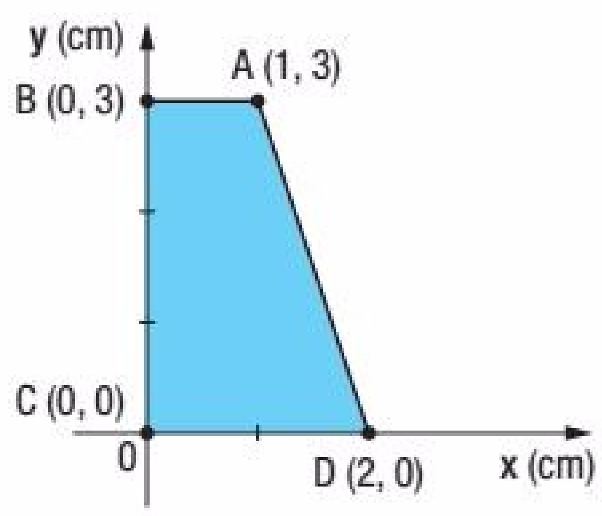


S_B: área da base maior

S_b: área da base menor

Exercícios resolvidos

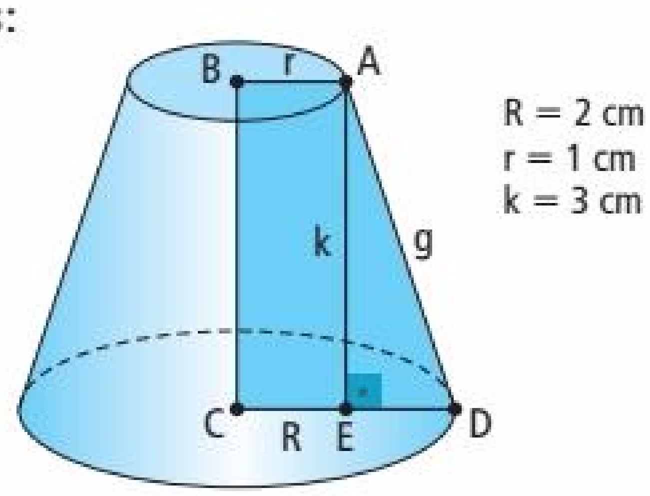
11 Um tronco de cone é obtido pela rotação de 360° do trapézio da figura em torno do eixo $\overrightarrow{0y}$. Calcule a área lateral, a área total e o volume do tronco gerado.



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

Pela rotação completa do trapézio em torno do eixo $\overrightarrow{0y}$, temos:



Do triângulo retângulo ADE, temos:

$g^2 = k^2 + (ED)^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + 1^2 \Rightarrow g = \sqrt{10}$ cm

Cálculo da área lateral (S_ℓ): R = 2 cm e r = 1 cm.

$S_\ell = \pi g(R + r) \Rightarrow S_\ell = \pi\sqrt{10}\,(2 + 1) = 3\sqrt{10}\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow S_\ell = 3\sqrt{10}\pi$ cm²

Cálculo da área total (S_t):

$S_t = S_\ell + S_B + S_b$

$S_B = \pi \cdot R^2 \Rightarrow S_B = \pi \cdot 2^2 \Rightarrow S_B = 4\pi \Rightarrow 4\pi$ cm²

$S_b = \pi \cdot r^2 \Rightarrow S_b = \pi \cdot 1^2 \Rightarrow S_b = \pi$ cm²

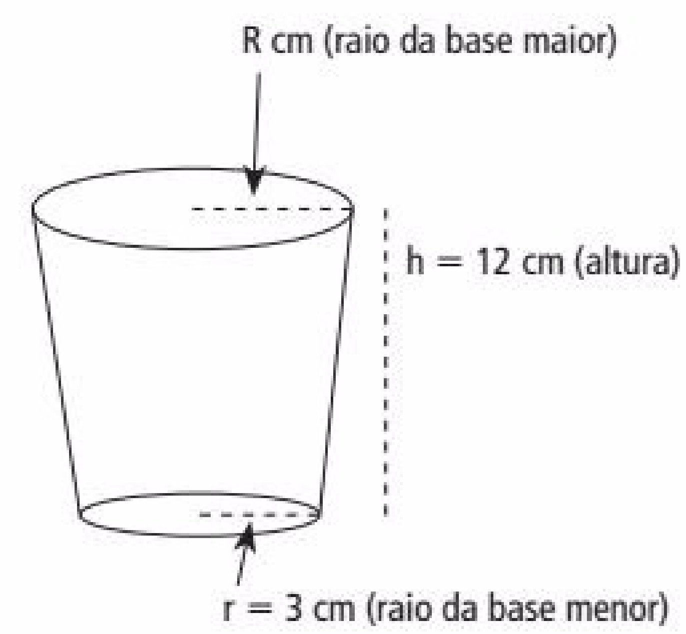
$S_t = 3\sqrt{10}\pi + 4\pi + \pi \Rightarrow S_t = \left(3\sqrt{10} + 4 + 1\right)\pi$, ou seja, $S_t = \left(5 + 3\sqrt{10}\right)\pi$ cm²

Cálculo do volume (V):

$V = \frac{k\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{3\pi}{3}\left(2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2\right) =$

$= \pi \cdot (4 + 2 + 1) = 7\pi \Rightarrow V = 7\pi$ cm³

12 (UFU-MG) Considere um balde para colocação de gelo no formato de um tronco de cone circular reto apresentando as medidas indicadas na figura a seguir.



Considerando que esse balde esteja com 25% de sua capacidade ocupada com gelo derretido (água) e, consequentemente, com um volume de água igual a $0{,}097\pi$ litros, qual é o valor (em cm) do raio da base maior *R*?

a) 8,5 b) 9 x c) 8 d) 7,5

Resolução

25% da capacidade do balde é igual a $0{,}097\pi$ litros. Como 1 L = 1000 cm³, temos: $0{,}097\pi \cdot 1000$ cm³ = $= 97\pi$ cm³.

Podemos calcular o volume de um tronco de cone pela fórmula:

$V = \frac{k\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$

$25\%V = \frac{25}{100}V = \frac{V}{4}$, assim:

$\frac{V}{4} = 97\pi \Rightarrow \frac{12\pi}{3} \cdot (R^2 + 3R + 3^2) = 97\pi \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 + 3R + 9 = 97 \Rightarrow R^2 + 3R - 88 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = -11$ (não convém) e $R = 8$.

Portanto, o raio da base maior do copo é R = 8 cm.

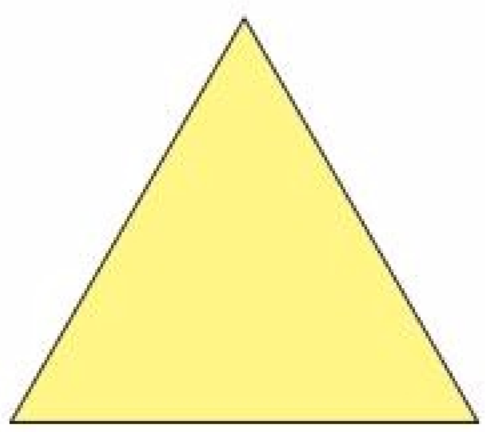
Alternativa **c**.

43. Os raios das bases de um tronco de cone circular reto são 9 cm e 5 cm. Sabendo que a altura é 5 cm, determine o volume do tronco. $\frac{755\pi}{3}$ cm³

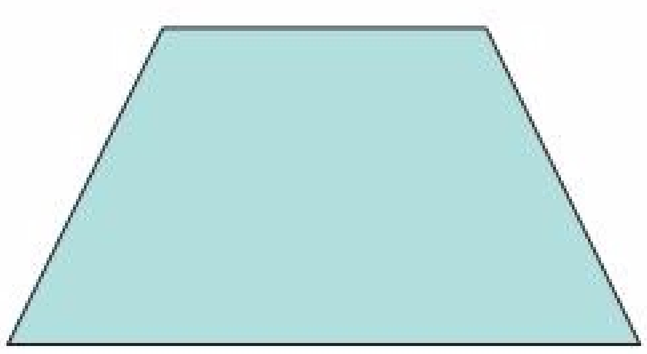
44. (Enem/MEC) Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda à parte da superfície lateral a ser revestida.

Qual deverá ser a forma do adesivo?

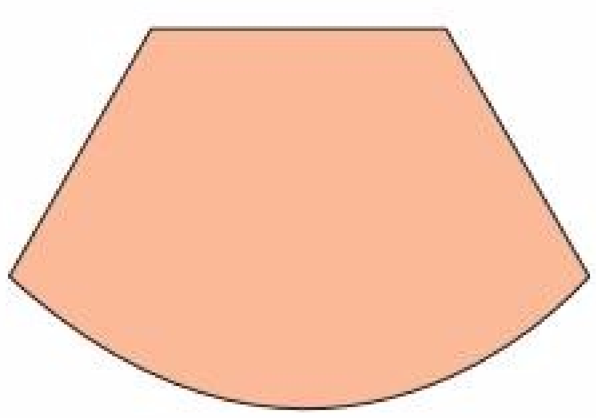
a)



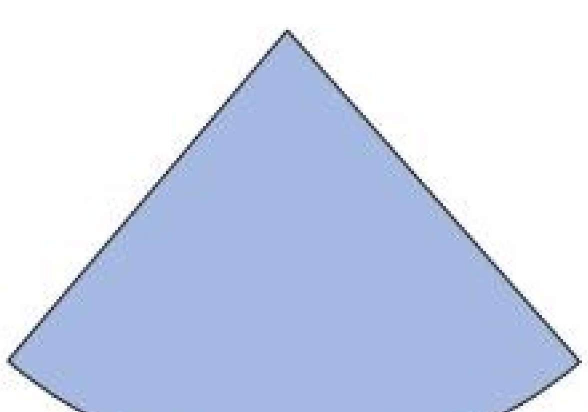
b)



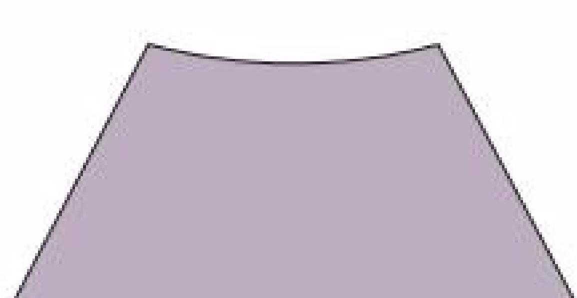
c)



d)



X e)

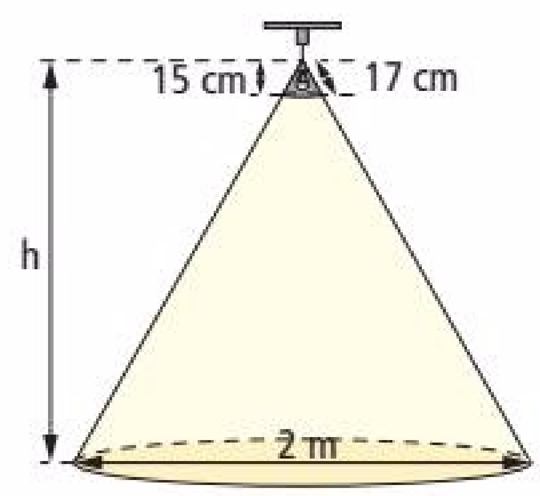


45. Um cone tem 10 cm de raio e 20 cm de altura. A uma distância de 4 cm do vértice, secciona-se esse cone com um plano paralelo à base. Calcule o volume do tronco de cone obtido. $\frac{1984\pi}{3}$ cm³

46. Sabe-se que um cone circular reto tem 24 cm de altura e 8 cm de raio. Determine a que distância do vértice ele deve ser interceptado por um plano paralelo ao plano da base para que a área da secção obtida seja 25π cm². 15 cm

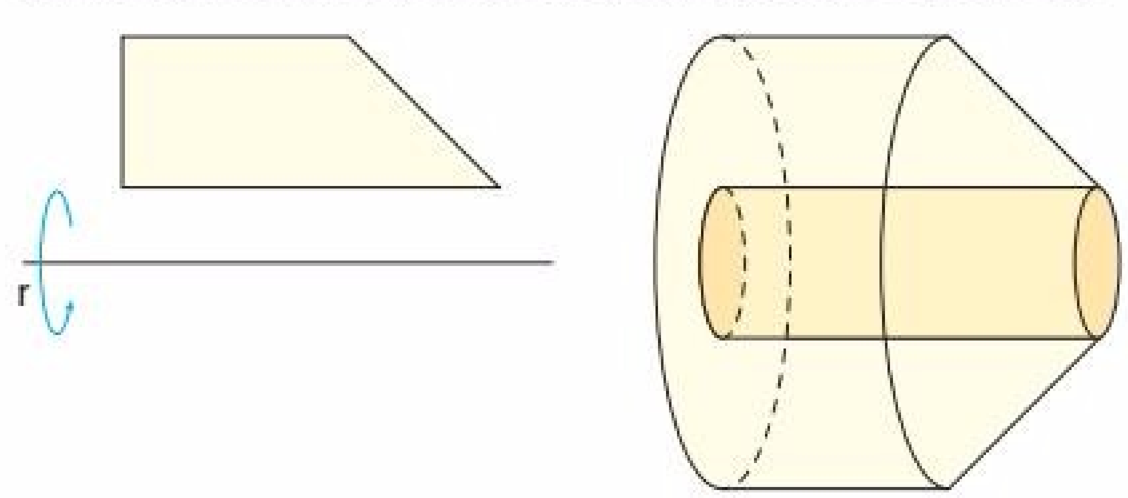
47. Um cone circular reto de 10 cm de altura é cortado por um plano paralelo à base, a uma distância *d* do vértice. Sendo a área obtida da secção igual à metade da área da base, determine o valor da distância *d*. $5\sqrt{2}$ cm

48. Um quebra-luz é um cone de geratriz 17 cm e altura 15 cm. Uma lâmpada acesa no vértice do cone projeta no chão um círculo de 2 m de diâmetro. A que altura do chão se encontra a lâmpada? 1,875 m



Ilustrações: Editoria de arte

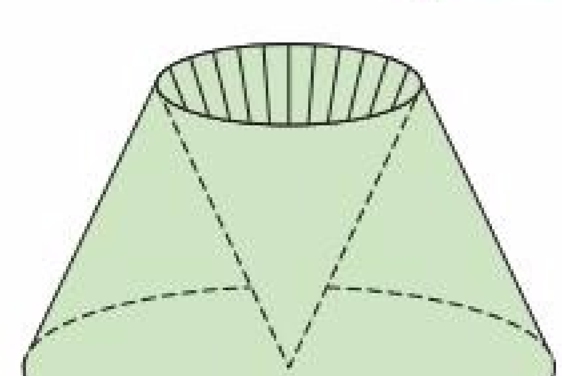
49. No trapézio retângulo da figura, a base maior mede 10 dm, a menor, 6 dm e a altura, 4 dm. Efetua-se uma rotação completa do trapézio em torno da reta *r* paralela à base maior do trapézio e situada a 2 dm de distância.



a) Calcule a área da superfície do sólido gerado. $16\pi(9 + 2\sqrt{2})$ dm²

b) Calcule o volume do sólido gerado. $\frac{736\pi}{3}$ dm³

50. (UFPR) Um sólido tem o formato de um tronco de cone circular reto com uma cavidade na forma de cone com a mesma altura do tronco e com base igual à base menor do tronco, conforme a figura. Calcule o volume do sólido, sabendo que as medidas do tronco são: 16 cm de altura, 250 cm² de área da base maior e 40 cm² de área da base menor. $\frac{5600}{3}$ cm³

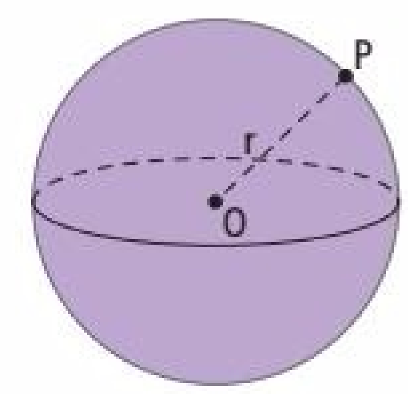


Esfera

São muitas as situações em que encontramos formas que lembram esferas ou partes de uma esfera.

Há ainda objetos que, apesar de não constituírem rigorosamente esferas, possuem uma forma muito próxima da esfera, como a bola de futebol. A Terra, por ser achatada nos polos, não possui a forma de uma esfera perfeita. Mesmo assim, muitas vezes vamos considerar, para efeito de cálculo, como se fossem esferas perfeitas.

Vamos considerar um ponto O e um número real r positivo como indicado na figura ao lado.



Ilustrações: Editoria de arte

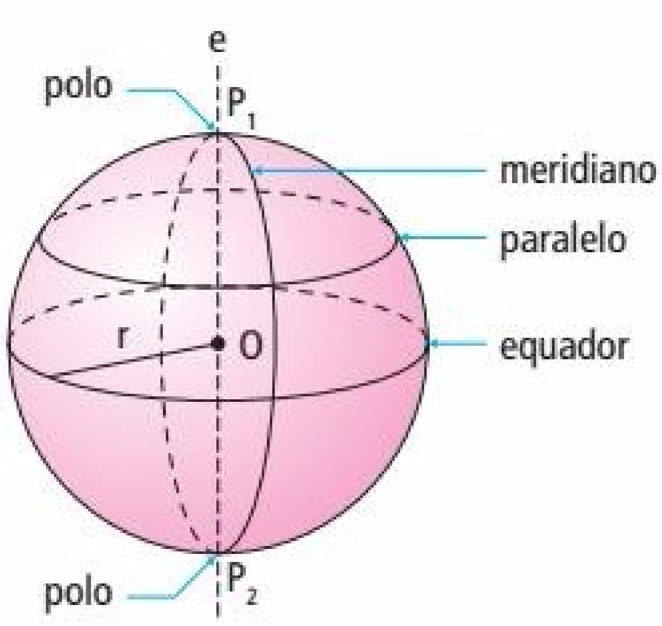
O conjunto de todos os pontos P do espaço, cuja distância ao ponto O é igual a r, é denominado **superfície esférica** de centro O e raio r.

O sólido limitado por uma superfície esférica chama-se **esfera**. Dessa maneira, a esfera de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a r.

De modo bastante simples, podemos dizer que a superfície é a "casca", enquanto a esfera é a reunião da "casca" com o "miolo".

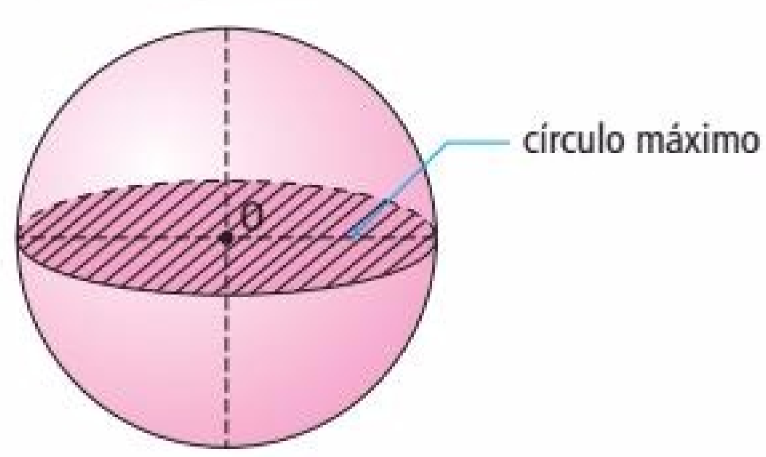
As denominações **centro** e **raio** são aplicadas indiferentemente a uma superfície esférica ou à esfera por ela limitada.

Em uma esfera, destacamos os seguintes elementos:



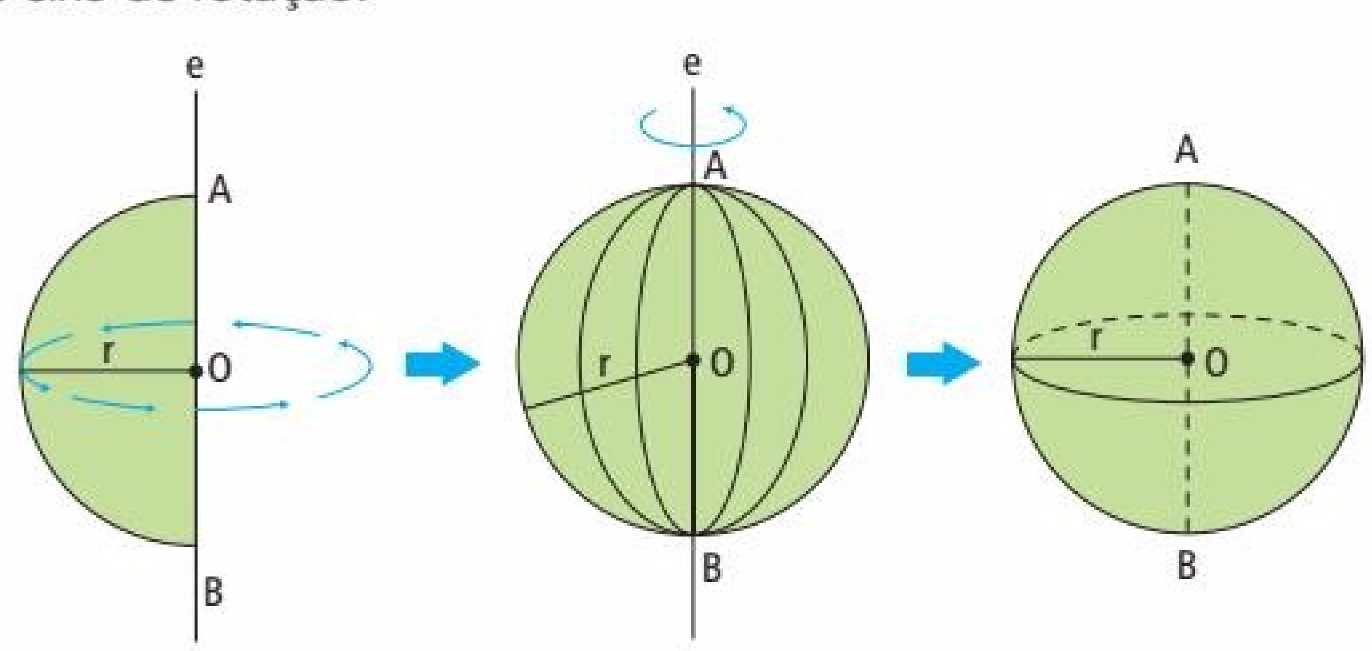
- **eixo**: é qualquer reta que contém o centro da esfera e indicaremos por e.
- **polos**: são os pontos de intersecção da superfície esférica com o eixo e, e indicaremos por P_1 e P_2.
- **equador**: é a circunferência de uma secção obtida por um plano perpendicular ao eixo e que passa pelo centro da esfera.

  O círculo associado ao equador é chamado de **círculo máximo da esfera**. Ele divide a esfera em duas partes iguais chamadas de **hemisférios**.



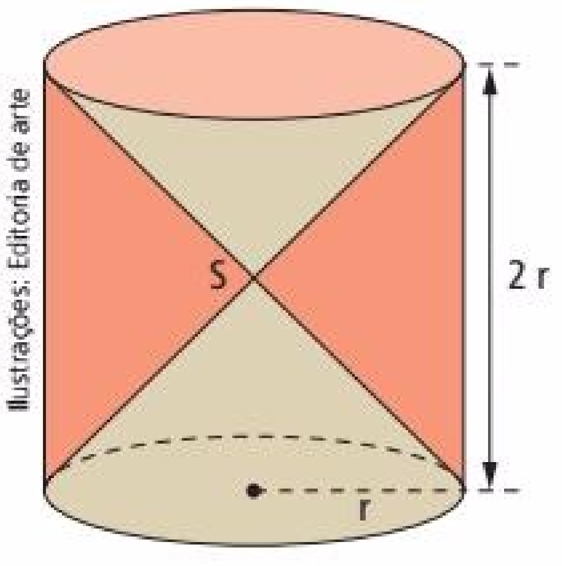
- **paralelo**: é a circunferência de uma secção obtida por um plano perpendicular ao eixo e e, portanto, paralela ao equador.
- **meridiano**: é a circunferência de uma secção obtida por um plano que contém o eixo e.

A esfera também pode ser obtida pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém seu diâmetro. Por isso, o eixo e também é chamado de eixo de rotação.



Volume de uma esfera

Ilustrações: Editoria de arte

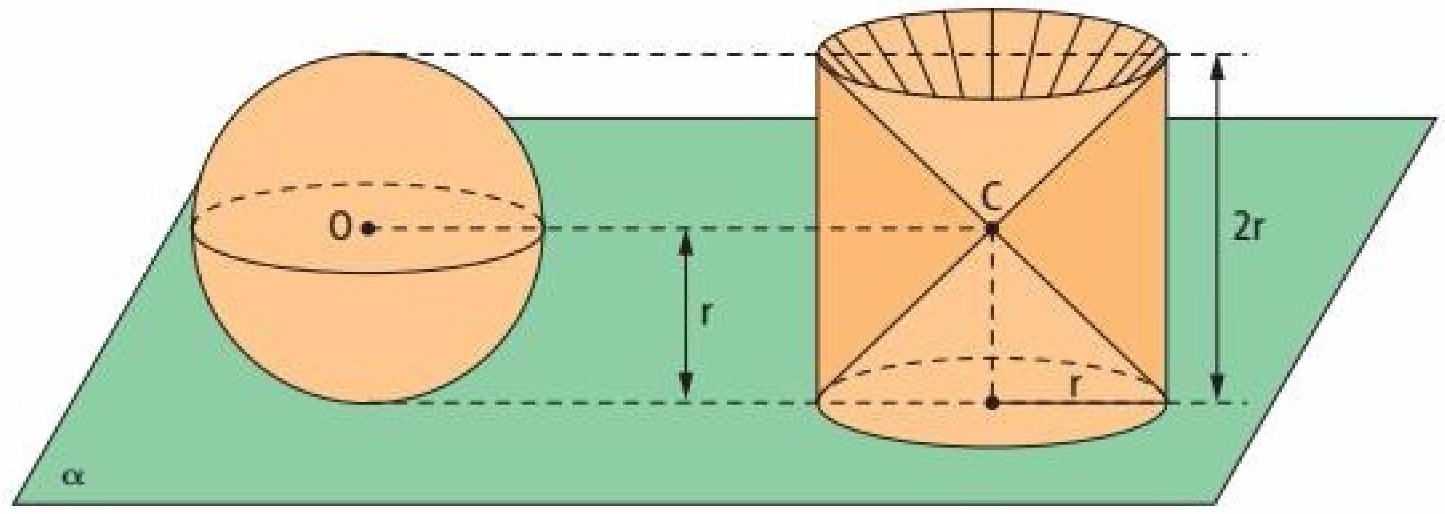


Para calcular o volume de uma esfera de raio *r*, vamos utilizar o princípio de Cavalieri. Considere um cilindro equilátero de altura 2r e raio da base *r*. Retirando dois cones circulares retos, de altura *r* e raio da base *r*, cujas bases coincidem com as bases desse cilindro, obtemos o sólido *A*, representado da figura ao lado.

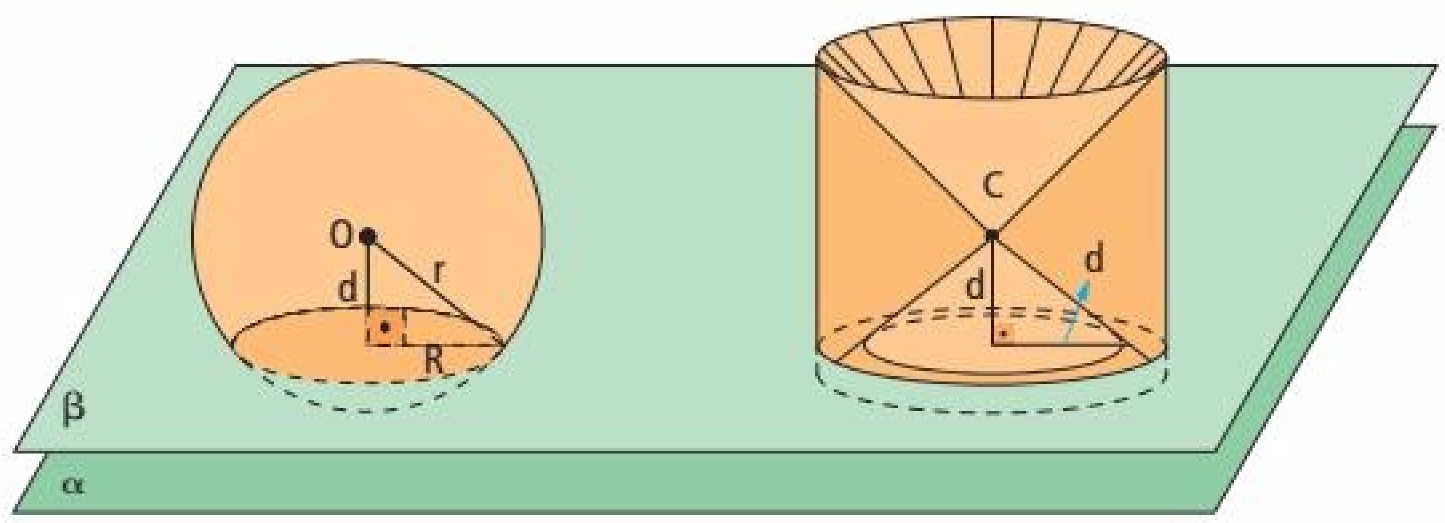
O volume do sólido *A* é igual à diferença entre o volume do cilindro equilátero e os volumes dos dois cones circulares retos, ou seja:

$$V_A = V_{cilindro} - 2V_{cone} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Agora, vamos considerar o sólido *A* e uma esfera *E* de raio *r*, apoiados em um mesmo plano α, conforme mostra a figura abaixo.



Considere também um plano β paralelo a α que secciona a esfera *E* e o sólido *A* a uma distância *d* do centro da esfera *O*, como mostra a figura abaixo.



O plano β determina um círculo na esfera *E*, cujo raio indicaremos por *R*. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 = R^2 + d^2 \Rightarrow R^2 = r^2 - d^2$$

Assim, a área S_1 do círculo é dada por:

$$S_1 = \pi R^2 = \pi(r^2 - d^2) \qquad \text{(I)}$$

A secção determinada pelo plano β no sólido *A* é uma coroa circular de raios *r* e *d* e sua área S_2 é dada por:

$$S_2 = \pi(r^2 - d^2) \qquad \text{(II)}$$

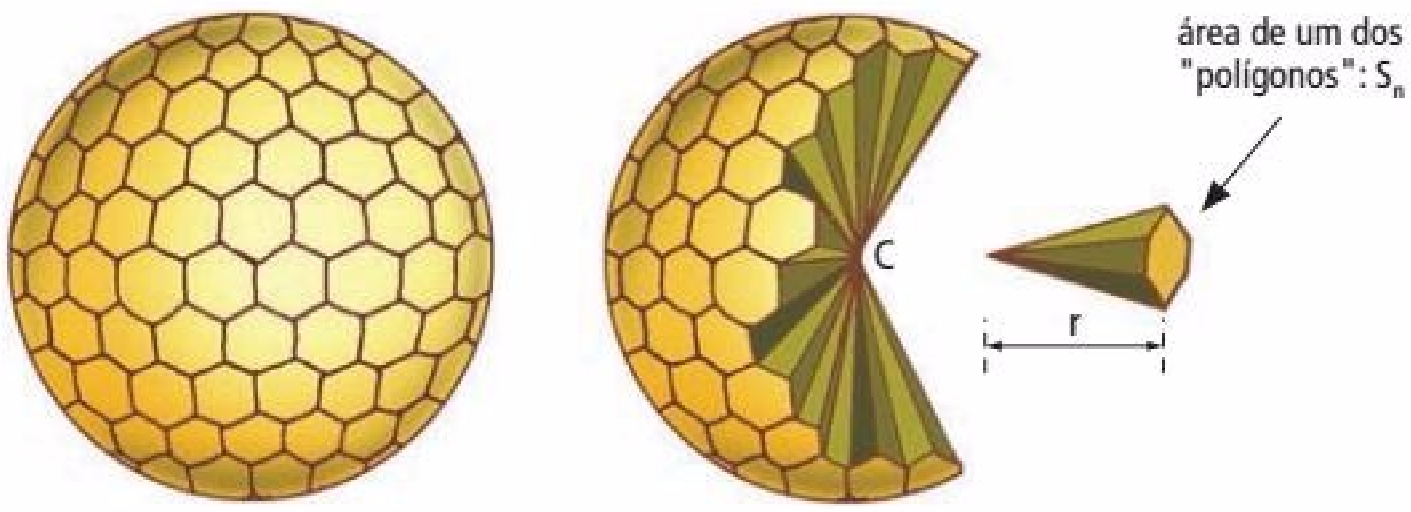
Assim, comparando (I) e (II), verificamos que a área da secção plana da esfera *E* (círculo) é igual à área da secção plana do sólido *A* (coroa circular).

Pelo princípio de Cavalieri, temos que a esfera *E* tem o mesmo volume que o sólido *A* e, portanto, o volume *V* da esfera é dado por: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$

Demonstração da fórmula da área de uma superfície esférica

Agora que já estudamos como determinar o volume de uma esfera, vamos usar esse resultado para demonstrar a fórmula da área de uma superfície esférica.

Uma esfera pode ser imaginada como a reunião de infinitas "pirâmides" com vértice em *C* (centro da esfera), como representado na figura abaixo.



Ilustrações: Editoria de arte

De fato, não são pirâmides, pois a base tem uma superfície arredondada.

A altura de cada pirâmide é o raio *r* da esfera.

Considere uma esfera de centro *C* decomposta em uma infinidade de "pirâmides" cujos vértices se encontram no centro da esfera.

Desse modo, a superfície esférica fica dividida em *n* "polígonos" cujas áreas são $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$. Para *n* muito grande, cada "polígono" tem área e perímetro muito pequenos e a soma das áreas de todos esses polígonos se aproxima da área da superfície esférica S:

$$S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n \simeq S \quad \text{(I)}$$

Além disso, a soma dos volumes de todas essas "pirâmides" se aproxima do volume da esfera. O volume da pirâmide é dado por $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}S_b \cdot h$ e, sendo $h = r$ (raio da esfera), podemos escrever $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}S_b \cdot r$.

Assim:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$$

$$V = \frac{S_1 \cdot r}{3} + \frac{S_2 \cdot r}{3} + \frac{S_3 \cdot r}{3} + ... + \frac{S_n \cdot r}{3} = \frac{1}{3} \cdot r(S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n) \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$V \simeq \frac{1}{3}S \cdot r$$

Assim, como $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, temos:

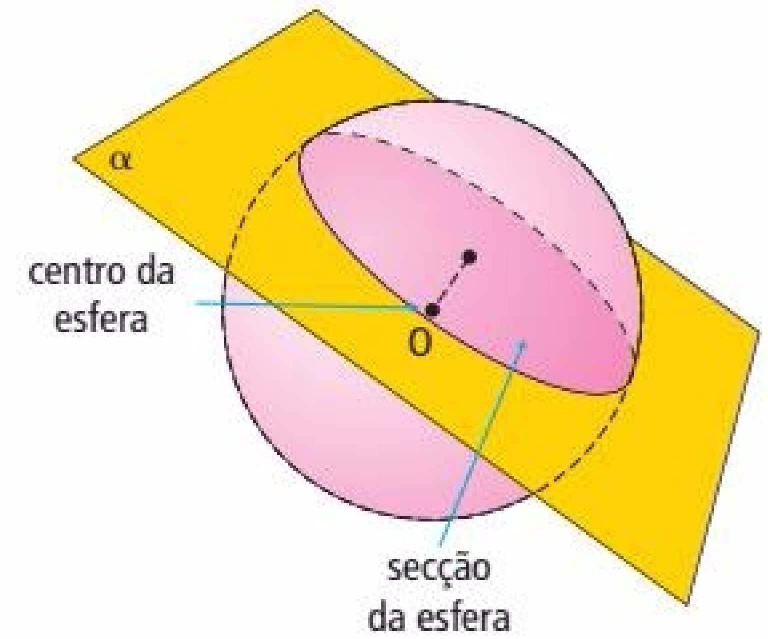
$$\frac{4\pi r^3}{3} \simeq \frac{1}{3}S \cdot r \Rightarrow S \simeq 4\pi r^2$$

Para *n* tendendo ao infinito, temos: $\boxed{S = 4\pi r^2}$

Secção de uma esfera

Ao seccionar uma esfera por um plano α, a intersecção entre o plano e a esfera é um círculo, como representado na figura ao lado.

Quando o plano passa pelo ponto *O* (centro da esfera), o círculo obtido é chamado de círculo máximo.

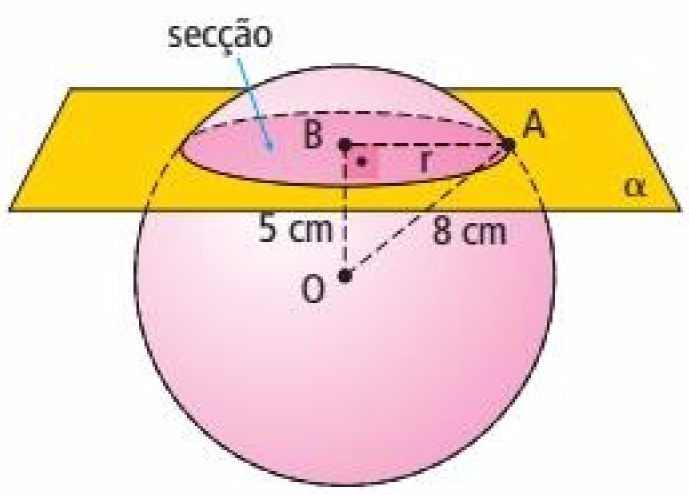


Exercícios resolvidos

13 Uma esfera de raio 8 cm é seccionada por um plano distante 5 cm de seu centro. Calcule o raio da secção.

Resolução

A intersecção do plano α com a esfera determina a secção indicada na figura.



Do triângulo retângulo OBA:

$8^2 = 5^2 + r^2 \Rightarrow 64 = 25 + r^2 \Rightarrow r^2 = 39$

Como r é positivo, obtemos $r = \sqrt{39}$ cm.

14 A professora Cristina produziu com seus alunos da pré-escola enfeites de Natal na forma de esferas, com 12 cm de diâmetro cada uma. Para pintar a superfície dessas esferas, ela dispõe de uma latinha de tinta, em que o fabricante afirma ser possível pintar até 5 m² de superfície com esse conteúdo.
Nessas condições, qual é o número máximo de enfeites que a turma de Cristina poderá pintar?

Resolução

Em cada esfera: $r = \dfrac{12}{2} \Rightarrow r = 6$ cm.

$S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6^2$

$S_{esfera} = 144\pi \text{ cm}^2$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos: $S_{esfera} = 452{,}16 \text{ cm}^2$.

Como é possível pintar até $5 \text{ m}^2 = 50\,000 \text{ cm}^2$, temos:

$\dfrac{50000}{452{,}16} \simeq 110{,}58$

Portanto, a turma da professora Cristina poderá pintar até 110 enfeites.

15 Uma esfera cuja superfície tem área igual a 676π cm² é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm de seu centro, determinando um círculo. Nessas condições, determine:

a) a medida do raio da esfera.

b) o volume da esfera.

Resolução

a) Cálculo da área da esfera:

$S = 676\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 676\pi \Rightarrow r^2 = 169 \Rightarrow r = 13$

Portanto, o raio da esfera é $r = 13$ cm.

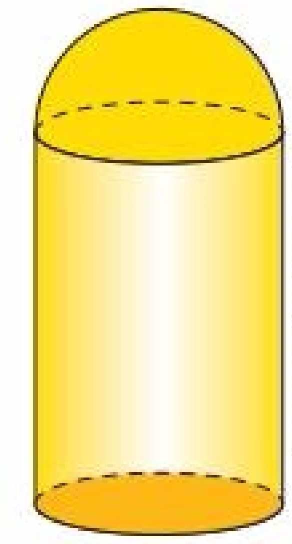
b) Cálculo do volume:

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 13^3 \Rightarrow V = \dfrac{8\,788}{3}\pi$, ou seja,

$V = \dfrac{8\,788}{3}\pi \text{ cm}^3$

Portanto, o volume da esfera é $V = \dfrac{8\,788}{3}\pi \text{ cm}^3$.

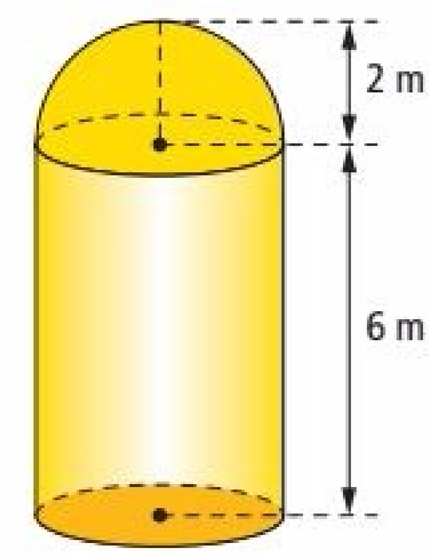
16 Um silo tem a forma de um cilindro circular reto (com fundo) encimado por uma semiesfera, como na figura. Determine o volume desse silo, sabendo que o raio do cilindro mede 2 m e que a altura do silo mede 8 m.



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

O volume do silo é igual à soma dos volumes de uma semiesfera de raio 2 m e de um cilindro de raio 2 m e altura 6 m.



$V_{semiesfera} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{semiesfera} = \dfrac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3}{2}$

$V_{semiesfera} = \dfrac{16\pi}{3} \text{ m}^3$

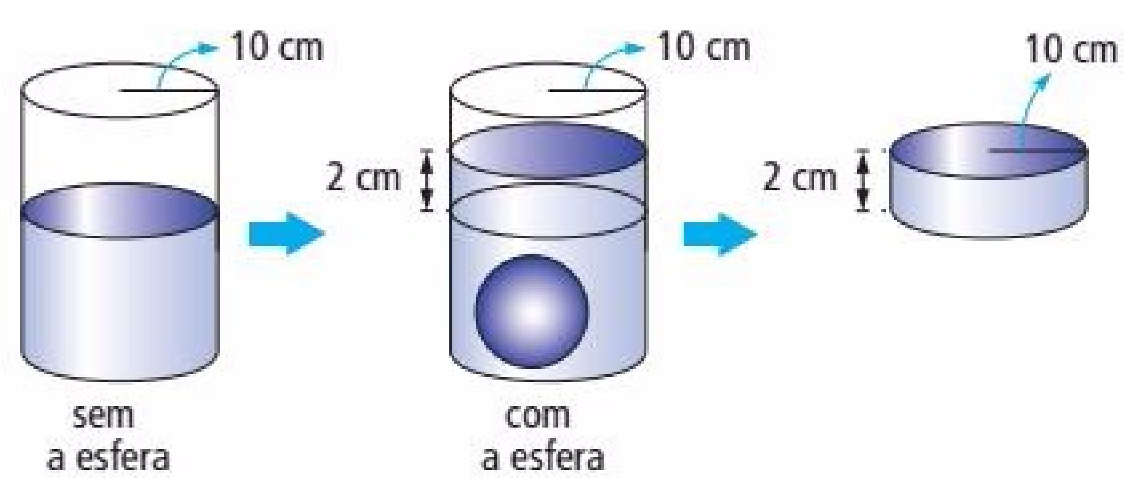
$V_{cilindro} = \pi r^2 h$

$V_{cilindro} = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi \text{ m}^3$

Logo: $V_{silo} = \dfrac{16\pi}{3} + 24\pi = \dfrac{88}{3}\pi \Rightarrow V_{silo} = \dfrac{88\pi}{3} \text{ m}^3$

17 Para medir o diâmetro de uma esfera maciça, João utilizou a seguinte estratégia: colocou certa quantidade de água em um cilindro de raio 10 cm e altura 20 cm. Em seguida, mergulhou a esfera na água, de modo que ela ficou totalmente submersa. Ele, então, verificou que a altura da água no cilindro subiu 2 cm. Assim, pôde determinar o diâmetro da esfera. Qual é esse diâmetro?

Resolução



A estratégia de João é correta, pois o volume da água deslocada (e conhecida, pois se trata de um cilindro) é equivalente ao volume da esfera.

O volume da água deslocada corresponde ao volume de um cilindro de raio 10 cm e altura 2 cm.

$V_{deslocado} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 2 = 200\pi \text{ cm}^3$

$V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = 200\pi \Rightarrow R = \sqrt[3]{150}$ cm

O diâmetro é igual a $2 \cdot \sqrt[3]{150}$ cm, aproximadamente 10,6 cm.

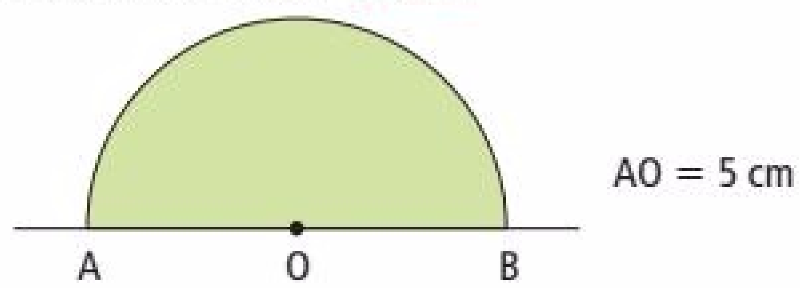
Exercícios propostos

Escreva no caderno

51. Sabendo que a área de uma superfície esférica é 8π cm², calcule o raio da esfera. $\sqrt{2}$ cm

52. Um plano α secciona uma esfera de raio 20 cm. A distância do centro da esfera ao plano α é 12 cm. Calcule a área da secção obtida. 256π cm²

53. Qual é a área total da superfície esférica gerada pela rotação completa do semicírculo da figura em torno de seu diâmetro AB? 100π cm²



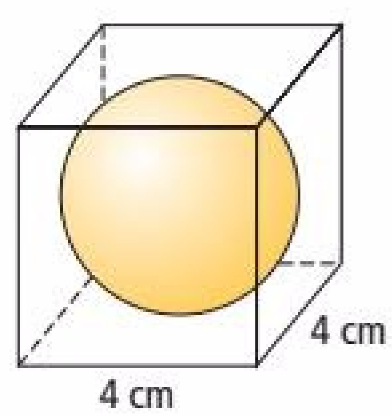
54. Supondo que a Terra seja uma esfera perfeita, e sabendo que seu raio é de aproximadamente 6 400 km, determine:

a) a área total da superfície terrestre (use $\pi = 3$); 491 520 000 km²

b) o valor percentual que ocupa o continente americano, cuja área é de 42 215 000 km², em relação à superfície total da Terra. 8,58%

Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos.

55. A figura mostra uma esfera inscrita em um cubo de aresta 4 cm (note que o plano de cada face do cubo é tangente à esfera). Calcule a área total da superfície esférica. 16π cm²

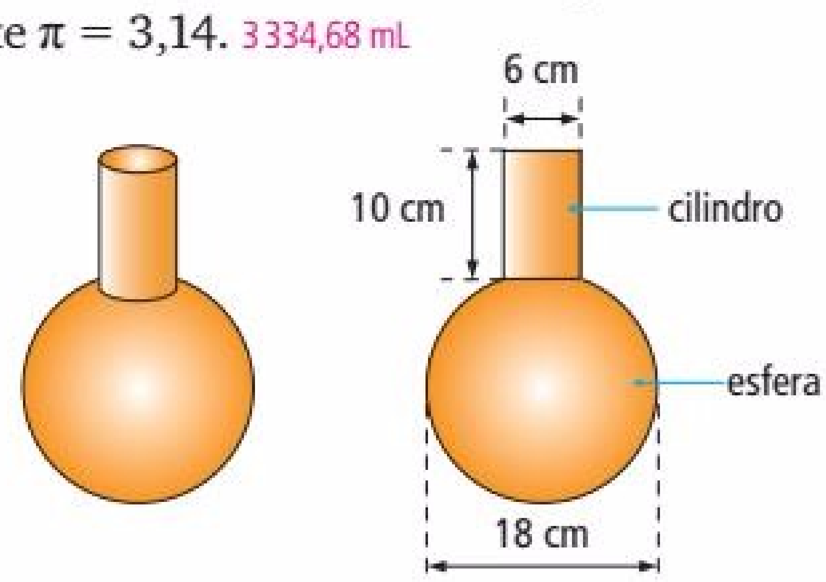


56. Um cubo de aresta m está inscrito em uma semiesfera de raio R de tal modo que os vértices de uma das faces pertencem ao plano equatorial da semiesfera e os demais vértices pertencem à superfície da semiesfera. Calcule m em função de R. $m = R\sqrt{\frac{2}{3}}$

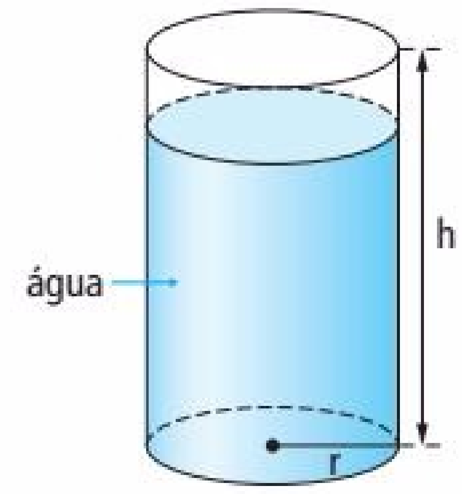
57. Uma esfera é seccionada por um plano α distante 12 cm do centro da esfera. O raio da secção obtida é 9 cm. Calcule o volume da esfera. 4500π cm³

58. Um reservatório em forma de uma semiesfera tem 18 m de diâmetro. Qual é o volume de água que cabe nesse reservatório? 486π m³

59. Calcule, aproximadamente, a capacidade em mililitros do recipiente indicado na figura.
Adote $\pi = 3{,}14$. 3 334,68 mL



60. (Unifesp-SP) Um recipiente, contendo água, tem a forma de um cilindro circular reto de altura h = 50 cm e raio r = 15 cm.
Este recipiente contém 1 litro de água a menos que sua capacidade total.

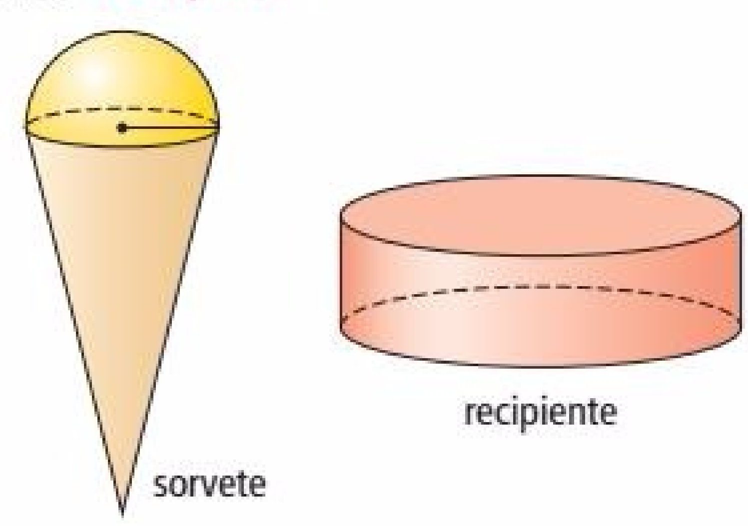


a) Calcule o volume de água contido no cilindro (use $\pi = 3{,}14$). 34,325 L

b) Qual deve ser o raio R de uma esfera de ferro que, introduzida no cilindro e totalmente submersa, faça transbordarem exatamente 2 litros de água? 8,95 cm

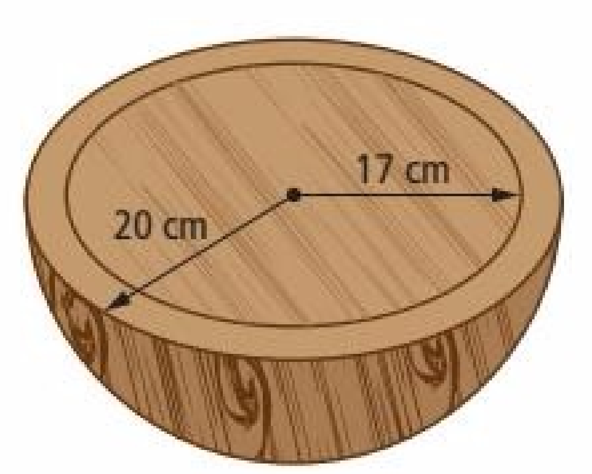
61. Uma esfera está inscrita em um cilindro equilátero de raio a. Qual é a razão entre o volume V_1 da esfera e o volume V_2 do cilindro? $\frac{2}{3}$

62. Um sorveteiro vende sorvetes em casquinhas de biscoito que têm a forma de cone de 3 cm de diâmetro e 6 cm de profundidade. As casquinhas são totalmente preenchidas de sorvete e, ainda nelas, é superposta meia bola de sorvete de mesmo diâmetro do cone.
Os recipientes onde são armazenados os sorvetes têm forma cilíndrica de 18 cm de diâmetro e 5 cm de profundidade. 60 casquinhas.

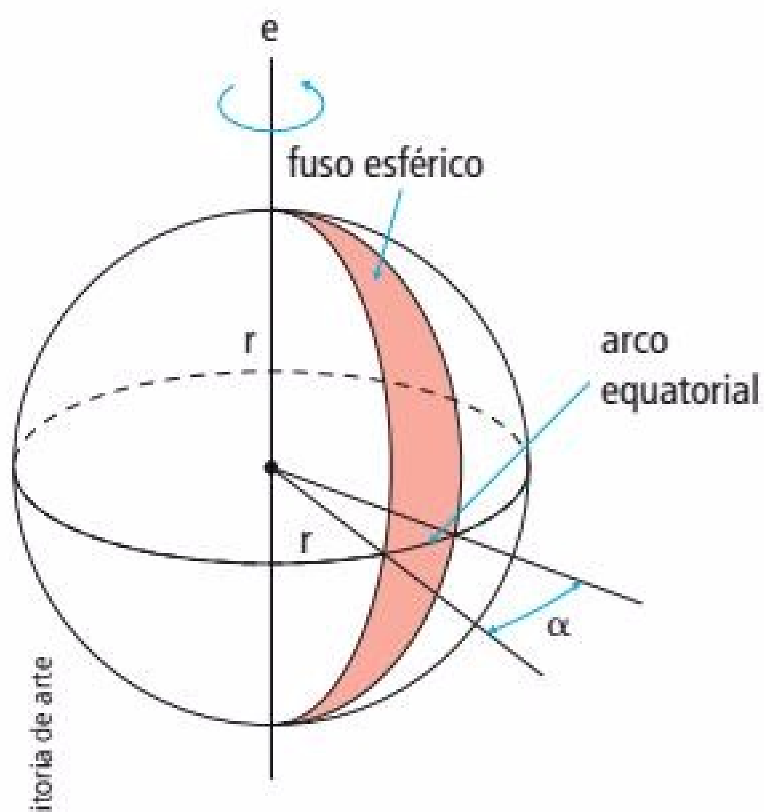


Determine o número de casquinhas que podem ser servidas com o sorvete armazenado em um recipiente cheio.

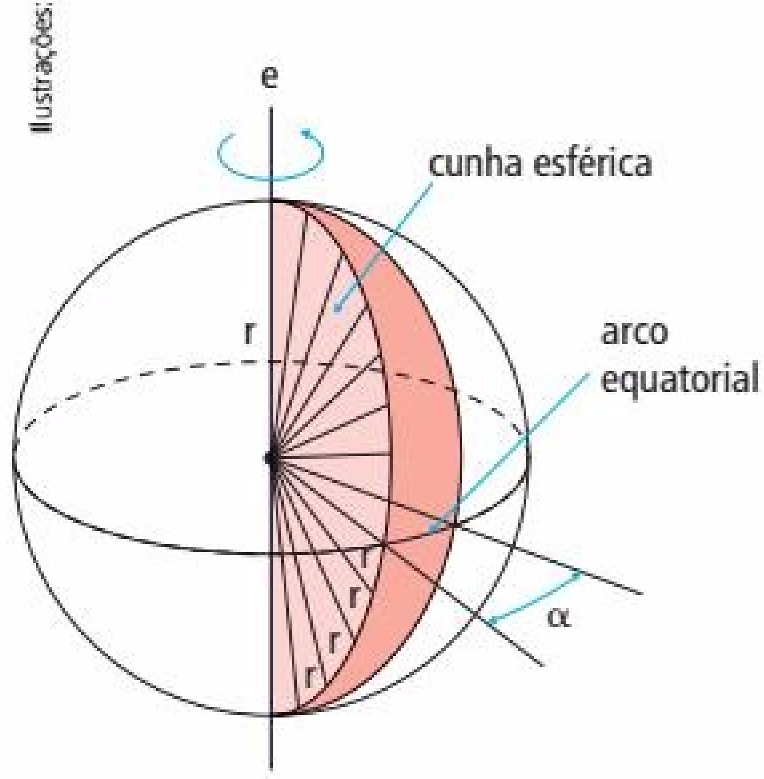
63. O recipiente da figura é feito de madeira com densidade 0,7 g/cm³ e tem a forma de uma semiesfera com raio externo de 20 cm e raio interno de 17 cm. Calcule a massa, em quilogramas, desse recipiente.
4,53 kg



Ilustrações: Editoria de arte



Ilustrações: Editoria de arte



Fuso esférico e cunha esférica

Chamamos de **fuso esférico** a superfície gerada pela rotação, por um ângulo de medida α ($0° < \alpha \leqslant 360°$), de uma semicircunferência de raio *r* em torno do eixo que contém seu diâmetro.

A área de um fuso esférico é proporcional à medida α do ângulo rotacionado e pode ser calculada pela regra de três:

Área do fuso (S_{fuso})		Medida do ângulo (em grau)
$4\pi r^2$	———	$360°$
S_{fuso}	———	α

$$\Rightarrow S_{fuso} = \frac{4\pi r^2 \cdot \alpha}{360°} \Rightarrow \boxed{S_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90°}}$$

Chamamos de **cunha esférica** o sólido gerado pela rotação, por um ângulo de medida α ($0° < \alpha \leqslant 360°$), de um semicírculo de raio *r* em torno do eixo que contém seu diâmetro.

O volume de uma cunha esférica é proporcional à medida α do ângulo rotacionado e pode ser calculado pela regra de três:

Volume da cunha		Medida do ângulo (em grau)
$\frac{4\pi r^3}{3}$	———	$360°$
V_{cunha}	———	α

$$\Rightarrow V_{cunha} = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \boxed{V_{cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270°}}$$

Assim como fizemos os cálculos utilizando a medida α do ângulo em grau, é possível realizar os mesmos cálculos com a medida α do ângulo em radiano.

Exercícios resolvidos

18 Calcule a área do fuso esférico e o volume da cunha esférica de 45° em uma esfera de raio 10 cm.

Resolução

A área do fuso esférico é dada por:

$$S_{fuso} = \frac{\pi r^3 \alpha}{90°} \Rightarrow S_{fuso} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 45°}{90°} \Rightarrow S_{fuso} = 50\pi \text{ cm}^2$$

O volume da cunha esférica é dado por:

$$V_{cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270°} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{\pi \cdot 10^3 \cdot 45°}{270°} = \frac{500\pi}{3}$$

Portanto, $V_{cunha} = \frac{500\pi}{3}$ cm³.

19 Determine a área de um fuso esférico de 30°, contido em uma superfície esférica de raio 4 cm.

Resolução

Como α é dado em graus, temos:

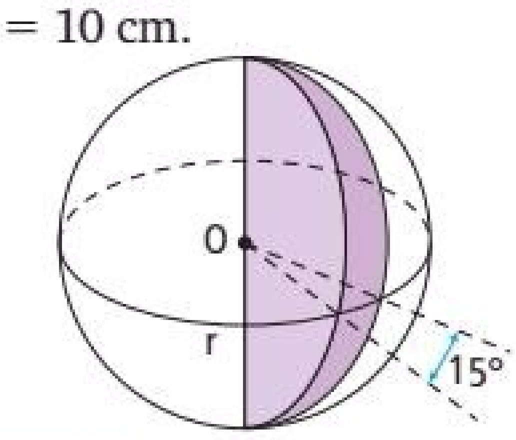
Área		Ângulo
$4\pi r^2$	———	$360°$
S_{fuso}	———	$30°$

$$\frac{360°}{30°} = \frac{4\pi r^2}{S_{fuso}} \Rightarrow S_{fuso} = \frac{\pi r^2}{3}$$

Substituindo r = 4 cm:

$$S_{fuso} = \frac{\pi \cdot 4^2}{3} = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow S_{fuso} = \frac{16\pi}{3} \text{ cm}^2$$

20 Qual é o volume da cunha esférica mostrada na figura? Dado: r = 10 cm.



Resolução

O volume da cunha pode ser obtido pela regra de três:

Volume		Ângulo
$\frac{4}{3}\pi r^3$	———	$360°$
V_{cunha}	———	$15°$

$$\frac{360°}{15°} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{V_{cunha}} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{\pi r^3}{18}$$

Substituindo r = 10 cm:

$$V_{cunha} = \frac{\pi \cdot 10^3}{18} = \frac{500\pi}{9} \Rightarrow V_{cunha} = \frac{500\pi}{9} \text{ cm}^3$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

64. Determine a área de um fuso esférico de 45°, contido numa circunferência de raio 8 cm. 32π cm²

65. Calcule o volume de uma cunha esférica de raio 6 cm cujo ângulo mede:

a) 60° 48π cm³

b) $\frac{\pi}{4}$ rad 36π cm³

66. A área de um fuso esférico mede 25π cm². Sabendo que o ângulo do fuso mede $\frac{\pi}{2}$ rad, calcule o raio da superfície esférica. 5 cm

67. Uma cunha esférica de 2 cm de raio tem volume igual a $\frac{16}{3}$ cm³. Calcule seu ângulo. 1 rad

68. (PUC-SP) A área de um fuso esférico cujo ângulo mede $\frac{\pi}{3}$ rad, em uma esfera de 12 cm de raio, é:

x a) 96π cm²

b) 69π cm²

c) 72π cm²

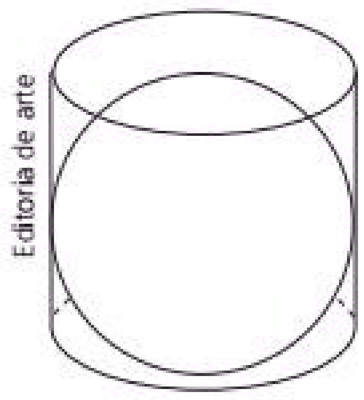
d) 64π cm²

e) n.r.a.

História da Matemática

Arquimedes, a esfera e o cilindro

[...] Plutarco, um escritor grego do 1º século d.C., é autor de um livro chamado "As Vidas dos Homens Ilustres" (1). [...] Em particular, conta Plutarco que de todas as descobertas que Arquimedes fez, a que o geômetra mais apreciava era a relação de áreas e volumes de um cilindro e da esfera nele contida ((1), p. 276). Mais precisamente, consideremos uma esfera de raio *R*, inscrita num cilindro circular reto, de altura 2R e cuja base tem raio *R* (Fig. 1).



$$\frac{V_E}{V_C} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{2}{3}$$

Figura I. "... entre o muito que inventou parece-me que o que mais apreciava era a demonstração da proporção que há entre o cilindro e a esfera nele contida, pelo que pediu a seus parentes que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera com uma inscrição da proporção pela qual o que contém excede o conteúdo" (Plutarco). Cícero quando servia na Sicília como questor, encontrou uma lápide com uma esfera inscrita num cilindro, pelo que julgou haver descoberto o túmulo de Arquimedes. Cuidou então de restaurá-lo, já que ele se encontrava totalmente abandonado.

Então o volume do cilindro é $\frac{3}{2}$ do volume da esfera, e a área total do cilindro também é $\frac{3}{2}$ da área da esfera. Ainda segundo Plutarco, Arquimedes teria pedido a seus parentes e amigos que quando morresse mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera, com uma inscrição da proporção acima referida. Cícero, quando exercia funções de magistrado romano na Sicília, encontrou uma lápide contendo uma esfera inscrita num cilindro. Como ele mesmo conta, julgou ter achado o túmulo de Arquimedes e cuidou de restaurá-lo. Segundo o autor Howard Eves ((2), p. 89), há pouco mais de vinte anos, em 1965, durante uma escavação para construir um hotel em Siracusa, uma escavadeira deu com uma pedra com a mesma figura antiga de um cilindro contendo uma esfera. Assim, o túmulo de Arquimedes teria sido novamente encontrado nos tempos modernos. Mas desta vez faltou alguém com a clarividência de um Cícero e, ao que parece, esse túmulo está agora definitivamente perdido. [...]

Referências

(1) Plutarco: **As Vidas dos Homens Ilustres**, vol. 3, Editora das Américas, São Paulo, pp. 268 a 280. Edição em inglês na coleção "Great Books of the Western World" da "Enciclopaedia Britannica Inc.", onde figura como vol. 14, pp. 252 a 255.

(2) Howard Eves: **Great Moments in Mathematics before 1650**, Mathematical Association of America, 1980.

Fonte: ÁVILA, Geraldo. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática** (RPM), São Paulo, n. 10. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/10/3.htm>. Acesso em: 27 abr. 2016.

2. $V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi$ cm³

$V_C = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi$ cm³

$A_E = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 100\pi$ cm²

$A_C = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10 = 150\pi$ cm²

Assim: $\frac{V_E}{V_C} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{2}{3}$.

Atividades

Escreva no caderno

1. Segundo o texto, qual o pedido feito por Arquimedes aos seus familiares com relação ao que gostaria que fosse colocado em sua sepultura?

2. Verifique a relação descoberta por Arquimedes, a partir de uma esfera de raio 5 cm e um cilindro reto de 10 cm de altura e base com raio 5 cm.

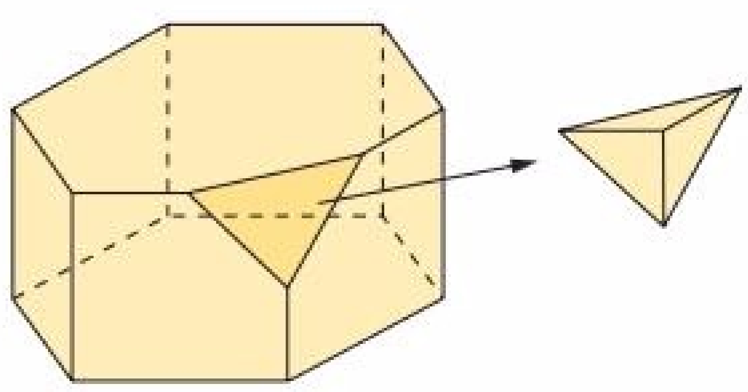
1. Ele gostaria que fosse colocado sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera, com uma inscrição da proporção: $\frac{V_E}{V_C} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{2}{3}$.

1. (UnB-DF) Qual o número de faces de um poliedro regular com 20 vértices e 30 arestas? 12 faces.

2. (UFTM-MG) Um poliedro convexo, com 32 arestas e 14 vértices, possui apenas faces triangulares e quadrangulares. Sendo *q* o número de faces quadrangulares e *t* o número de faces triangulares, então os valores de *q* e *t* são, respectivamente:

   a) $q = 6$ e $t = 14$
   b) $q = 16$ e $t = 4$
   c) $q = 4$ e $t = 14$
   d) $q = 14$ e $t = 4$
   x e) $q = 4$ e $t = 16$

3. (Insper-SP) De cada vértice de um prisma hexagonal regular foi retirado um tetraedro, como exemplificado para um dos vértices do prisma desenhado a seguir.

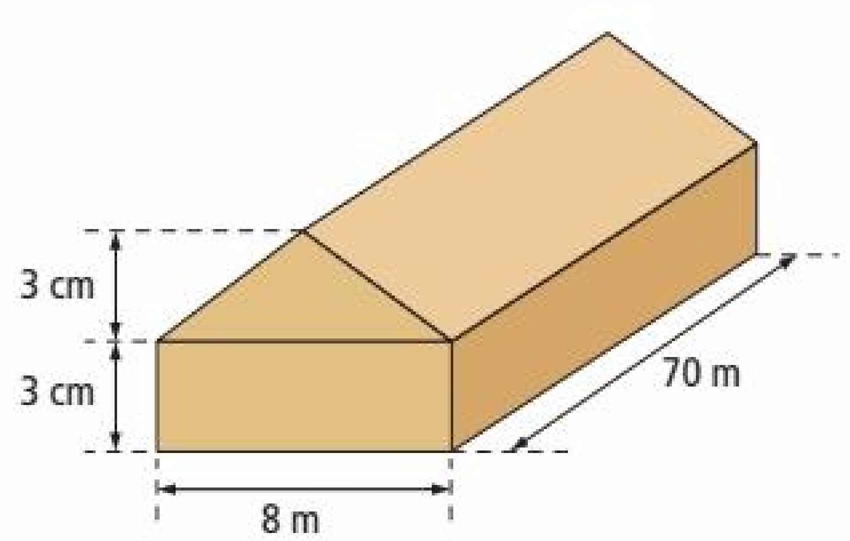


Ilustrações: Editoria de arte

   O plano que definiu cada corte feito para retirar os tetraedros passa pelos pontos médios das três arestas que concorrem num mesmo vértice do prisma. O número de faces do poliedro obtido depois de terem sido retirados todos os tetraedros é:

   a) 24
   x b) 20
   c) 18
   d) 16
   e) 12

4. (UFRN) Atualmente, uma das técnicas muito utilizadas no cultivo de hortaliças é a produção em estufas (plasticultura), pois, entre outros fatores, possibilita a proteção contra chuvas, frio, insetos e um aumento da produtividade, que pode atingir até 200%, como no exemplo da abóbora italiana.



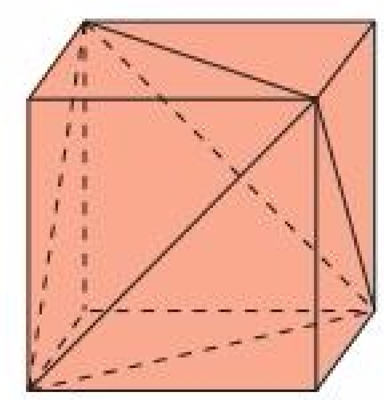
   Considerando uma estufa como a representada acima, em que o triângulo da fachada é isósceles, calcule a área de plástico utilizado para revesti-la totalmente (exceto o piso). 1 192 m²

5. (Cefet-GO) Uma caixa-d'água tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões internas são 2,4 m de comprimento; 1,5 m de largura e 1,0 m de altura. Num determinado momento do dia, a caixa está com apenas $\frac{3}{5}$ de sua capacidade. A quantidade de litros de água na caixa é de:

   a) 2 140
   b) 2 145
   c) 2 150
   x d) 2 160
   e) 2 155

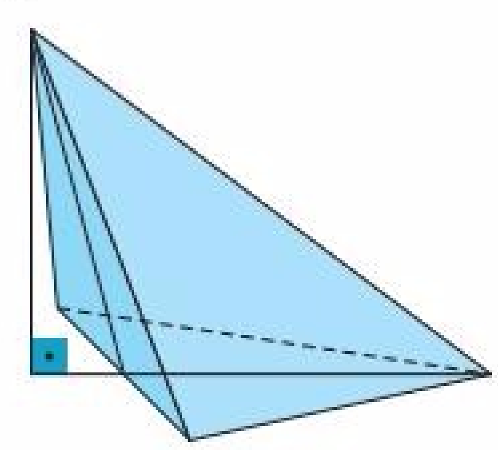
6. O volume de um paralelepípedo retângulo é 648 m³. Calcule a área total desse paralelepípedo, sabendo que suas dimensões são proporcionais aos números 4, 3 e 2. $S_t = 468$ m²

7. (Unifesp-SP) Quatro dos oito vértices de um cubo de aresta unitária são vértices de um tetraedro regular. As arestas do tetraedro são diagonais das faces do cubo, conforme mostra a figura.



   a) Obtenha a altura do tetraedro e verifique que ela é igual a dois terços da diagonal do cubo. $h = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$
   b) Obtenha a razão entre o volume do cubo e o volume do tetraedro. $\frac{V_c}{V_T} = 3$

8. (Uespi-PI) Um tetraedro tem cinco arestas medindo 6 cm, e a sexta aresta mede $6\sqrt{2}$ cm. Qual o volume do tetraedro?

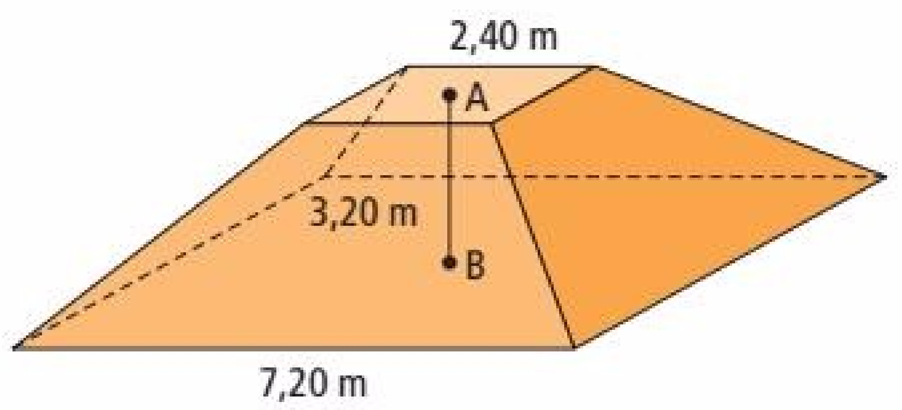


   a) 28 cm³
   b) $19\sqrt{2}$ cm³
   c) 26 cm³
   d) 27 cm³
   x e) $18\sqrt{2}$ cm³

9. (UFF-RJ) A grande pirâmide de Queóps, antiga construção localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada, com 137 m de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles cuja altura relativa à base mede 179 m. A área da base dessa pirâmide, em metro quadrado, é:

   a) 13 272
   b) 26 544
   c) 39 816
   x d) 53 088
   e) 79 432

10. (EsPCEx-SP) Um reservatório em forma de tronco de pirâmide regular de base quadrada e dimensões indicadas na figura deverá ter suas paredes laterais externas cobertas por uma tinta impermeável, cujo rendimento é de 11 m^2 por galão.



Desenho fora de escala. Os pontos *A* e *B* representam os centros das bases do tronco da pirâmide.

O número mínimo de galões que devem ser adquiridos para tal operação é:

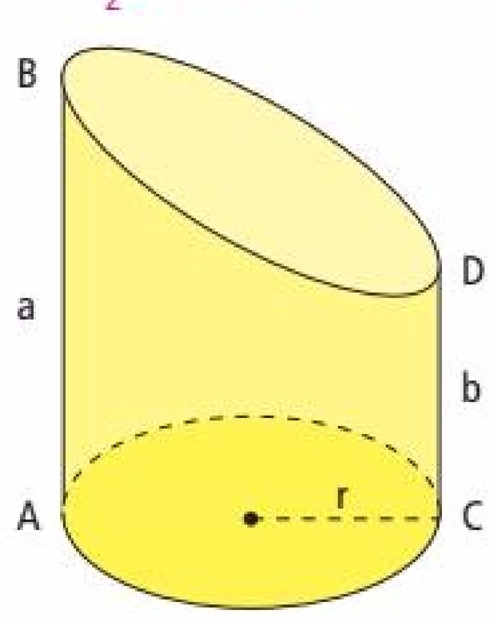
a) 6 c) 9 e) 11
X b) 7 d) 10

11. (Enem/MEC) O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1 : 100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3 cm, 1 cm e 2 cm.

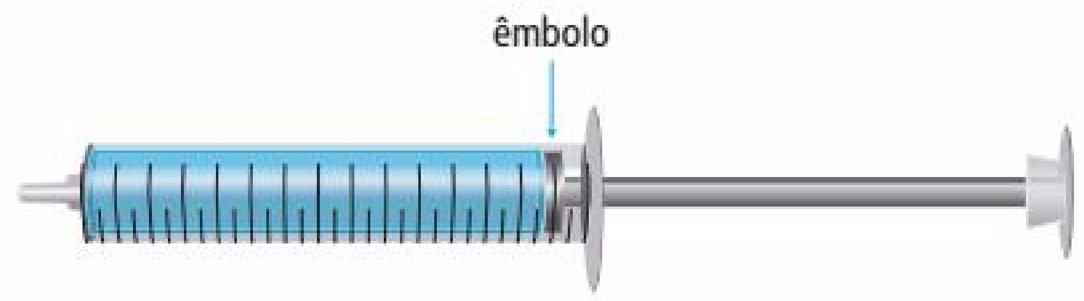
O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será:

a) 6 c) 6 000 X e) 6 000 000
b) 600 d) 60 000

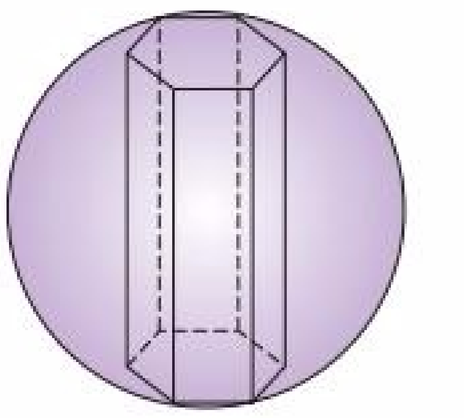
12. (Unicamp-SP) Um cilindro circular reto é cortado por um plano não paralelo à sua base, resultando no sólido ilustrado na figura. Calcule o volume desse sólido em termos do raio da base *r*, da altura máxima AB = a e da altura mínima CD = b. Justifique seu raciocínio. $\frac{1}{2}\pi r^2(a + b)$



13. (UFG-GO) A figura a seguir representa uma seringa no formato de um cilindro circular reto, cujo êmbolo tem 20 mm de diâmetro. Esta seringa está completamente cheia de um medicamento e é usada para injetar doses de 6 mL desse medicamento. Com base nessas informações, determine quantos milímetros o êmbolo se desloca no interior da seringa ao ser injetada uma dose. (Use $\pi = 3{,}14$.) Aproximadamente 19,1 mm.

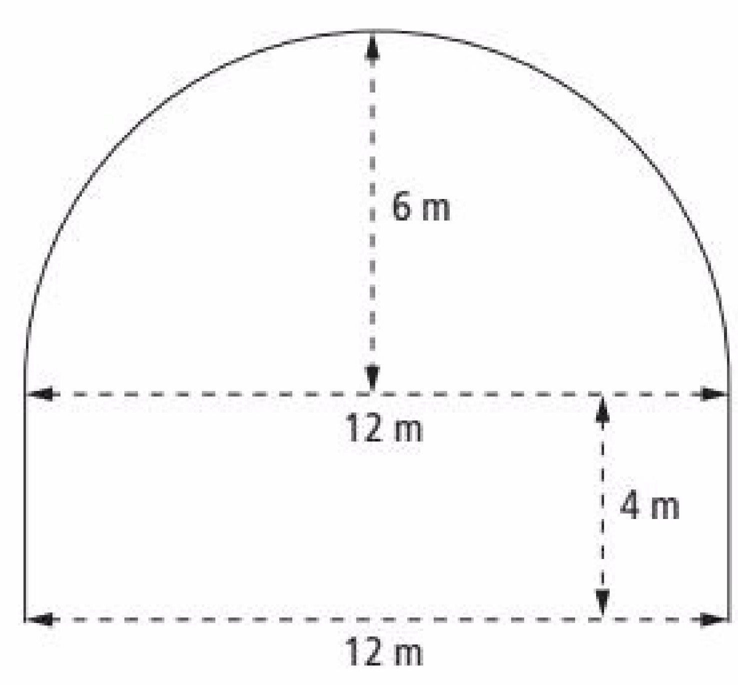


14. (Uespi-PI) Um prisma hexagonal regular, com lado da base medindo 3 cm e altura 8 cm, está inscrito em uma esfera, como ilustrado a seguir.
Qual a área da superfície da esfera?



a) 92π cm^2 c) 96π cm^2 X e) 100π cm^2
b) 94π cm^2 d) 98π cm^2

15. (UFPB) Em uma cidade, há um túnel reto de um quilômetro de comprimento, cujas seções transversais, perpendiculares ao túnel, são todas congruentes e têm o formato de um retângulo de 12 metros de largura por 4 metros de altura, com um semicírculo em cima, cujo raio mede 6 metros, conforme a figura abaixo.

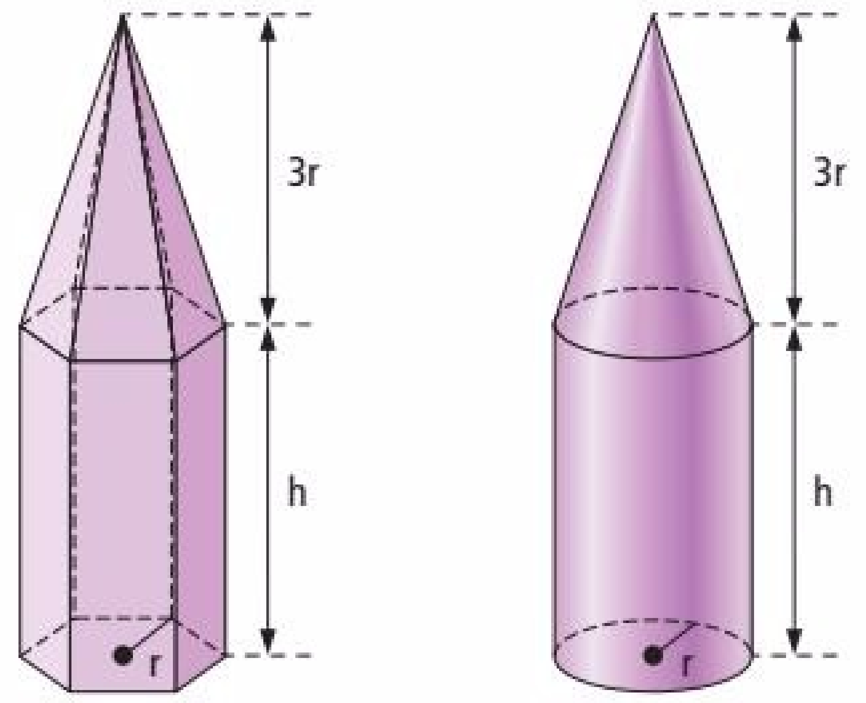


Ilustrações: Editoria de arte

Para pintar a parte interna desse túnel (o chão não será pintado) serão utilizados galões de tinta, sendo cada galão suficiente para pintar até 20 metros quadrados. Com base nessas informações, é correto afirmar que, para pintar a parte interna do túnel, o número mínimo necessário de galões de tinta é de: Use $\pi = 3{,}14$.

a) 1 926 c) 1 634 X e) 1 342
b) 1 822 d) 1 488

16. (Epcar-MG) Uma fábrica de brinquedos usa, para embalar um jogo de montar, latas com formatos de prisma regular e tampa de pirâmide regular como em (1). A fábrica decide mudar a embalagem, passando a usar latas cilíndricas do mesmo material com tampas cônicas como em (2).



(1) (2)

Sabendo que as tampas são ocas e com apoio apenas na superfície, pode-se dizer que a razão entre os volumes (1) e (2) é

a) $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3r\pi}$ x c) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ d) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2\pi}$

17. (Enem/MEC) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

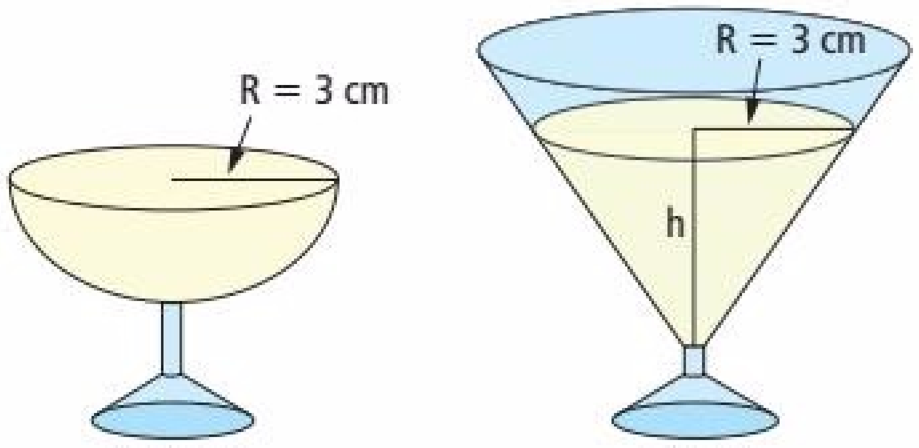


Figura 1 Figura 2

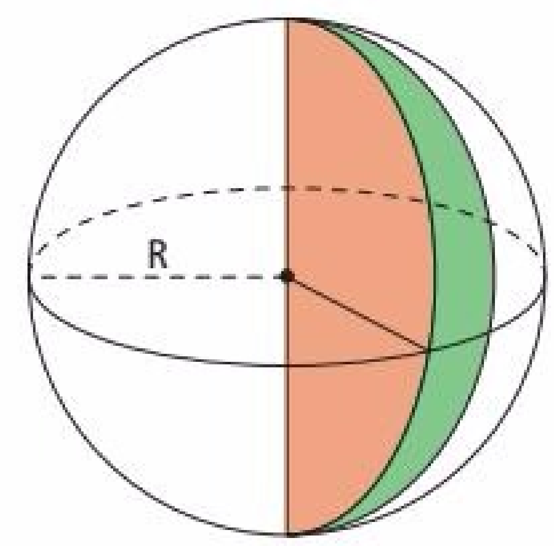
Considere:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ e } V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33 c) 12,00 e) 113,04
x b) 6,00 d) 56,52

18. (Vunesp-SP) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida *R* cm foi cortada em 12 fatias iguais, onde cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura abaixo. Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio *R* cm é $4\pi R^2$ cm², determine, em função de π e de *R*:

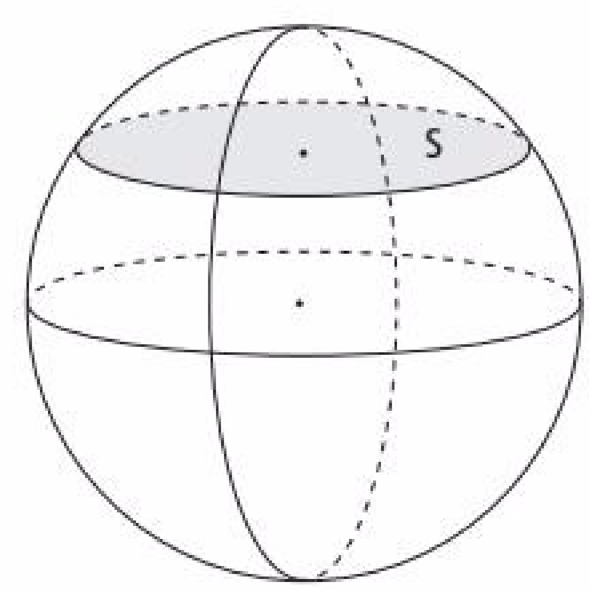


Ilustrações: Editoria de arte

a) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico); $A_F = \dfrac{\pi R^2}{3}$

b) quantos cm² de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia. $A_c = \dfrac{4\pi R^2}{3}$

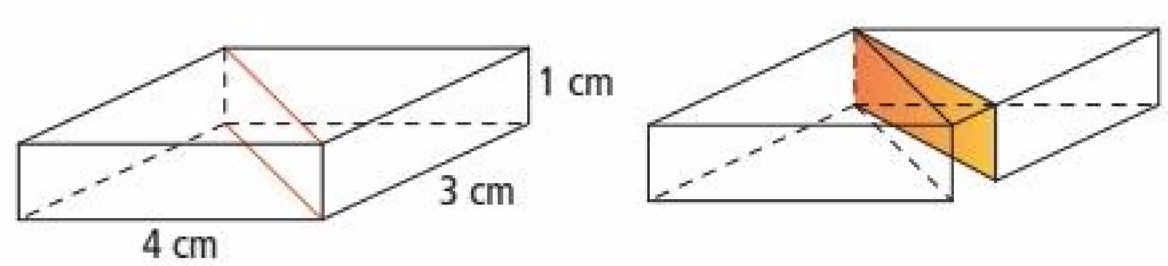
19. (Udesc-SC) Seja *S* uma seção de uma esfera determinada pela interseção com um plano, conforme a figura.



Se *S* está a 3 cm do centro da esfera e tem área igual a 16π cm², então o volume desta esfera é:

a) 36π cm³ c) 100π cm³ x e) $\dfrac{500\pi}{3}$ cm³
b) $\dfrac{256\pi}{3}$ cm³ d) 16π cm³

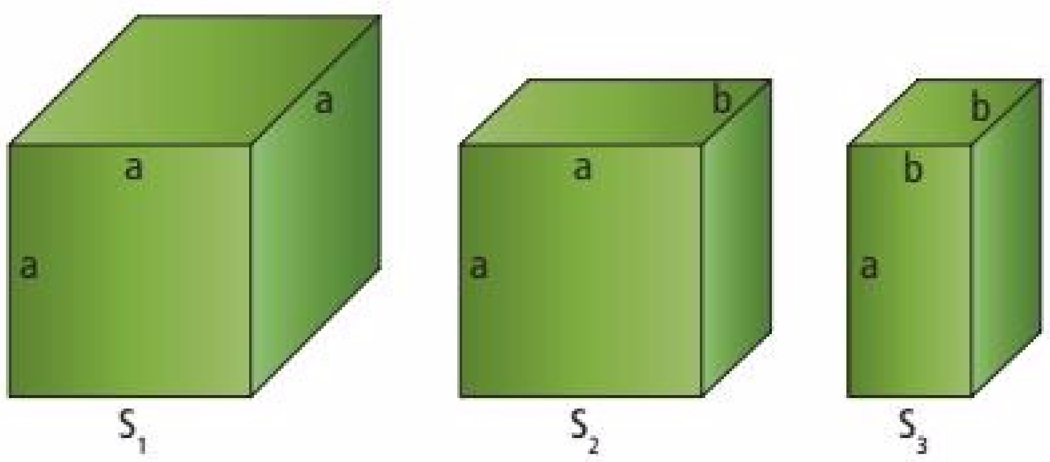
20. (Unesp-SP) Um paralelepípedo reto-retângulo foi dividido em dois prismas por um plano que contém as diagonais de duas faces opostas, como indica a figura.



Comparando-se o total de tinta necessária para pintar as faces externas do paralelepípedo antes da divisão com o total necessário para pintar as faces externas dos dois prismas obtidos após a divisão, houve um aumento aproximado de

a) 42%. c) 32%. e) 28%.
b) 36%. x d) 26%.

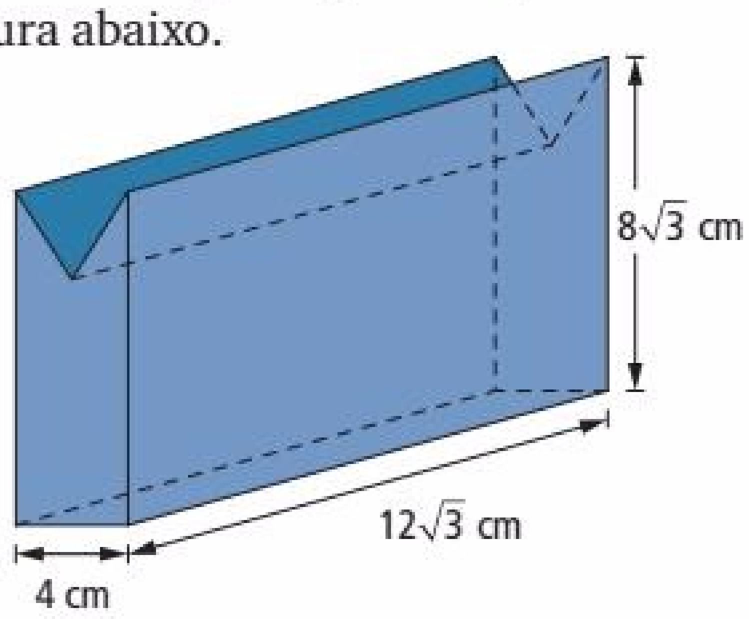
21. (Unicamp-SP) Considere os três sólidos exibidos na figura abaixo, um cubo e dois paralelepípedos retângulos, em que os comprimentos das arestas, *a* e *b*, são tais que $a > b > 0$.



a) Determine a razão $r = \frac{a}{b}$ para a qual o volume de S_1 é igual à soma dos volumes de S_2 e S_3. $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) Sabendo que a soma dos comprimentos de todas as arestas dos três sólidos é igual a 60 cm, determine a soma das áreas de superfície dos três sólidos. 50 cm²

22. (PUC-SP) Para confeccionar uma peça, um artesão fez um corte em um bloco de madeira maciça, gerando uma canaleta com a forma de um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero, conforme é mostrado na figura abaixo.



Considerando que a densidade da madeira é igual a 0,87 g/cm³, então, se *M* é a massa da peça confeccionada, em quilogramas, é verdade que

a) $M > 2,0$ c) $1,0 < M < 1,5$
b) $1,5 < M < 2,0$ x d) $M < 1,0$

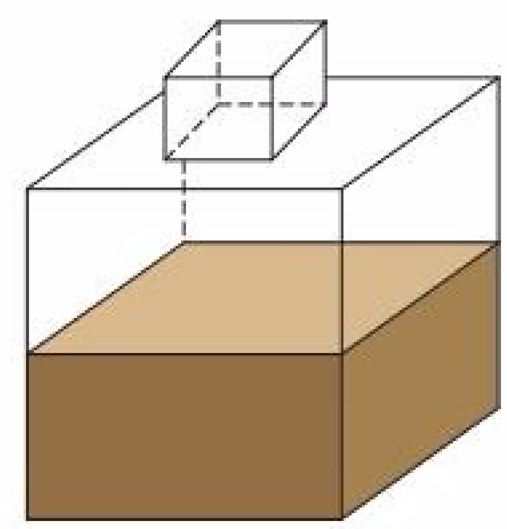
23. (Enem/MEC) Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm³ e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm³, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

a) 450. x c) 600. e) 1 000.
b) 500. d) 750.

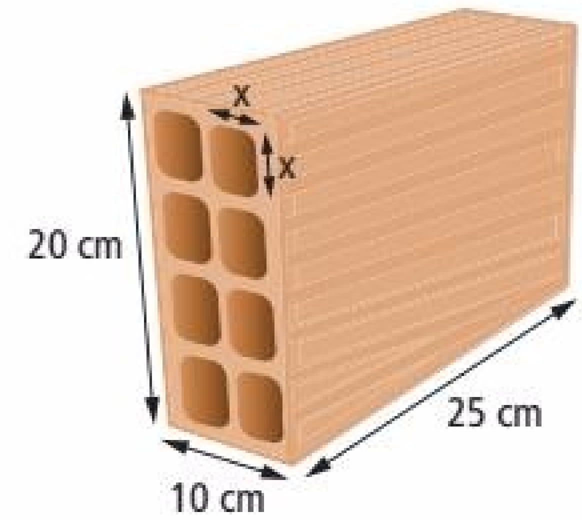
24. (Enem/MEC) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8 c) 16 e) 24
x b) 10 d) 18

25. (Ufla-MG) Considere um tijolo baiano com a forma de um paralelepípedo, de dimensões 10 cm × 25 cm × 20 cm, vazado com 8 furos iguais, todos na forma de paralelepípedos com bases quadradas, conforme a figura. Se o espaço vazio representa 36% do volume total do tijolo, o valor *x* do lado da base dos furos é:

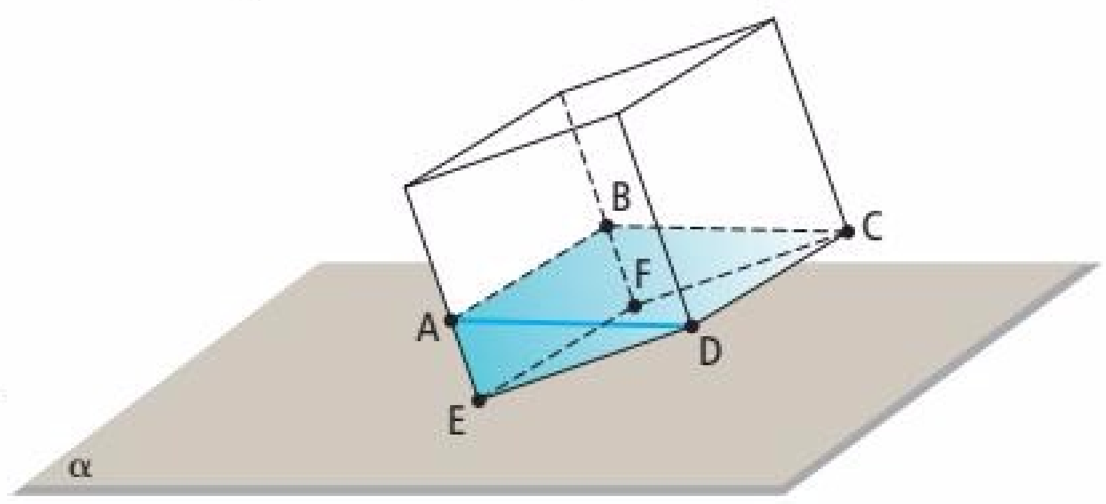


Ilustrações: Editoria de arte

x a) 3 cm c) 4,5 cm
b) 3,2 cm d) 5,5 cm

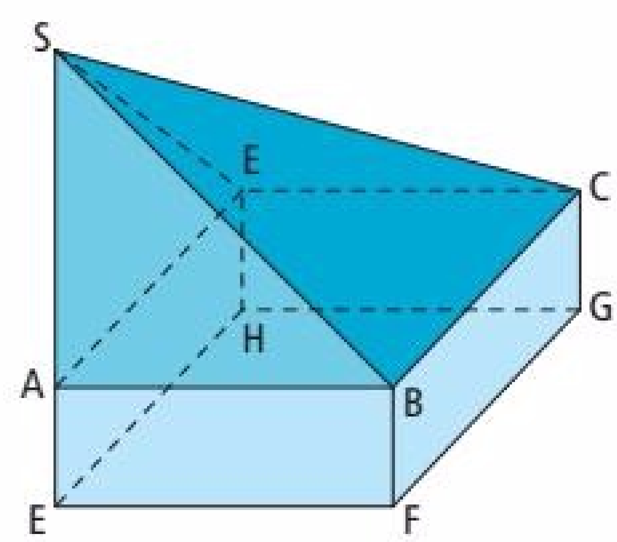
26. (UERJ) Um cubo de aresta EF medindo 8 dm contém água e está apoiado sobre um plano α de modo que apenas a aresta EF esteja contida nesse plano. A figura abaixo representa o cubo com a água.

Ilustrações: Editoria de arte



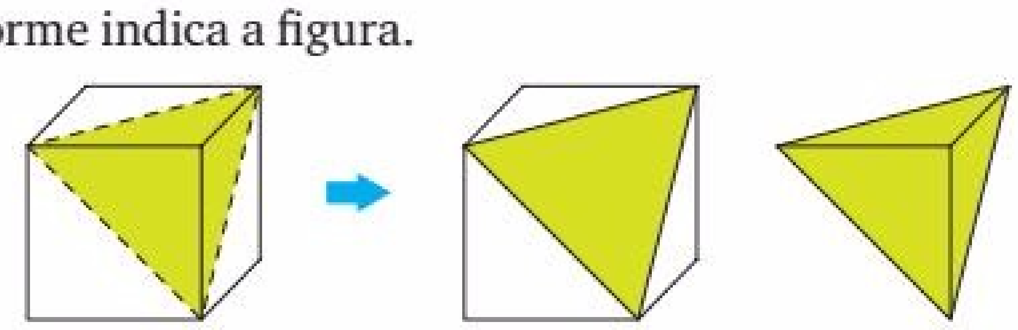
Considere que a superfície livre do líquido no interior do cubo seja um retângulo ABCD com área igual a $32\sqrt{5}$ dm². Determine o volume total, em dm³, de água contida nesse cubo. 128 dm³

27. (Fuvest-SP) O sólido da figura é formado pela pirâmide de SABCD sobre o paralelepípedo reto ABCDEFGH. Sabe-se que S pertence à reta determinada por A e E e que AE = 2 cm, AD = 4 cm e AB = 5 cm. A medida do segmento $\overline{SA}$ que faz com que o volume do sólido seja igual a $\frac{4}{3}$ do volume da pirâmide SEFGH é:



a) 2 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm
x e) 10 cm

28. (UFPR) Um cubo de aresta 4 cm foi seccionado por um plano, originando dois sólidos geométricos conforme indica a figura.



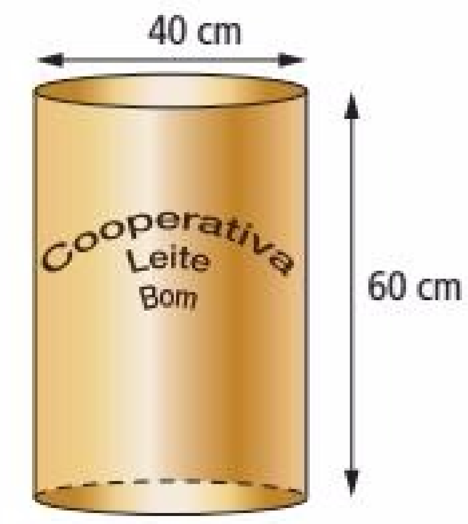
a) Calcule o volume de cada um dos dois sólidos obtidos por essa secção. $V_P = \frac{32}{3}$ cm³; $V_S = \frac{160}{3}$ cm³

b) Calcule a área total da superfície de cada um dos sólidos obtidos por essa secção. $A_P = \left(24 + 8\sqrt{3}\right)$ cm²; $A_T = \left(72 + 8\sqrt{3}\right)$ cm²

29. (UFU-MG) O rendimento teórico de uma tinta é a quantidade necessária para pintar um metro quadrado de área e serve apenas para determinar o custo por metro quadrado da tinta. O rendimento real de uma tinta é calculado no final do trabalho executado que leva em conta o número de demãos (números de camadas de tintas necessárias para obter o resultado esperado) e as perdas decorrentes da preparação e do método de aplicação. Admita que as perdas usando os diferentes métodos de pintura são estimadas em: pincel 10%, rolo 20% e pistola pneumática 25%. Um pintor vai pintar toda a superfície de um tanque de combustível na forma de um cilindro circular de 10 m de altura e raio da base igual a 2 m. Sabe-se que a tinta a ser usada tem rendimento teórico de 20 m² por litro e que são necessárias duas demãos.

Determine a quantidade, em litros, de tintas necessárias para pintar esse tanque utilizando a pistola pneumática. Dado: Use $\pi = 3{,}14$. 20,096 L

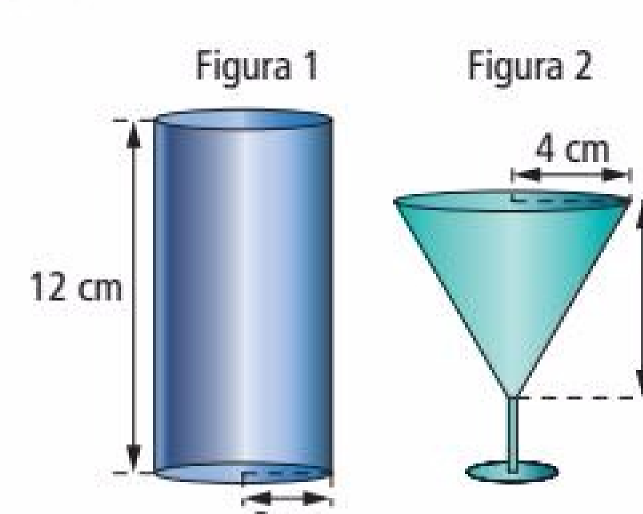
30. (UFVJM-MG) Um fazendeiro do interior de Minas Gerais vende todo o leite produzido em sua propriedade para a Cooperativa Leite Bom. Sua fazenda produz, em média, 360 litros por dia e para fazer o transporte deste leite, a Cooperativa doa ao produtor galões no formato cilíndrico com 40 cm de diâmetro e 60 cm de altura.



Considerando $\pi = 3$, e $1\ L = 1\,000$ cm³, para transportar 360 litros de leite, o fazendeiro precisa de:

a) 3 galões.
b) 4 galões.
x c) 5 galões.
d) 6 galões.

31. (Famema-SP) Uma lata de suco com o formato de um cilindro circular reto com 12 cm de altura e 3 cm de raio da base está completamente cheia, conforme mostra a figura 1. Parte desse suco será colocado em uma taça na forma de um cone circular reto com 9 cm de altura e raio da boca igual a 4 cm, conforme mostra a figura 2.



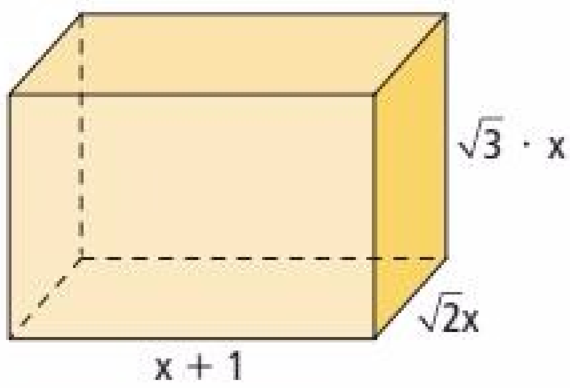
Fora de escala

Após encher completamente a taça, o suco restante dentro da lata terá uma altura aproximada de

a) 6,0 cm.
x b) 6,6 cm.
c) 6,8 cm.
d) 6,4 cm.
e) 6,2 cm

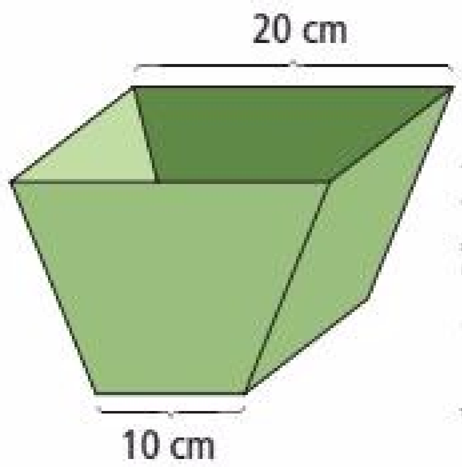
32. (UFSC) Em relação às proposições abaixo, é CORRETO afirmar que:

01. No paralelepípedo abaixo, a medida da sua diagonal é expressa por uma função quadrática.



x 02. Se um reservatório de água tem a forma de cilindro equilátero e seu diâmetro interno mede 4 m, então, considerando $\pi = 3{,}14$, a capacidade desse reservatório é de 50 240 L.

x 04. Um pequeno cesto de lixo tem a forma de tronco de pirâmide e suas dimensões internas estão indicadas na figura. Se a altura do cesto é 15 cm, então seu volume é 3 500 cm³.



Ilustrações: Editoria de arte

08. Um pote para guardar alimentos tem a forma de um prisma reto de base triangular. Sua base é um triângulo retângulo e suas dimensões formam uma progressão aritmética de razão 5 cm. Se sua altura mede 10 cm, então a área total desse prisma é 750 cm².

16. Um filtro de café tem a forma de um cone cuja medida interna de seu diâmetro é 20 cm. Se a medida interna da geratriz é 26 cm, então sua capacidade é menor que 2 L.

33. (Enem/MEC) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

Use 3 como valor aproximado para π.

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

a) 168.
b) 304.
c) 306.
d) 378.
x e) 514.

Retomando e pesquisando

Na abertura da unidade, conhecemos um pouco a respeito da cidade de Chichén Itzá e do templo Kukulcán. Como vimos, esse templo também é chamado de pirâmide de Kukulcán, apesar de não ser propriamente uma pirâmide.

Além dessa, existem outras construções feitas por antigas civilizações que lembram pirâmides. Veja exemplo ao lado.

Não se sabe ao certo o motivo pelo qual tantas civilizações antigas de diferentes origens e localidades fizeram esses tipos de construções. No entanto, é fato que, independente da época de construção e da tecnologia utilizada, esses povos conseguiram erguer impressionantes edifícios.

Utilize essas informações e seus conhecimentos a respeito dos conteúdos dessa unidade para realizar as atividades a seguir.

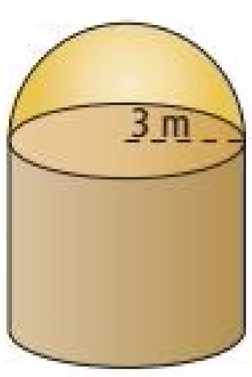
Globe Stock/Alamy/Latinstock

Templo I de Tikal, também conhecido como templo do Grande Jaguar, um dos monumentos construídos pelos maias em Péten, na Guatemala. O Parque Nacional do Tikal foi considerado patrimônio cultural e natural da humanidade em 1979 pela UNESCO. Fotografia de 2009.

Escreva no caderno

1. Aproximando o templo Kukulcán para um tronco de pirâmide de base quadrada, determine seu volume. Para isso, considere que o lado do quadrado da base mede 55,3 m e que o lado da base do topo da pirâmide mede 5,3 m. 33 792,7 m³

2. Suponha que uma construção seja composta por uma semiesfera de raio 3 m sobre um cilindro equilátero, como mostra o esquema a seguir. Qual é o volume dessa construção? 72π m³



3. Reúna-se com mais três colegas e faça uma pesquisa a respeito da civilização maia. Resposta pessoal.

Unidade 3

Geometria e Álgebra no plano cartesiano

A antena parabólica é muito utilizada para a recepção de sinais de rádio e televisão. Ela reflete para um mesmo ponto da antena os sinais fracos recebidos que assim são amplificados.

Além de receber sinais de satélites, as antenas parabólicas podem captar sinais do espaço. As do projeto ALMA (Atacama Large Millimeter/submillimeter Array), que é o maior projeto astronômico terrestre, situadas no Planalto de Chajnantor nos Andes chilenos, recebem um tipo de radiação produzida por alguns dos objetos mais frios do Universo que estão muito distantes da Terra.

ARIEL MARINKOVIC/Getty Images

Escreva no caderno

1. Que tipo de sinal é comum receber nas antenas parabólicas?
Resposta possível: Sinais de televisão ou rádio.
2. Por que as antenas parabólicas são utilizadas para receber sinais de satélites?
Porque a antena reflete para um único ponto os sinais vindos de muitas direções.
3. Que tipo de imagem você acredita que é possível obter das antenas do projeto ALMA? Que importância você acha que esse tipo de projeto tem para o desenvolvimento científico? Resposta pessoal. Resposta possível: Imagens detalhadas de estrelas e planetas, que se formam em nuvens de gás, próximos do nosso Sistema Solar e em galáxias distantes.

O projeto ALMA é composto de 66 antenas parabólicas que trabalham como um grande telescópio e está localizado em São Pedro do Atacama, Chile (fotografia de 2013).

CAPÍTULO 4

Geometria analítica: pontos e retas

Jose Arnet Portanell. 1876. Litogravura. Coleção Particular

René Descartes, filósofo, matemático e físico francês, foi o autor da famosa frase: "Penso, logo existo!".

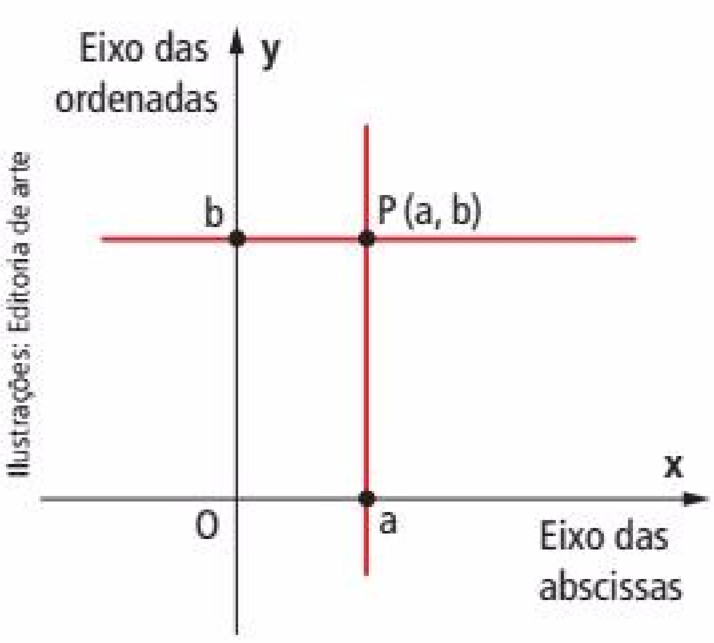
A **Geometria analítica** é um ramo da Matemática que se baseia essencialmente na ideia de representar os pontos do plano por pares ordenados de números reais em um sistema de coordenadas. Esse sistema é denominado **sistema cartesiano ortogonal** e os pontos são representados em um plano chamado **plano cartesiano**, em homenagem ao francês René Descartes (1596-1650).

A Geometria analítica estuda curvas e figuras por meio de suas equações, que por sua vez são analisadas com base em seus gráficos. Há, portanto, uma inter-relação da Álgebra com a Geometria.

Sistema cartesiano ortogonal

Como abordamos no capítulo 3 do volume 1 desta coleção, um **sistema cartesiano ortogonal** é formado por duas retas reais perpendiculares entre si em um ponto *O* definido como origem. O eixo horizontal, identificado por eixo *x*, é chamado de **eixo das abscissas** e o eixo vertical, identificado como eixo *y*, é chamado de **eixo das ordenadas**. Se as escalas não forem indicadas nos eixos, supõe-se que eles têm a mesma unidade de escala.

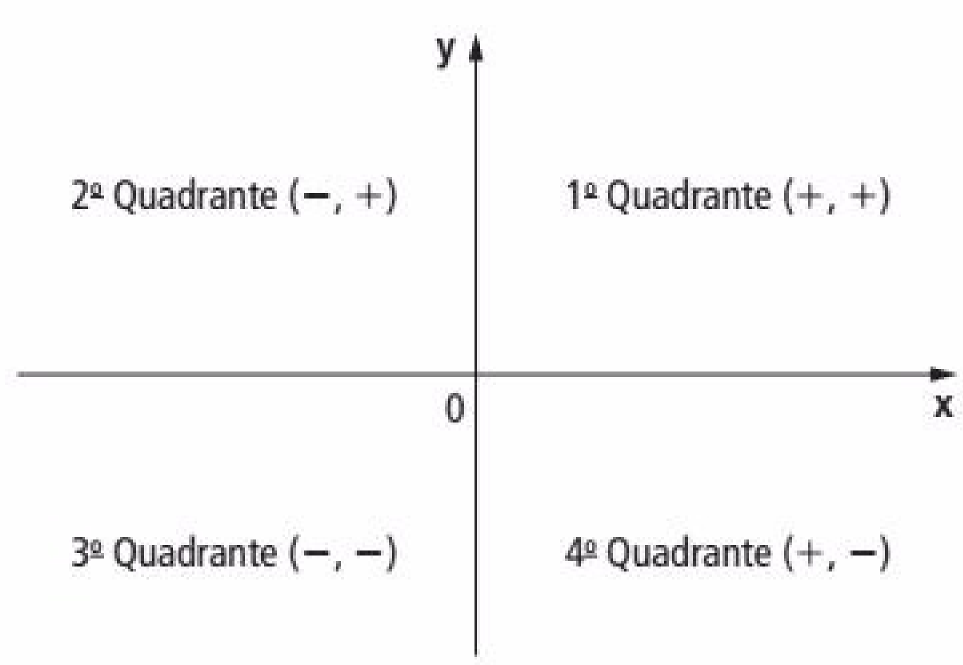
Quando fixamos um sistema de coordenadas cartesianas em um plano, passa a existir uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto dos pares ordenados (a, b) de números reais, isto é, a cada par ordenado (a, b) está associado um único ponto do plano e a cada ponto do plano está associado um único par ordenado (a, b). Assim, todo ponto pode ser localizado no plano cartesiano por meio de sua coordenada.



Ilustrações: Editoria de arte

Dado um ponto P(a, b), o número real *a* é chamado de **abscissa do ponto *P*** e o número real *b*, de **ordenada do ponto *P***.

Os eixos *x* e *y* dividem o sistema cartesiano em quatro regiões que chamamos de quadrantes, e são enumerados no sentido anti-horário, sendo possível identificar o quadrante ao qual pertence um ponto P(a, b) pelos sinais de suas coordenadas.



1º quadrante: $a > 0$ e $b > 0$

2º quadrante: $a < 0$ e $b > 0$

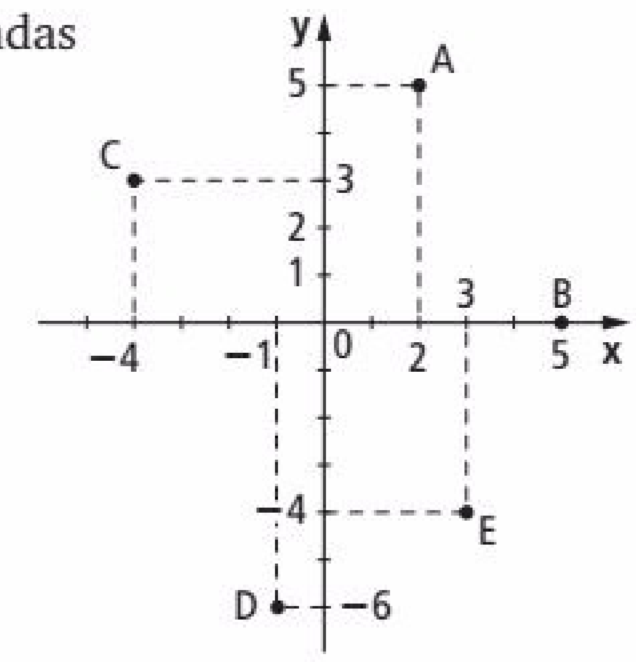
3º quadrante: $a < 0$ e $b < 0$

4º quadrante: $a > 0$ e $b < 0$

Quando $a = b$, ou seja, P(a, a), dizemos que *P* pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, e quando $a = -b$, ou seja, P(a, −a), dizemos que *P* pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

Exercícios resolvidos

1 Determine as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano.



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

As coordenadas dos pontos são:
A(2, 5); B(5, 0);
C(−4, 3); D(−1, −6);
E(3, −4)

2 Se $\frac{x}{y} > 0$, determine os possíveis quadrantes para P(x, y).

Resolução

Como $\frac{x}{y} > 0$, podemos afirmar que *x* e *y* possuem o mesmo sinal e nenhum deles é igual a zero. Portanto, ambos são positivos ou ambos são negativos.

Assim, para a primeira condição, temos que $x > 0$ e $y > 0$, ou seja, *P* pertence ao 1º quadrante.

Para a segunda condição, como $x < 0$ e $y < 0$, *P* pertence ao 3º quadrante.

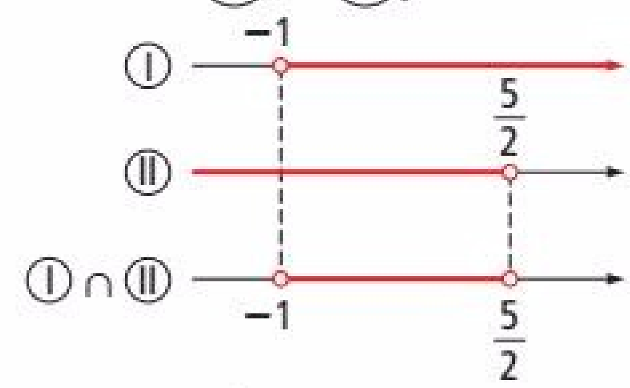
3 Determine os valores reais de *x* para que o ponto A(x + 1, 2x − 5) pertença ao 4º quadrante.

Resolução

Um ponto do 4º quadrante tem abscissa positiva e ordenada negativa. Assim, $x + 1 > 0$ e $2x - 5 < 0$.

$$\begin{cases} x+1>0 \Rightarrow x>-1 \quad \text{(I)} \\ 2x-5<0 \Rightarrow 2x<5 \Rightarrow x<\frac{5}{2} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) ∩ (II), obtemos:



Portanto, $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{5}{2}\right\}$.

4 Se A(2x − y, x + 2y) e B(3, 4) representam o mesmo ponto, qual será o quadrante do ponto C(x, y)?

Resolução

A e *B* representam o mesmo ponto, então:

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y=6 \\ x+2y=4 \end{cases} + \quad \overline{5x \quad\quad =10}$$

Assim, $x = 2$ e, portanto, $y = 1$. O ponto C(2, 1) pertence ao 1º quadrante.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

1. Marque em um plano cartesiano os pontos:
a) A(3, 4) c) C(0, 5) e) E(−2, 0)
b) B(−1, 2) d) D(−3, −3) f) F(3, −2)

2. Dê os nomes dos polígonos cujos vértices são:
a) A(−2, 2), B(3, 2), C(1, −1) e D(−4, −1) Paralelogramo.
b) M(−1, 3), N(−2, −3) e P(−1, −3) Triângulo retângulo.
c) R(−3, 1), S(2, 1), T(3, −1) e U(−4, −1)
Trapézio isósceles.

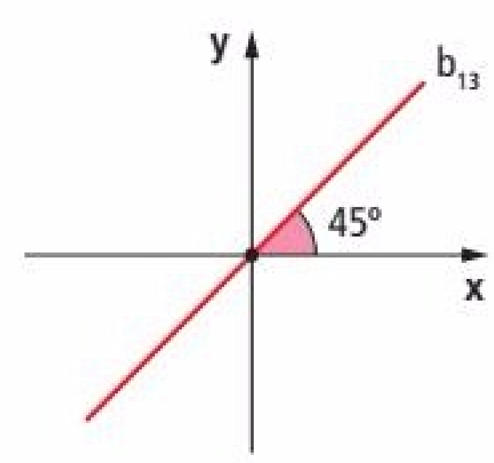
3. Determine o valor de *k* para que o ponto P(−5, −k − 8) pertença ao eixo horizontal do plano cartesiano. k = 4

4. Em que quadrante se encontra o ponto A(−5, 3)? E o ponto B(−5, −3)? A ∈ 2º quadrante e B ∈ 3º quadrante.

5. Determine o quadrante em que se localiza o ponto M(x, y), nos seguintes casos: Sobre a bissetriz do 2º e 4º quadrantes.
a) $xy > 0$ b) $xy < 0$ c) $xy = 0$ d) $x + y = 0$
1º ou 3º quadrante 2º ou 4º quadrante Sobre os eixos coordenados.

6. Sabendo que *m* e *n* são números reais, quais os possíveis quadrantes aos quais pode pertencer o ponto C(−m, n²)?
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

7. Na figura a seguir temos a representação da reta denominada "bissetriz dos quadrantes ímpares". De maneira análoga, podemos afirmar que também existe uma reta que denominamos "bissetriz dos quadrantes pares".



Bissetriz do 1º e 3º quadrantes (b_{13}).

a) Construa em um sistema cartesiano a bissetriz dos quadrantes pares.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.
b) Quais pontos a seguir pertencem à reta b_{13} e quais pertencem à reta b_{24}?
P(2, 3); Q(−2, 2); O(0, 0); R(3, 3); S(2, 4); T(5, −5); U(0, 1); V(−14, −14) Os pontos *O*, *R* e *V* pertencem à reta b_{13} e os pontos *O*, *Q* e *T* pertencem à reta b_{24}.
c) Determine *a* e *b* para que o ponto P(10, a + 3) pertença à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes e Q(−8, b − 2) pertença à bissetriz do 2º e do 4º quadrantes.
a = 7 e b = 10

8. Um quadrado tem a medida do lado igual a $\sqrt{2}$. Se *A* pertence ao eixo das abscissas e *B* pertence ao eixo das ordenadas, quais são as coordenadas dos vértices *A*, *B*, *C* e *D*? A(1, 0); B(0, 1); C(−1, 0); D(0, −1)

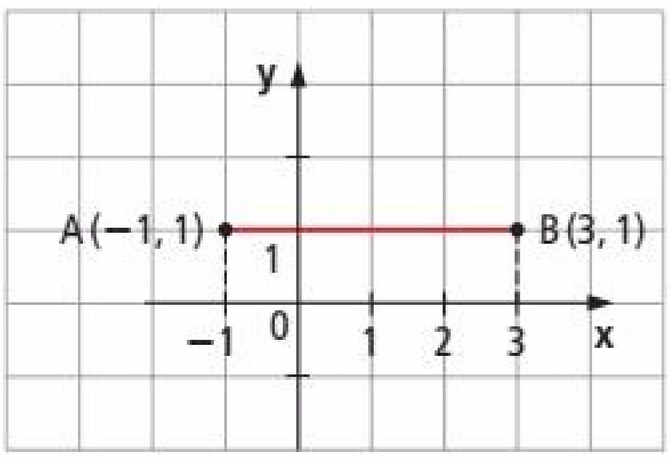
Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos *A* e *B* também pode ser representada por d_{AB} ou $d_{A,\,B}$.

No estudo da Geometria analítica, há várias situações em que calculamos a distância entre dois pontos, por exemplo: ao determinar o perímetro de um polígono, a medida das medianas ou as alturas relativas de um triângulo etc.

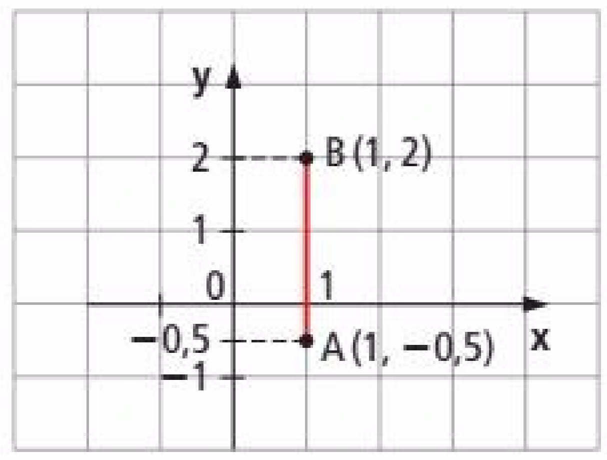
Podemos indicar por d(A, B) ou por AB a medida do segmento de reta cujas extremidades são os pontos *A* e *B*. Essa medida equivale à distância entre os pontos *A* e *B*. Veja os exemplos a seguir.

a)



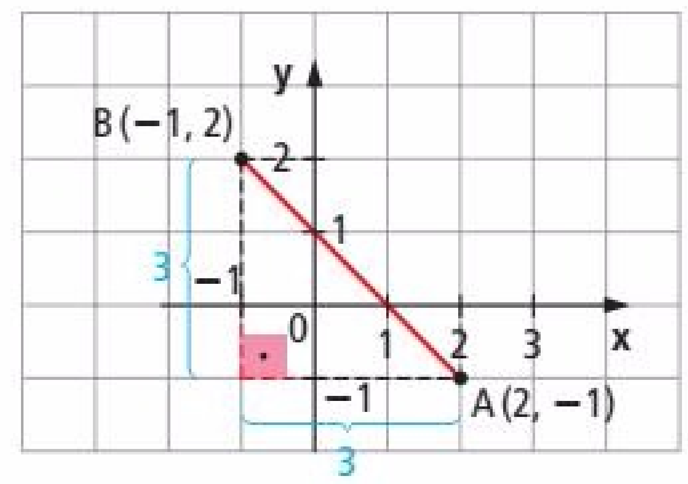
$d(A, B) = 3 - (-1) = 4$

b)



$d(A, B) = 2 - (-0{,}5) = 2{,}5$

c)



$[d(A, B)]^2 = 3^2 + 3^2$
$d(A, B) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Ilustrações: Editoria de arte

Nos exemplos **a** e **b**, o cálculo da distância foi obtido por meio das relações $d(A, B) = |x_A - x_B|$ ou $d(A, B) = |y_A - y_B|$. No exemplo **c**, utilizamos o teorema de Pitágoras.

Podemos obter uma fórmula geral para calcular a distância entre dois pontos *A* e *B* quaisquer.

Para isso, considere os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ em um plano cartesiano (Figura 1).

Construímos um triângulo retângulo ABC em que AB é a medida da hipotenusa e, em seguida, aplicamos o teorema de Pitágoras (Figura 2). Veja:

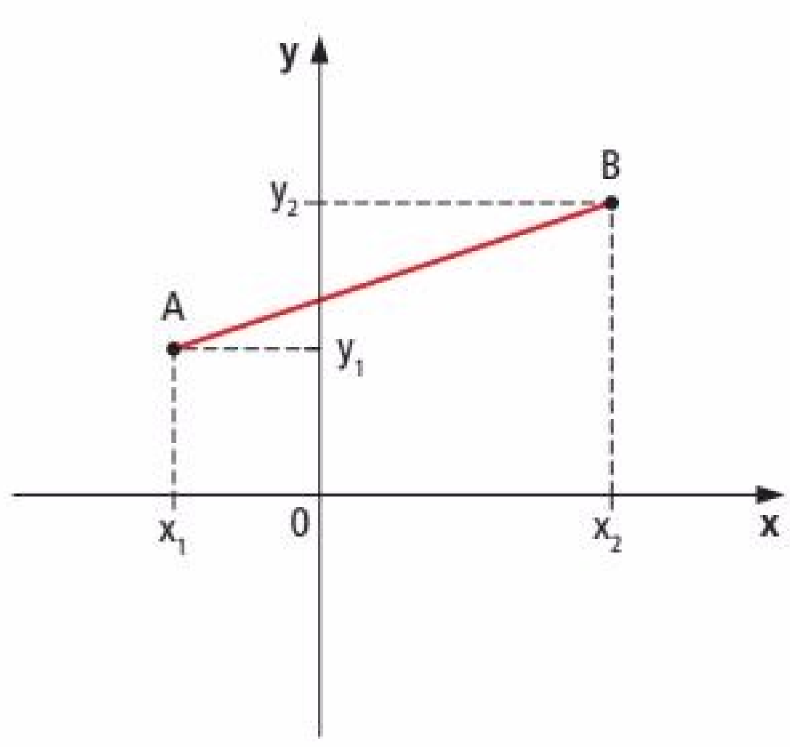


Figura 1

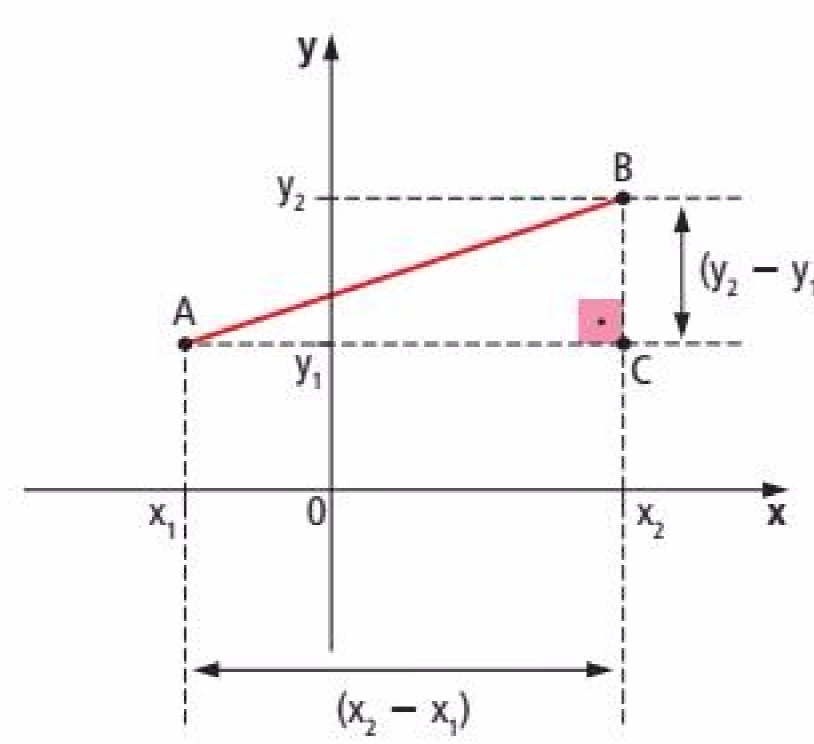


Figura 2

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$(AB)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

O comprimento do segmento AB é a distância entre os pontos *A* e *B*. Portanto:

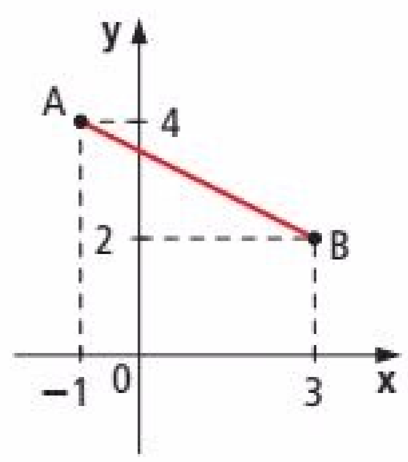
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exercícios resolvidos

5 Calcule a distância entre os pontos A(−1, 4) e B(3, 2).

Resolução

Representando os pontos em um plano cartesiano, temos:



Aplicando a fórmula:

$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d(A, B) = \sqrt{(3+1)^2 + (2-4)^2}$

$d(A, B) = \sqrt{16+4}$

$d(A, B) = \sqrt{20}$

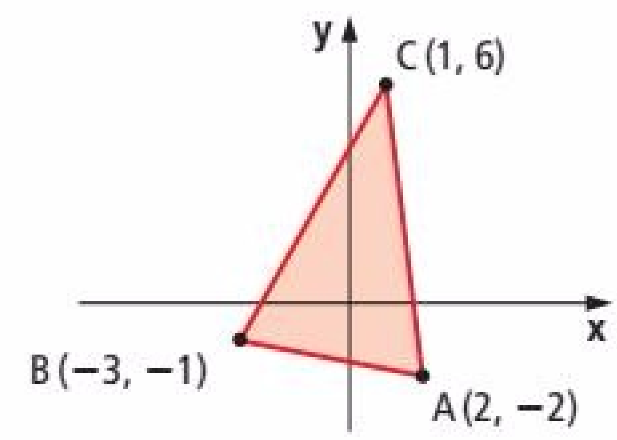
$d(A, B) = 2\sqrt{5}$

A distância entre os pontos *A* e *B* é $2\sqrt{5}$.

6 Prove que é isósceles o triângulo cujos vértices são os pontos A(2, −2), B(−3, −1) e C(1, 6).

Resolução

Representando os pontos em um plano cartesiano, temos:



Vamos determinar o comprimento dos lados do triângulo:

$d(A, B) = \sqrt{(-3-2)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$d(A, C) = \sqrt{(1-2)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

$d(B, C) = \sqrt{(1+3)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

Como d(A, C) = d(B, C), o triângulo dado tem dois lados congruentes. Logo, é isósceles.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

9. Calcule a distância entre os pontos:

a) A(1, 3) e B(9, 9) 10

b) P(4, −2) e Q(4, −5) 3

c) $I\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ e $J\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right)$ $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

d) $M(2\sqrt{3}, 3)$ e $N(4\sqrt{3}, 1)$ 4

e) $R(1+\sqrt{3}, 2)$ e $S(\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ 2

10. Um quadrilátero ABCD está definido pelos pontos A(−1, −1), B(1, 1), C(3, 1) e D(−1, −3). Calcule o perímetro desse quadrilátero. $4 + 6\sqrt{2}$

11. (Mack-SP) Em relação a um sistema cartesiano ortogonal, com os eixos graduados em quilômetro, uma lancha sai do ponto (−6, −4), navega 7 km para leste, 6 km para o norte e 3 km para oeste, encontrando um porto. Depois continua a navegação, indo 3 km para o norte e 4 km para leste, encontrando um outro porto. A distância, em quilômetro, entre os portos é:

a) 7
b) $3\sqrt{5}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $\sqrt{7}$
X e) 5

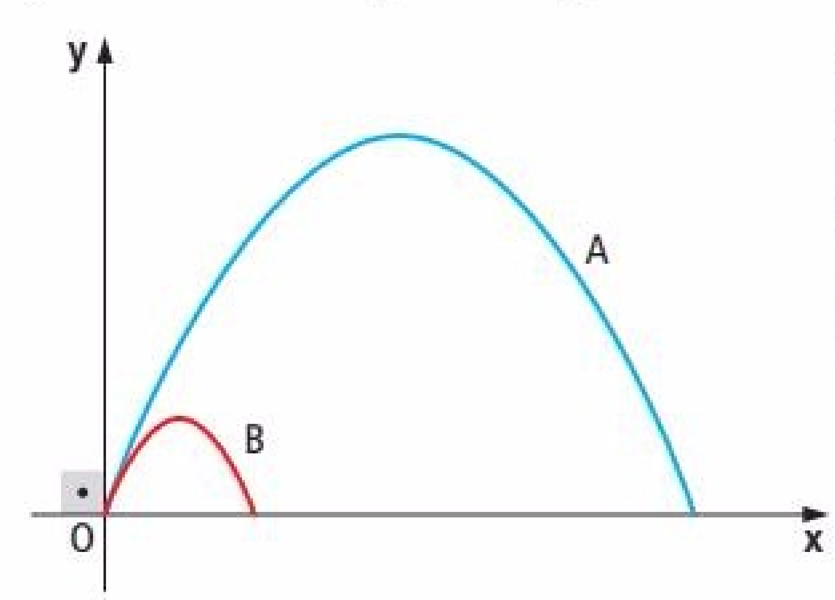
12. Calcule o perímetro do triângulo ABC, sabendo que A(1, 3), B(7, 3) e C(7, 11). 24

13. Considere a diagonal $\overline{AC}$ do quadrado ABCD. Sejam A(−2, 3) e C(0, 5), qual a área do quadrado ABCD, em unidades de área? 4 u.a.

14. Determine *x* para que o ponto P(x, 2x + 3) seja equidistante dos pontos A(1, 2) e B(−2, 3). x = −1

15. Verifique se o triângulo com vértices A(−1, 2), B(3, 1) e C(6, 4) é retângulo, acutângulo ou obtusângulo. Obtusângulo.

16. (UERJ) As trajetórias *A* e *B* de duas partículas lançadas em um plano vertical xOy estão representadas abaixo.



Ilustrações: Editoria de arte

Suas equações são, respectivamente:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + x,$$

nas quais *x* e *y* estão em uma mesma unidade *u*. Essas partículas atingem, em um mesmo instante *t*, o ponto mais alto de suas trajetórias. A distância entre as partículas, nesse instante *t*, na mesma unidade *u*, equivale a:

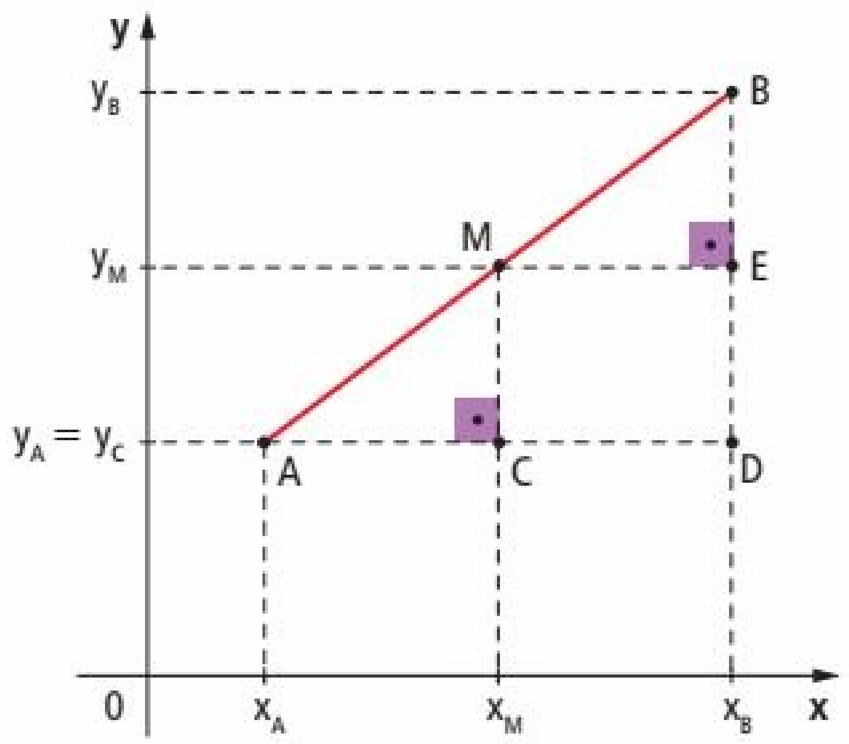
a) $\sqrt{6}$
b) $\sqrt{8}$
c) $\sqrt{10}$
X d) $\sqrt{20}$

Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Sabemos que o ponto médio de um segmento de reta é o ponto que o divide em duas partes iguais, ou seja, em dois segmentos de reta congruentes. Então, dado um segmento de reta AB e *M*, o ponto médio desse segmento de reta, podemos afirmar que AM e MB são congruentes ou, ainda, a razão entre AM e MB é igual a 1.

Vamos determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta em função das coordenadas das extremidades. Para isso, vamos considerar que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são as extremidades de um segmento de reta e $M(x_M, y_M)$, o seu ponto médio, como mostra a figura abaixo.

Traçando retas perpendiculares aos eixos passando pelos pontos *A*, *B* e *M*, temos que os triângulos MCA e BEM são congruentes (caso LAA_O) e assim, ME = AC e EB = CM:



$$ME = AC \Rightarrow x_B - x_M = x_M - x_A \Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow \boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}$$

$$EB = CM \Rightarrow y_B - y_M = y_M - y_C \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B \Rightarrow \boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

Portanto:

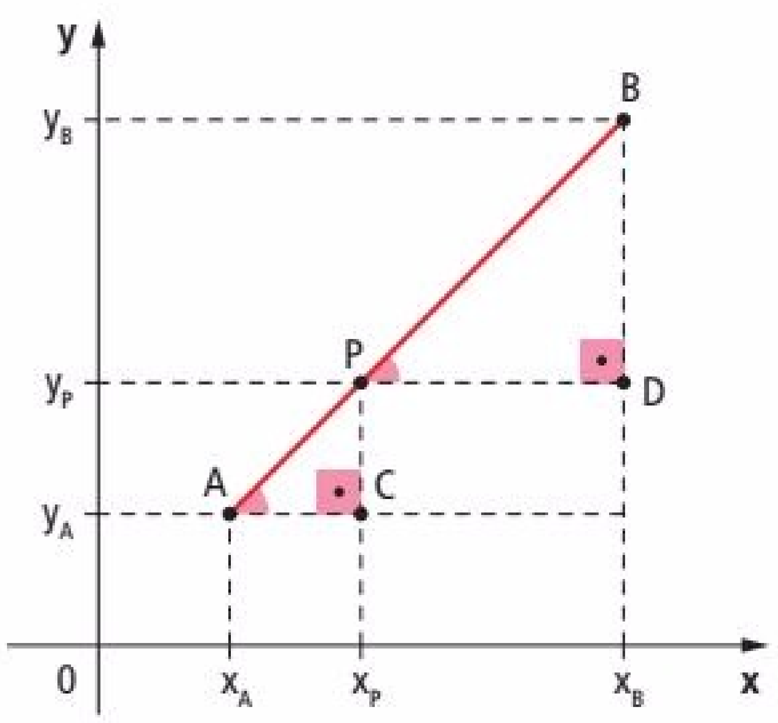
> **A abscissa do ponto médio é igual à média aritmética das abscissas de seus extremos e a ordenada do ponto médio é igual à média aritmética das ordenadas de seus extremos.**

Na demonstração, os pontos *A* e *B* estão no 1º quadrante. Contudo, se eles estiverem em outro quadrante ou em quadrantes distintos, chegaremos às mesmas relações entre as coordenadas dos pontos *A*, *B* e *M*.

As relações das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta podem ser obtidas utilizando-se a ideia de "divisão de um segmento de reta em determinada razão *r*" ou "razão de secção", que apresentamos a seguir.

Divisão de um segmento de reta por um ponto *P* em uma razão *r*

Seja *P* um ponto que divide AB na razão $r = \frac{AP}{PB}$. Observando o gráfico abaixo, temos os triângulos ACP e PDB semelhantes. Então:



Ilustrações: Editoria de arte

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{AC}{PD} = \frac{PC}{BD}$$

$$r = \frac{AC}{PD} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} \Rightarrow x_P = \frac{x_A + rx_B}{1+r}$$

$$r = \frac{PC}{BD} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_P} \Rightarrow y_P = \frac{y_A + ry_B}{1+r}$$

Portanto, as coordenadas do ponto *P* que divide um segmento de reta AB na razão *r*, são dadas por:

$$P = \left(\frac{x_A + r \cdot x_B}{1+r}, \frac{y_A + r \cdot y_B}{1+r}\right)$$

No caso do ponto médio *M* que divide um segmento na razão r = 1, temos que:

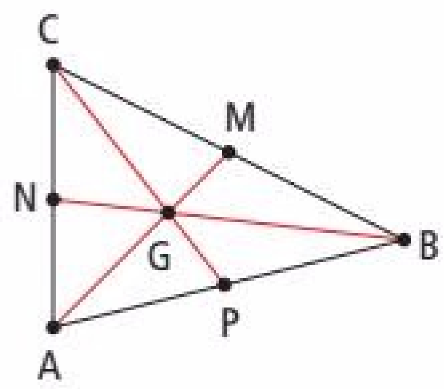
$$x_M = \frac{x_A + 1 \cdot x_B}{1+1} = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_A + 1 \cdot y_B}{1+1} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Observe que essas são coordenadas do ponto médio obtidas anteriormente.

Baricentro de um triângulo

É possível que no Ensino Fundamental você tenha estudado que uma mediana de um triângulo é um segmento de reta com extremidades em um vértice e no ponto médio do lado oposto, e que o encontro das medianas é chamado de baricentro *G*.

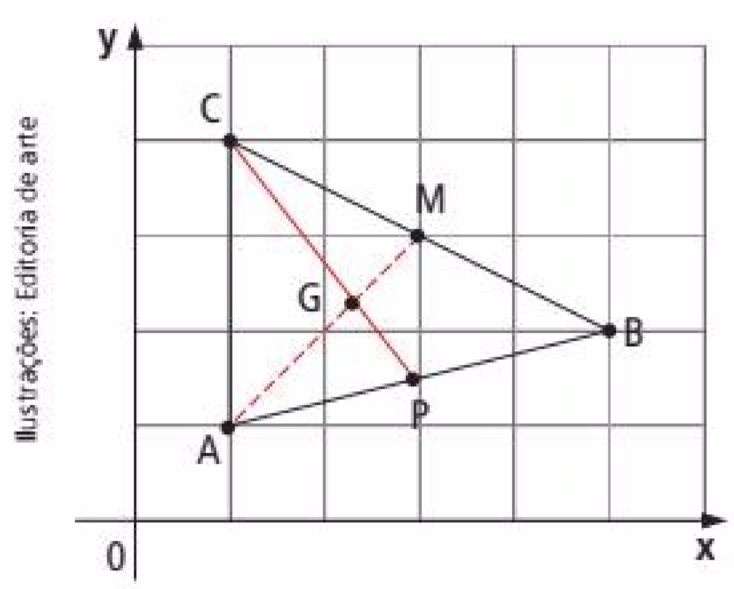
Considerando o triângulo abaixo, é possível provar por semelhança de triângulos que o baricentro *G* divide as medianas do triângulo na razão de 2 para 1. Observe:



$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = \frac{2}{1}$$

Utilizando essa propriedade, vamos deduzir as relações entre as coordenadas do baricentro *G* e as coordenadas dos vértices *A*, *B* e *C* do triângulo.

Seja $G(x_G, y_G)$ o baricentro do triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. Observando o gráfico abaixo, também concluímos que o ponto *P* é o ponto médio de AB, assim: $x_P = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_P = \frac{y_A + y_B}{2}$.



O ponto *G* divide a mediana $\overline{CP}$ na razão r = 2:

$$x_G = \frac{x_C + rx_P}{1+r} = \frac{x_C + 2\cdot\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)}{1+2} \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_C + ry_P}{1+r} = \frac{y_C + 2\cdot\left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)}{1+2} \Rightarrow y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Assim, sobre as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC podemos concluir que:

A abscissa do baricentro é igual à média aritmética das abscissas dos vértices do triângulo e a ordenada do baricentro é igual à média aritmética das ordenadas dos vértices do triângulo.

Exercícios resolvidos

7 Sendo R(−4, −1) e S(5, 6), determine as coordenadas do ponto *T* que divide $\overline{RS}$ na razão $r = \frac{1}{3}$.

Resolução

$$x_T = \frac{x_R + rx_S}{1+r} = \frac{-4 + \frac{1}{3}\cdot 5}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{7}{4}$$

$$y_T = \frac{y_R + ry_S}{1+r} = \frac{-1 + \frac{1}{3}\cdot 6}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

Portanto, $T\left(-\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

8 Determinar a razão em que o ponto C(6, 5) divide o segmento AB, sendo A(2, 3) e B(10, 7).

Resolução

A razão pode ser calculada com as abscissas ou com as ordenadas dos pontos.

Com as abscissas:

$$r = \frac{AC}{CB} \Rightarrow r = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} \Rightarrow r = \frac{6-2}{10-6} = \frac{4}{4} = 1$$

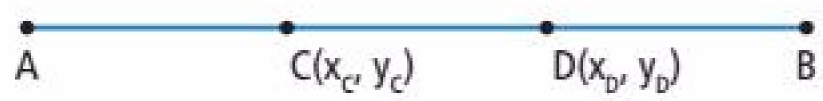
Com as ordenadas:

$$r = \frac{AC}{CB} \Rightarrow r = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} \Rightarrow r = \frac{5-3}{7-5} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, a razão é igual a 1.

9 Determine as coordenadas dos pontos que dividem em três partes iguais um segmento de extremidades A(1, 2) e B(6, 8).

Resolução



O ponto *C* é médio de $\overline{AD}$:

$$x_C = \frac{x_A + x_D}{2} \Rightarrow x_C = \frac{1 + x_D}{2} \quad \text{(I)}$$

$$y_C = \frac{y_A + y_D}{2} \Rightarrow y_C = \frac{2 + y_D}{2} \quad \text{(II)}$$

O ponto *D* é médio de $\overline{CB}$:

$$x_D = \frac{x_C + x_B}{2} \Rightarrow x_D = \frac{x_C + 6}{2} \quad \text{(III)}$$

$$y_D = \frac{y_C + y_B}{2} \Rightarrow y_D = \frac{y_C + 8}{2} \quad \text{(IV)}$$

Das equações (I) e (III), temos:

$$\begin{cases} 2x_C - x_D = 1 \\ -x_C + 2x_D = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$x_C = \frac{8}{3} \text{ e } x_D = \frac{13}{3}$$

Das equações (II) e (IV), temos:

$$\begin{cases} 2y_C - y_D = 2 \\ -y_C + 2y_D = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$y_C = 4$ e $y_D = 6$

Portanto, $C\left(\frac{8}{3}, 4\right)$ e $D\left(\frac{13}{3}, 6\right)$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

17. Obtenha, em cada caso, as coordenadas do ponto médio de $\overline{AB}$.

a) A(1, 7) e B(11, 3) (6, 5)

b) A(−6, 9) e B(−2, −5) (−4, 2)

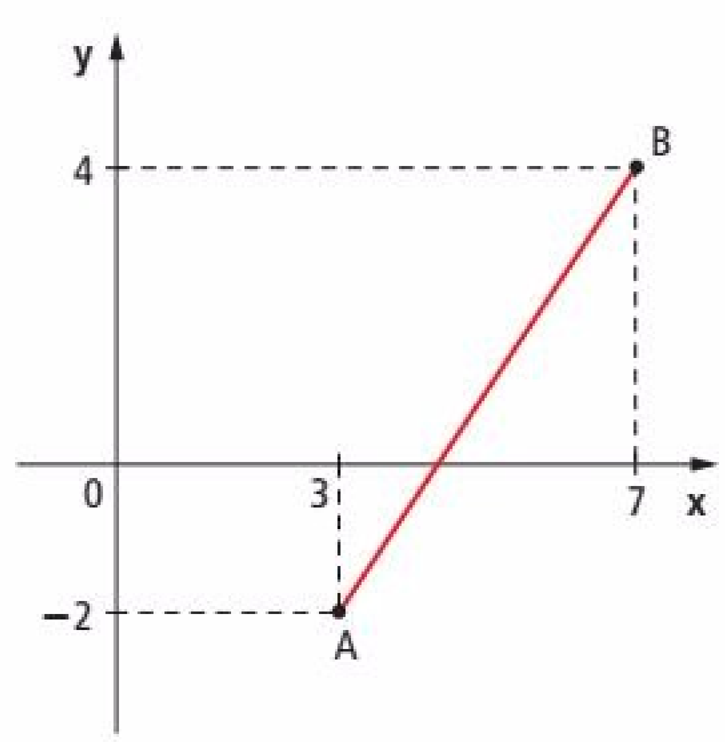
c) A(−3, 0) e B(9, 0) (3, 0)

d) $A(2\sqrt{5}, \sqrt{2})$ e $B(4\sqrt{5}, \sqrt{2})$ $(3\sqrt{5}, \sqrt{2})$

18. Calcule *x* e *y*, sabendo que (2, 5) é o ponto médio do segmento de reta de extremos (x, 7) e (5, y). x = −1; y = 3

19. No plano cartesiano, os pontos A(−1, 1), B(3, 1), C(3, 5) e D(−1, 5) são os vértices de um quadrado. Determine as coordenadas do centro desse quadrado. (1, 3)

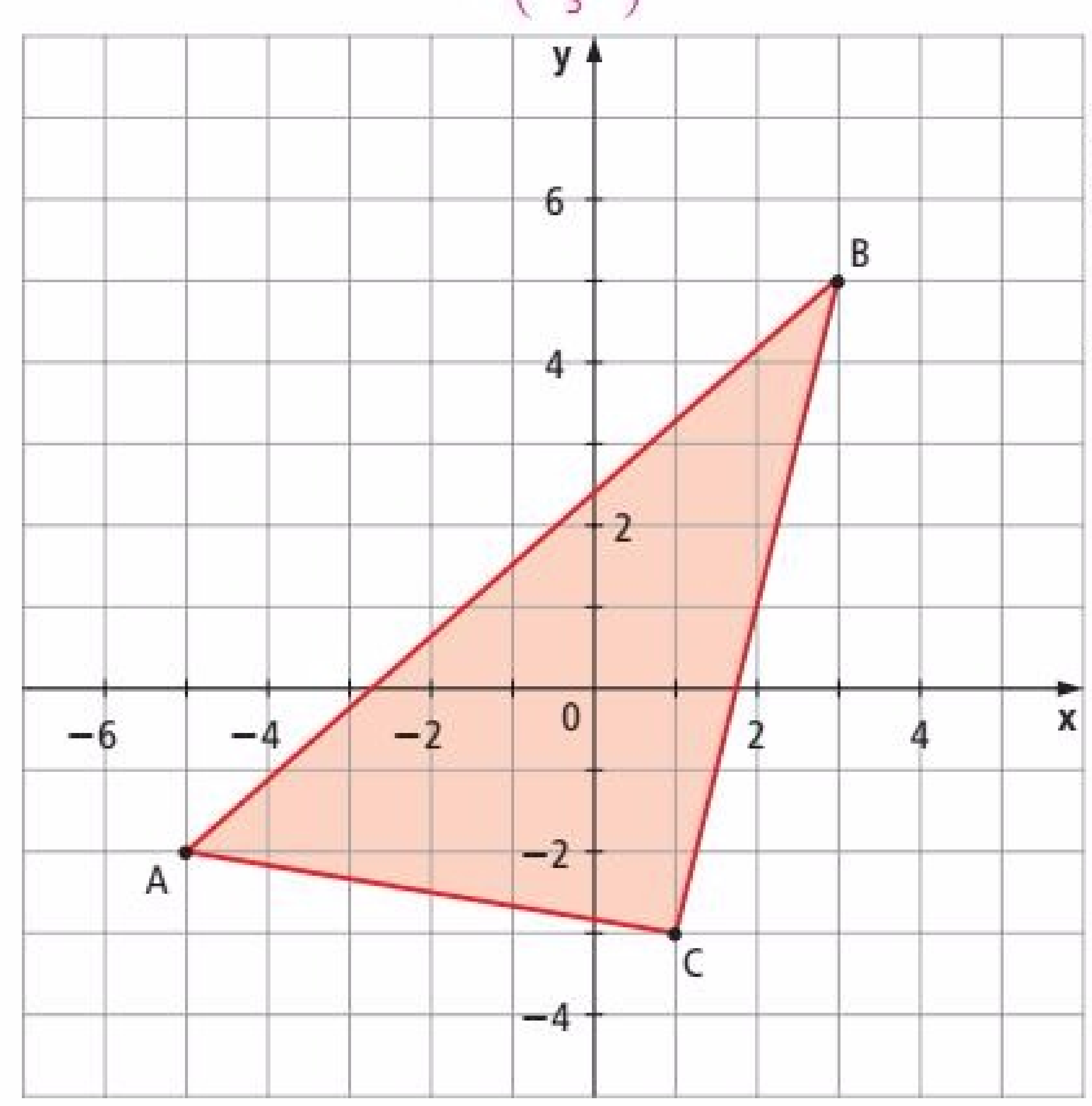
20. Determine as coordenadas do ponto médio do segmento de reta AB indicado na figura. (5, 1)



21. Determine as coordenadas do ponto *B*, simétrico do ponto A(−1, 2) em relação ao ponto C(3, 4). B(7, 6)

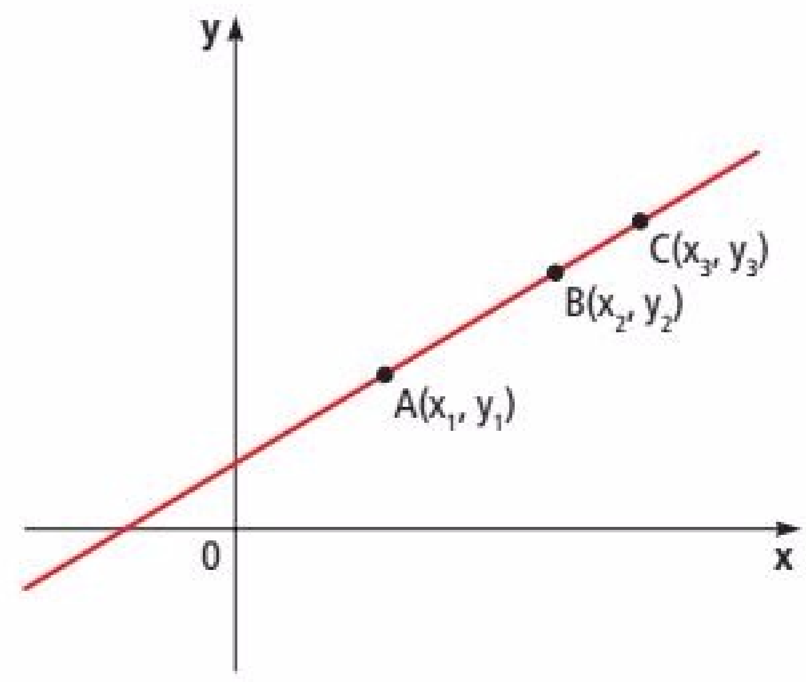
22. Mostre que a razão em que o ponto $C = \left(\frac{19}{9}, \frac{47}{9}\right)$ divide o segmento de reta AB com A(1, 3) e B(11, 23) é igual a $\frac{1}{8}$. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

23. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo indicado na figura: $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$



Ilustrações: Editoria de arte

Condição de alinhamento de três pontos

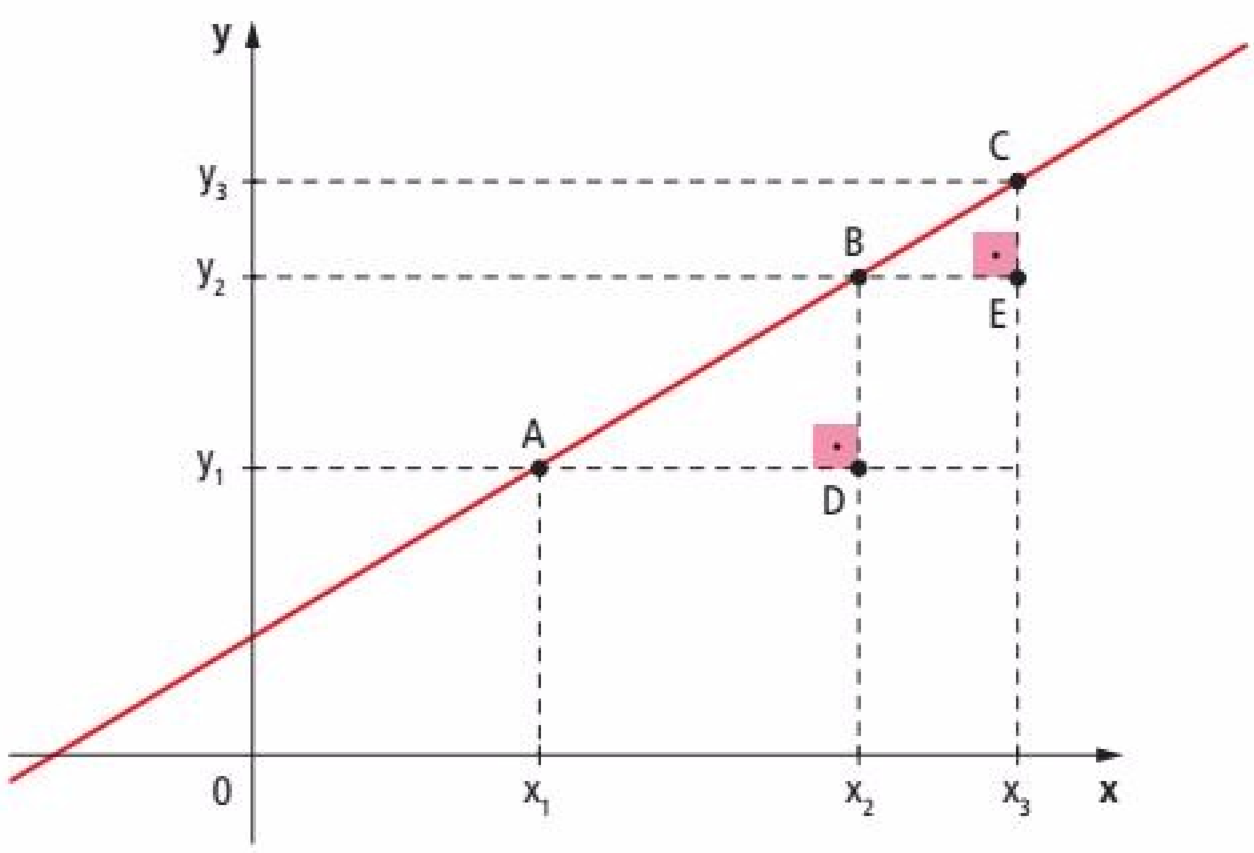


Chamamos de **pontos colineares** (ou pontos alinhados) aqueles que pertencem a uma mesma reta.

Na figura à direita, temos três pontos alinhados, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, representados em um plano cartesiano.

Nesse caso, existe uma relação entre as coordenadas desses pontos que apresentamos a seguir.

Traçando por *A*, *B* e *C* segmentos de reta paralelos aos eixos *x* e *y*, determinamos os pontos *D* e *E* como na figura abaixo.



Ilustrações: Editoria de arte

Observe que os triângulos ABD e BCE da figura acima são semelhantes (caso AA).

Logo, temos:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

Dessa proporção, obtemos:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \Rightarrow (y_2 - y_1) \cdot (x_3 - x_2) = (y_3 - y_2) \cdot (x_2 - x_1) \Rightarrow x_3y_2 - x_3y_1 - \cancel{x_2y_2} + x_2y_1 = x_2y_3 - \cancel{x_2y_2} - x_1y_3 + x_1y_2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{-x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3}_{\text{I}} = 0$$

Observe que I corresponde ao determinante $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, então concluímos que:

Se três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão alinhados, então: $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Se realizarmos o processo inverso, concluiremos que:

Se $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, então $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão alinhados.

Exercícios resolvidos

10 Determine o valor de a de modo que os pontos P(a, 4), Q(11, 5) e R(−1, 3) sejam colineares.

Resolução

Se os pontos estão alinhados, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ 11 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, temos a equação:

$5 - 3a - 44 + 5a - 4 + 33 = 0$

$2a - 10 = 0$

$a = 5$

Portanto, $a = 5$.

11 Determine os valores de p de modo que os pontos M(p, −1), N(−1, p) e Q(4, −2) sejam vértices de um triângulo MNQ.

Resolução

Para que os pontos *M*, *N* e *Q* sejam vértices de um triângulo, eles devem ser não colineares, ou seja, o determinante deve ser não nulo. Então:

$$\begin{vmatrix} p & -1 & 1 \\ -1 & p & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$-4p + 2p - 1 + p^2 - 4 + 2 \neq 0$

$p^2 - 2p - 3 \neq 0$

$p \neq -1$ e $p \neq 3$

Portanto, $p \neq -1$ e $p \neq 3$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

24. Verifique se os pontos *A*, *B* e *C* estão alinhados.

a) A(0, 2), B(−3, 1) e C(4, 5) Não.

b) A(−2, 6), B(4, 8) e C(1, 7) Sim.

c) A(−1, 3), B(2, 4) e C(−4, 10) Não.

d) A(3, −1), B(3, 2) e C(3, 5) Sim.

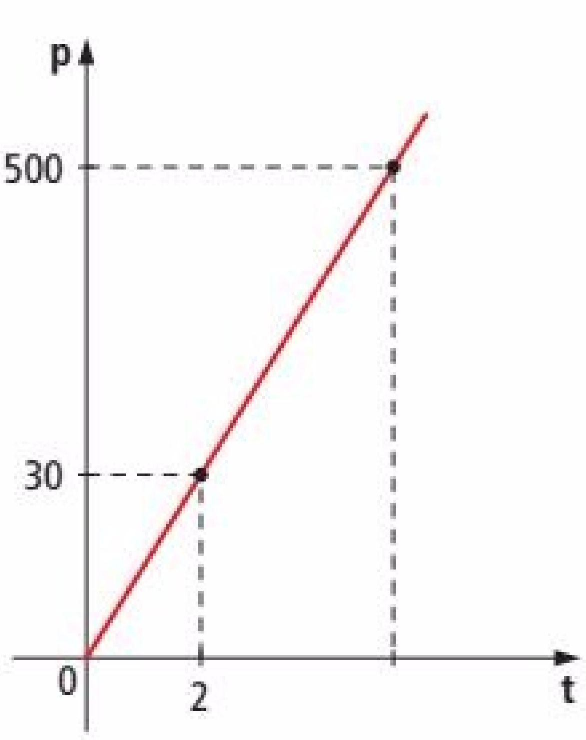
25. Determine *m* para que os pontos A(0, −3), B(−2m, 11) e C(−1, 10m) pertençam a uma mesma reta. $m = -1$ ou $m = \frac{7}{10}$

26. Determine *x* de modo que os pontos A(1, 3), B(x, 1) e C(3, 5) sejam os vértices de um triângulo. $x \neq -1$

27. Seja *P* o ponto de intersecção da reta *r* com o eixo *y*. Se *r* é a reta determinada pelos pontos A(−1, −2) e B(4, 2), calcule as coordenadas do ponto *P*. $P\left(0, -\frac{6}{5}\right)$

28. Seja *Q* o ponto de intersecção da reta *s* com o eixo das abscissas. Se *s* é a reta determinada pelos pontos M(1, −4) e N(−2, −13), calcule as coordenadas do ponto *Q*. $Q = \left(\frac{7}{3}, 0\right)$

29. A quantidade *p* de peças produzidas por determinada máquina, ao longo de certo período de tempo *t* (medido em horas), possui uma variação linear, de acordo com o gráfico ao lado.

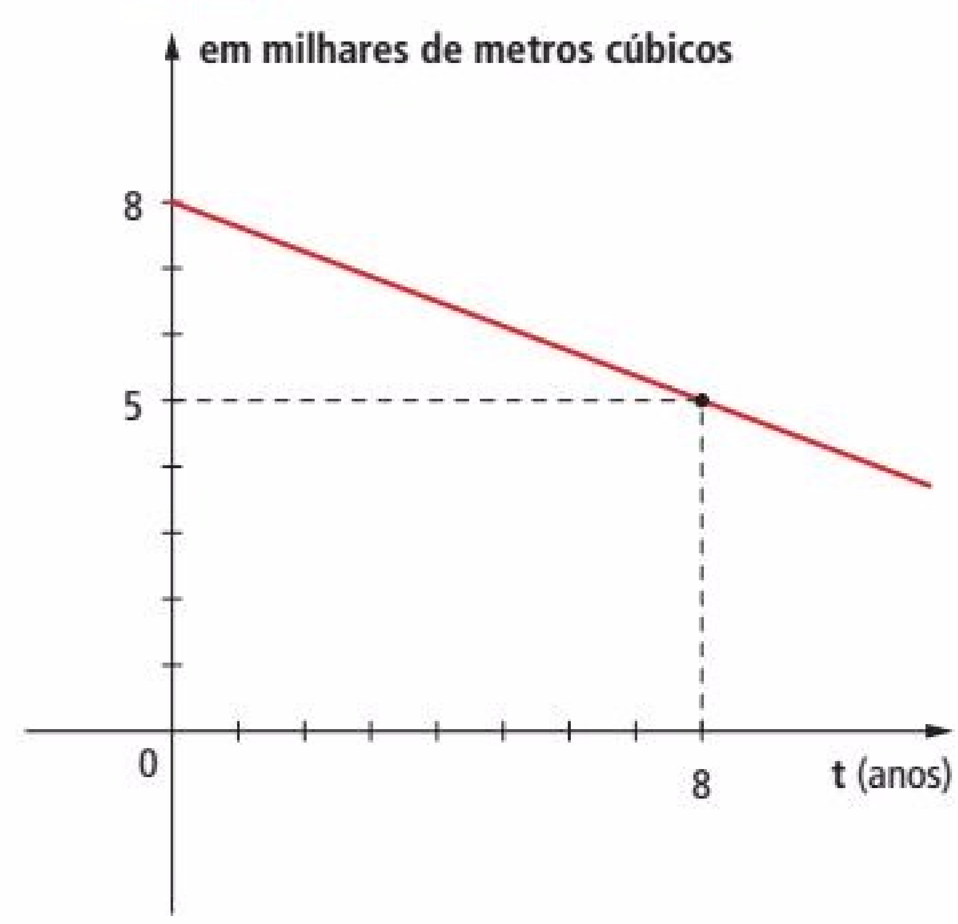


Com base em uma projeção feita a partir do gráfico apresentado, qual o tempo esperado para que a máquina produza 500 peças? 33 horas e 20 minutos.

30. (Vunesp-SP) Ao ser inaugurada, uma represa possuía 8 mil m³ de água. A quantidade de água da represa vem diminuindo anualmente.

O gráfico mostra que a quantidade de água na represa, 8 anos após a inauguração, é de 5 mil m³.

Se for mantida essa relação de linearidade entre o tempo e a quantidade de água em m³, determine em quantos anos, após a inauguração, a represa terá 2 mil m³. 16 anos.

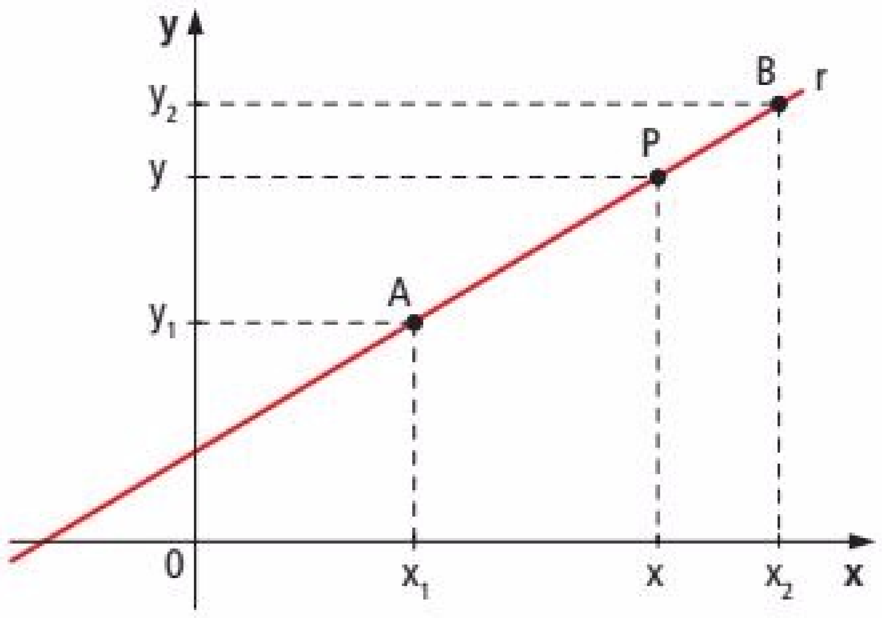


Ilustrações: Editoria de arte

31. Sejam P(2, 5), Q(1, 3) e R(x, y) pontos do plano. Se $x - y = 0$, determine *R*, de modo que *P*, *Q*, e *R* sejam colineares. R(−1, −1)

Equação geral da reta

Utilizando a condição de alinhamento de três pontos, podemos determinar a equação geral da reta que passa por dois distintos. Para isso, considere $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma reta *r* que passa pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, conforme o gráfico abaixo:



Ilustrações: Editoria de arte

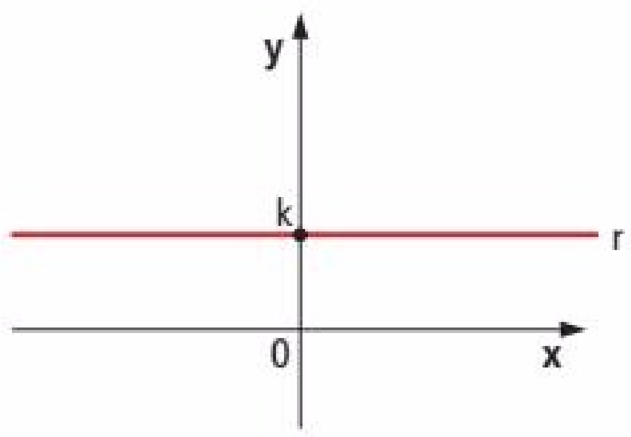
Como os pontos *P*, *A* e *B* são colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1x + x_2y + x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y - y_2x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

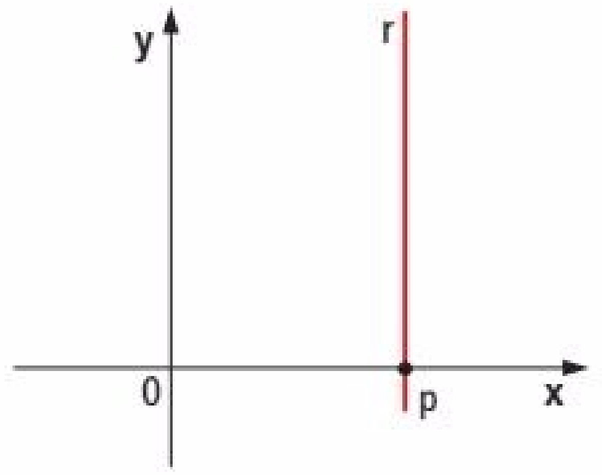
Substituindo $y_1 - y_2$ por *a*, $x_2 - x_1$ por *b* e $x_1y_2 - x_2y_1$ por *c*, temos $ax + by + c = 0$, em que *a*, *b* e *c* são números reais. Essa equação é chamada de **equação geral da reta**.

Vamos apresentar, agora, alguns casos especiais de retas e suas equações.

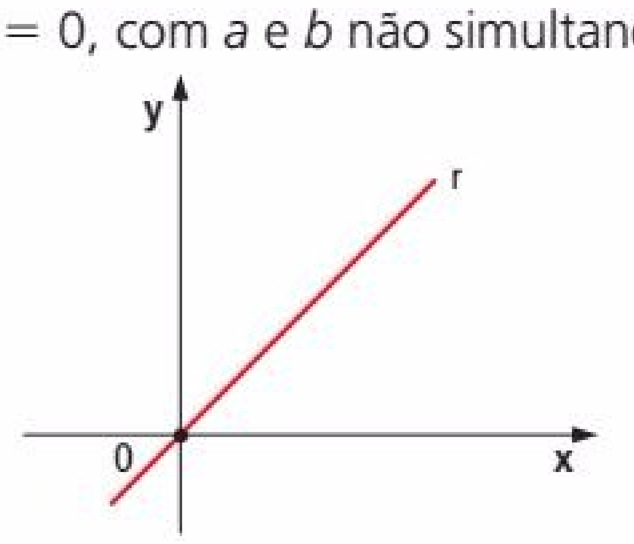
- **Reta paralela ao eixo *x*:** A reta *r* tem equação $y = k$, para $k \in \mathbb{R}$. Todos os pontos de *r* têm a mesma ordenada, ou seja, $y = k$. A equação geral tem a forma $by + c = 0$, sendo $b \neq 0$.



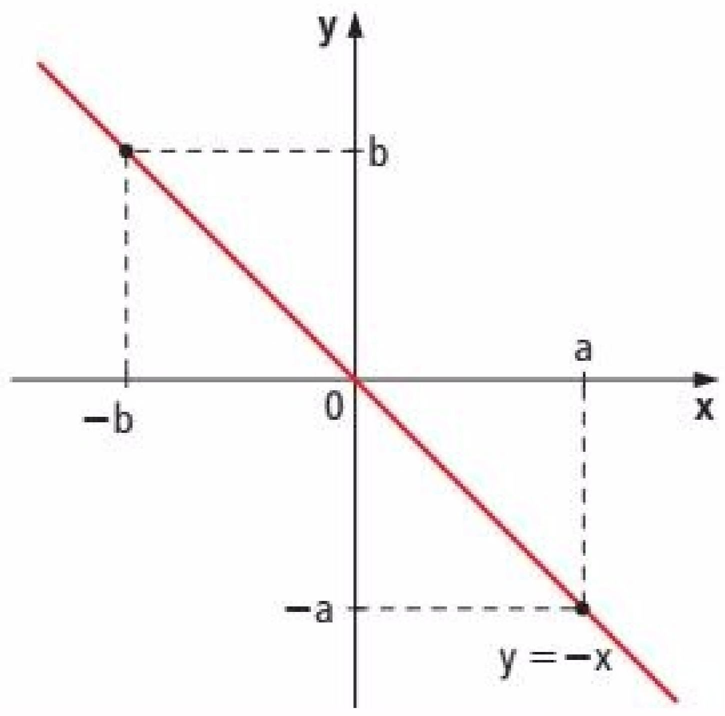
- **Reta paralela ao eixo *y*:** Todos os pontos de *r* têm abscissa igual a *p*, ou seja, $x = p$, para $p \in \mathbb{R}$. A equação geral é: $ax + c = 0$, sendo $a \neq 0$.



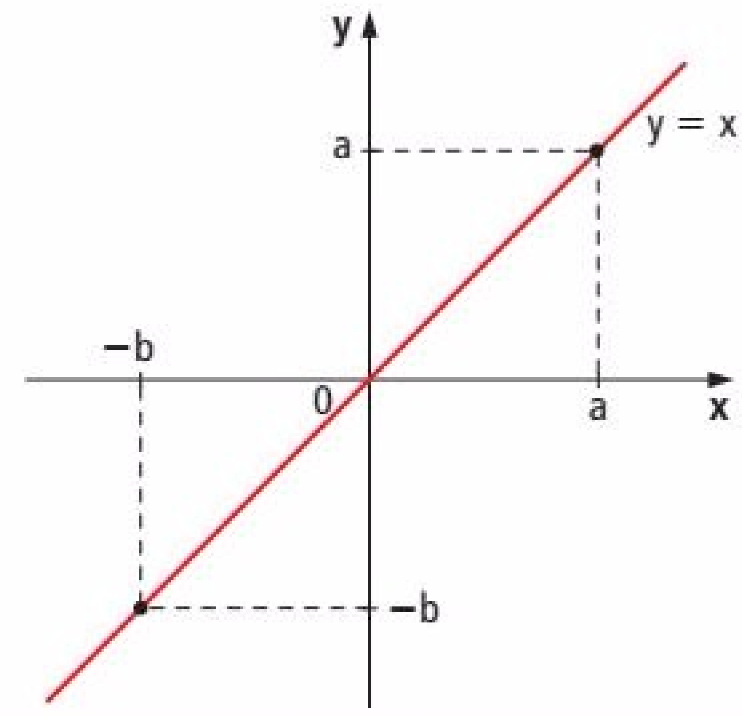
- **Reta passando na origem:** Nesse caso, o ponto (0, 0) pertence à reta e, como consequência, $c = 0$. Veja: $ax + by + c = 0 \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$.
  A equação geral tem a forma: $ax + by = 0$, com *a* e *b* não simultaneamente nulos.



- **Bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares**.



A bissetriz dos quadrantes pares (2º e 4º quadrantes) possui equação $x + y = 0$, ou seja, $x = -y$.



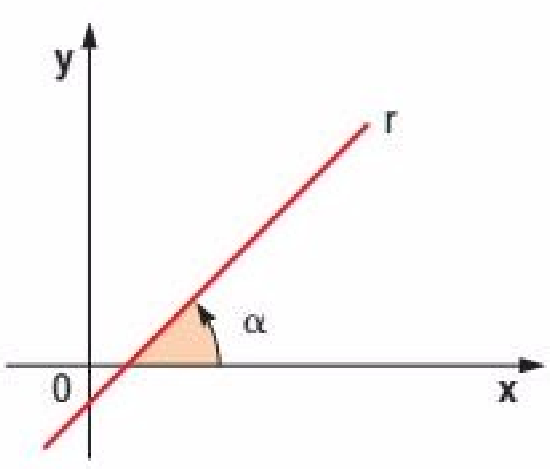
A bissetriz dos quadrantes ímpares (1º e 3º quadrantes) possui equação $x - y = 0$, ou seja, $x = y$.

Ilustrações: Editoria de arte

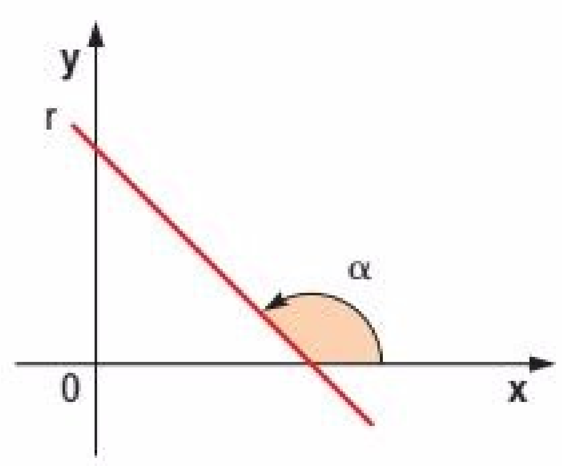
Independentemente do caso, sempre é possível escrever uma equação de reta na forma geral $ax + by + c = 0$, em que *a*, *b* e *c* são números reais com *a* e *b* não simultaneamente nulos.

Inclinação de uma reta

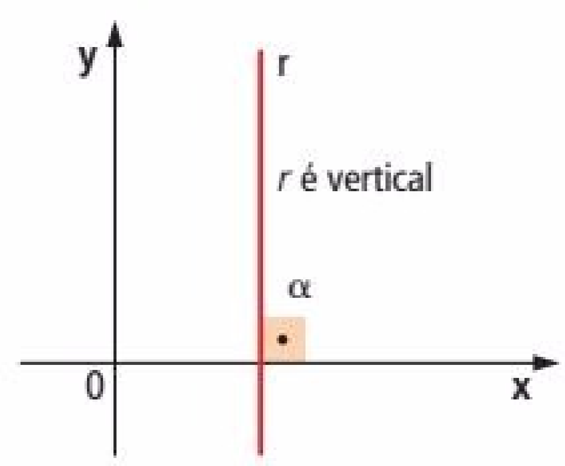
A medida do ângulo α formado do eixo *x* para a reta *r*, no sentido anti-horário, é denominada **inclinação** da reta *r*. Temos os seguintes casos a considerar.



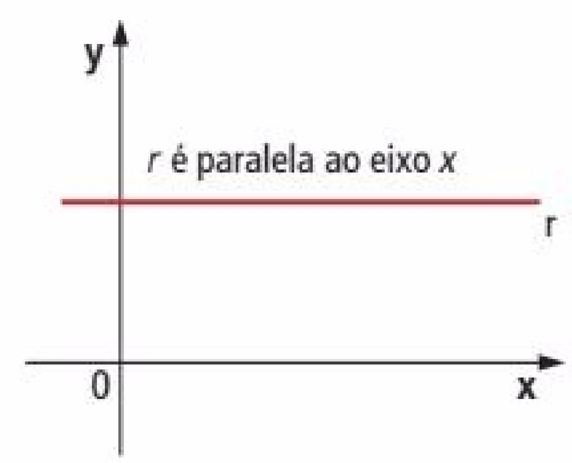
$0° < \alpha < 90°$



$90° < \alpha < 180°$



$\alpha = 90°$

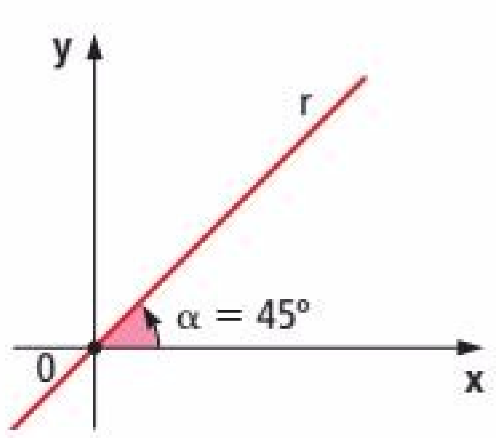


$\alpha = 0°$

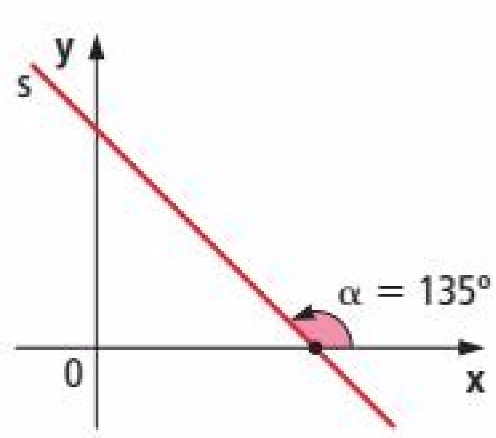
Toda reta tem uma inclinação α única tal que $0° \leqslant \alpha < 180°$.

Coeficiente angular de uma reta

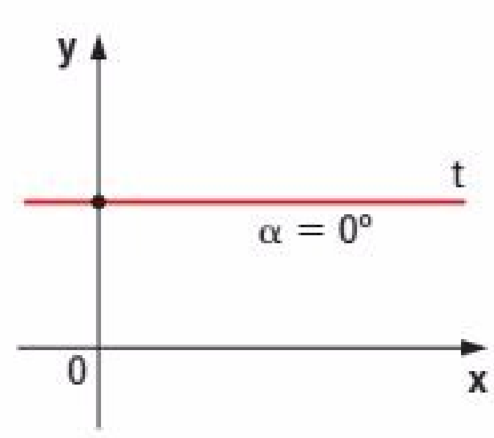
O **coeficiente angular** *m* de uma reta ou **declividade** da reta é igual à tangente da inclinação α dessa reta. Desse modo, *m* é um número real. Observe abaixo alguns exemplos:



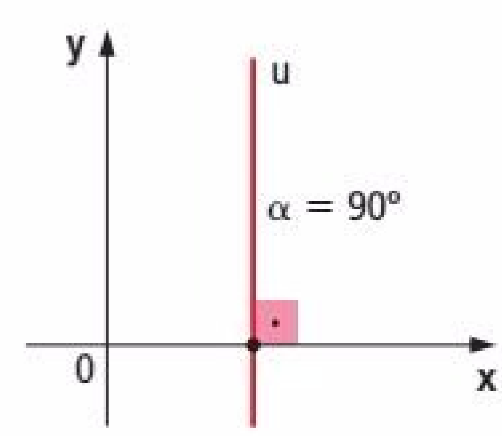
$m_r = \text{tg } 45°$
$m_r = 1$



$m_s = \text{tg } 135°$
$m_s = -1$



$m_t = \text{tg } 0°$
$m_t = 0$



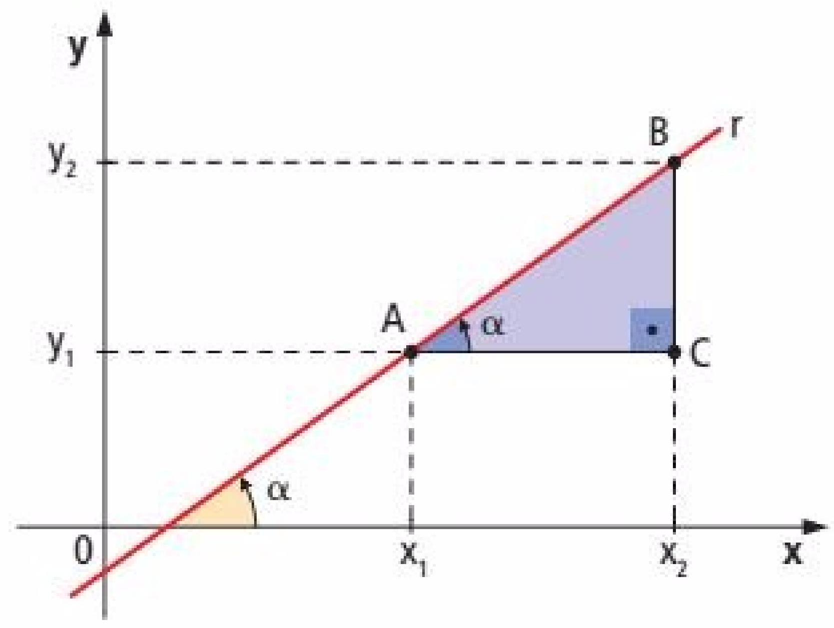
Como a reta *u* é perpendicular ao eixo *x* ($\alpha = 90°$), ela não possui declividade, pois tg 90° não está definida.

Podemos obter o coeficiente angular *m* em função das coordenadas de dois pontos distintos de uma reta. Como para $\alpha = 0°$ (reta horizontal) o coeficiente angular é 0 e para $\alpha = 90°$ não há coeficiente angular, vamos considerar dois casos: α sendo um ângulo agudo e α sendo um ângulo obtuso.

1º caso: α é agudo, $\mathbf{0° < \alpha < 90°}$

Sendo o triângulo ABC retângulo ($\widehat{C}$ é reto), temos:

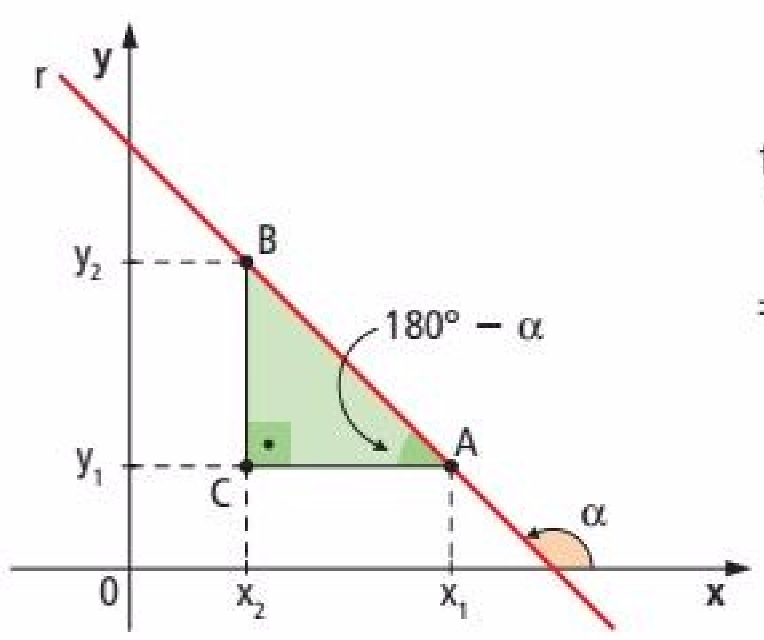
Ilustrações: Editoria de arte



$$\text{tg}\ \alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2º caso: α é obtuso, $\mathbf{90° < \alpha < 180°}$

No triângulo retângulo ABC, temos:



$$\text{tg}\ (180° - \alpha) = \frac{CB}{CA} \Rightarrow \text{tg}\ (180° - \alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \Rightarrow -\text{tg}\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Lembre-se:
$\text{tg}\ (180° - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$

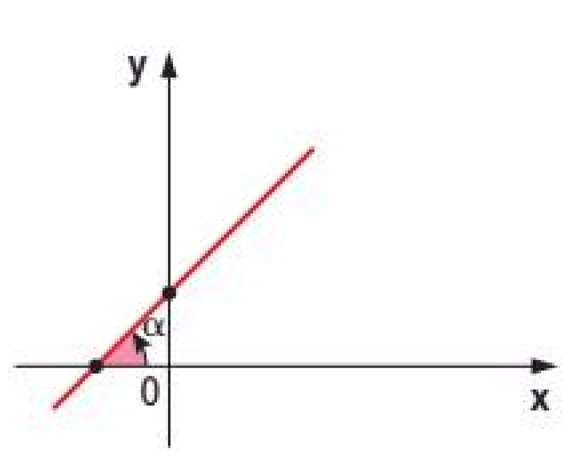
Observe que, em ambos os casos, o coeficiente angular *m* é igual a $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Portanto, sendo $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ pontos distintos de uma reta *r*, não perpendicular ao eixo *x*, o coeficiente angular é dado por:

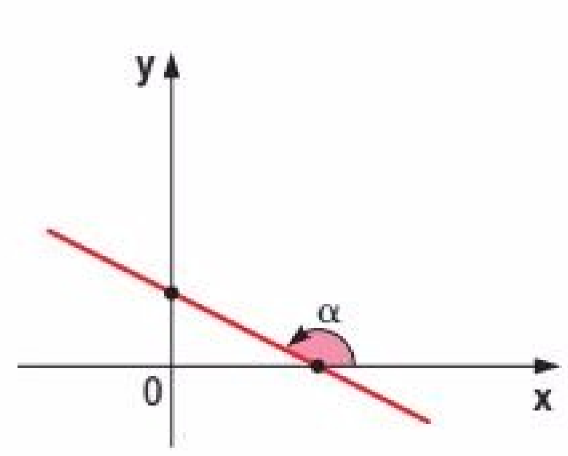
$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

É importante destacarmos que:

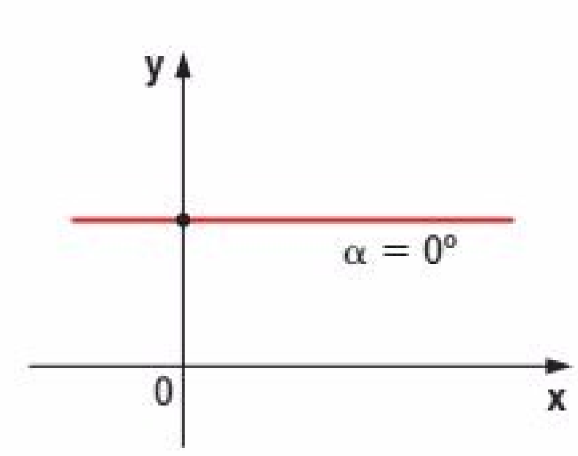
$0° < \alpha < 90°$
$\text{tg}\ \alpha > 0$, ou seja, $m > 0$



$90° < \alpha < 180°$
$\text{tg}\ \alpha < 0$, ou seja, $m < 0$

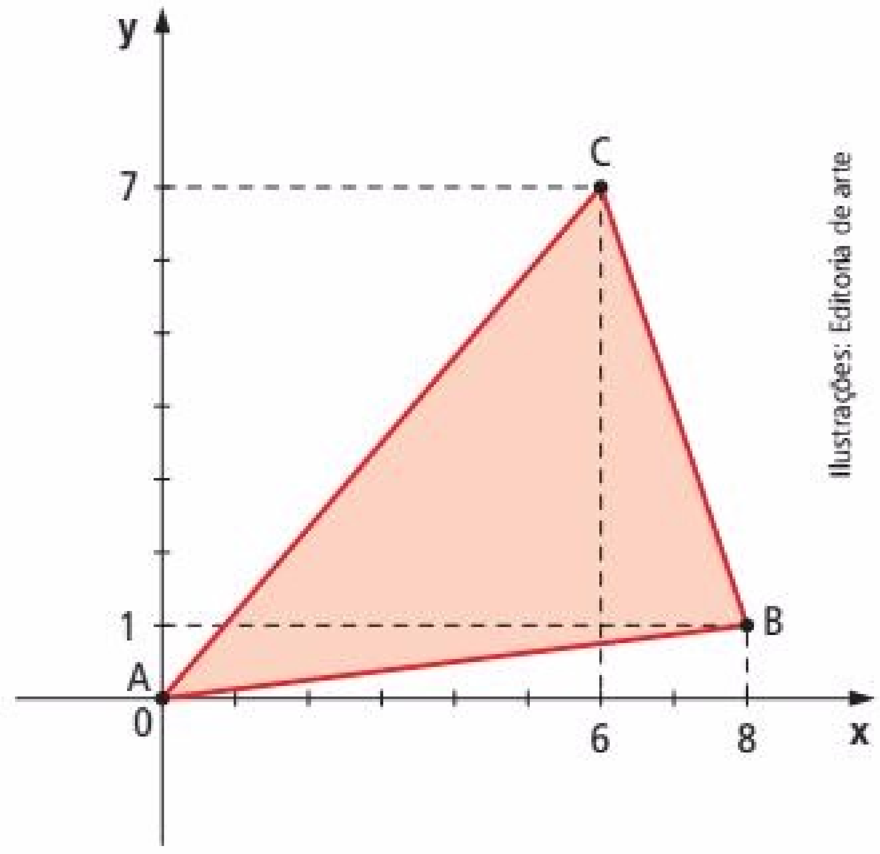


$\alpha = 0°$
$\text{tg}\ \alpha = 0$, ou seja, $m = 0$



Exercícios resolvidos

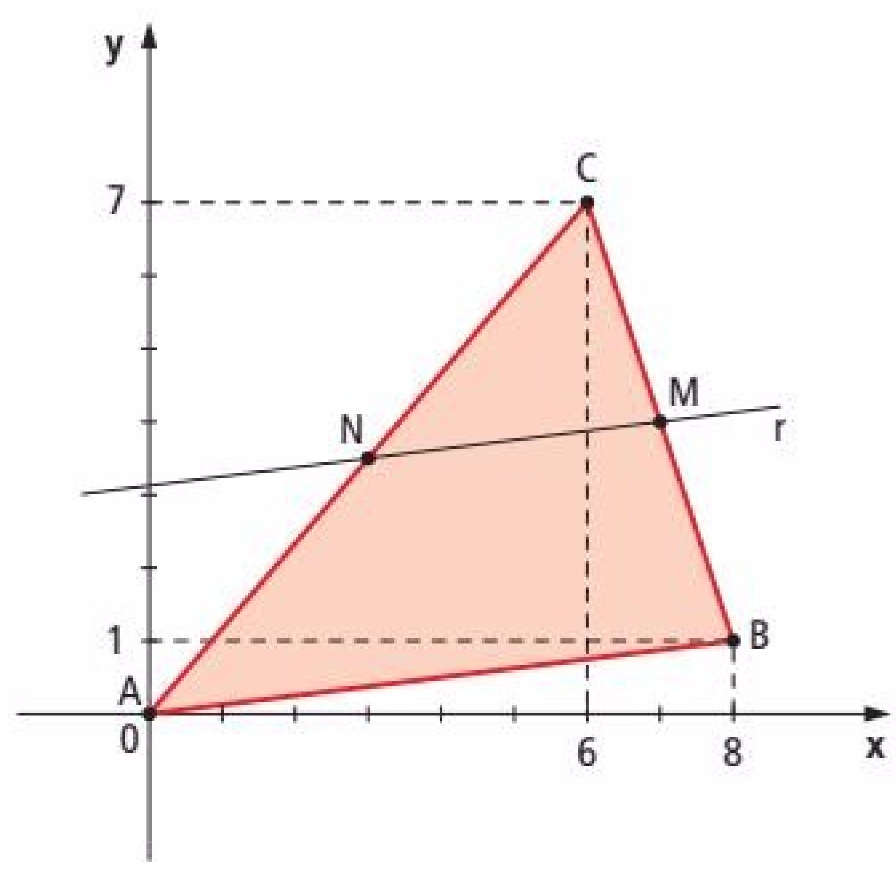
12 Determine a equação geral da reta que une os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC mostrado na figura.



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

Da figura, temos:



Vamos determinar as coordenadas do ponto médio de $\overline{BC}$:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_M = \frac{8+6}{2} \Rightarrow x_M = 7$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_M = \frac{1+7}{2} \Rightarrow y_M = 4$$

Logo, M(7, 4).

Agora, vamos determinar as coordenadas do ponto médio de $\overline{CA}$:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_N = \frac{0+6}{2} \Rightarrow x_N = 3$$

$$y_N = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_N = \frac{0+7}{2} \Rightarrow y_N = \frac{7}{2}$$

Logo, $N\left(3, \frac{7}{2}\right)$.

A equação da reta *r* que passa pelos pontos *M* e *N* é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ 3 & \frac{7}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, temos:

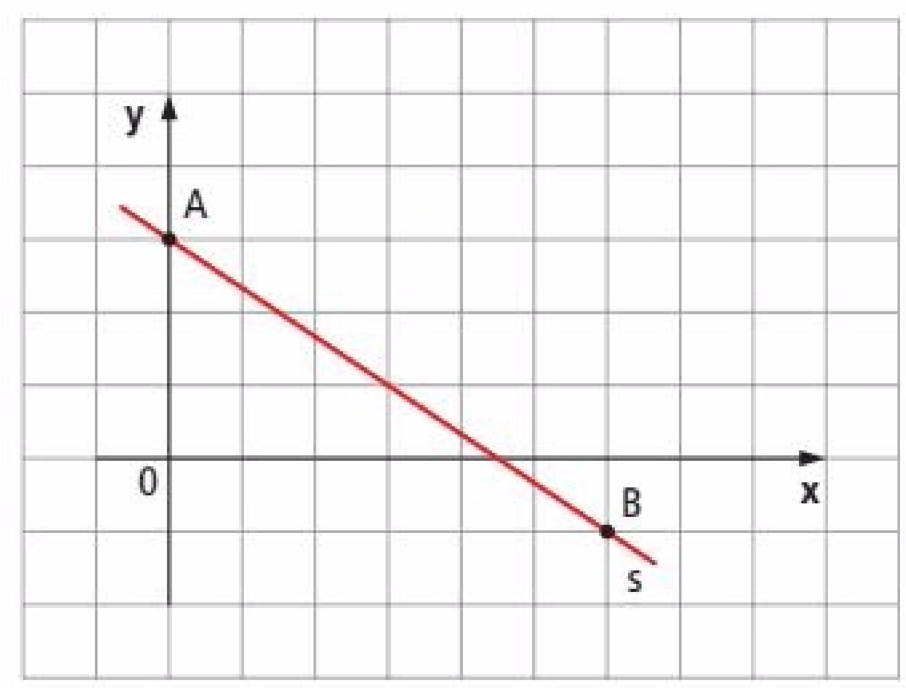
$$4x + 3y + \frac{49}{2} - 12 - 7y - \frac{7x}{2} = 0 \Rightarrow x - 8y + 25 = 0$$

Portanto, a equação geral é $x - 8y + 25 = 0$.

13 Calcule os coeficientes angulares das retas *r* e *s* nas seguintes situações:

a) a reta *r* passa pelos pontos A(3, 2) e B(−3, −1);

b) a reta *s* está representada na figura abaixo.

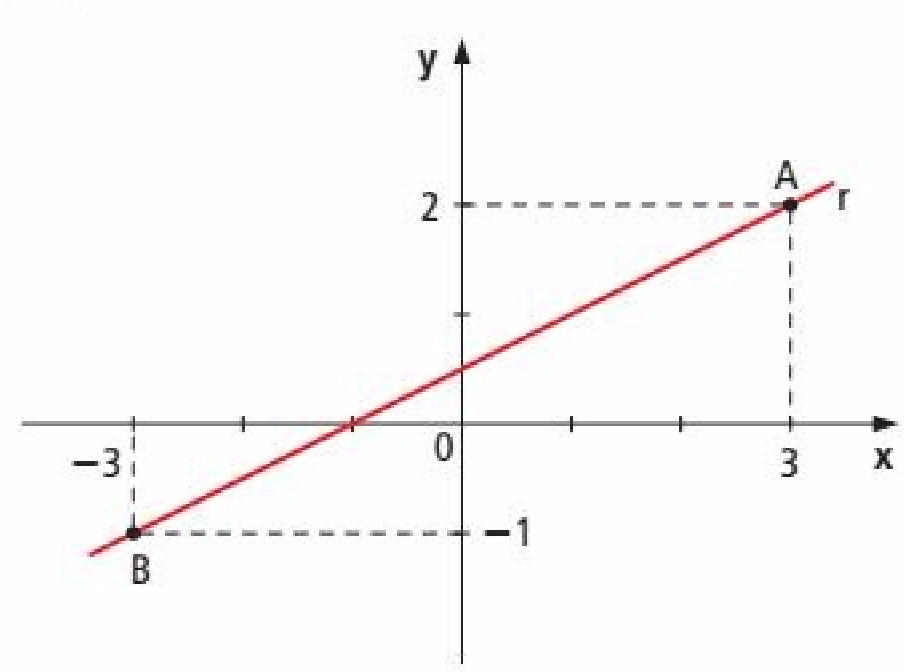


Resolução

a) Cálculo do coeficiente angular:

$$m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m_r = \frac{-1-2}{-3-3} \Rightarrow m_r = \frac{1}{2}$$

Para ilustrar, representamos a reta *r* no plano cartesiano:



b) De acordo com a figura, temos A(0, 3) e B(6, −1). Logo:

$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m_s = \frac{-1-3}{6-0} \Rightarrow m_s = -\frac{2}{3}$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

32. Escreva, na forma geral, a equação da reta que passa pelos pontos dados. Respostas possíveis.

a) A(4, 3) e B(−2, 5) $x + 3y - 13 = 0$

b) C(1, 3) e D(5, 6) $-3x + 4y - 9 = 0$

c) M(−3, 3) e N(−3, 5) $-2x - 6 = 0$

d) P(4, 2) e Q(−2, 2) $-6y + 12 = 0$

33. Sabendo que se um ponto pertence a uma reta, então suas coordenadas verificam a equação da reta, confirme se o ponto A(2, 2) pertence à reta de equação geral $2x + 3y - 10 = 0$. Sim.

34. (UniCeub-DF) Considere a reta cuja equação geral é $3x - 5y + 11 = 0$. Para que o ponto A(−8, m) pertença a essa reta, o valor de *m* é:

a) $-\frac{5}{13}$ X b) $-\frac{13}{5}$ c) $-\frac{33}{5}$ d) $\frac{13}{5}$ e) $\frac{5}{13}$

35. (FGV-RJ) Os pontos A(−1, m) e B(n, 2) pertencem à reta $2x - 3y = 4$. Calcule a distância entre *A* e *B*. $d(A, B) = 2\sqrt{13}$

36. Determine a equação da reta que passa pelo ponto P(2, 3) e pelo ponto *Q*, simétrico de *P* em relação à origem. $3x - 2y = 0$

37. Determine o valor de *k*, sabendo que a reta de equação $2x - y + 4 = 0$ passa pelo ponto médio do segmento de reta que une os pontos A(k, 1) e B(1, −k). −3

38. Determine o coeficiente angular e a equação geral da reta que passa pelos pontos A(0, 5) e B(4, 9). $m = 1$; $-x + y - 5 = 0$

39. Verifique se o ponto A(3, 1) pertence à reta *r* de equação $6x - 5y - 13 = 0$. $A \in r$

40. Dado o ponto A(−2, 3), calcule as coordenadas do ponto B(3k, k + 1) de modo que o coeficiente angular da reta AB seja $m = \frac{1}{2}$. B(−18, −5)

41. Determine o valor de *k* para que o ponto P(4k − 1, k + 3) pertença à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares. $k = 2$

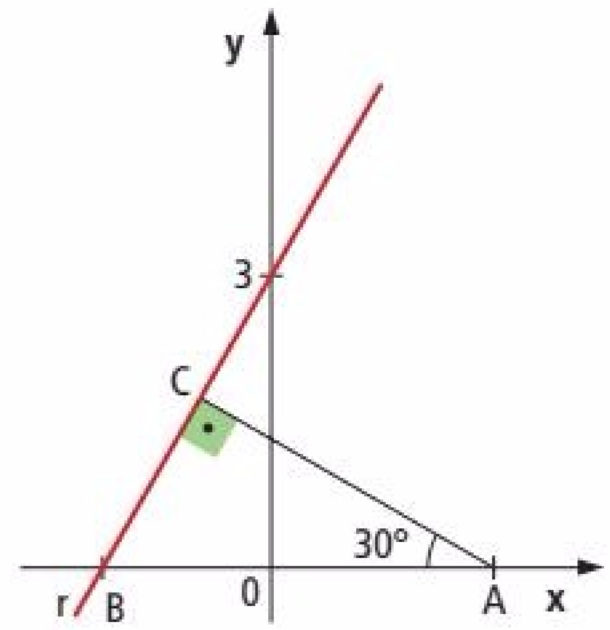
42. Determine a inclinação da reta (*r*) de equação $8x + 2y - 7 = 0$, sabendo que $\text{tg } 76° \simeq 4$. $\alpha = 104°$

43. (UFPR) Sabe-se que a reta *r* passa pelos pontos A(−2, 0) e P(0, 1) e que a reta *s* é paralela ao eixo das ordenadas e passa pelo ponto Q(4, 2). Se *B* é o ponto em que a reta *s* intercepta o eixo das abscissas e *C* é o ponto de intersecção das retas *r* e *s*, então o perímetro do triângulo ABC é:

X a) $3(3+\sqrt{5})$ c) $5(3+\sqrt{5})$ e) $5(5+\sqrt{3})$

b) $3(5+\sqrt{3})$ d) $3(3+\sqrt{3})$

44. (UEMS) A equação da reta *r* que passa pelo ponto (0, 3) e contém o segmento $\overline{BC}$ do triângulo ABC é:



a) $\sqrt{3}x + y - 3 = 0$

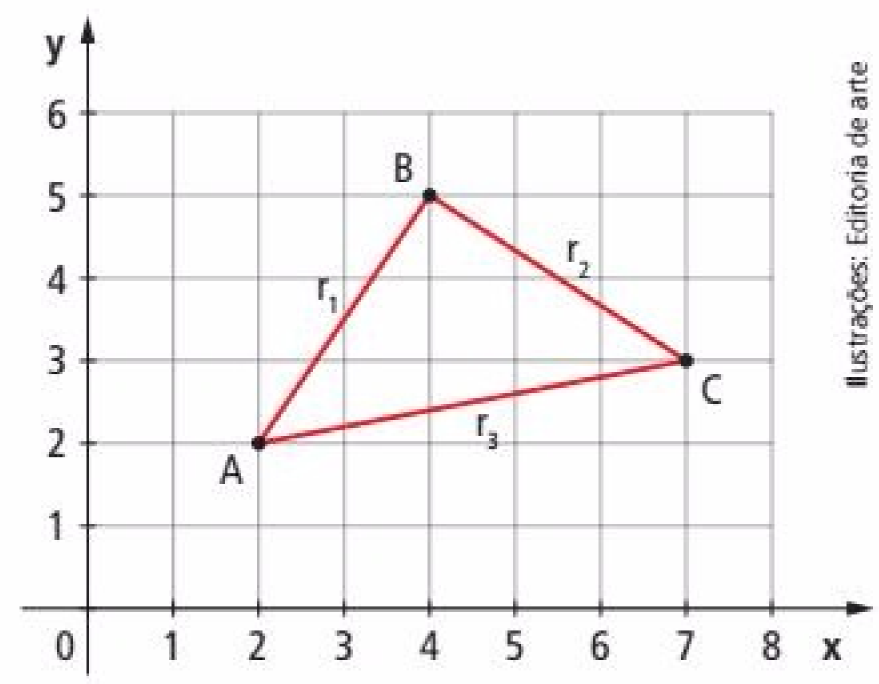
b) $\sqrt{3}x + y + 3 = 0$

X c) $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$

d) $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$

e) $x - \sqrt{3}y = 0$

45. (UFGD-MS) A figura abaixo mostra um triângulo ABC no plano cartesiano xy formado pelos segmentos de retas r_1, r_2 e r_3.



Ilustrações: Editoria de arte

Considerando as afirmativas relacionadas a essa figura, pode-se concluir que:

I. Os coeficientes angulares das retas r_1 e r_3 são dados por números reais positivos e o da reta r_2 é um número real menor do que 0,5.

II. A reta r_1 é dada por $y - \frac{3}{2}x = -1$ e a reta r_2 é dada por $y + \frac{2}{3}x = \frac{23}{3}$ e o ângulo formado pela intersecção dessas retas é de $\frac{\pi}{2}$ radianos.

III. A reta que passa por $\overline{AC}$ é dada por $y - \frac{1}{5}x = \frac{8}{5}$ e a reta representada pelo segmento $\overline{CA}$ é dada por $-y + \frac{1}{5}x = -\frac{8}{5}$.

Assinale a alternativa que apresenta todas as afirmativas corretas:

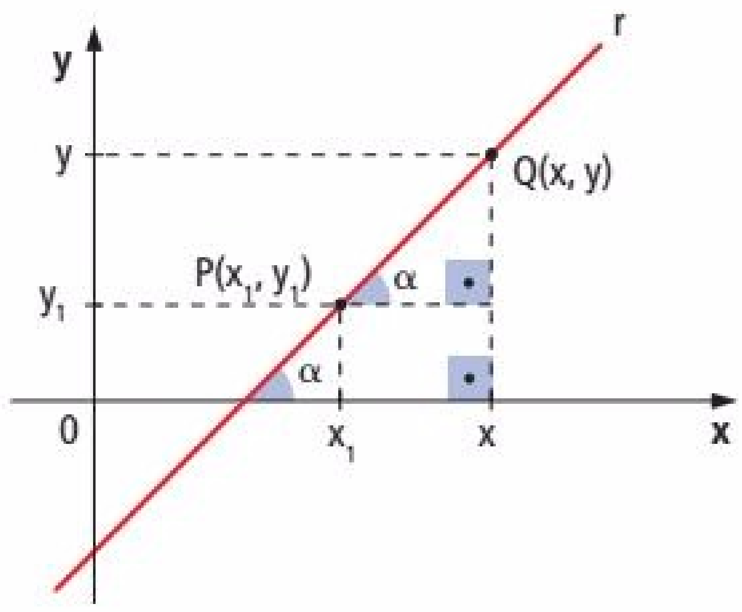
a) I. X b) I e II. c) I e III. d) II e III. e) I, II e III.

Equação fundamental da reta

Estudamos que conhecendo dois pontos, *A* e *B*, distintos, de uma reta podemos determinar sua equação.

Agora, vamos mostrar que dado um ponto *P* de uma reta *r* e seu coeficiente angular *m* podemos também determinar sua equação.

Considere uma reta *r* que passa pelo ponto $P(x_1, y_1)$ e tem coeficiente angular *m*. Para obtermos a equação dessa reta, vamos considerar um ponto Q(x, y) qualquer, distinto de *P* e pertencente a *r*.



Como $m = \text{tg}\,\alpha$, temos:

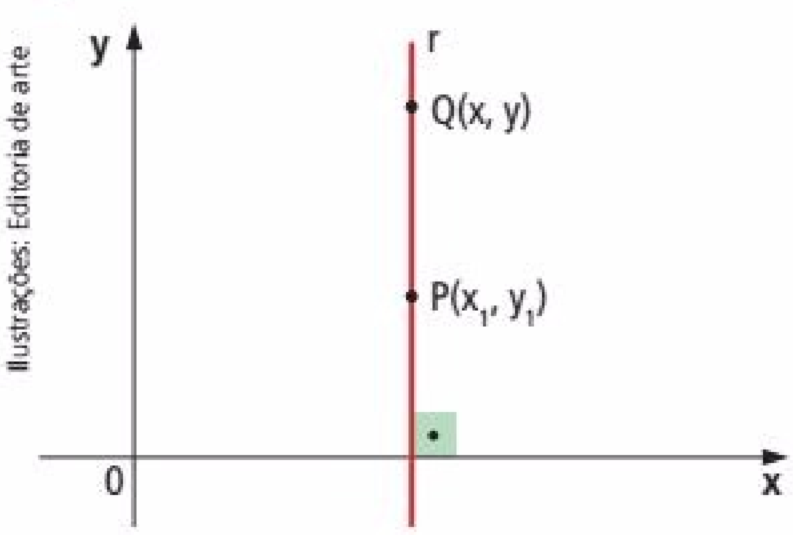
$$m = \text{tg}\,\alpha \Rightarrow m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

Assim, obtemos a denominada **equação fundamental da reta** em que *m* é o coeficiente angular da reta *r*:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Observação:

Ilustrações: Editoria de arte

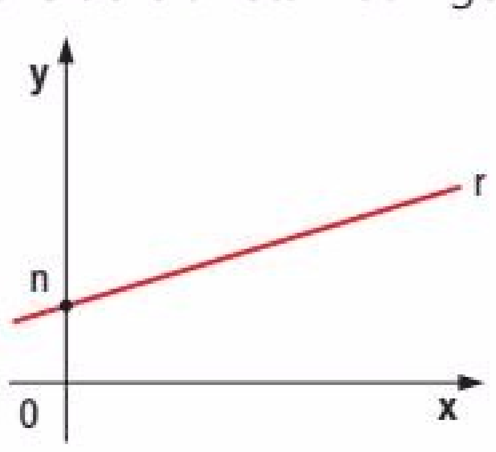


Se a reta *r* é paralela ao eixo *y*, ela não possui declividade e sua equação é da forma $x = x_1$.

Equação reduzida da reta

Verificamos acima que a equação de uma reta, conhecidos um ponto $P(x_1, y_1)$ pertencente a ela e seu coeficiente angular *m*, é dada por: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Considere a reta *r* da figura que passa pelo ponto P(0, n) e tem coeficiente angular *m*. A equação dessa reta é:



$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow \boxed{y = mx + n}$$

Essa equação é denominada **equação reduzida da reta**, em que *m* é o coeficiente angular e o número real *n*, ordenada do ponto no qual a reta corta o eixo *y*, é o **coeficiente linear** da reta.

$$y = \underbrace{m}_{\text{coeficiente angular}}x + \underbrace{n}_{\text{coeficiente linear}}$$

Quando uma reta está representada por sua equação geral, $ax + by + c = 0$, podemos obter a equação reduzida isolando *y* em função de *x*. Observe:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b} \Rightarrow y = \underbrace{\left(-\frac{a}{b}\right)}_{m}x + \underbrace{\left(-\frac{c}{b}\right)}_{n}$$

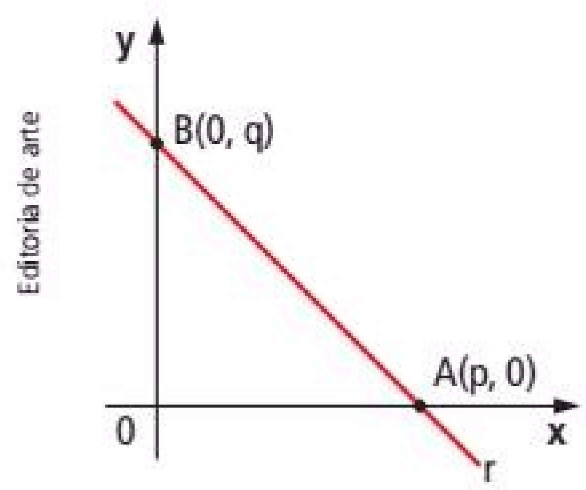
Se fizermos $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = n$, $b \neq 0$, teremos a forma reduzida: $y = mx + n$.

Observação:

Sendo $ax + by + c = 0$, $b \neq 0$ a equação geral de uma reta *r*, então $-\frac{a}{b} = m$ (coeficiente angular) e $-\frac{c}{b} = n$ (coeficiente linear). A equação reduzida $y = mx + n$ de uma reta é bastante explorada em problemas que envolvem a ideia de função afim. De modo geral, muitas situações envolvendo o conceito de função podem ser resolvidas utilizando ideias da Geometria analítica.

Equação segmentária da reta

Consideremos uma reta *r* que intersecta o eixo *x* no ponto $A(p, 0)$ e o eixo *y* no ponto $B(0, q)$, com $p \neq 0$ e $q \neq 0$.



De acordo com o gráfico, obtemos o coeficiente angular da reta *r*:

$$m_r = \frac{q - 0}{0 - p} = -\frac{q}{p}$$

Como temos o coeficiente angular e um ponto da reta, *A* ou *B*, podemos escrever a equação fundamental da reta. Considerando o ponto *B*, temos:

$$y - y_B = m_r(x - x_B) \Rightarrow y - q = -\frac{q}{p}(x - 0) \Rightarrow py - qp = -qx \Rightarrow qx + py = qp$$

Dividindo ambos os membros da equação por qp, temos:

$$qx + py = qp \Rightarrow \frac{\cancel{q}x}{\cancel{q}p} + \frac{\cancel{p}y}{q\cancel{p}} = \frac{\cancel{qp}}{\cancel{qp}} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

Assim, obtemos a chamada **equação segmentária** de uma reta *r* que intersecta o eixo *x* no ponto $A(p, 0)$ e intersecta o eixo *y* no ponto $B(0, q)$, com $p \neq 0$ e $q \neq 0$.

Equações paramétricas da reta

Estudamos até aqui as equações que fazem a relação direta entre as coordenadas (x, y) de um ponto qualquer. Entretanto, existe outra forma de representar a equação de uma reta na qual cada uma das variáveis *x* e *y* são expressas em função de uma terceira variável denominada **parâmetro**.

Considerando uma reta *r* formada por todos os pares ordenados $(f(t), g(t))$, em que *f* e *g* são funções afins, as equações $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ são chamadas **equações paramétricas** de *r* com parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Por exemplo, vamos determinar as equações reduzida e fundamental de *r* dada por: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$.

Para obter as equações que relacionam apenas as variáveis *x* e *y* devemos eliminar a variável *t*.

$$\begin{cases} x = 3t \Rightarrow t = \frac{x}{3} & \text{(I)} \\ y = 1 + 2t & \text{(II)} \end{cases}$$

e substituindo (I) em (II), obtemos:

$$y = 1 + 2 \cdot \frac{x}{3} \Rightarrow y = \frac{2x}{3} + 1 \longrightarrow \text{equação reduzida}$$

$$y = \frac{2x}{3} + 1 \Rightarrow 3y = 2x + 3 \Rightarrow 3y - 2x - 3 = 0 \longrightarrow \text{equação fundamental da reta}$$

Exercícios resolvidos

14 Sejam A(−1, 2) e B(3, 4) pontos de uma reta *s*.

a) Calcule o coeficiente angular *m* da reta *s*.

b) Determine a equação de *s*, utilizando a equação fundamental.

c) Determine a equação da reta *s*, utilizando a condição de alinhamento de três pontos.

Resolução

a) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{4-2}{3-(-1)} \Rightarrow m = \frac{2}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

b) Vamos determinar a equação da reta *s*, utilizando o ponto A(−1, 2) e a declividade $m = \frac{1}{2}$.

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y - 4 = x + 1 \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$

c) Considerando um ponto P(x, y) da reta *s*, temos A(−1, 2), B(3, 4) e P(x, y) alinhados.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6 - 4x + y + 2x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2x + 4y - 10 = 0 \Rightarrow \ x - 2y + 5 = 0$

15 Determine a equação reduzida da reta que passa pelo ponto P(0, 3) e tem inclinação $\alpha = 45°$.

Resolução

P(0, 3) é o ponto em que a reta intersecta o eixo *y*. Logo, n = 3 (coeficiente linear). O coeficiente angular é m = tg 45°, ou seja, m = 1.

Portanto, a equação reduzida é $y = 1 \cdot x + 3$, ou seja, $y = x + 3$.

16 Dada a reta de equação $-2x + 3y - 4 = 0$, determine seu coeficiente angular e seu coeficiente linear.

Resolução

Vamos escrever a equação da reta na forma reduzida.

$-2x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow 3y = 2x + 4 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

Logo, o coeficiente angular é $m = \frac{2}{3}$ e o coeficiente linear é $n = \frac{4}{3}$.

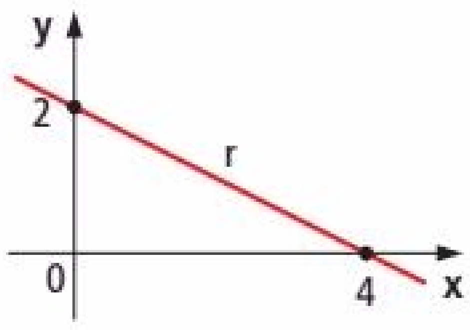
17 Uma reta *r* tem equação $x + 2y = 4$. Escreva essa equação na forma segmentária e represente a reta no plano cartesiano.

Resolução

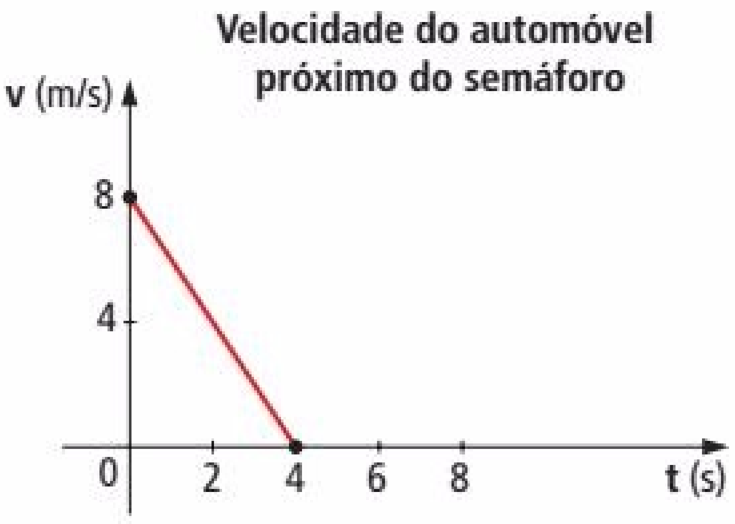
$x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow x + 2y = 4 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{2y}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ → equação segmentária

Observando a equação, podemos dizer que a reta *r* intersecta os eixos *x* e *y* nos pontos (4, 0) e (0, 2), respectivamente. A representação gráfica é:



18 O gráfico mostra a velocidade de um automóvel em função do tempo ao se aproximar de um semáforo que passou para o vermelho. Qual a velocidade desse automóvel no instante 3 s?



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

A reta suporte do gráfico da velocidade passa pelos pontos (4, 0) e (0, 8). Sua equação segmentária é:

$\frac{t}{4} + \frac{v}{8} = 1$

Fazendo t = 3 s, obtemos:

$\frac{3}{4} + \frac{v}{8} = 1 \Rightarrow 6 + v = 8 \Rightarrow v = 2$

Portanto, no instante 3 s a velocidade do automóvel é 2 m/s.

19 Determine a equação geral da reta definida pelas equações paramétricas: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Resolução

Vamos eliminar o parâmetro *t* dessas equações.

Da segunda equação, vem: $t = 1 - y$

Substituindo *t* na primeira equação:

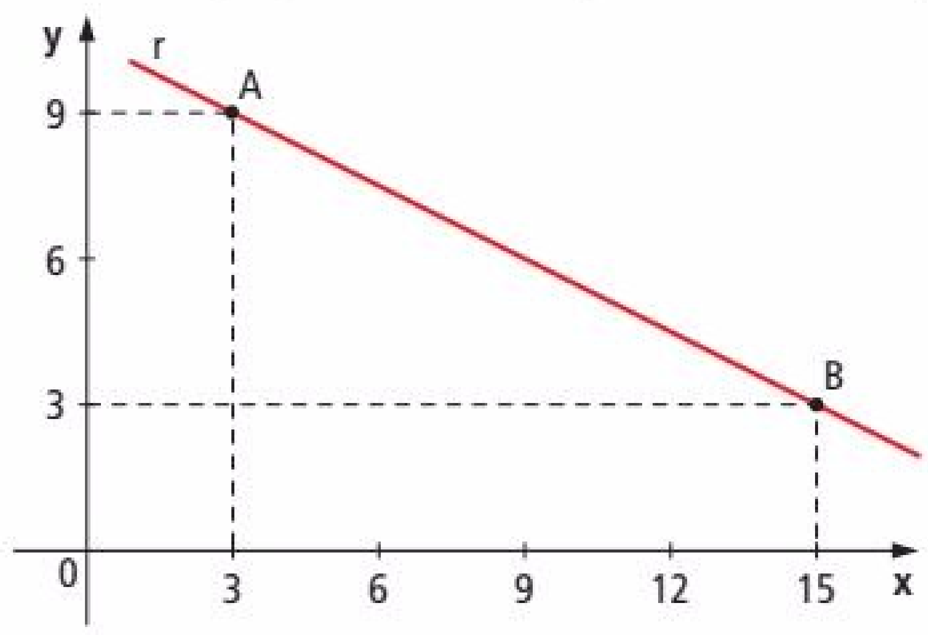
$x = 4 + 2(1 - y) \Rightarrow x = 4 + 2 - 2y \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2y - 6 = 0$ → equação geral

46. O coeficiente angular de uma reta é $m = -\frac{2}{3}$. Determine a equação dessa reta sabendo que ela passa pelo ponto $(4, -2)$. $2x + 3y - 2 = 0$

47. Verifique se o ponto $P(4, 17)$ pertence à reta que passa pelo ponto $A(2, 3)$ e tem coeficiente angular $m = 7$. Sim.

48. Determine a equação da reta *r* representada na figura.



a) Utilizando a equação $y - y_1 = m(x - x_1)$. $x + 2y - 21 = 0$

b) Utilizando a condição de alinhamento de três pontos. $x + 2y - 21 = 0$

49. Determine a equação da reta *r* nos seguintes casos:

a) *r* passa pelo ponto $P(2, 3)$ e tem coeficiente angular igual a 0. $y = 3$ ou $y - 3 = 0$

b) *r* passa pelo ponto $Q(-1, 3)$ e é paralela ao eixo *y*. $x = -1$ ou $x + 1 = 0$

50. Determine *k*, sabendo que a inclinação da reta que passa pelos pontos $A(k, 3)$ e $B(-1, -4)$ é de 45°. $k = 6$

51. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $P(2, 5)$ e tem uma inclinação de 135°. $x + y - 7 = 0$

52. Qual é a equação reduzida da reta que tem o coeficiente angular $m = 2$ e que corta o eixo *y* no ponto $(0, -3)$. $y = 2x - 3$

53. Determine o coeficiente angular da reta que tem como equação $3x + 4y = 7$. $m = -\frac{3}{4}$

54. Determine os coeficientes angular e linear da reta:

a) *r* cuja equação é $5x - 6y = -3$; $m = \frac{5}{6}; n = \frac{1}{2}$

b) *s* cuja equação é $y - 4 = -3(x + 1)$; $m = -3; n = 1$

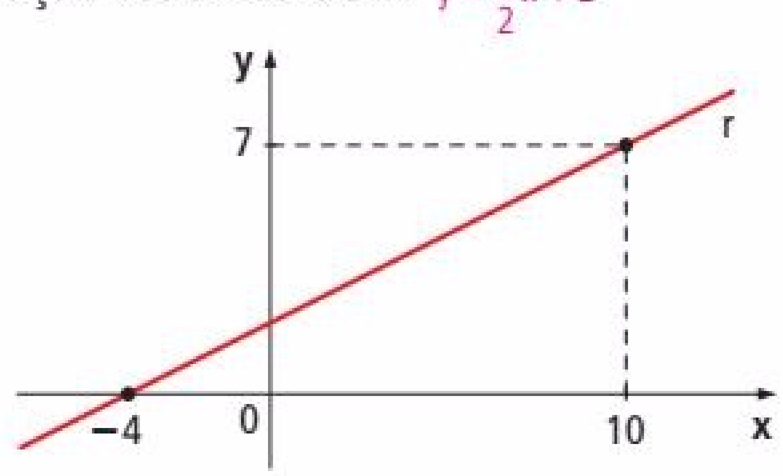
c) *t* cuja equação é $y = 2x + 4$. $m = 2; n = 4$

55. Dado o gráfico da reta *r*, pede-se:

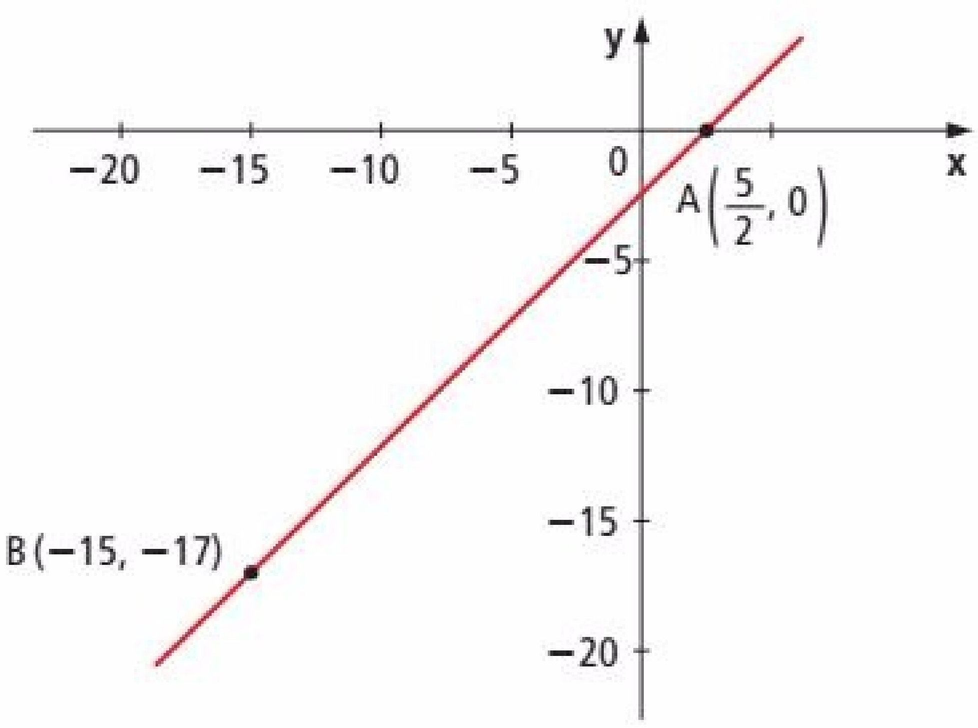
a) a equação geral de *r*; $x - 2y + 4 = 0$

b) a equação segmentária de *r*; $-\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$

c) a equação reduzida de *r*. $y = \frac{1}{2}x + 2$



56. (UFF-RJ) Embora não compreendam plenamente as bases físicas da vida, os cientistas são capazes de fazer previsões surpreendentes. Freeman J. Dayson, por exemplo, concluiu que a vida eterna é de fato possível. Afirma que, no entanto, para que tal fato se concretize, o organismo inteligente precisaria reduzir a sua temperatura interna e a sua velocidade de processamento de informações. Considerando-se *v* a velocidade cognitiva (em pensamento por segundo) e *T* a temperatura do organismo (em kelvin), Dayson explicitou a relação entre as variáveis $x = \log_{10} T$ e $y = \log_{10} v$ por meio do gráfico a seguir:



Ilustrações: Editoria de arte

Adaptado de: O destino da vida. **Scientific American Brasil**, n. 19, dez. 2003.

Sabendo-se que o gráfico da figura está contido em uma reta que passa pelos pontos $A = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ e $B = (-15, -17)$, assinale a alternativa que contém a equação que descreva a relação entre *x* e *y*.

x a) $y = \frac{34}{35}x - \frac{17}{7}$

b) $y = x - \frac{5}{2}$

c) $y = \frac{34}{30}x - \frac{17}{5}$

d) $y = \frac{5}{2}x - \frac{17}{5}$

e) $y = \frac{34}{35}x + \frac{5}{2}$

57. (Ufersa-RN) As equações paramétricas de uma reta são $x = 2t - 1$ e $y = 3t + 2$, onde $t \in \mathbb{R}$. As intersecções dessa reta com os eixos coordenados são os pontos:

a) $(-3, 0)$ e $(0, 2)$

b) $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ e $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ e $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$

d) $(-7, 0)$ e $(0, 7)$

x e) $\left(-\frac{7}{3}, 0\right)$ e $\left(0, \frac{7}{2}\right)$

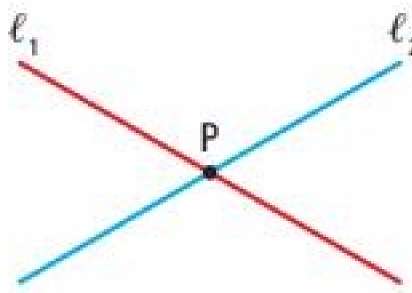
Posições relativas entre duas retas

No plano, duas retas ℓ_1 e ℓ_2 podem ser concorrentes, paralelas ou coincidentes. Podemos identificar a posição relativa entre essas retas resolvendo o sistema formado por suas equações, ou seja:

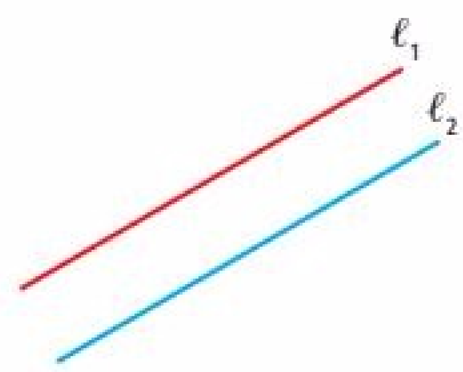
a) se o sistema possuir solução única (sistema possível e determinado), ℓ_1 e ℓ_2 são concorrentes.

b) se o sistema possuir infinitas soluções (sistema possível e indeterminado), ℓ_1 e ℓ_2 são coincidentes.

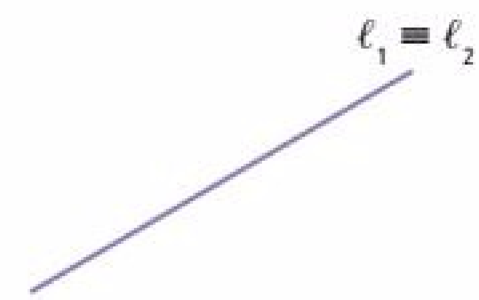
c) se o sistema não possuir solução (sistema impossível), ℓ_1 e ℓ_2 são paralelas.



Concorrentes ($\ell_1 \times \ell_2$)
$\ell_1 \cap \ell_2 = \{P\}$



Paralelas ($\ell_1 \,//\, \ell_2$)
$\ell_1 \cap \ell_2 = \{\ \}$



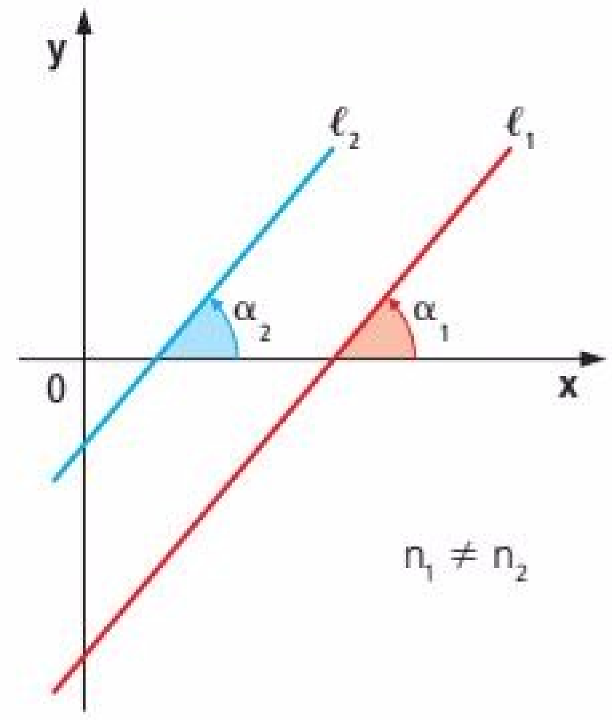
Coincidentes ($\ell_1 \equiv \ell_2$)
$\ell_1 \cap \ell_2 = \ell_1 = \ell_2$

Ilustrações: Editoria de arte

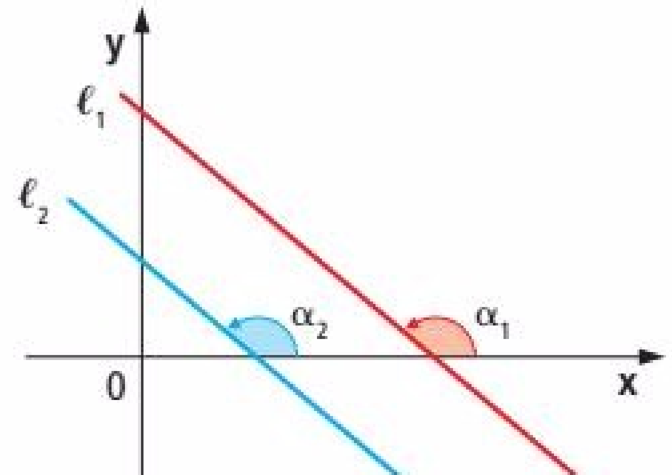
Também é possível conhecer a posição entre duas retas por meio de seus coeficientes angulares. Para isso, considere que a inclinação de ℓ_1: $y = m_1x + n_1$ é α_1 e a inclinação de ℓ_2: $y = m_2x + n_2$ é α_2.

1º caso: $m_1 = m_2$. Supondo $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 90°$, temos: $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \text{tg}\ \alpha_1 = \text{tg}\ \alpha_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

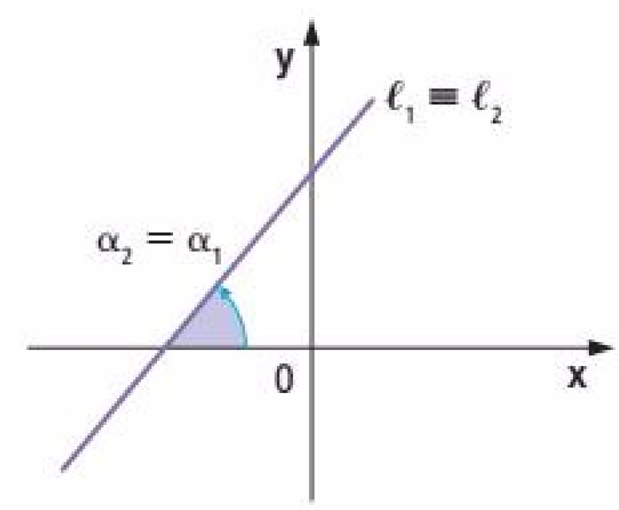
Nesse caso, as retas ℓ_1 e ℓ_2 são paralelas ($\ell_1 \,//\, \ell_2$), ou coincidentes ($\ell_1 \equiv \ell_2$). Observe que o que define se as retas são ou não coincidentes são os coeficientes lineares n_1 e n_2. Caso $n_1 = n_2$, então as retas serão coincidentes; caso $n_1 \neq n_2$, então as retas serão paralelas distintas.



$n_1 \neq n_2$

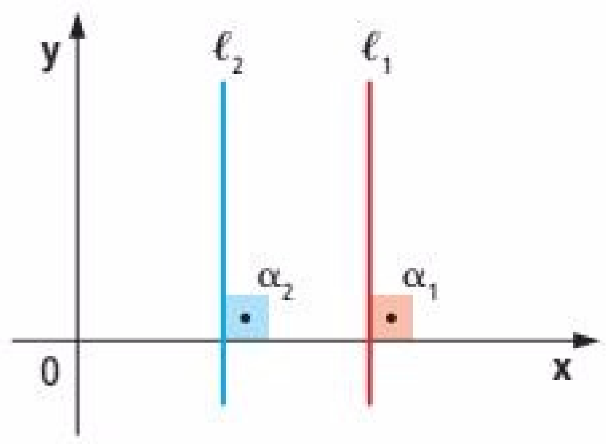


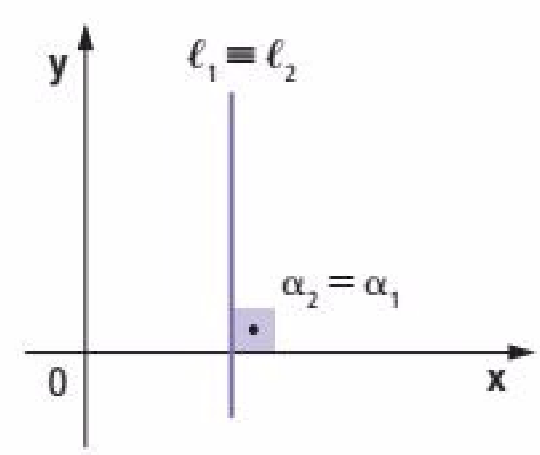
$n_1 \neq n_2$



$n_1 = n_2$

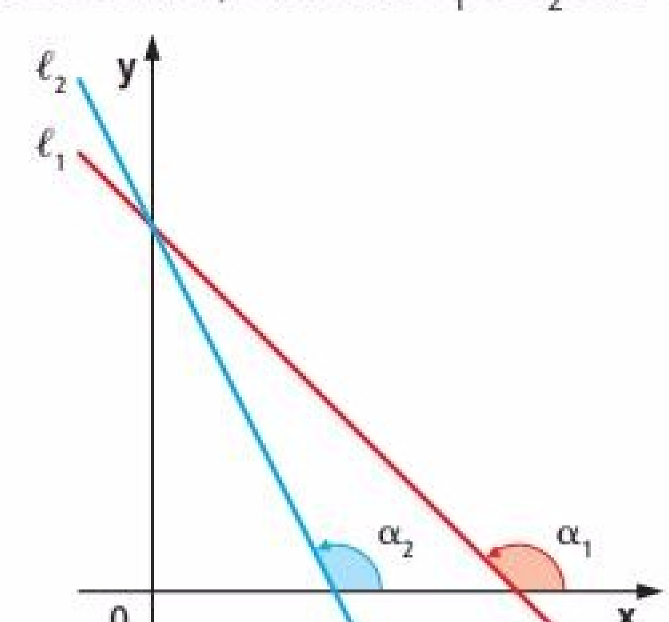
Porém, se $\alpha_1 = \alpha_2 = 90°$, então $m_1 = \text{tg}\ \alpha_1$ e $m_2 = \text{tg}\ \alpha_2$ não estão definidos, e as retas ℓ_1 e ℓ_2 são verticais.

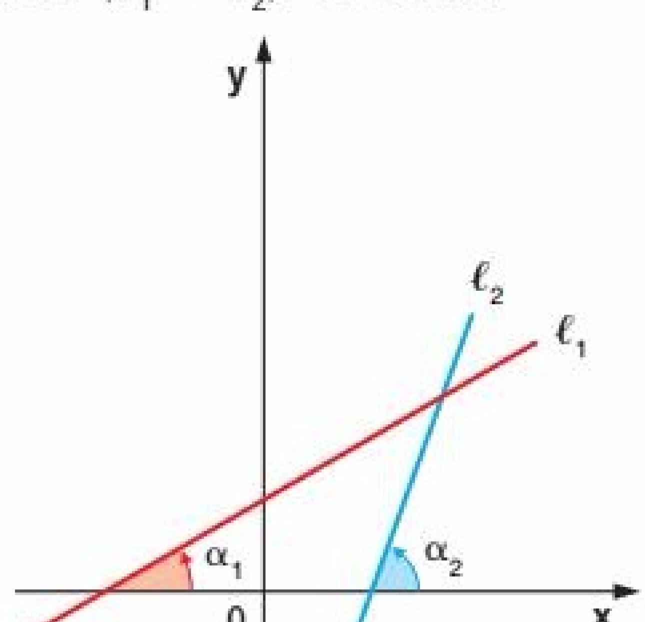


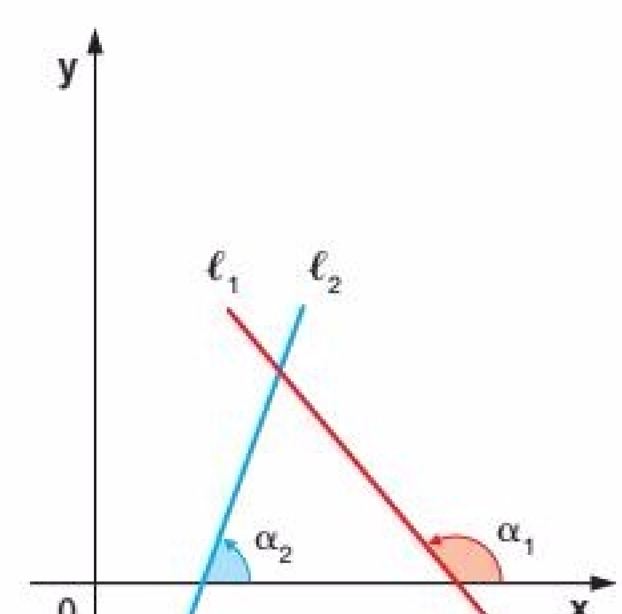


2º caso: $m_1 \neq m_2$. Supondo $\alpha_1 \neq 90°$ e $\alpha_2 \neq 90°$, temos: $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow \text{tg}\ \alpha_1 \neq \text{tg}\ \alpha_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2$

Nesse caso, as retas ℓ_1 e ℓ_2 são concorrentes ($\ell_1 \times \ell_2$). Observe:

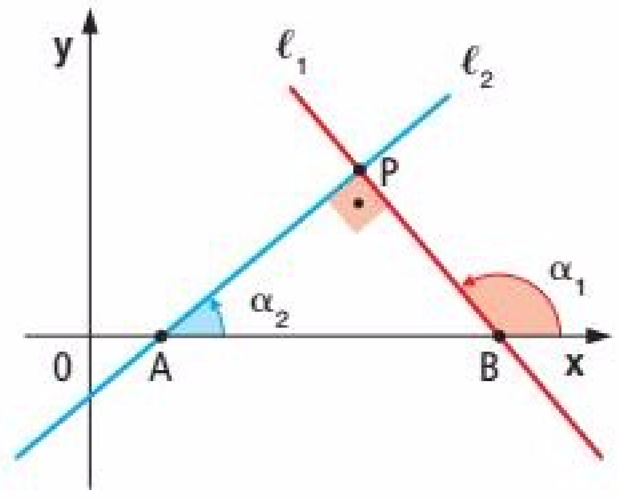






Vejamos a condição particular em que as retas ℓ_1 e ℓ_2 são perpendiculares ($\ell_1 \perp \ell_2$).

Consideremos duas retas, ℓ_1 e ℓ_2, concorrentes em um ponto *P*, de tal forma que nenhuma delas seja vertical e $\ell_1 \perp \ell_2$.



Ilustrações: Editoria de arte

Do triângulo APB, vem:

$\alpha_1 = \alpha_2 + 90° \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_1 = \text{tg}\ (\alpha_2 + 90°) \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_1 = \dfrac{\text{sen}\ (\alpha_2 + 90°)}{\cos\ (\alpha_2 + 90°)}$

$\Rightarrow \text{tg}\ \alpha_1 = \dfrac{\text{sen}\ \alpha_2 \cdot \cos 90° + \text{sen}\ 90° \cdot \cos \alpha_2}{\cos \alpha_2 \cdot \cos 90° - \text{sen}\ \alpha_2 \cdot \text{sen}\ 90°} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_1 = -\dfrac{\cos \alpha_2}{\text{sen}\ \alpha_2}$

$\Rightarrow \text{tg}\alpha_1 = -\dfrac{1}{\text{tg}\ \alpha_2}$

Como $\text{tg}\ \alpha_1 = m_1$ e $\text{tg}\ \alpha_2 = m_2$, temos:

$$\text{tg}\ \alpha_1 = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_2} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2},\ \text{com } m_1, m_2 \neq 0$$

Também é possível provar que a recíproca é verdadeira, ou seja, se $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$, então as retas ℓ_1 e ℓ_2 são perpendiculares.

Duas retas, ℓ_1 e ℓ_2, de coeficientes angulares m_1 e m_2, respectivamente, são perpendiculares se, e somente se, $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$, com $m_1, m_2 \neq 0$.

Note que:
$m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Exercícios resolvidos

20 Dê a equação da reta que passa pelo ponto A(3, −5) e é paralela à reta de equação $8x - 2y + 1 = 0$.

Resolução

Vamos determinar o coeficiente angular *m* da reta de equação $8x - 2y + 1 = 0$:

$-2y = -8x - 1$

$2y = 8x + 1$

$y = \dfrac{8}{2}x + \dfrac{1}{2}$

$y = 4x + \dfrac{1}{2}$

Logo, $m = 4$.

A reta pedida deve ter coeficiente angular $m = 4$ e passar pelo ponto $A(3, -5)$:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

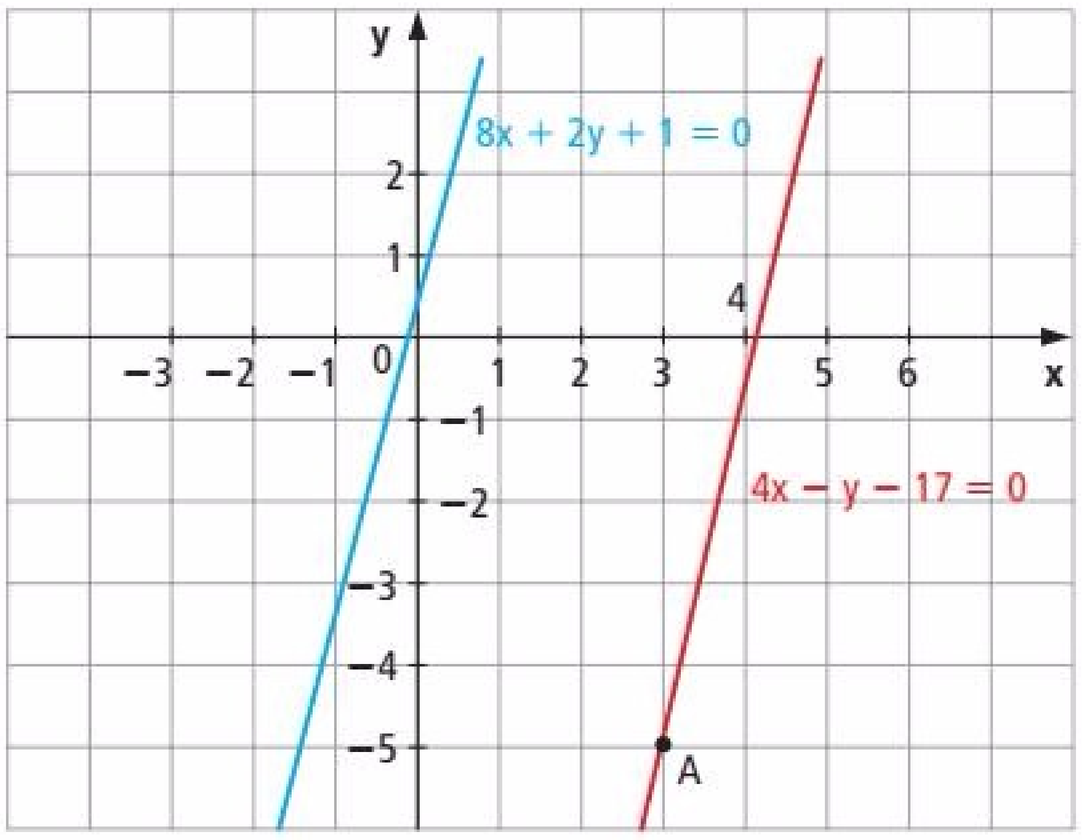
$y + 5 = 4(x - 3)$

$y + 5 - 4x + 12 = 0$

$4x - y - 17 = 0$

A equação da reta pedida é $4x - y - 17 = 0$.

Observe o gráfico a seguir.



21 Determine o valor de k para que a reta ℓ_1, de equação $kx - 9y - 1 = 0$, seja perpendicular à reta ℓ_2, de equação $2x + 6y - 3 = 0$.

Resolução

Sejam: $\begin{cases} m_1 \text{ o coeficiente angular de } \ell_1 \\ m_2 \text{ o coeficiente angular de } \ell_2 \end{cases}$

Cálculo de m_1:

$$kx - 9y - 1 = 0 \Rightarrow -9y = -kx + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9y = kx - 1 \Rightarrow y = \frac{k}{9}x - \frac{1}{9}$$

Portanto, $m_1 = \frac{k}{9}$.

Cálculo de m_2:

$$2x + 6y - 3 = 0 \Rightarrow 6y = -2x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$$

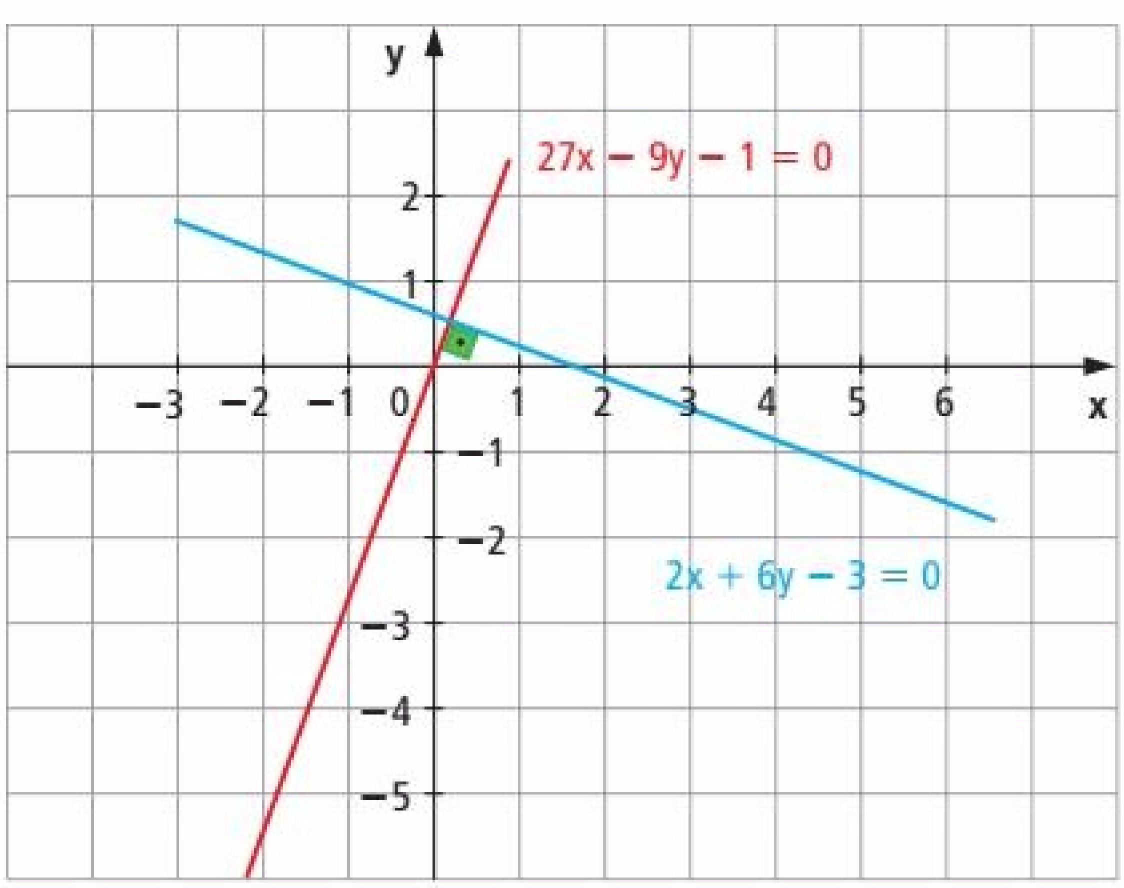
Portanto, $m_2 = -\frac{1}{3}$.

Aplicando a condição de perpendicularidade:

$$\ell_1 \perp \ell_2 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k}{9} = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow k = 27$$

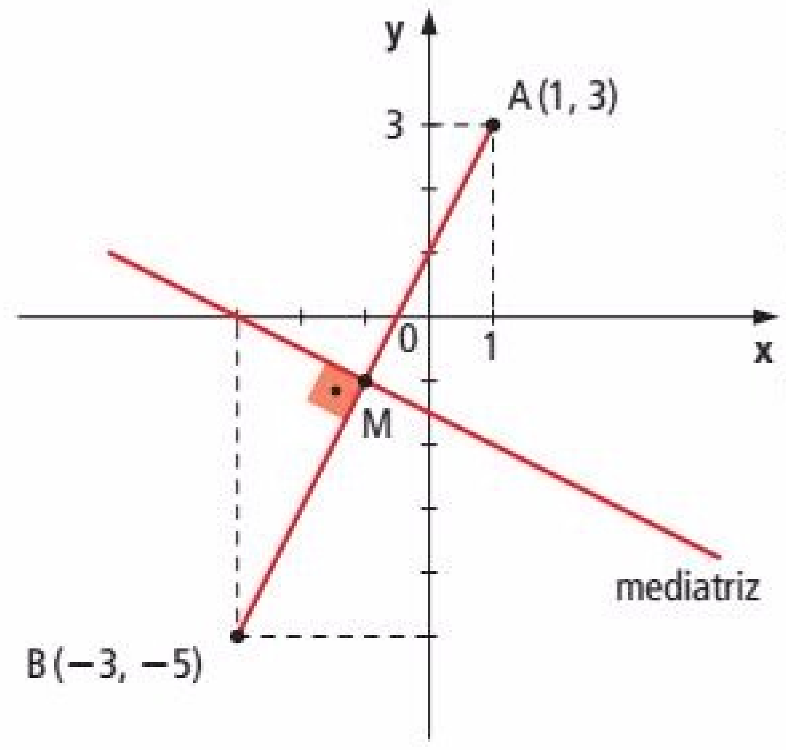
Observe o gráfico a seguir.



22 Dados os pontos A(1, 3) e B(−3, −5), determine a equação da mediatriz do segmento de reta AB.

Resolução

A mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular ao segmento de reta e que passa pelo seu ponto médio M.



Ilustrações: Editoria de arte

Coordenadas do ponto M:

$$x_M = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$
$$y_M = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Logo, $M(-1, -1)$

Cálculo de m_1, coeficiente angular da reta suporte do segmento de reta AB:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m_1 = \frac{-5-3}{-3-1} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Cálculo de m_2, coeficiente angular da mediatriz:

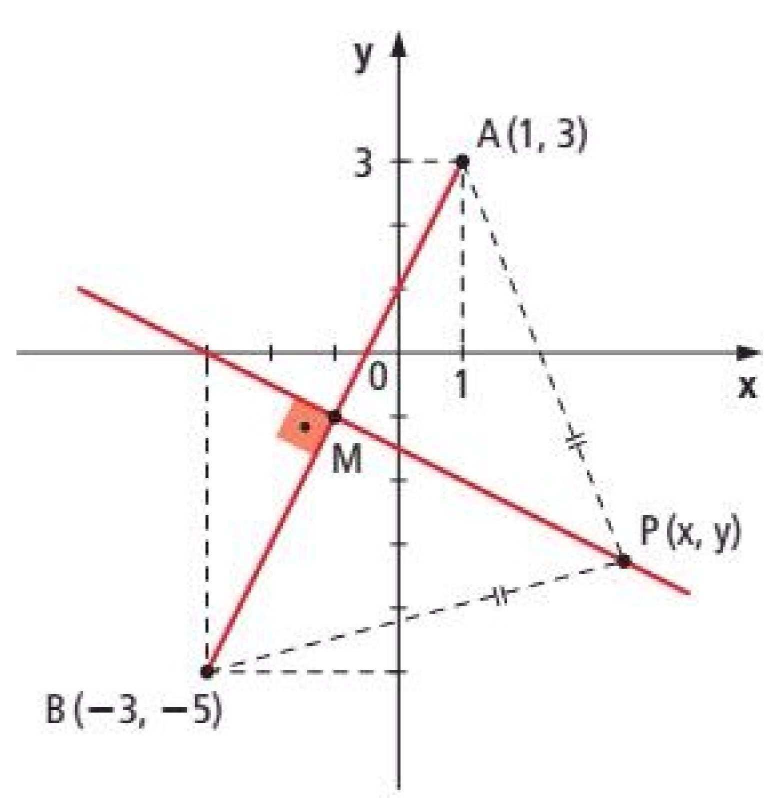
$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow 2 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2}$$

A mediatriz procurada tem coeficiente angular $m_2 = -\frac{1}{2}$ e passa pelo ponto $M(-1, -1)$:

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow x + 2y + 3 = 0$$

Outro modo de resolver o problema é lembrando que os pontos da mediatriz são equidistantes de A e B, ou seja, $d(A, P) = d(B, P)$. Veja:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+5)^2}$$
$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 6y + 9 = \cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} + 10y + 25$$
$$-2x - 6y + 10 = 6x + 10y + 34$$
$$8x + 16y + 24 = 0 \Rightarrow x + 2y + 3 = 0$$



58. Determine a posição relativa das retas *r* e *s* nos casos:

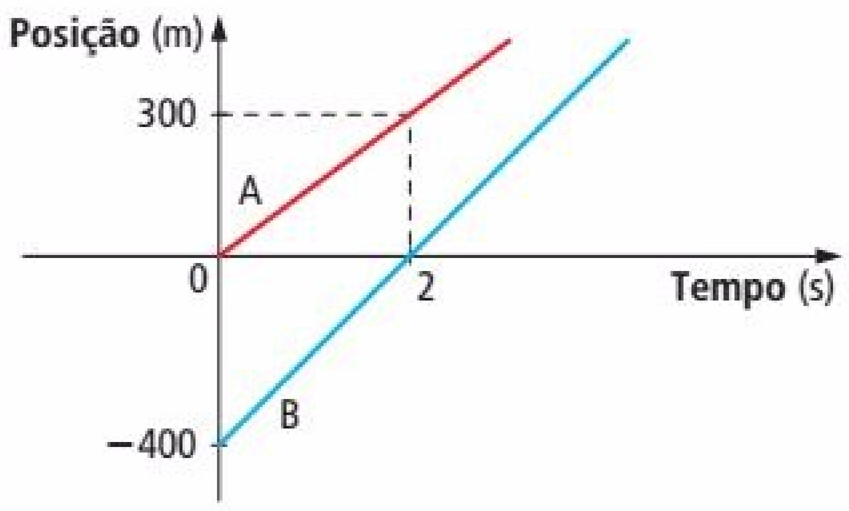
a) *r*: $6x + 4y - 3 = 0$ e *s*: $9x + 6y - 1 = 0$ *r* paralela a *s*.

b) *r*: $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ e *s*: $2x - y + 5 = 0$ *r* concorrente com *s*.

c) *r*: $x - y + 1 = 0$ e *s*: $\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \end{cases}$ *r* coincidente com *s*.

59. Determine a equação da reta paralela à reta suporte das bissetrizes dos quadrantes pares que passa pelo ponto P(−3, 4). $x + y - 1 = 0$

60. Dois mísseis, em treinamento de interceptação, deslocam-se em movimento retilíneo e uniforme numa mesma direção e sentido. O gráfico mostra a posição, em metros, desses mísseis no decorrer do tempo, em segundos.



Ilustrações: Editoria de arte

a) Qual o instante em que o míssil *B* intercepta o míssil *A*? 8 s

b) Em que posição eles se encontram? 1 200 m

61. (Senac-SP) Em um mapa, o marco zero de uma cidade planejada localiza-se no cruzamento dos eixos cartesianos ortogonais. A linha reta de metrô AB, indicada nesse mapa, passa pelos pontos de coordenadas A(−2, 3) e B(3, 6). Nas condições dadas, uma outra linha reta de metrô que passe pelo marco zero da cidade e que seja perpendicular à linha AB tem equação geral:

a) $-5x + 3y = 0$

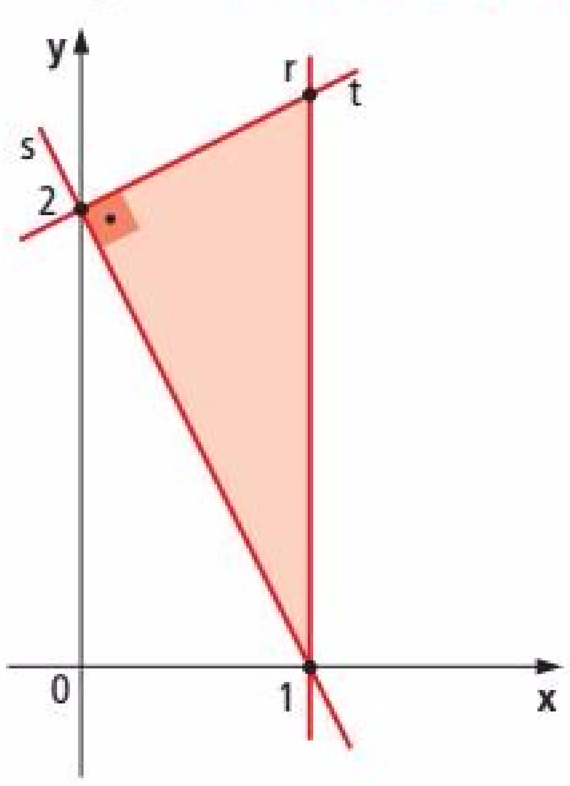
X b) $5x + 3y = 0$

c) $3x + 5y = 0$

d) $2x + 3y = 0$

e) $5x - 3y = 0$

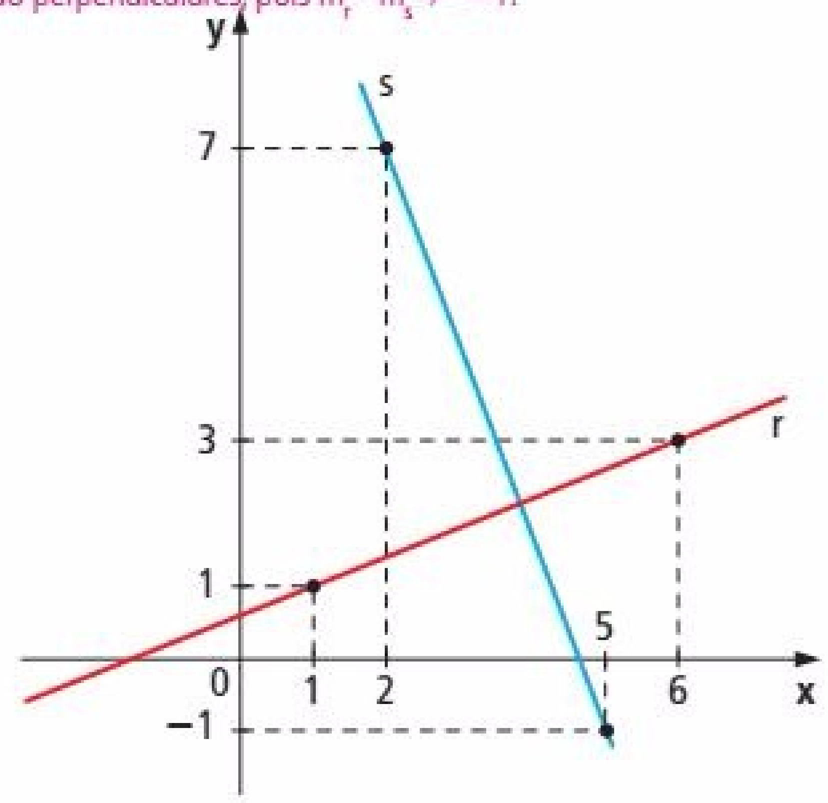
62. Determine as equações das retas suportes dos lados do triângulo da figura: *r*: $x = 1$; *s*: $y = -2x + 2$; *t*: $y = \frac{1}{2}x + 2$



$y - 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$ ou $2x - 3y + 8 = 0$

63. Determine a equação da reta que passa pelo ponto (−1, 2) e é paralela à reta de equação $2x - 3y - 6 = 0$.

64. (Vunesp-SP) Ache os coeficientes angulares das retas *r* e *s* da figura e verifique se elas são perpendiculares.
Elas não são perpendiculares, pois $m_r \cdot m_s \neq -1$.



65. (FEI-SP) Num triângulo retângulo ABC de hipotenusa $\overline{BC}$, tem-se B(1, 1) e C(3, −2). O cateto que passa por *B* é paralelo à reta $3x - 4y + 2 = 0$. Determine as equações das retas suportes dos dois catetos.
$3x - 4y + 1 = 0$ e $4x + 3y - 6 = 0$

66. (FGV-SP) Dada a reta de equação: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 0$, determine o valor de *m* para que ela seja perpendicular à reta $x = 5$. $m = -2$

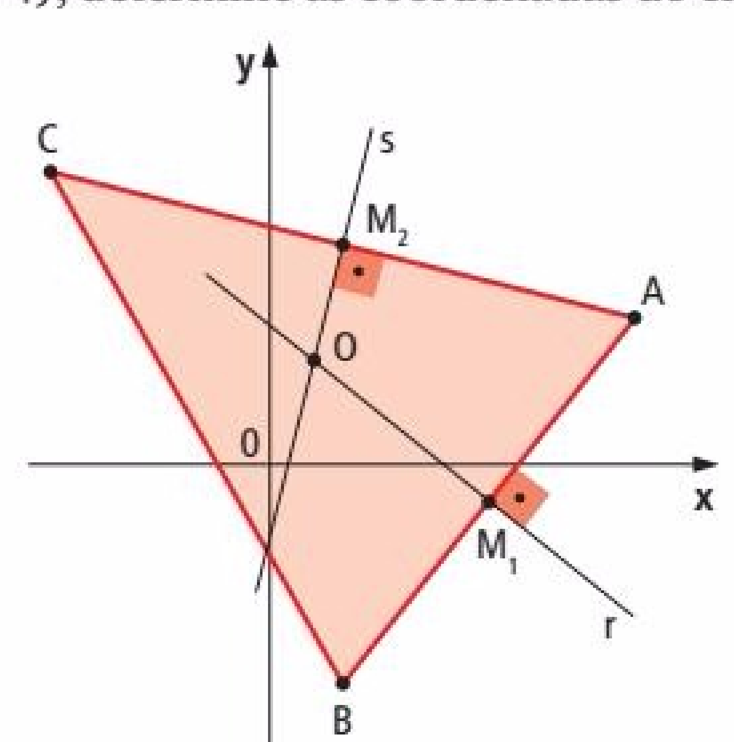
67. (Fuvest-SP) São dados os pontos A(2, 3) e B(8, 5).

a) Ache a equação da reta $\overline{AB}$. $x - 3y + 7 = 0$

b) Ache a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
$3x + y - 19 = 0$

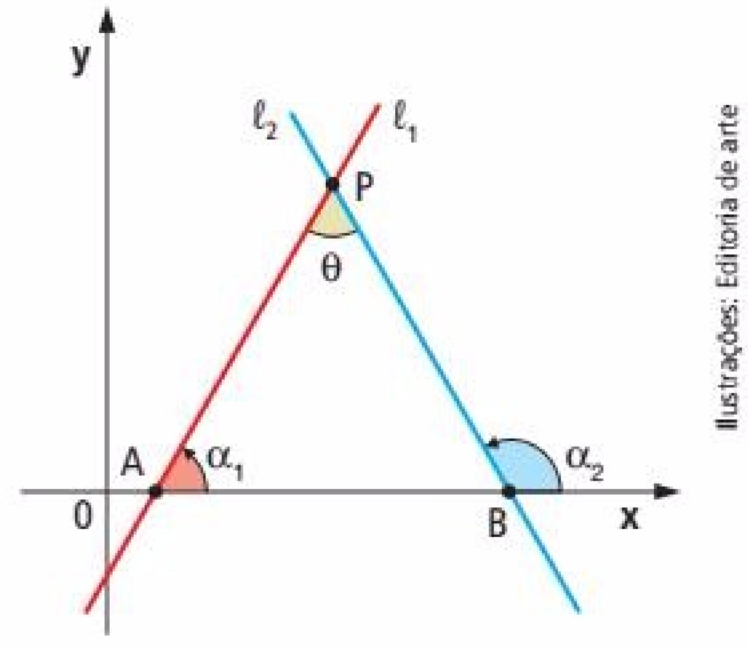
68. Os pontos correspondentes aos vértices do triângulo ABC são A(1, −2), B(−2, 4) e C(3, 3). Mostre que a reta suporte da altura do triângulo ABC relativa ao vértice *C* tem equação $2y - x - 3 = 0$.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

69. Chama-se circuncentro o ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo. Se um triângulo ABC tem como vértices os pontos A(5, 2), B(1, −3) e C(−3, 4), determine as coordenadas do circuncentro.
$O\left(\frac{29}{48}, \frac{17}{12}\right)$



Ângulo entre duas retas

A figura mostra duas retas concorrentes ℓ_1 e ℓ_2, não perpendiculares entre si e de coeficientes angulares m_1 e m_2, respectivamente.



$tg\ \alpha_1 = m_1$; $tg\ \alpha_2 = m_2$; $m_1 \neq m_2$

Indicamos por θ a medida do ângulo agudo formado pelas retas ℓ_1 e ℓ_2. No triângulo PAB temos:

$$\alpha_2 = \theta + \alpha_1 \Rightarrow \theta = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow tg\ \theta = tg(\alpha_2 - \alpha_1),\ \text{com}\ \alpha_2 > \alpha_1$$

No capítulo 2 do volume 2 desta coleção, estudamos que conhecendo os valores da tangente de dois arcos é possível realizar a subtração com esses arcos.

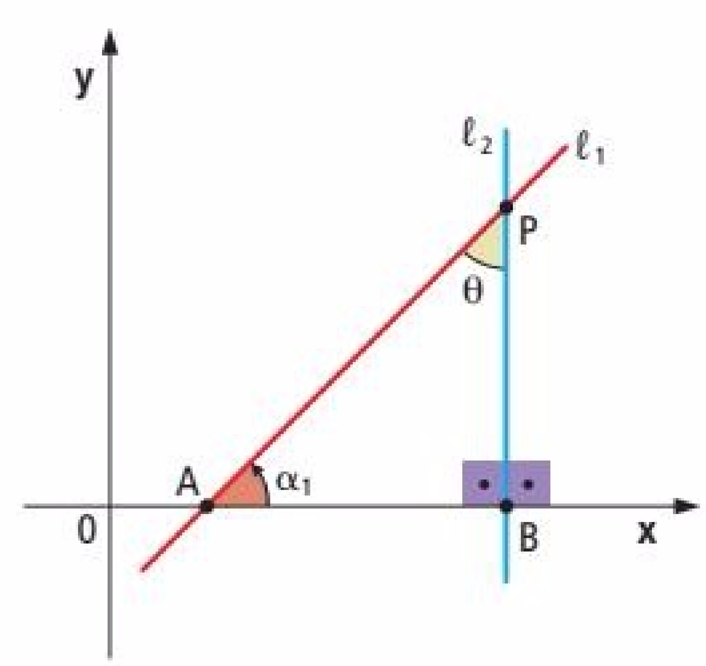
Como θ é agudo, $tg\ \theta > 0$, então:

$$tg\ \theta = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1} \Rightarrow tg\ \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$$

Porém se $\alpha_2 < \alpha_1$, teremos $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ e a expressão obtida para $tg\ \theta$ é o oposto daquela obtida acima. Então, de modo geral:

$$\boxed{tg\ \theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right|}$$

Caso particular



Quando uma das retas é vertical, no triângulo retângulo PBA, temos:

$$\theta + \alpha_1 = 90° \Rightarrow \theta = 90° - \alpha_1 \Rightarrow tg\ \theta = tg\,(90° - \alpha_1) \Rightarrow tg\ \theta = cotg\alpha_1 \Rightarrow tg\ \theta = \frac{1}{tg\ \alpha_1}$$

Como θ é agudo, $tg\ \theta > 0$. Contudo, $0° \leqslant \alpha_1 < 180°$, ou seja, m_1 pode ser positivo ou negativo. Então, de modo geral, temos:

$$\boxed{tg\ \theta = \left|\frac{1}{m_1}\right|}$$

Exercícios resolvidos

23 Determine o ângulo agudo formado pelas retas:

a) $2x - y + 1 = 0$ e $3x + y - 2 = 0$

b) $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ e $x - 5 = 0$

Resolução

a) Cálculo de m_1:

$2x - y + 1 = 0 \Rightarrow -y = -2x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow m_1 = 2$

Cálculo de m_2:

$3x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -3x + 2 \therefore m_2 = -3$

Cálculo de θ:

$$\text{tg}\ \theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right| \Rightarrow \text{tg}\ \theta = \left|\frac{-3-2}{1+(-3)\cdot(2)}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\ \theta = \left|\frac{-5}{-5}\right| \Rightarrow \text{tg}\ \theta = |1| \Rightarrow \theta = 45°$$

b) A reta de equação $x - 5 = 0$ é perpendicular ao eixo *x*, logo: $\text{tg}\ \theta = \left|\frac{1}{m_1}\right|$

Cálculo de m_1:

$\sqrt{3}x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2 \Rightarrow m_1 = \sqrt{3}$

Cálculo de θ:

$$\text{tg}\ \theta = \left|\frac{1}{m_1}\right| \Rightarrow \text{tg}\ \theta = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| \Rightarrow \text{tg}\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30°$$

24 Determine a equação da reta *r* que passa pelo ponto P(2, 3) e que forma um ângulo de 45° com a reta *s*, de equação $3x - 2y + 1 = 0$.

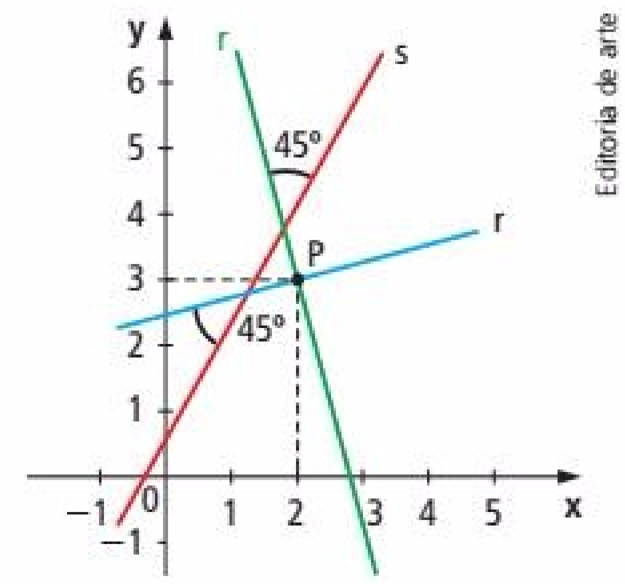
Resolução

Sejam: $\begin{cases} m_1 \text{ o coeficiente angular da reta } r \\ m_2 \text{ o coeficiente angular da reta } s \end{cases}$

Cálculo de m_2:

$3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow -2y = -3x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{2}$



Cálculo de m_1:

$$\text{tg}\ \theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right| \Rightarrow \text{tg}\ 45° = \left|\frac{\frac{3}{2} - m_1}{1 + \frac{3}{2} \cdot m_1}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \left|\frac{\frac{3}{2} - m_1}{1 + \frac{3}{2}m_1}\right| \Rightarrow \left|\frac{3 - 2m_1}{2 + 3m_1}\right| = 1$$

Resolvendo a equação modular:

$\frac{3 - 2m_1}{2 + 3m_1} = 1$ ou $\frac{3 - 2m_1}{2 + 3m_1} = -1$

$3 - 2m_1 = 2 + 3m_1$ | $3 - 2m_1 = -2 - 3m_1$

$5m_1 = 1$ | $m_1 = -5$

$m_1 = \frac{1}{5}$

Equação da reta *r*:

1º caso: $m_1 = \frac{1}{5}$

$y - 3 = \frac{1}{5}(x - 2) \Rightarrow y - 3 = \frac{x}{5} - \frac{2}{5}$

$5y - 15 = x - 2 \Rightarrow x - 5y + 13 = 0$

2º caso: $m_1 = -5$

$y - 3 = -5(x - 2) \Rightarrow y - 3 = -5x + 10$

$5x + y - 13 = 0$

As equações da reta *r* são:

$x - 5y + 13 = 0$ ou $5x + y - 13 = 0$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

70. Determine o ângulo agudo formado pelas retas:

a) $6x - 2y + 5 = 0$ e $4x + 2y - 1 = 0$ 45°

b) $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ e $3x + 2 = 0$ 60°

c) $x - 2 = 0$ e $y - 3 = 0$ 90°

d) $2x - 3y + 1 = 0$ e $6x = 9y$ 0°

71. A reta *r*, de coeficiente angular $m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, forma um ângulo de 30° com a reta *s*, cujo coeficiente angular é m_2. Calcule m_2. $m_2 = 0$ ou $m_2 = \sqrt{3}$

72. Determine o valor de *a* para que as retas $ax - y + 1 = 0$ e $2x - y = 0$ formem um ângulo de 45°. $a = -3$ ou $a = \frac{1}{3}$

73. A reta *r* passa pelo ponto A(1, 1) e forma um ângulo de 45° com a reta *s*, de equação $x - 2y + 2 = 0$. Determine a equação da reta *r*. $3x - y - 2 = 0$ ou $x + 3y - 4 = 0$

74. (UFGD-MS) Um mapa rodoviário foi desenhado sobre um sistema de coordenadas cartesianas e a rodovia principal obedece à equação $6x + 2y - 3 = 0$. Sabendo-se que existem outras duas rodovias que se cruzam na origem desse sistema de coordenadas e formam um ângulo de 45° com a rodovia principal, as equações dessas duas rodovias são:

a) $y = -x$ e $y = 2x$

b) $y = 2x$ e $y = -\frac{x}{3}$

c) $y = -x$ e $y = x$

X d) $y = -\frac{x}{2}$ e $y = 2x$

e) $y = -\frac{x}{3}$ e $y = 3x$

Distância entre ponto e reta

A distância entre um ponto *P* e uma reta *r* é a medida do segmento de reta, perpendicular a *r*, e que tem uma extremidade em *P* e outra em *r*.

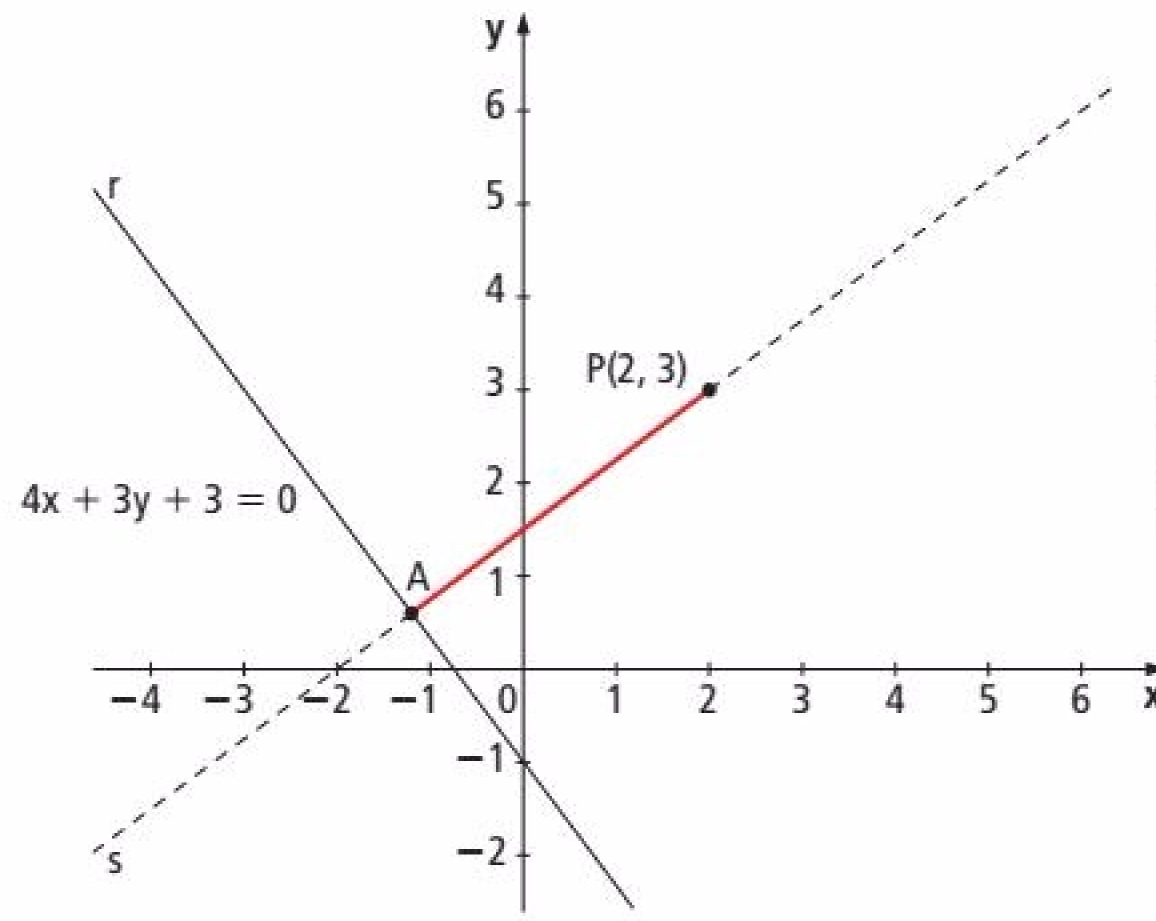
Considere um ponto P(2, 3) e uma reta *r* de equação $4x + 3y + 3 = 0$, conforme o gráfico ao lado.

Para calcular a distância entre o ponto *P* e a reta *r* precisamos:

a) determinar a equação da reta *s* que é perpendicular a *r*: $4x + 3y + 3 = 0$ e passa pelo ponto *P*;

b) encontrar o ponto *A*, que é a intersecção das retas *r* e *s*;

c) calcular a distância do ponto *P* ao ponto *A*, que é igual à distância entre o ponto *P* e a reta *r*.



Ilustrações: Editoria de arte

Sabendo que $m_r = -\frac{4}{3}$, podemos calcular o coeficiente da reta *s* perpendicular a *r* que passa por *P* e *A*. Assim, temos:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} \Rightarrow m_s = \frac{3}{4}$$

Como *s* passa por *P*, temos que sua equação é:

$$y - y_1 = m_s(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{3}{4}(x - 2) \Rightarrow 3x - 4y + 6 = 0$$

Como o ponto *A* é a intersecção de *r* e *s*, suas coordenadas são a solução do sistema formado pelas equações de *r* e *s*.

$$\begin{cases} 4x + 3y + 3 = 0 \\ 3x - 4y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_A = -\frac{6}{5} \text{ e } y_A = \frac{3}{5} \Rightarrow A = \left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Assim, a distância entre *A* e *P* é:

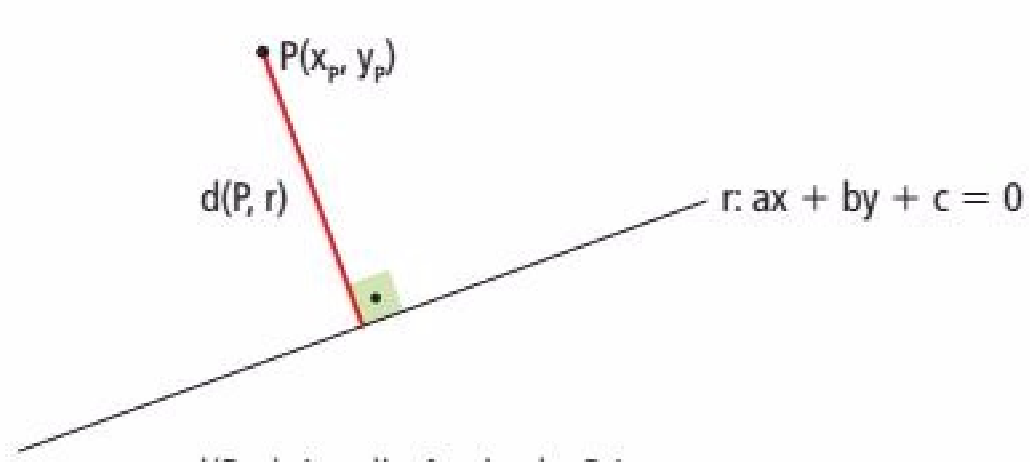
$$d(P, A) = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} \Rightarrow d(P, A) = \sqrt{\left[2 - \left(-\frac{6}{5}\right)\right]^2 + \left(3 - \frac{3}{5}\right)^2}$$

$$d(P, A) = \sqrt{\left[\frac{16}{5}\right]^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{25} + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{400}{25}} = \sqrt{16} = 4$$

Portanto, podemos afirmar que $d(P, r) = 4$.

Porém, é possível sistematizar todo o processo acima em uma fórmula que enunciamos abaixo por meio de um ponto e uma reta genérica:

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



d(P, r) é a distância de *P* à reta *r*.

Por exemplo, calcule a distância entre o ponto P(2, 3) e a reta r: $4x + 3y + 3 = 0$.

Podemos considerar que $x_p = 2$, $y_p = 3$, $a = 4$, $b = 3$ e $c = 3$. Aplicando esses valores na fórmula, temos:

$$d(P, r) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d(P, r) = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

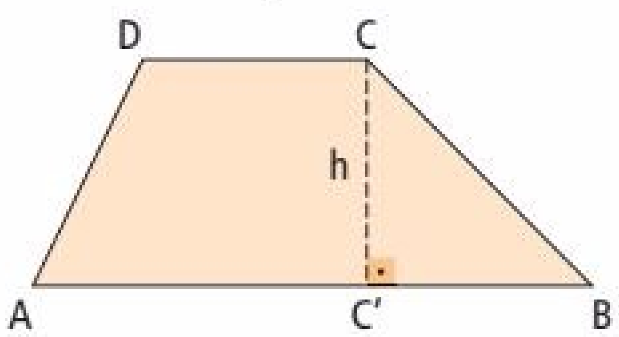
Assim, a distância do ponto *P* à reta *r* é de 4 unidades.

Exercícios resolvidos

25 Determine a altura de um trapézio cujos vértices são os pontos A(1, 1), B(11, 3), C(7, 5) e D(2, 4).

Resolução

Fazendo uma figura sem preocupação com sua posição no plano cartesiano, temos:



A altura *h* é igual à distância do vértice *C* à reta suporte da base $\overline{AB}$ do trapézio.

Equação da reta suporte de base $\overline{AB}$ do trapézio:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 11y + 3 - y - 3x - 11 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 10y - 8 = 0 \Rightarrow x - 5y + 4 = 0$$

Cálculo da distância do vértice *C* à reta suporte da base $\overline{AB}$:

$$h = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \quad h = \frac{|1 \cdot 7 - 5 \cdot 5 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{14}{\sqrt{26}} = \frac{14\sqrt{26}}{26} \Rightarrow h = \frac{7\sqrt{26}}{13}$$

Portanto, altura do trapézio é $\frac{7\sqrt{26}}{13}$.

26 Determine o valor de *a* para que a distância do ponto P(−1, a) à reta *r*, de equação 3x + 4y − 5 = 0, seja igual a 2 unidades.

Resolução

Utilizando a fórmula da distância entre ponto e reta:

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|3 \cdot (-1) + 4a - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{|4a - 8|}{\sqrt{25}} \Rightarrow |4a - 8| = 10$$

Resolvendo a equação modular:

$$|4a - 8| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 4a - 8 = 10 \Rightarrow a = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \\ 4a - 8 = -10 \Rightarrow a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto, $a = \frac{9}{2}$ ou $a = -\frac{1}{2}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

75. Calcule a distância do ponto *P* à reta *r* em cada caso:

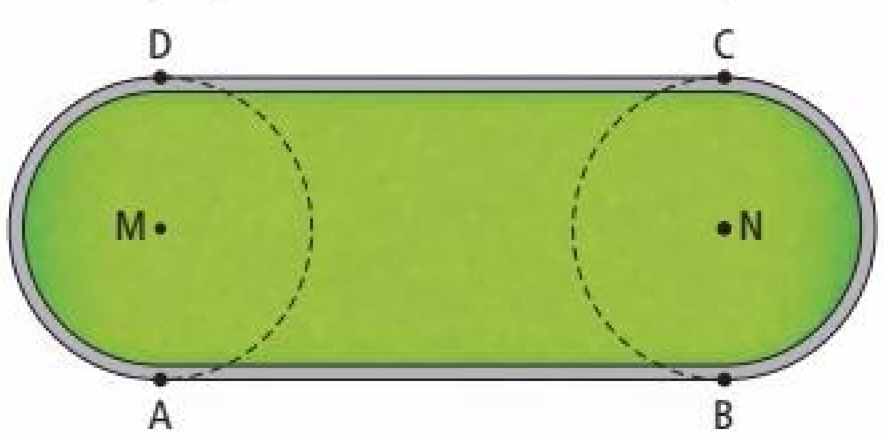
a) P(5, 7) e *r*: 4x − 3y + 2 = 0 $\frac{1}{5}$

b) P(1, −2) e *r*: $y = -\frac{3}{4}x + 1$ $\frac{9}{5}$

c) P(−1, 4) e *r*: x + y = 0 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

d) P(3, −2) e *r*: 2x + y + 6 = 0 $2\sqrt{5}$

76. (Acafe-SC) A praça de uma cidade está representada na figura abaixo. As duas circunferências têm raios iguais e centros nos pontos M(2, 0) e N(8, 8), respectivamente. Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos de tangência e a equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é 4x − 3y + 2 = 0.



Ilustrações: Editoria de arte

O comprimento da praça, em unidades de comprimento, é:

a) 30 b) 22,4 x c) 32,4 d) 36 e) 36,4

77. Calcule a distância entre as seguintes retas paralelas:

a) 12x − 9y + 27 = 0 e 12x − 9y − 18 = 0 3

b) $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ e $y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ 2

78. (Ufop-MG) No triângulo ABC, em que A(4, 3), B(1, −3) e C(2, 3), determine a altura relativa ao vértice *C*. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

79. (Fatec-SP) Sejam 3x − 4y + 10 = 0 e 6x − 8y + 15 = 0 as equações das retas suportes das bases de um trapézio. Determine a altura desse trapézio. $\frac{1}{2}$

80. Determine as equações das retas paralelas à reta *r*, de equação 4x + 3y − 5 = 0, e distantes 4 unidades da reta *r*.
4x + 3y + 15 = 0 e 4x + 3y − 25 = 0

81. (FGV-SP) Um mapa é localizado sobre um sistema de eixos cartesianos ortogonal, de modo que a posição de uma cidade é dada pelo ponto P(1, 3).

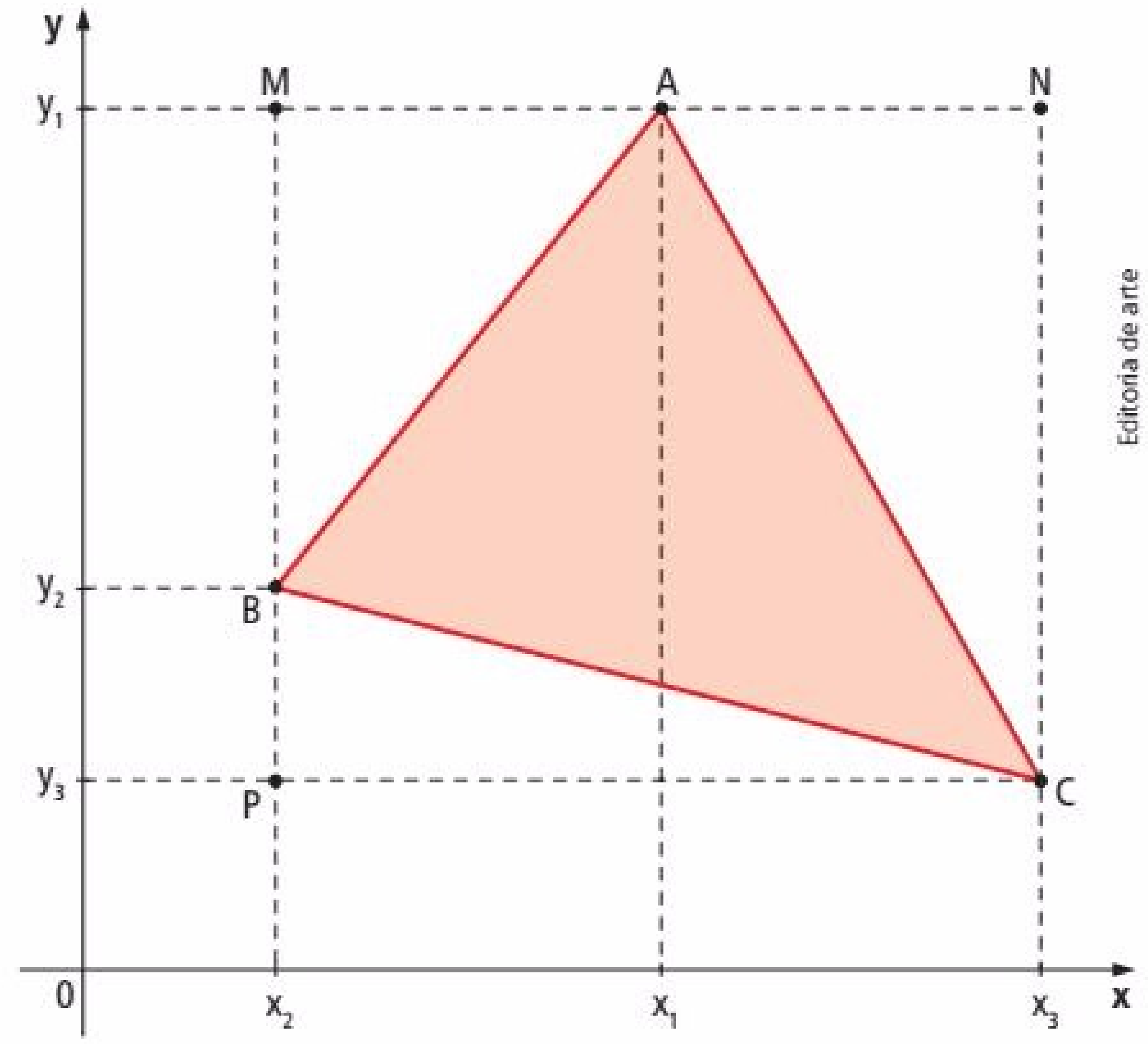
Um avião descreve uma trajetória retilínea segundo a equação x + 2y = 20.

a) Em qual ponto da trajetória o avião se encontra mais próximo da cidade? $\left(\frac{18}{5}, \frac{41}{5}\right)$

b) Nas condições do item anterior, qual a distância da cidade ao avião? $\frac{13\sqrt{5}}{5}$

Área de um triângulo

Vamos obter uma relação cujo objetivo é calcular a área de um triângulo com base nas coordenadas de seus vértices. Para isso vamos considerar que os vértices do triângulo são $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, conforme a figura.



A área do triângulo ABC pode ser calculada como a diferença entre a área do retângulo MNCP e as áreas dos triângulos AMB, BPC e ANC. Logo:

$$S_{ABC} = S_{MNCP} - S_{AMB} - S_{BPC} - S_{ANC}$$

$$S_{ABC} = (x_3 - x_2)(y_1 - y_3) - \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{2} - \frac{(x_3 - x_2)(y_2 - y_3)}{2} - \frac{(x_3 - x_1)(y_1 - y_3)}{2}$$

Simplificando, temos:

$$S_{ABC} = \frac{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2}{2}$$

Observe que o numerador da expressão corresponde ao cálculo do determinante da condição de alinhamento de três pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3):

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Assim:

$$S_{ABC} = \frac{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot D$$

Como a área é sempre um valor positivo, devemos considerar o módulo do determinante. Portanto:

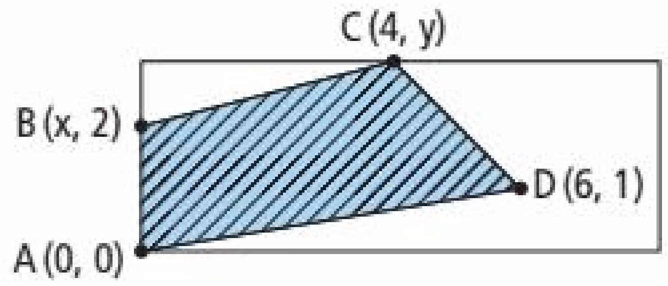
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

Dados três pontos, não colineares, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, a área do triângulo formado por esses pontos é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |D|\text{, sendo } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

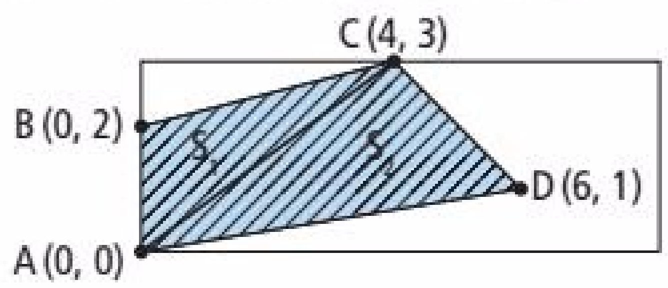
Exercício resolvido

27 (UEMA) Um pintor é chamado para fazer o orçamento da pintura de um muro, cuja área a ser pintada é a que está hachurada (ver figura). Sabendo-se que o muro tem forma retangular e 3 metros de altura, e que o preço da pintura por metro quadrado é de R$ 6,00, qual o valor do orçamento a ser apresentado?



Resolução

A área a ser pintada é a soma das áreas S_1 e S_2. Vamos, então, calcular a medida dessas áreas.



- S_1 é a área do triângulo de vértices A(0, 0), B(0, 2) e C(4, 3). Temos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8;\ S_1 = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

- S_2 é a área do triângulo de vértices A(0, 0), C(4, 3) e D(6, 1). Temos:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14;\ S_1 = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$$

Assim, a área a ser pintada é igual a $4 + 7 = 11$.

Portanto, o valor do orçamento apresentado é igual a 11×6, ou seja, R$ 66,00.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

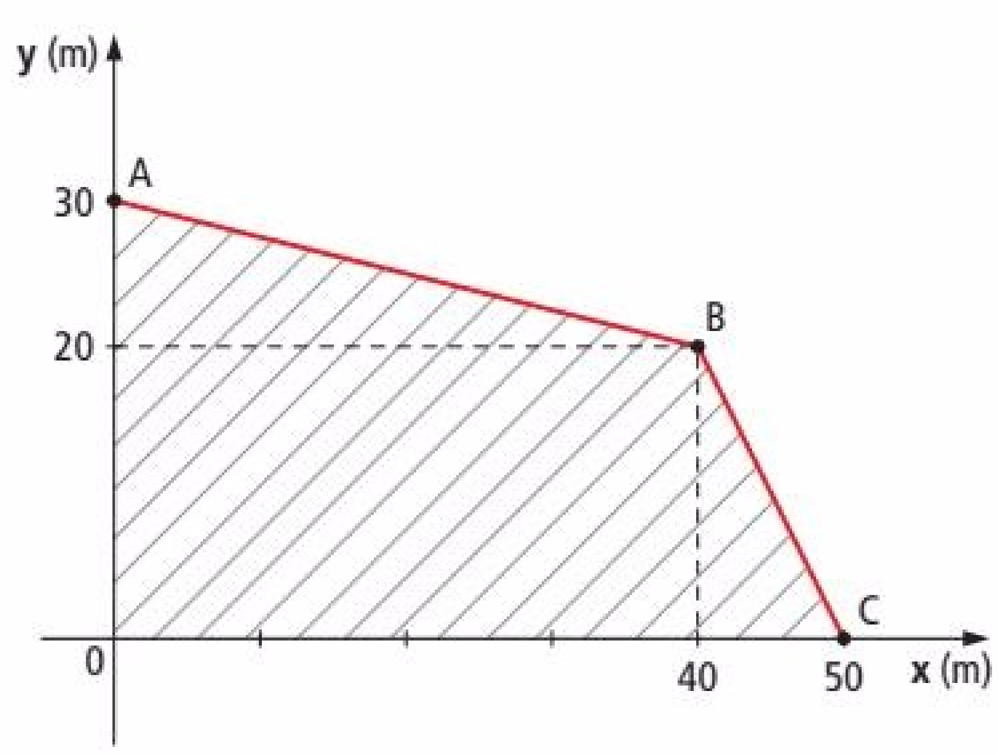
82. Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos:

a) $A(-3, 3)$, $B(-1, 1)$ e $C(4, 0)$ 4

b) $A\left(-1, \frac{7}{2}\right)$, $B(4, -3)$ e $C(0, -6)$ $\frac{41}{2}$

83. (UFPel-RS) Calcular a área do triângulo formado pela reta $3x + 2y - 6 = 0$ com os eixos coordenados, usando como unidade o centímetro. 3 cm²

84. (UFG-GO) Um terreno tem a planta representada num plano cartesiano, como mostra o gráfico abaixo.



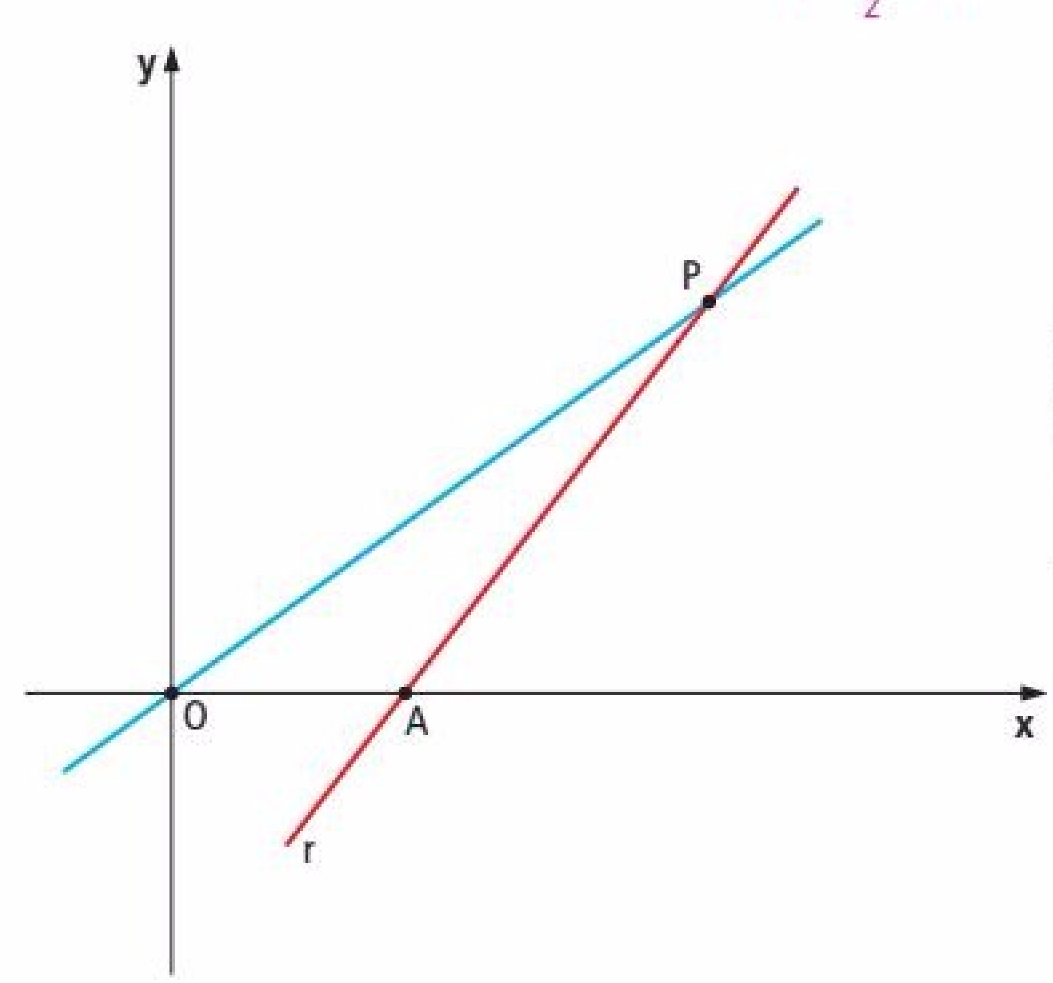
A área do terreno, em metros quadrados, será:

a) 1 400
x b) 1 100
c) 1 000
d) 900
e) 800

85. Os pontos $A(2, -4)$, $B(a, 1)$ e $C(4, 2)$ são os vértices do triângulo ABC. Calcule o valor de a para que esse triângulo tenha 2 unidades de área. $a = \frac{13}{3}$ ou $a = 3$

86. São dados os pontos $A(1, 1)$, $B(5, 4)$ e $C(0, y)$, vértices de um triângulo. Quais os valores de y para que a área do triângulo ABC seja de $\frac{11}{2}$ unidades de área (u.a.)? $-\frac{5}{2}$ ou 3

87. (Ufop-MG) Na figura, o ponto P pertence à bissetriz do primeiro quadrante e A(6, 0). Determine uma equação da reta r que passa por A e P de modo que a área do triângulo OAP seja igual a 30. $y = \frac{5}{2}x - 15$



Ilustrações: Editoria de arte

88. Nova tecnologia permite conhecer cada metro quadrado da lavoura

A irrigação correta e adequada otimiza os recursos naturais e proporciona bons resultados econômicos.

Avanços na agricultura, incorporando tecnologias, podem contribuir para um maior equilíbrio no uso dos recursos naturais disponíveis. A Geometria analítica pode servir de apoio para a análise de mapas e imagens obtidas via satélite.

Com a globalização da economia e a competitividade de preço dos produtos agrícolas, surgiu a necessidade de se obter níveis de competitividade internacionais. Além disso, a busca pela conservação dos recursos naturais impõe à atividade agrícola novos métodos e técnicas de produção, aliados à eficiência e maior controle dos resultados obtidos no campo, em relação ao que se pratica atualmente. A agricultura moderna está relacionada ao plantio de extensas áreas de monocultura, e um dos principais problemas que reflete diretamente na produtividade agrícola de extensas áreas é a distribuição inadequada de calcário, semente, adubo, herbicida e inseticida no terreno. Este fato tem acarretado zonas de baixa produção de grãos e cereais dentro da área cultivada.

Como uma resposta para minimizar estes problemas e com o avanço da tecnologia, foi possível que satélites, computadores e sensores auxiliassem a agricultura. Surgiu, então, um novo sistema de produção que, há alguns anos, já é utilizado pelos agricultores de países de tecnologia avançada, chamado de *Precision Agriculture*, *Precision Farming*, e no Brasil de Agricultura de Precisão (AP). Este sistema vem resgatar a capacidade de conhecer cada metro quadrado da lavoura, que foi perdido à medida que as áreas cultivadas foram crescendo.

Conceitos sobre Agricultura de Precisão

d) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos encontrem informações como: estufas; irrigação; maquinários agrícolas (colheitadeiras, tratores); biotecnologia, que permite reduzir o uso de pesticidas e fertilizantes, e a melhorar a resistência de sementes contra secas e pragas.

A AP é uma tecnologia que utiliza em conjunto sinais de satélite e *softwares* para interpretação de dados geoprocessados, isto é, recolhe e reúne informações da área cultivada, sempre com a localização precisa.

[...] Assim, pode-se determinar "qual, quando e onde" o insumo deve ser aplicado e "como" fazê-lo, permitindo identificar locais específicos com diferentes potenciais de produtividade, podendo-se determinar ou não, desde que econômica e tecnicamente viáveis, investimentos em insumos ou na correção de fatores limitantes à produção, visando a maximização da produtividade e minimização dos impactos ambientais. O principal conceito é aplicar no local correto, no momento adequado, as quantidades de insumos necessários à produção agrícola, para áreas cada vez menores e mais homogêneas, tanto quanto a tecnologia e os custos envolvidos permitirem. [...]

VARGAS, Ivens Cristian. A agricultura de precisão. **WebRural**. Disponível em: <http://www.webrural.com.br/webrural/artigos/tecnologia/ap/ap.htm>. Acesso em: 12 dez. 2015.

a) Conforme apresentado no texto, as principais vantagens são: uso racional de insumos agrícolas; minimização dos impactos ambientais; maximização da qualidade, produtividade e do retorno financeiro.

a) Quais os principais avanços obtidos pela Agricultura de Precisão em relação à agricultura convencional?

b) O uso das novas técnicas descritas no texto, incluindo a aplicação de tecnologias no campo, além do retorno financeiro ao agricultor, também compreende ganhos para o meio ambiente. Explique como esses ganhos são obtidos, direta ou indiretamente.

c) A partir de imagens aéreas, identificaram-se 4 pontos extremos de uma produção rural. Esses pontos, foram plotados em um plano cartesiano de referência, em que as suas coordenadas são: $A(-2, -3)$, $B(-1, 7)$, $C(7, 6)$ e $D(5, -2)$.

Determine a área dessa propriedade, sendo cada unidade do plano cartesiano equivalente a 1 hectare. 67,5 ha

d) Pesquise sobre outras aplicações atuais de tecnologia na agricultura. Reflita e discuta com os colegas novos avanços que deveriam ser alcançados, visando a melhor utilização dos recursos naturais, manutenção dos terrenos de plantio, transporte eficaz e sustentável na distribuição de alimentos, entre outros.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos observem que há ganhos diretos no uso controlado de insumos agrícolas, afetando com menos impacto o solo, os lençóis freáticos, lagos e rios. Além disso, a utilização de menos água, adubos, fertilizantes, inseticidas etc., compreende uma redução na extração e na produção desses recursos, gerando menor impacto ambiental em cadeia, de forma indireta.

Explorando a tecnologia

Perímetro e áreas

O perímetro de um triângulo cujos vértices são representados por coordenadas cartesianas pode ser determinado se aplicarmos a fórmula da distância entre dois pontos para calcular a medida de cada um dos lados.

A área desse mesmo triângulo pode ser calculada pela metade do módulo do determinante de ordem 3 formado pelas coordenadas de cada vértice.

Podemos também determinar o ângulo agudo formado pelas retas suporte de dois lados do triângulo. Para isso, utilizamos a relação entre os coeficientes angulares dessas retas.

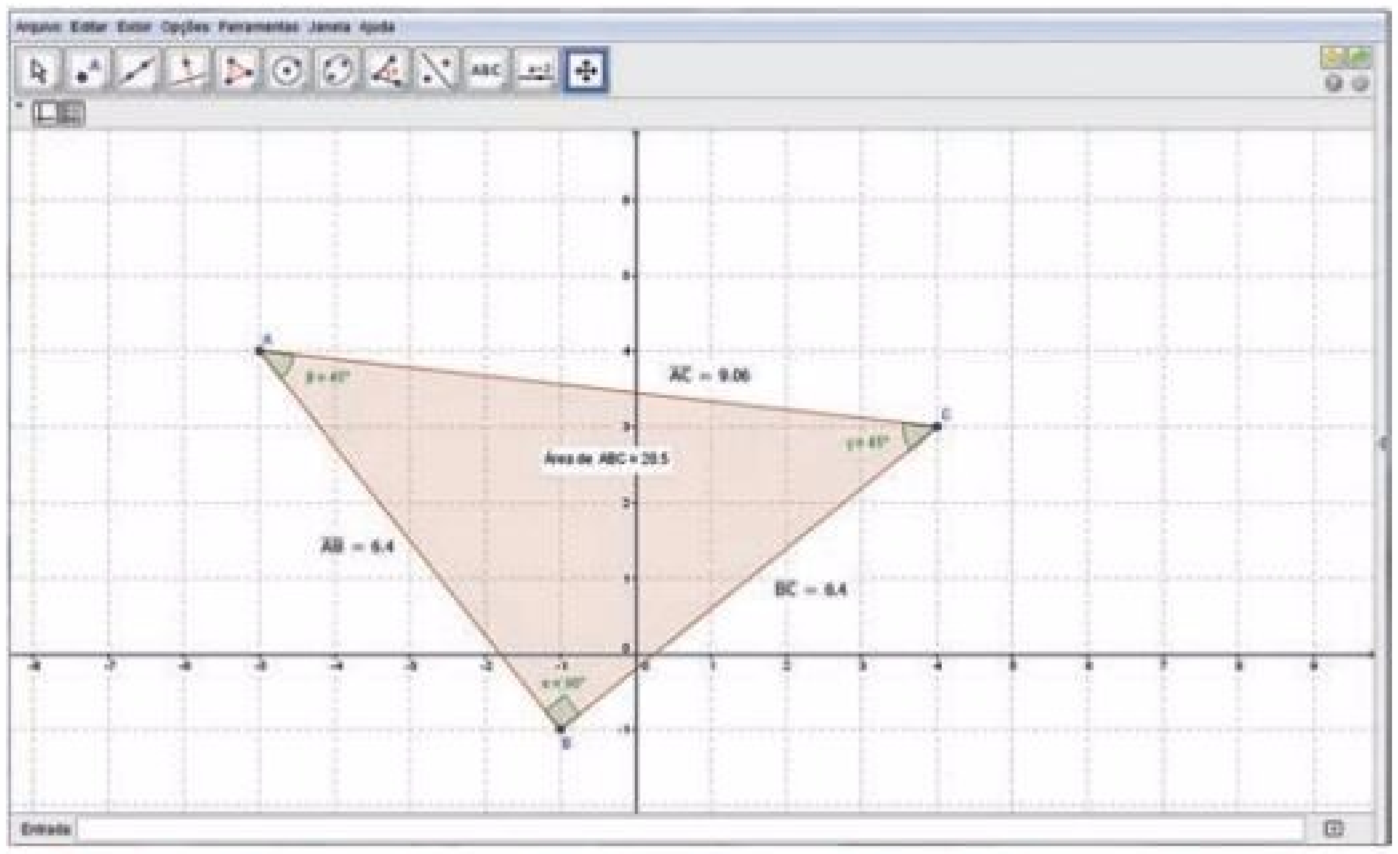
Como já vimos, GeoGebra é um *software* que faz todos esses cálculos e pode ser útil na conferência da resposta de muitos exercícios deste capítulo.

Veja como calcular as informações acima para um triângulo de vértices A(−5, 4), B(−1, −1) e C(4, 3):

Crédito das imagens: Geogebra

1. Abra o GeoGebra e, sobre a **Janela de Visualização**, clique com o botão direito. Surgirá um menu com algumas opções. Selecione as duas primeiras ferramentas que representam os eixos e a malha, respectivamente.
2. No **Campo de Entrada**, digite os pontos A = (−5, 4), B = (−1, −1) e C = (4, 3).
3. Selecionando a ferramenta **POLÍGONO**, , marque os pontos correspondentes começando por A, passando por B e depois por C e, em seguida, finalize em A.
4. Depois de selecionar a ferramenta **ÂNGULO**, , clique sobre o triângulo e a medida de cada ângulo aparecerá no triângulo.
5. Selecione a ferramenta **ÁREA**, , que está localizada no mesmo grupo de ferramentas de **ÂNGULO**, clique sobre o triângulo e aparecerá um texto com o valor da área do triângulo. Esse texto é dinâmico, ou seja, mudando-se a posição dos pontos e, consequentemente, o valor da área, o texto também apresentará o novo valor.
6. Determine a medida de cada um dos lados do triângulo utilizando a ferramenta **DISTÂNCIA**, **COMPRIMENTO OU PERÍMETRO**, . Ao selecionar essa ferramenta e clicar sobre um dos lados, o programa mostrará a medida desse lado; agora, se você clicar sobre o triângulo, aparecerá um texto dinâmico com o valor do perímetro do triângulo.

Ao fim das aplicações, você terá uma visualização semelhante a esta:



d) Para o triângulo manter a área, a medida de sua base e a da altura não podem ser alteradas. Assim, tomando como referência o lado AC, devemos traçar uma reta paralela a $\overline{AC}$ que passe pelo ponto *B*. Qualquer que seja o ponto sobre essa reta, quando ligado aos pontos *A* e *C*, formará um triângulo cuja área será igual a 10. Assim, criando um ponto *D*, distinto de *B*, sobre a reta paralela teremos um triângulo cujo perímetro é diferente do perímetro de ABC, porém a área é a mesma.

Atividade

Escreva no caderno

1. Dados os pontos A(3, 0), B(2, 7) e C(0, 1), vértices de um triângulo, determine:
   a) a medida de cada um dos lados e calcule o perímetro desse triângulo; AB =7,07; BC = 6,32; AC = 3,16. O perímetro é igual a 16,56.
   b) a área do triângulo; A área é igual a 10.
   c) a medida do ângulo formado pelos lados AC e BC. 90°
   d) Descreva um procedimento em que é possível aumentar o perímetro desse triângulo sem alterar sua área.

CAPÍTULO 5

Geometria analítica: circunferência

Michael Weber/imageBROKER/Agefotostock/Easypix

As atletas de ginástica rítmica manipulam arcos que lembram circunferências.

Em muitas situações cotidianas observamos formas que nos dão ideia de círculos e circunferências. Por exemplo, a vista superior de um prato raso lembra um círculo e a borda de um copo, uma circunferência.

O formato da circunferência também é encontrado nos esportes, como vemos na fotografia ao lado.

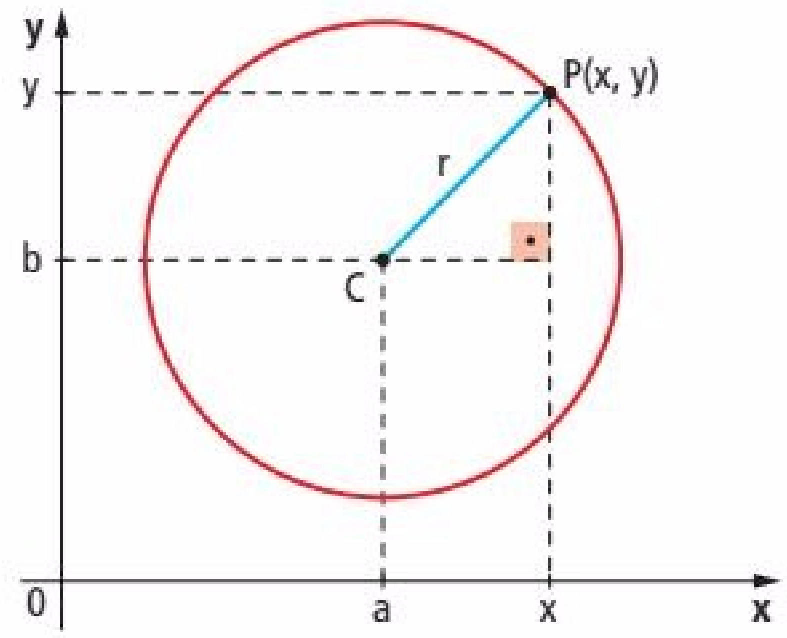
Estudamos, no capítulo 3 deste volume, que a circunferência é um conjunto de pontos em um plano, cuja distância a um ponto *C*, definido como centro, é fixa. A essa distância fixa damos o nome de raio.

Isso equivale a dizer que se os pontos *A*, *B* e *D* pertencem à circunferência de centro *C*, então a distância de cada um desses pontos ao centro é igual, ou seja, d(A, C) = d(B, C) = d(D, C), que equivale ao raio da circunferência.

Neste capítulo, vamos estudar a circunferência de uma forma analítica, ou seja, por meio das coordenadas de seu centro, sua equação algébrica e sua posição em relação a outras figuras como um ponto ou uma reta.

Equação reduzida da circunferência

Considere no plano cartesiano a circunferência de centro C(a, b) e raio *r* e um ponto *P* pertencente a ela, conforme indica a figura a seguir.



Editoria de arte

Como *P* é um ponto da circunferência, então a distância de *P* ao centro *C* é igual ao raio *r*. Logo:

$$d(P, C) = r \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \Rightarrow \boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

A equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é chamada de **equação reduzida da circunferência**, em que *a* e *b* são as coordenadas do centro e *r* é o raio. No caso do centro da circunferência ser a origem, a equação será:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Equação geral da circunferência

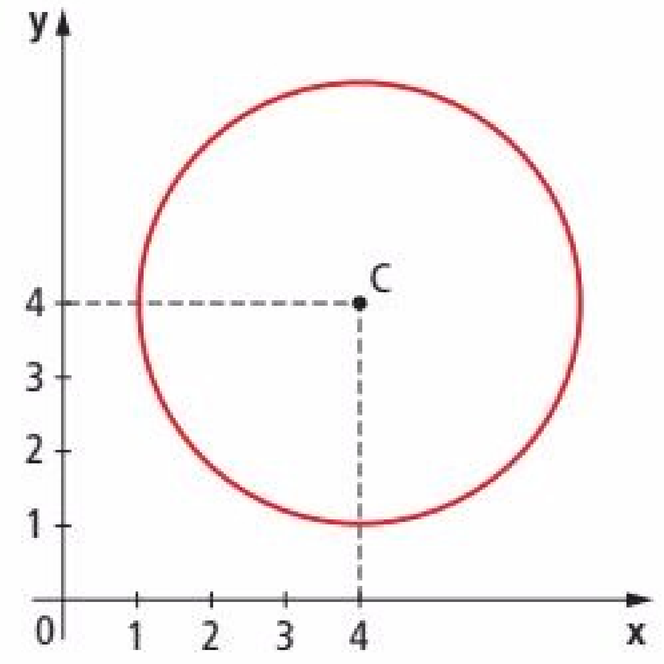
Desenvolvendo a equação reduzida $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, obtemos a **equação geral da circunferência**:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

Por conveniência, fazemos $a^2 + b^2 - r^2 = c$. Assim, a equação geral assume a forma a seguir:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$$

Por exemplo, vamos escrever a equação da circunferência representada abaixo na forma reduzida e na forma geral.



Observe que a circunferência tem centro C(4, 4) e raio $r = 3$. Substituindo esses valores na equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos:

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$$
$$\underbrace{(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9}_{\text{equação reduzida}}$$

Desenvolvendo a equação reduzida, chegamos à equação geral:

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 - 9 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0}_{\text{equação geral}}$$

Outro modo de obtermos a equação geral é calcular o valor de *c* por meio da relação $c = a^2 + b^2 - r^2$ e, em seguida, substituir os valores de *a*, *b* e *c* na equação $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Veja:

$$c = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow c = 4^2 + 4^2 - 3^2 \Rightarrow c = 23$$

Substituindo *a* por 4, *b* por 4 e *c* por 23 na equação $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, temos:

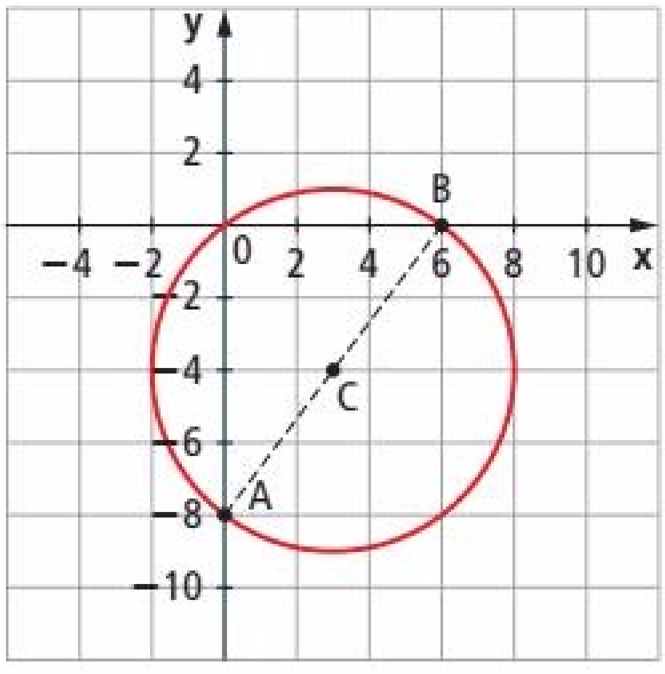
$$x^2 + y^2 - 2 \cdot 4 \cdot x - 2 \cdot 4 \cdot y + 23 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0}_{\text{equação geral}}$$

Exercícios resolvidos

1 Determine a equação reduzida da circunferência cujas extremidades de um diâmetro são os pontos A(0, −8) e B(6, 0).

Resolução

Representação gráfica:



Ilustrações: Editoria de arte

O centro C(a, b) é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então:

$$a = \frac{0 + 6}{2} \Rightarrow a = 3 \qquad b = \frac{-8 + 0}{2} \Rightarrow b = -4$$

Logo, C(3, −4). O raio é dado por: $r = d(A, C)$

$$r = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-4 + 8)^2} = \sqrt{9 + 16} \Rightarrow r = 5$$

A equação reduzida da circunferência é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

2 Determine a forma geral da equação da circunferência com centro no ponto (−1, 2) e raio $r = 3$.

Resolução

A equação da circunferência de centro C(a, b) e raio *r* é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 9 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

3 Determine as coordenadas do centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$.

Resolução

1º modo

Escrevendo a equação dada na forma reduzida:

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 8y = -19$

Para completar quadrados e obter quadrados perfeitos, devemos adicionar 4 e 16 a ambos os membros:

$$\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{\text{quadrado perfeito}} + \underbrace{y^2 - 8y + 16}_{\text{quadrado perfeito}} = -19 + 4 + 16$$

$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 1$

Portanto, $C(2, 4)$ e $r = \sqrt{1} = 1$.

2º modo

Estabelecendo uma relação entre a equação dada e a forma geral da equação da circunferência: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -2a = -4 \Rightarrow a = 2 \\ -2b = -8 \Rightarrow b = 4 \end{array}\right\} C(2, 4)$$

$a^2 + b^2 - r^2 = 19$

$(2)^2 + (4)^2 - r^2 = 19$

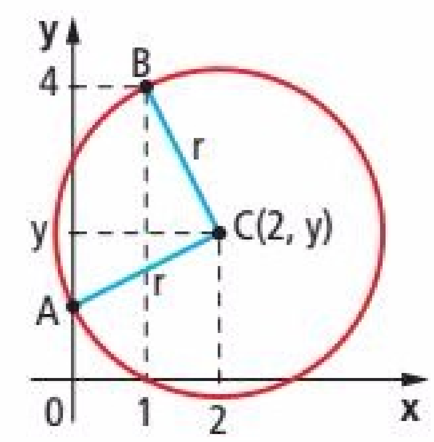
$r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$ ou $r = -1$ (não satisfaz)

O centro da circunferência é $C(2, 4)$ e o raio é 1.

4 Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(0, 1)$ e $B(1, 4)$ e tem centro sobre a reta de equação $x = 2$.

Resolução

Representação gráfica:



Da figura, vem:

$d(C, B) = d(C, A)$

$\sqrt{(2-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (y-1)^2}$

$1 + y^2 - 8y + 16 = 4 + y^2 - 2y + 1$

$-6y = -12 \Rightarrow y = 2$

Portanto, o centro é $C(2, 2)$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Determine, nos casos a seguir, a equação da circunferência:

a) de centro $C(2, 5)$ e raio $r = 3$;

b) de centro $C(0, -2)$ e raio $r = 4$;

c) de centro $C(-1, -4)$ e raio $r = \sqrt{7}$;

d) de centro $C(0, 0)$ e raio 1;

e) de centro $C(-3, 6)$ e diâmetro medindo 8.

a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$
b) $x^2 + (y + 2)^2 = 16$
c) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 7$
d) $x^2 + y^2 = 1$
e) $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 16$

2. Determine as coordenadas do centro e o raio das seguintes circunferências:

a) $(x - 5)^2 + (y + 6)^2 = 8$

b) $x^2 + (y - 4)^2 = 25$

c) $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$

a) $C(5, -6)$ e $r = 2\sqrt{2}$
b) $C(0, 4)$ e $r = 5$
c) $C(0, 0)$ e $r = 2$

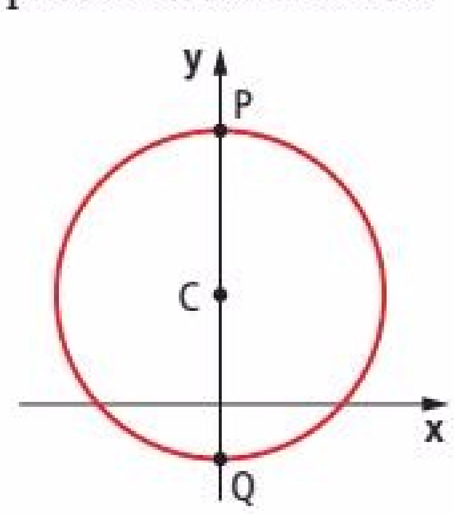
3. (UFPB) Calcule a distância entre o ponto $(4, -6)$ e o centro da circunferência de equação

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$. $d = 5$

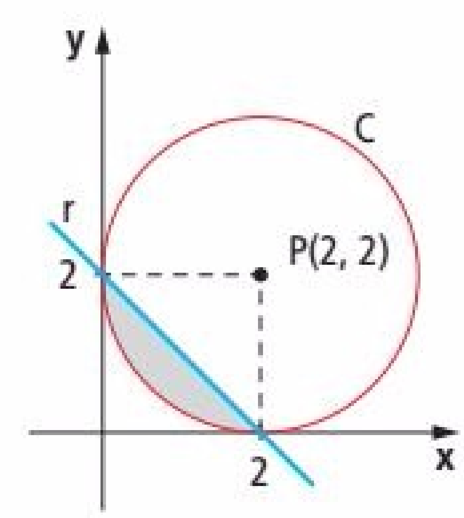
4. Calcule o valor de k de modo que a equação $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 6k = 0$ represente uma circunferência. $k < \frac{13}{3}$

5. Os pontos $P(0, 5)$ e $Q(0, -1)$ são pontos da circunferência representada ao lado. Determine a equação dessa circunferência.

$x^2 + (y - 2)^2 = 9$



6. A figura ao lado representa um sistema de coordenadas cartesianas onde estão traçadas a circunferência C e a reta r.



Ilustrações: Editoria de arte

Analisando a figura, quais das afirmações a seguir são verdadeiras? São verdadeiras: **a, c, d** e **e**.

a) A equação da reta r é $x + y = 2$.

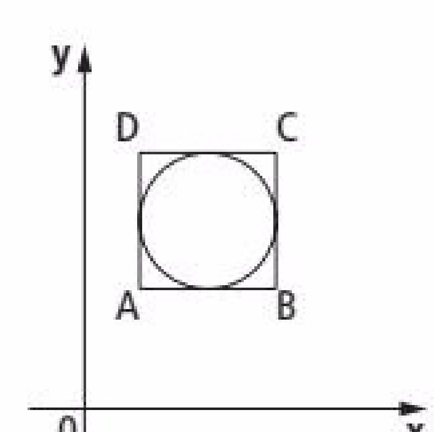
b) A equação da circunferência C é $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 4$.

c) O comprimento da circunferência C é 4π.

d) A área do círculo de circunferência C é 4π.

e) A área do segmento circular sombreado é $\pi - 2$.

7. (Uesb-BA) Na figura, o quadrado ABCD tem lados paralelos aos eixos coordenados e é circunscrito à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$. Considerando-se $A(m, n)$, pode-se afirmar que $m + n$ é igual a:



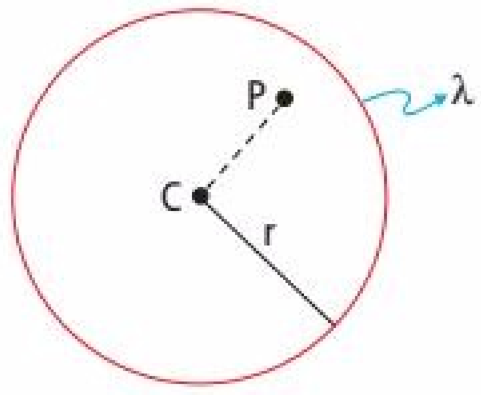
a) 1 b) 2 X c) 3 d) 4 e) 5

Posições relativas entre ponto e circunferência

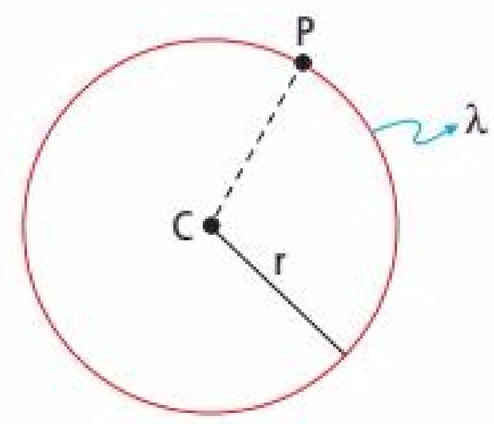
Um ponto pode ser **interno**, **externo** ou pode **pertencer** a uma circunferência λ de centro *C* e raio *r*.

Para conhecer a posição do ponto *P* em relação à circunferência, é necessário calcular a distância do ponto $P(x_P, y_P)$ ao centro $C(a, b)$ e compará-la com o raio *r*.

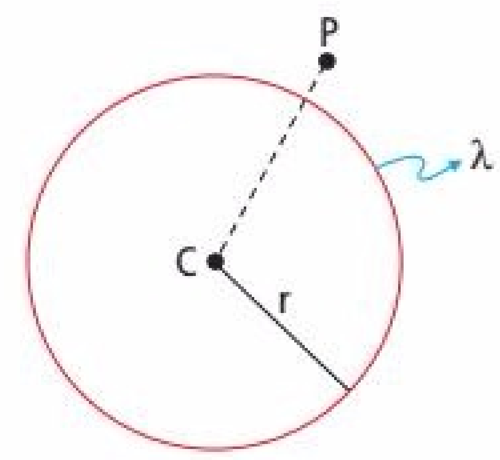
Considerando que a equação reduzida da circunferência é obtida a partir da expressão $d(P, C) = r$ ou $[d(P, C)]^2 = r^2$, temos:



***P* interno a λ**
Nesse caso, $d(P, C) < r$ e:
$(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 < r^2$



***P* pertence a λ**
Nesse caso, $d(P, C) = r$ e:
$(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 = r^2$



***P* externo a λ**
Nesse caso, $d(P, C) > r$ e:
$(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 > r^2$

Ilustrações: Editoria de arte

Assim, podemos verificar a posição relativa do ponto *P* em relação à circunferência substituindo as coordenadas de *P* na equação reduzida da circunferência e comparar o resultado obtido com o quadrado do raio.

Exercícios resolvidos

5 Determine a posição dos pontos $A(-2, 3)$, $B(-4, 6)$ e $C(4, 2)$ em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$.

Resolução

Obtendo a equação reduzida da circunferência:

$-2a = 8 \Rightarrow a = -4$ e $-2b = 0 \Rightarrow b = 0$

$(-4)^2 + 0^2 - r^2 = -20 \Rightarrow r^2 = 36$

Então: $(x + 4)^2 + y^2 = 36$.

Substituindo as coordenadas dos pontos *A*, *B* e *C* no 1º membro da equação reduzida, obtemos:

$A(-2, 3) \rightarrow (-2 + 4)^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 < 36 \ (r^2)$

A é ponto interno à circunferência.

$B(-4, 6) \rightarrow (-4 + 4)^2 + 6^2 = 0 + 36 = 36 \ (r^2)$

B pertence à circunferência.

$C(4, 2) \rightarrow (4 + 4)^2 + 2^2 = 64 + 4 > 36 \ (r^2)$

C é ponto externo à circunferência.

6 Que condição deve satisfazer o número *m* para que o ponto $A(4, 3)$ seja externo à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y + m = 0$?

Resolução

Para que a equação represente uma circunferência, fazemos:

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + m = 0$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = -m + 4 + 1$

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = -m + 5$

O 2º membro $(-m + 5)$ deve ser positivo, logo:

$-m + 5 > 0 \Rightarrow m < 5$ (I)

Para que o ponto $A(4, 3)$ seja externo, temos:

$(4 - 2)^2 + (3 - 1)^2 > -m + 5$

$4 + 4 > -m + 5$

$m > -3$ (II)

Fazendo (I) ∩ (II), teremos que *m* deve satisfazer à condição $-3 < m < 5$.

8. Determine as posições dos pontos A(1, 6); B(1, 1) e C(1, 5) em relação à circunferência de equação $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$. A é externo. B é interno. C pertence à circunferência.

9. Dê a posição dos pontos A(4, 2), B(5, −1) e C(3, 2) em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$. A pertence à circunferência. B é externo. C é interno.

10. Qual a posição do ponto A(−3, 4) em relação a cada uma das circunferências definidas por:

a) $2x^2 + 2y^2 + x + y - 4 = 0$ Externo.

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ Externo.

c) $x^2 + y^2 - 8x - 20y + 10 = 0$ Interno.

11. Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 6$, considere as afirmativas:

I. O diâmetro da circunferência mede 8 unidades de comprimento.

II. O ponto (4, −5) é externo à circunferência.

III. O centro da circunferência é o ponto (1, −2).

IV. O ponto (−1, −1) é interno à circunferência.

Quais são verdadeiras? I e IV.

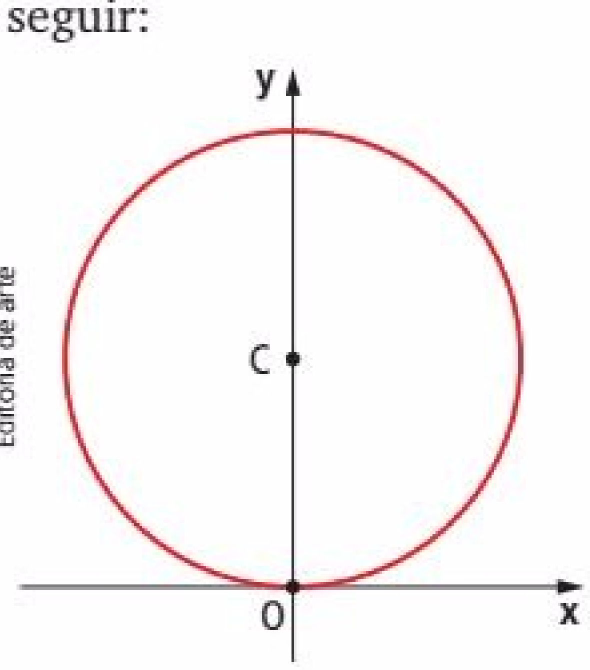
12. Qual deve ser o valor de k, de modo que o ponto P(1, 0) seja interno à circunferência cuja equação é $x^2 + y^2 - 2x - 2y - k = 0$? $k > -1$

13. $k < -\frac{5}{3}$ ou $k > -\frac{1}{3}$

13. Determine o valor de k para que o ponto A(−2, 3k) seja externo à circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.

14. Qual a condição que deve assumir o número k para que o ponto P(1, −3) seja interno à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y + k = 0$?
$k < 4$

15. Considere a circunferência, de centro C(0, 4), representada a seguir:



Editoria de arte

a) Qual é o raio dessa circunferência? 4

b) Determine a equação geral dessa circunferência. $x^2 + y^2 - 8y = 0$

c) Verifique se o ponto A(3, 4) é interno, externo ou se pertence a essa circunferência. É interno.

16. Calcule o valor de a, sabendo que P(a, b) é um ponto da reta $y = x - 1$ e é interno à circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$. $3 < a < 5$

17. (Unicamp-SP) As transmissões de uma determinada emissora de rádio são feitas por meio de 4 antenas situadas nos pontos A(0, 0), B(100, 0), C(60, 40) e D(0, 40), sendo o quilômetro a unidade de comprimento. Desprezando a altura das antenas e supondo que o alcance máximo de cada antena é de 20 km, pergunta-se:

a) O ponto médio do segmento BC recebe as transmissões dessa emissora? Justifique sua resposta apresentando os cálculos necessários. Não.

b) Qual é a área da região limitada pelo quadrilátero ABCD que não é alcançada pelas transmissões da referida emissora? $400(8 - \pi)$ km²

18. (FGV-SP) Seja P(m, n) o ponto pertencente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ e que tem ordenada mínima. O produto $m \cdot n$ vale:

a) 2
b) 2,25
c) 2,5
d) 2,75
x e) 3

19. Considere dois trângulos PQR e ABC, cujos vértices são os pontos P(1, 0), Q(2, 4), R(6, −1), A(3, 5), B(8, 4) e C(−5, 0).

a) Determine o baricentro de cada triângulo. (3, 1) e (2, 3)

b) Escreva no caderno a equação reduzida da circunferência que tem como diâmetro o segmento de reta com extremidades nesses baricentros. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{5}{4}$

c) Quais vértices desses dois triângulos são pontos internos a essa circunferência? Nenhum.

20. Dada a circunferência de equação:

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$$

a) Qual é o centro e o raio dessa circunferência? (4, 2); 5

b) Verifique se os pontos de intersecção da reta de equação $3x + 2y - 6 = 0$ com eixos cartesianos pertencem a essa circunferência. Nenhum deles pertence.

21. Considere o quadrado OABC cujos vértices são:

$$O(0, 0), A(6, 0), B(6, 6) \text{ e } C(0, 6)$$

a) Qual é a equação da circunferência circunscrita a esse quadrado? $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 18$

b) Qual é a equação da circunferência inscrita nesse quadrado? $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

c) Como são os pontos da circunferência circunscrita em relação à circunferência inscrita? São todos externos.

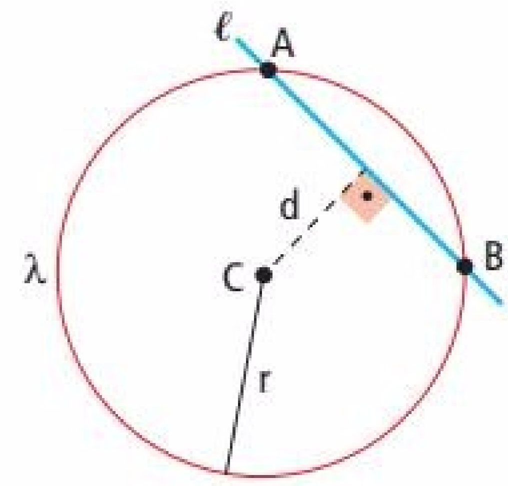
d) E os pontos da circunferência inscrita em relação à circunscrita? São todos internos.

Posições relativas entre reta e circunferência

Para determinar a posição relativa entre uma reta ℓ e uma circunferência λ calculamos a distância do centro C da circunferência à reta e comparamos com o raio r. Como essa distância pode ser maior, menor ou igual à medida do raio, temos três casos possíveis:

1º caso: $d(C, \ell) < r$: a reta ℓ é secante à circunferência λ.

A reta ℓ intersecta a circunferência λ em dois pontos distintos.

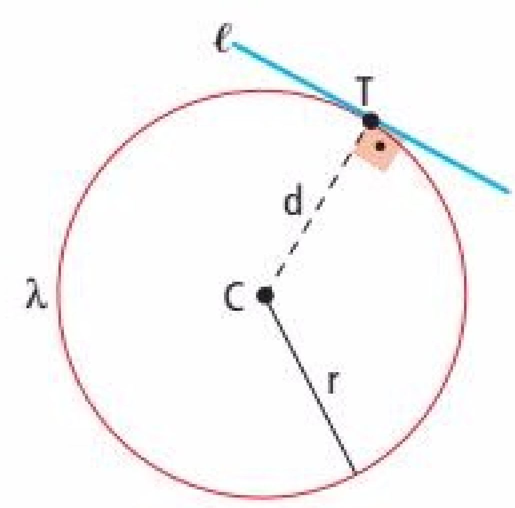


$d(C, \ell) < r$

Ilustrações: Editoria de arte

2º caso: $d(C, \ell) = r$: a reta ℓ é tangente à circunferência λ.

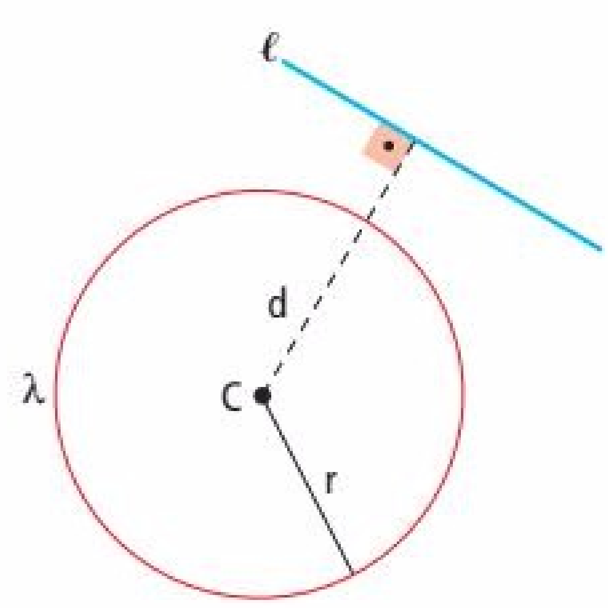
A reta ℓ intersecta a circunferência λ em um único ponto T, chamado **ponto de tangência**.



$d(C, \ell) = r$

3º caso: $d(C, \ell) > r$: a reta ℓ é exterior à circunferência λ.

A reta ℓ não intersecta a circunferência λ.



$d(C, \ell) > r$

Também podemos determinar a posição relativa entre uma reta e uma circunferência resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

Em que $ax + by + c = 0$ é a equação da reta ℓ e $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ é a equação da circunferência λ.

A resolução desse sistema pelo método da substituição determina uma equação do 2º grau cujo valor do discriminante Δ caracteriza a posição relativa entre a reta e a circunferência:

a) para $\Delta > 0$, a reta é secante à circunferência (2 pontos em comum);
b) para $\Delta = 0$, a reta é tangente à circunferência (1 único ponto em comum);
c) para $\Delta < 0$, a reta é exterior à circunferência (nenhum ponto em comum).

Exercícios resolvidos

7 Dadas as equações da reta, ℓ: $4x + 3y - 1 = 0$, e da circunferência, λ: $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$, qual é a posição da reta ℓ em relação à circunferência λ?

Resolução

Resolvendo o sistema formado pelas equações da reta ℓ e da circunferência λ:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), temos:

$$4x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1-3y}{4} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (II):

$$\left(\frac{1-3y}{4}\right)^2 + y^2 + 6\left(\frac{1-3y}{4}\right) - 8y = 0$$

$$\frac{1-6y+9y^2}{16} + y^2 + \frac{6-18y}{4} - 8y = 0$$

$$25y^2 - 206y + 25 = 0$$

Calculando o valor de Δ, temos $\Delta = 39\,936 > 0$. Como isso resultaria em duas raízes reais e diferentes, podemos concluir que a reta é secante à circunferência.

8 Determine os valores de m de modo que a reta ℓ, de equação $4x + 3y + m = 0$, seja tangente à circunferência λ, de equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

Resolução

Se ℓ é tangente a λ, devemos ter $d(C, \ell) = r$.

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 + 4 + 1$

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

Logo, $C(2, 1)$ e $r = 3$.

Cálculo da distância de C a ℓ:

$$d(C, \ell) = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d(C, \ell) = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Rightarrow d(C, \ell) = \frac{|11 + m|}{5}$$

Como $d(C, \ell) = 3$, temos a equação:

$$\frac{|11 + m|}{5} = 3$$

Resolvendo a equação modular:

$11 + m = 15$ ou $11 + m = -15$

$m = 4$ $\qquad$ $m = -26$

Portanto, $m = -26$ ou $m = 4$.

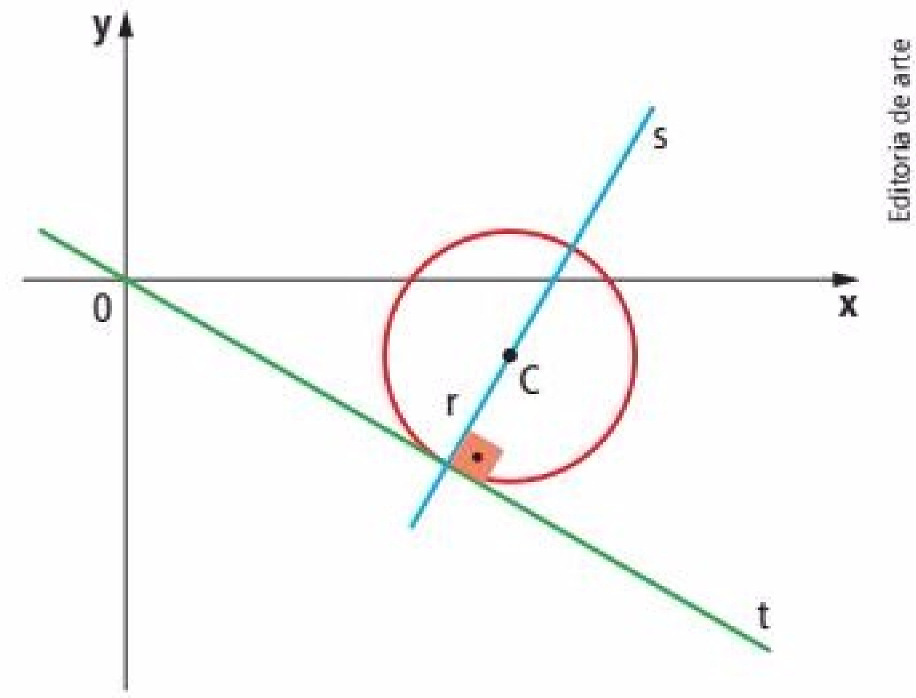
9 A reta t de equação $3x + 4y = 0$ é tangente a uma circunferência de centro no ponto $C(5, -1)$. Determine:

a) o raio da circunferência;

b) as coordenadas do ponto de tangência.

Resolução

Representação gráfica:



a) $r = d(C, t) = \dfrac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$r = d(C, t) = \frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|11|}{5}$$

Portanto, $r = \dfrac{11}{5}$.

b) No ponto de tangência, o raio é perpendicular a t.

Cálculo de m_t (coeficiente angular da reta t):

$$3x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x$$

Logo, $m_t = -\dfrac{3}{4}$.

Cálculo de m_s (coeficiente angular da reta s, perpendicular a t pelo ponto A de tangência):

$$m_t \cdot m_s = -1 \Rightarrow -\frac{3}{4} \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = \frac{4}{3}$$

Equação da reta s, que contém o centro C:

$y - y_1 = m_s(x - x_1)$

$y + 1 = \dfrac{4}{3}(x - 5)$

$3y + 3 = 4x - 20$

$4x - 3y - 23 = 0$

As coordenadas do ponto de tangência são dadas pela solução do sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 4x - 3y - 23 = 0 \end{cases}$$

Portanto, $A\left(\dfrac{92}{25}, \dfrac{-69}{25}\right)$.

22. Indique a posição relativa da reta em relação à circunferência definida por:

a) $x + y + 3 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 13 = 0$ Tangente.

b) $3x + 2y + 10 = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ Exterior.

c) $y = x - 1$ e $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ Secante.

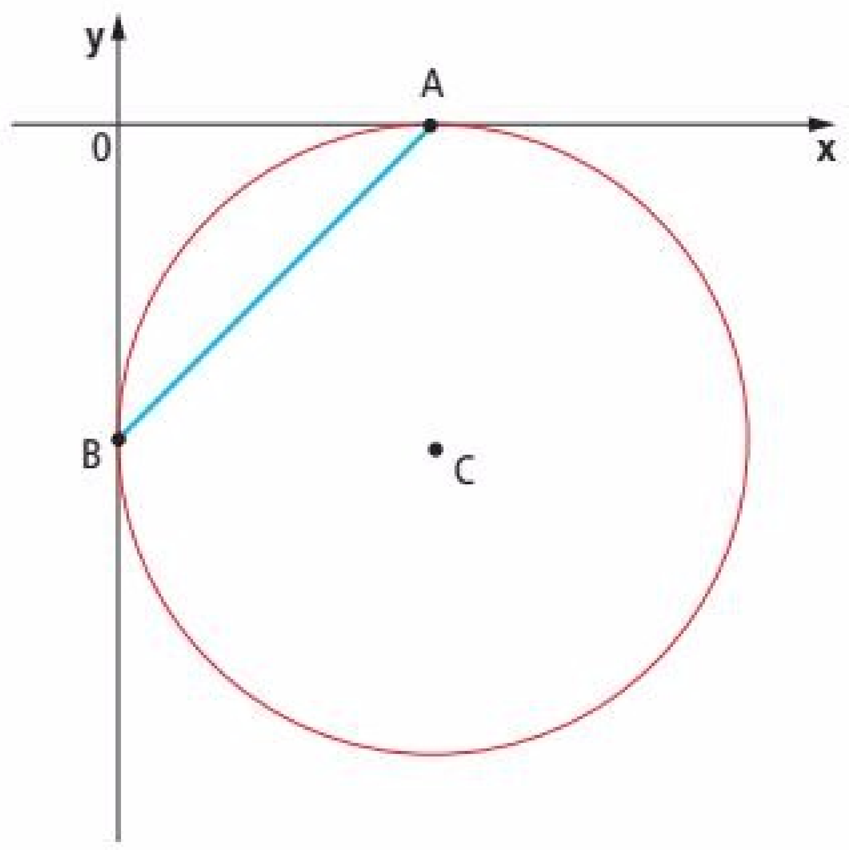
23. Determine os pontos de intersecção da reta ℓ com a circunferência λ nos seguintes casos:

a) $\ell: y = x$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 2x + 8y + 4 = 0$ $(-1, -1)$ e $(-2, -2)$

b) $\ell: 2x + y - 5 = 0$ e $\lambda: x^2 + y^2 = 5$ $(2, 1)$

24. Sejam a reta e a circunferência de equações $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$ e $x + y = 6$.
Dê a posição relativa da reta em relação à circunferência. Tangentes.

25. A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$ é tangente ao eixo *x* no ponto *A* e é tangente ao eixo *y* no ponto *B*. Determine o comprimento do segmento $\overline{AB}$. $4\sqrt{2}$



26. Dê a equação da circunferência de mesmo centro que a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ e que é tangente à reta ℓ de equação $3x + 4y + 10 = 0$. $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$

27. A reta *s*, de equação $y = x - 1$, é secante à circunferência de raio 2 e centro no ponto $(1, -2)$.

a) Escreva no caderno a equação reduzida dessa circunferência. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

b) Determine a equação geral dessa circunferência. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

c) Calcule as coordenadas dos dois pontos de intersecção entre a reta *s* e essa circunferência. $(-1, -2)$ e $(1, 0)$

28. Considere a circunferência de equação:

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$

Determine:

a) as coordenadas do centro dessa circunferência; $(2, 4)$

b) a equação da reta tangente a essa circunferência no ponto $(3, 2)$, ponto de tangência. $x - 2y + 1 = 0$

29. Determine a equação da reta tangente à circunferência λ no ponto *A* nos seguintes casos:

a) $\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ e $A(2, 3)$ $x + 2y - 8 = 0$

b) $\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ e $A(1, -2)$ $x + 2y + 3 = 0$

30. (Mack-SP) Qual o comprimento da corda determinada pela reta $x - y = 0$ sobre a circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$? $2\sqrt{7}$

31. Dada a circunferência $\lambda: x^2 + (y - 2)^2 = 9$ e a reta r: $y = x - 5$, determine a equação da reta que passa pelo centro de λ e é perpendicular a *r*, e verifique a posição de *r* em relação a λ. $y = -x + 2$; a reta *r* é exterior à circunferência.

32. A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 4 = 0$ intersecta o eixo *x* nos pontos *A* e *B*. Sabendo que *C* é o centro da circunferência, determine:

a) as coordenadas dos pontos *A*, *B* e *C*; $A(1, 0)$, $B(4, 0)$ e $C\left(\frac{5}{2}, -2\right)$

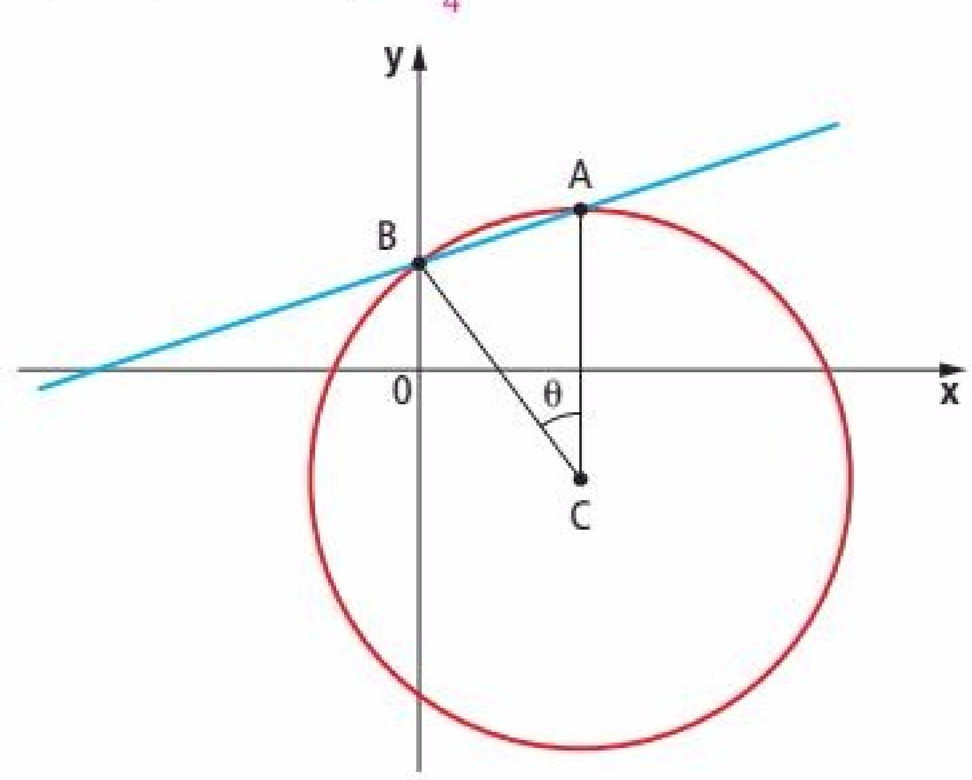
b) a área do triângulo ABC. $A = 3$ u.a.

33. O ponto $P(0, 3)$ é exterior à circunferência de equação $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Determine as equações das retas tangentes à circunferência e que passam pelo ponto *P*. $y - 3 = 0$ ou $4x - 3y + 9 = 0$

34. (Fuvest-SP) A reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ é tangente a uma circunferência de centro $(2, 0)$. Calcule o raio da circunferência. $r = 1$

35. A reta *s*, de equação $x + 2y + k = 0$, é exterior à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 19 = 0$. Determine os valores de *k*. $k < -\sqrt{5}$ ou $k > \sqrt{5}$

36. Calcule a tangente do ângulo formado por dois raios da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ que intersectam os extremos da corda cuja reta suporte é $x - 3y + 6 = 0$. $\text{tg}\,\theta = \frac{3}{4}$



Ilustrações: Editoria de arte

37. (UEG-GO) Considere num plano cartesiano duas retas *r* e *s*, perpendiculares. A reta *r* tem equação $y = 2x$ e a reta *s* intercepta o eixo *x* no ponto $B(10, 0)$. Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(0, 0)$, $B(10, 0)$ e *C*, que é o ponto de interseção das retas *r* e *s*. $(x - 5)^2 + y^2 = 5^2$

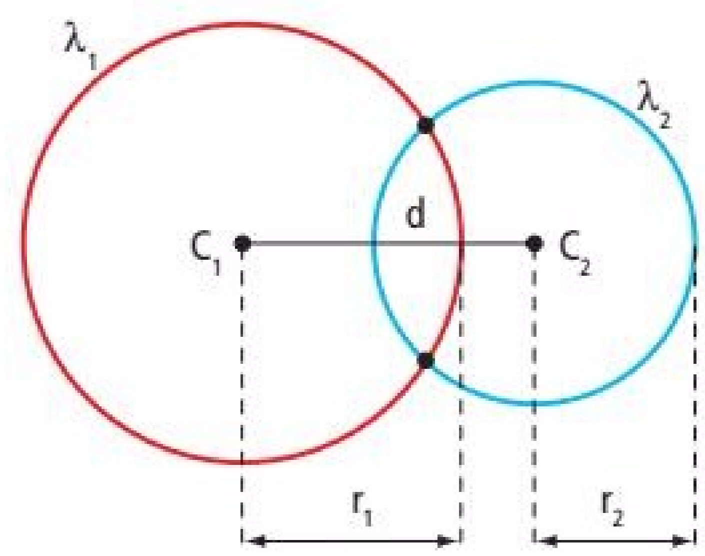
Posições relativas entre duas circunferências

Considere uma circunferência λ_1 de centro C_1 e raio r_1 e outra circunferência λ_2 de centro C_2 e raio r_2, e seja $d(C_1, C_2)$ a distância entre seus centros.

Para analisar a posição relativa entre as circunferências λ_1 e λ_2, podemos comparar a distância *d* entre os centros dessas circunferências com a soma ou a diferença entre os raios. Veja:

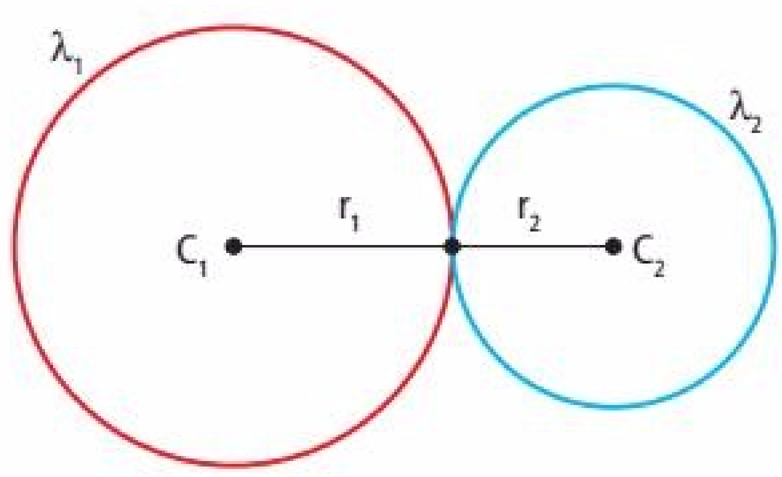
1º caso: quando as duas circunferências possuem dois pontos comuns elas são **secantes**.

Se $|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$, então λ_1 e λ_2 são secantes.

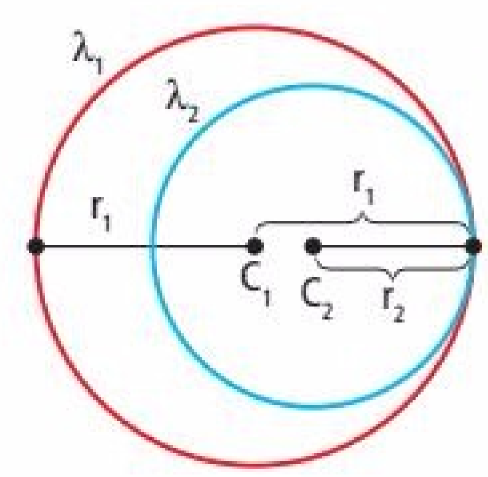


2º caso: quando as duas circunferências possuem um ponto comum elas são **tangentes**.

Duas circunferências podem ser tangentes entre si, externa ou internamente.



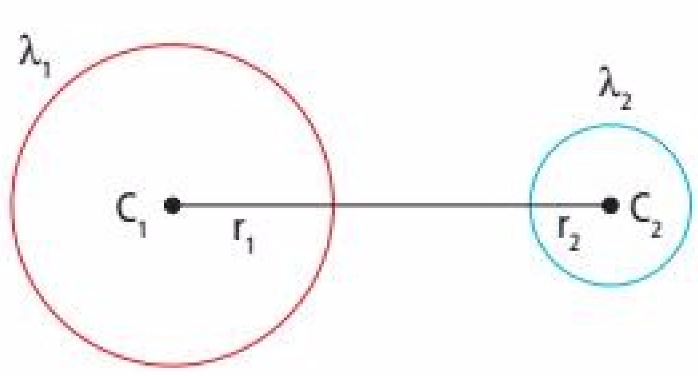
Se $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$, então λ_1 e λ_2 são tangentes externamente.



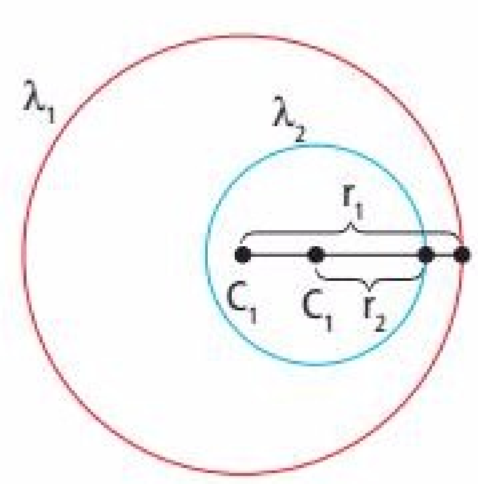
Ilustrações: Editoria de arte

Se $d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$, então λ_1 e λ_2 são tangentes internamente.

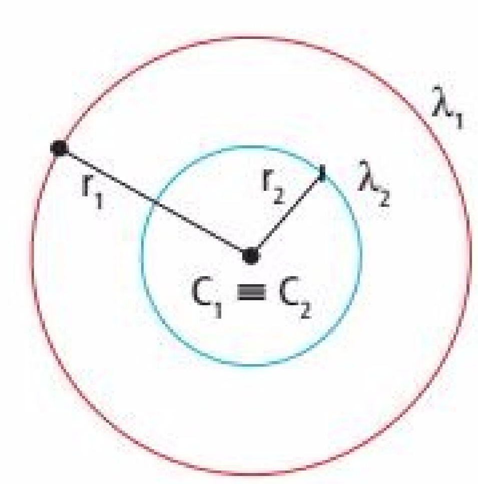
3º caso: quando as duas circunferências não possuem nenhum ponto comum elas são **exteriores** ou **interiores**.



Se $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$, então λ_1 e λ_2 são circunferências exteriores.



Se $0 < d(C_1, C_2) < |r_1 - r_2|$, então λ_1 e λ_2 são circunferências interiores não concêntricas.



Se $d(C_1, C_2) = 0$, então λ_1 e λ_2 são interiores concêntricas.

Observe que, se as circunferências não são concêntricas e não possuem pontos comuns, temos as possibilidades de elas serem circunferências externas ou de serem uma circunferência interna à outra.

A resolução do sistema de equações, formado pelas equações das duas circunferências, também permite descobrir se elas têm dois, um ou nenhum ponto em comum. Para isso, devemos analisar o discriminante da seguinte maneira:

a) $\Delta > 0 \Rightarrow$ dois pontos em comum, portanto as circunferências são secantes.

b) $\Delta = 0 \Rightarrow$ um ponto em comum, portanto as circunferências são tangentes internas ou externas.

c) $\Delta < 0 \Rightarrow$ nenhum ponto em comum, portanto as circunferências podem ser exteriores, interiores e não concêntricas ou interiores e concêntricas.

Note que nos casos de $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$ será necessário utilizar as relações entre os centros das circunferências.

Exercício resolvido

10 Determine os pontos comuns às duas circunferências dadas e, em seguida, verifique a posição relativa.

a) $\lambda_1: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ e
$\lambda_2: x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$

b) $\lambda_1: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 22 = 0$ e
$\lambda_2: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$

c) $\lambda_1: x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$ e
$\lambda_2: x^2 + y^2 - 14x - 8y + 64 = 0$

Resolução

a) Para obter os pontos comuns (se existirem) às duas circunferências, resolvemos o sistema formado pelas suas equações.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (-1), temos:

$$\begin{cases} -x^2 - y^2 + 4x + 4y - 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0 \end{cases}$$

Agora, adicionando as equações, temos:

$-4y + 12 = 0 \Rightarrow y = 3$

Substituindo o valor de y em (I):

$x^2 + 9 - 4x - 12 + 7 = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

O ponto (2, 3) é o único ponto comum às circunferências. Logo, elas são tangentes.

Vamos, agora, descobrir se elas se tangenciam externamente ou internamente:

- λ_1 tem centro $C_1(2, 2)$ e raio $r_1 = 1$;
- λ_2 tem centro $C_2(2, 4)$ e raio $r_2 = 1$.

Sendo $d(C_1, C_2) = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$, as circunferências são tangentes externamente, pois $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$.

b) Resolvendo o sistema formado pelas equações das duas circunferências, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 10y + 22 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (II) por (-1), temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 10y + 22 = 0 \\ -x^2 - y^2 + 8x + 4y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$6x - 6y + 12 = 0 \quad \text{(III)}$$

Da equação (III), temos:

$6x - 6y + 12 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = x + 2$ (IV)

Substituindo o valor de y em (I):

$x^2 + (x + 2)^2 - 2x - 10(x + 2) + 22 = 0$

$x^2 + x^2 + 4x + 4 - 2x - 10x - 20 + 22 = 0$

$2x^2 - 8x + 6 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ → $x' = 3$, $x'' = 1$

Substituindo esses valores na equação (IV):

$x = 3 \Rightarrow y = 3 + 2 \Rightarrow y = 5$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 + 2 \Rightarrow y = 3$

Os pontos de intersecção são (3, 5) e (1, 3).

As circunferências λ_1 e λ_2 têm dois pontos comuns e, portanto, são secantes.

c) Resolvendo o sistema formado pelas equações das duas circunferências, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 14x - 8y + 64 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (-1), temos:

$$\begin{cases} -x^2 - y^2 + 8x + 8y - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 - 14x - 8y + 64 = 0 \end{cases}$$

$$-6x \quad +48 = 0 \Rightarrow x = 8$$

Assim, se $x = 8$, então a ordenada será:

$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8^2 + y^2 - 8 \cdot 8 - 8y + 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 8y + 16 = 0 \Rightarrow (y - 4)^2 = 0 \Rightarrow y = 4$

Como temos apenas um ponto em comum entre as circunferências, é certo que elas são tangentes.

Para descobrir se elas são tangentes externas ou internas, vamos calcular a distância entre os centros das circunferências e comparar com a soma algébrica dos raios, ou seja:

$\lambda_1: x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16 \Rightarrow C_1 = (4, 4)$ e $r_1 = 4$

$\lambda_2: x^2 + y^2 - 14x - 8y + 64 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 1 \Rightarrow C_2 = (7, 4)$ e $r_2 = 1$

Calculando a distância entre os centros, temos:

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(7-4)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{9}$$

$$d(C_1, C_2) = 3$$

Podemos observar que $d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$, pois:

$|r_1 - r_2| = |4 - 1| \Rightarrow |r_1 - r_2| = 3$

Assim, concluímos que as circunferências são tangentes internas.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

38. Determine os pontos de intersecção das circunferências $x^2 + y^2 = 4$ e $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 10$. $(0, 2)$ e $(1, 1)$.

39. Qual é a posição relativa entre as circunferências de equações $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$ e $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$? Concêntricas.

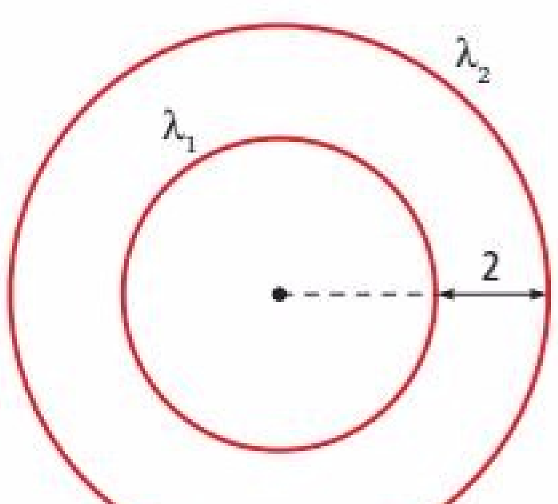
40. Qual a posição relativa e quais os pontos comuns (caso existam) entre as circunferências de equações: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$?
Tangentes no ponto $(1, 1)$; ponto comum: $(1, 1)$; tangentes externamente.

41. Determine a equação da circunferência de centro $(0, 8)$ e tangente externamente à circunferência de equação $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 49$. $x^2 + (y - 8)^2 = 36$

42. Qual é a equação de uma circunferência concêntrica à circunferência de equação

$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ e que é tangente à reta ℓ de equação $4x + 3y + 13 = 0$? $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 29 = 0$

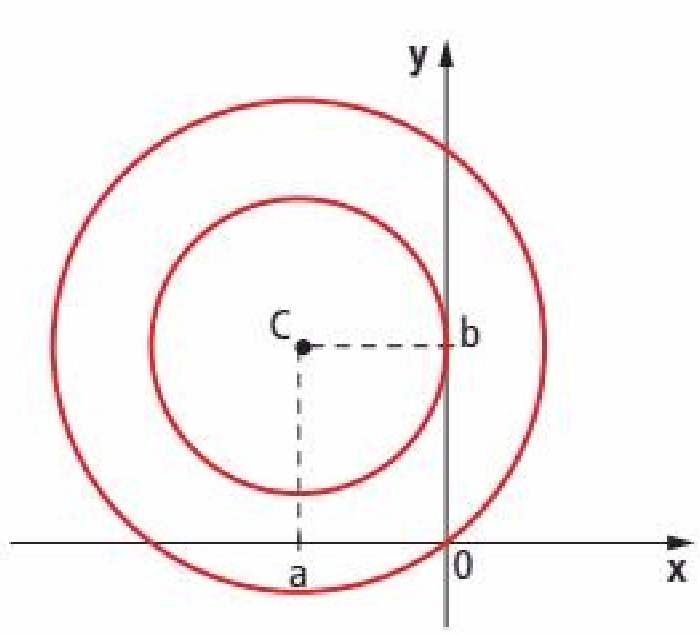
43. Seja $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 36 = 0$ a equação da circunferência λ_1, determine a equação da circunferência λ_2.



λ_2: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 68 = 0$

44. Determine a equação da circunferência de centro $(0, 5)$ e tangente externamente à circunferência de equação $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 9$. $x^2 + (y - 5)^2 = \left(2\sqrt{10} - 3\right)^2$

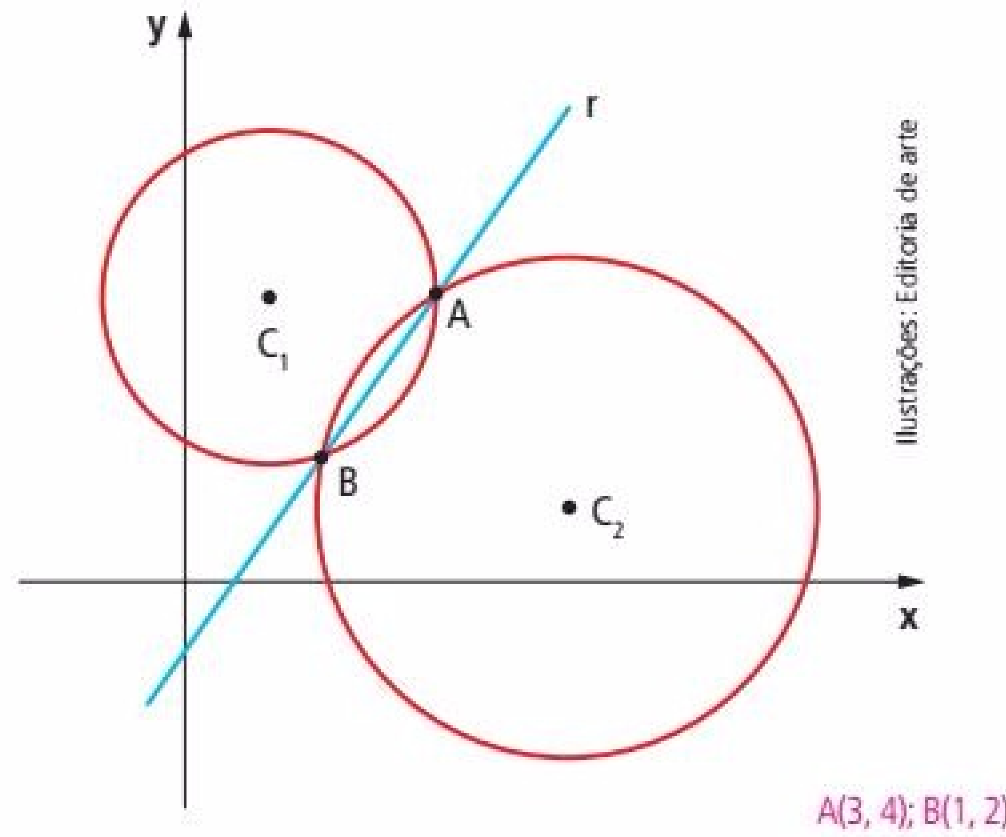
45. Determine a equação da circunferência concêntrica à circunferência $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ e tangente ao eixo das ordenadas. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$



46. As equações das circunferências da figura são:

λ_1: $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$

λ_2: $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$



Ilustrações: Editoria de arte

$A(3, 4)$; $B(1, 2)$

a) Determine as coordenadas dos pontos *A* e *B*.

b) Determine a equação da reta *r*. $x - y + 1 = 0$

c) Calcule a área do quadrilátero C_1AC_2B. 6

47. Dadas as equações $x^2 + y^2 + 16x - 96 = 0$ e $x^2 + y^2 - 16y + 32 = 0$ das circunferências λ_1 e λ_2, secantes entre si:

a) escreva no caderno a equação da reta que passa pela intersecção dessas circunferências; $x + y - 8 = 0$

b) calcule o comprimento da corda comum às duas circunferências; $8\sqrt{2}$

c) subtraia, membro a membro, uma das equações dadas da outra e conclua o que se pode dizer a respeito da equação resultante. A equação obtida é a reta calculada no item **a**.

48. (Mack-SP) Há duas circunferências secantes λ_1 e λ_2, de equações $(x - 1)^2 + y^2 = 5$ e $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$, respectivamente. A equação da reta que passa pelos pontos de intersecção de λ_1 e λ_2, é:

x a) $x + y - 4 = 0$

b) $x + y + 4 = 0$

c) $x - y - 6 = 0$

d) $x + y + 8 = 0$

e) $x - y - 8 = 0$

49. Dada a equação $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$, determine a circunferência interna cujo centro é $(7, 3)$.
$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 4$

50. (UFSC) Determine o raio da circunferência C_1, cujo centro é o ponto de intersecção da reta *r* de equação $x - y - 1 = 0$ com a reta *s* de equação $2x - y + 1 = 0$, sabendo que C_1 é tangente exteriormente à circunferência C_2 de equação $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 4 = 0$.
$r_1 = 3$

51. O GPS é uma tecnologia de auxílio à localização que utiliza em sua essência conhecimentos de Geometria analítica, fundamentais para o entendimento de seu funcionamento.

Como funciona o GPS?

[...] O GPS (Global Positioning System - Sistema de Posicionamento Global) [...] teve sua origem no Departamento de Defesa dos Estados Unidos. Sua função é a de identificar a localização de um aparelho chamado de receptor GPS.

Os aparelhos receptores, por sua vez, têm a função de enviar um sinal para os satélites. Assim, fazendo alguns cálculos, [...] o receptor GPS consegue determinar qual a sua posição.

[...] Os satélites, assim como os receptores GPS, possuem um relógio interno, o qual marca a hora com uma precisão de nano segundos. Quando o sinal é emitido, também é enviado o horário que ele "saiu" do satélite.

Este sinal nada mais é do que sinais de rádio, que viajam na velocidade da luz. Cronometrando quanto tempo este sinal demorou a chegar, o receptor consegue calcular sua distância do satélite. Como a posição dos satélites é atualizada constantemente, é possível, por meio destes cálculos, determinar qual a sua posição exata.

[...] Os GPS utilizam o sistema de triangulação com três satélites para determinar a localização de um receptor em terra chamado de trilateração.

Homero Meyer

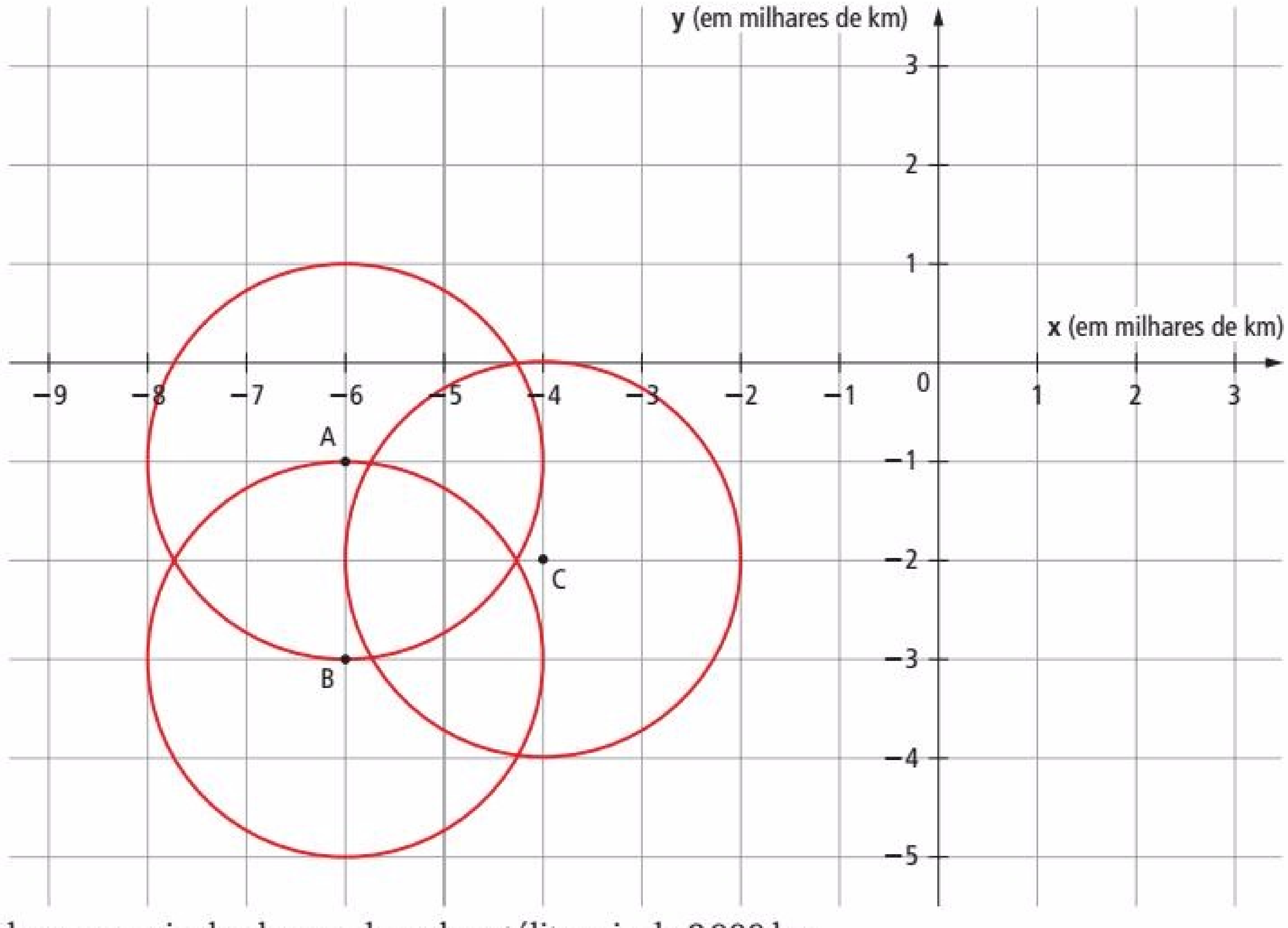
Representação fora de escala e em cores-fantasia.

Para determinar a altitude em que você se encontra será necessário um quarto satélite. O princípio do cálculo é o mesmo, mas envolve alguns números e fórmulas extras por tratar-se de um espaço tridimensional.

MARTINS, Elaine. Como funciona o GPS? **TecMundo**. Disponível em: <http://www.tecmundo.com.br/gps/2562-como-funciona-o-gps-.htm>. Acesso em: 12 dez. 2015.

a) O Sistema de Posicionamento Global (GPS) necessita da interação entre dois "dispositivos" que trocam sinais entre si. Quais são eles? Satélite e receptor.

b) Suponha que a triangulação realizada por um receptor de GPS utilize os sinais recebidos de três satélites A, B e C, conforme indicado na figura:



Editoria de arte

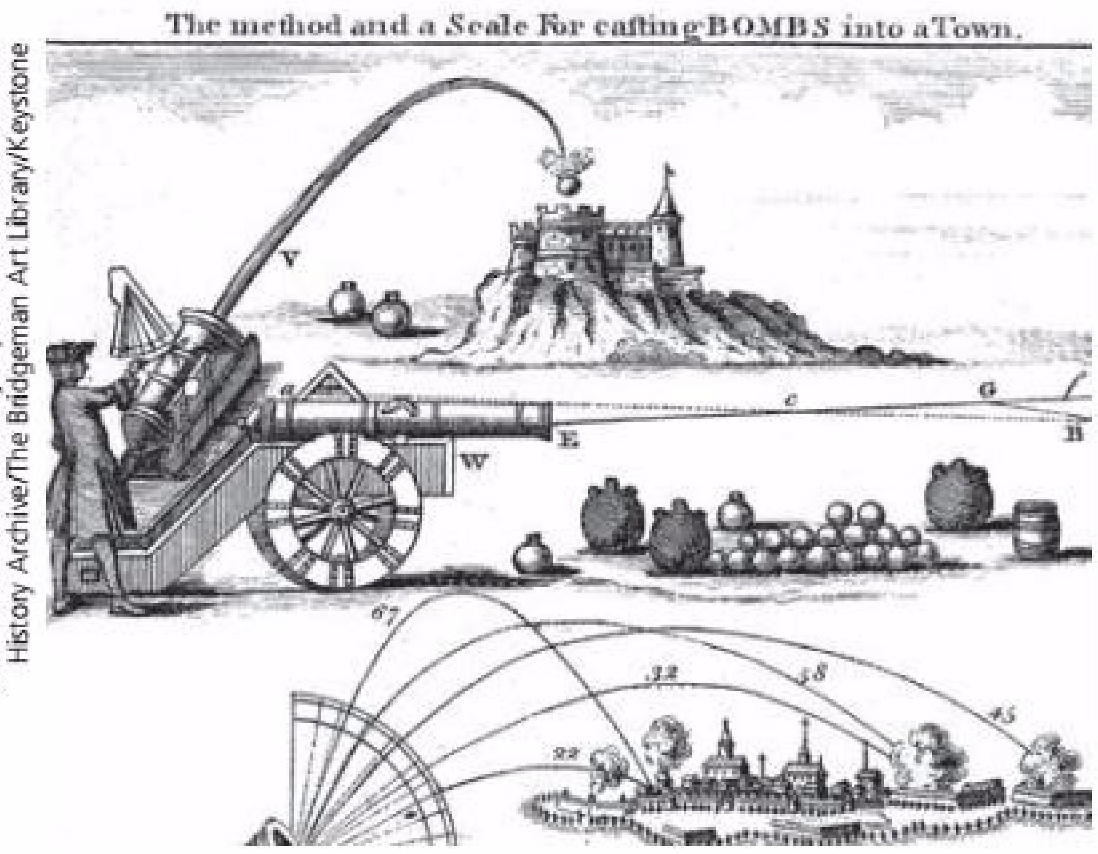
Suponha que o raio de alcance de cada satélite seja de 2000 km.

Quais são as equações das circunferências que correspondem ao alcance máximo de cada satélite indicado na figura (A, B e C)? A: $(x + 6)^2 + (y + 1)^2 = 4$; B: $(x + 6)^2 + (y + 3)^2 = 4$; C: $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$

Geometria analítica: cônicas

Nos capítulos anteriores, estudamos pontos, retas, circunferências e sólidos geométricos, como esferas, cones e pirâmides. Neste capítulo estudaremos as cônicas. Algumas situações e objetos lembram essas curvas, por exemplo:

a) A trajetória de um projétil lançado para o alto, desprezando a resistência do ar, tem a forma de uma **parábola**.



Gravura. Séc. XVIII. Coleção particular. Foto: Universal History Archive/The Bridgeman Art Library/Keystone

Vários estudos foram feitos para determinar a forma da trajetória de um projétil. Na gravura, estão alguns exemplos dessas tentativas. O italiano Galileu Galilei (1564-1642) foi o primeiro a perceber e estudar a trajetória parabólica de projéteis no vácuo.

b) A luminária usada pelos dentistas para iluminar a boca de seus pacientes é formada por um refletor elíptico, obtido a partir da rotação de parte de uma **elipse** ao redor de seu eixo maior.

Stasique/ Shutterstock.com

A superfície elíptica concentra o máximo de luz em um ponto, evitando desconforto do paciente com raios luminosos ofuscando sua vista.

A parábola e a elipse são conhecidas como **secções cônicas**, ou simplesmente **cônicas**, nosso objeto de estudo neste capítulo. Além delas, também estudaremos a secção cônica denominada hipérbole.

Considere duas retas *e* e *g*, não perpendiculares, oblíquas entre si e que se cruzam no ponto *V* (Figura 1).

Figura 1

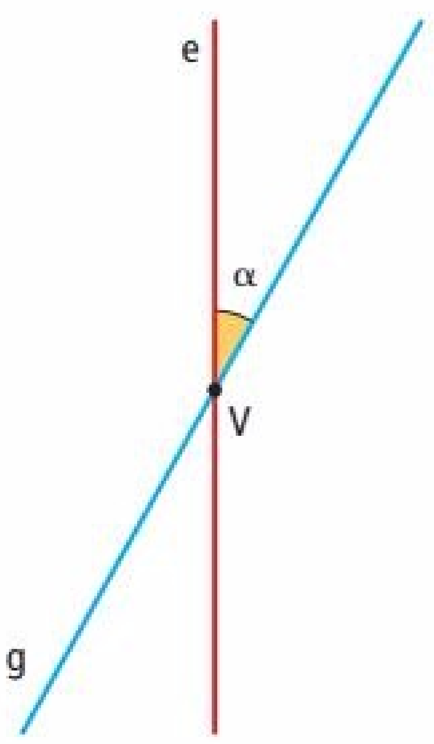
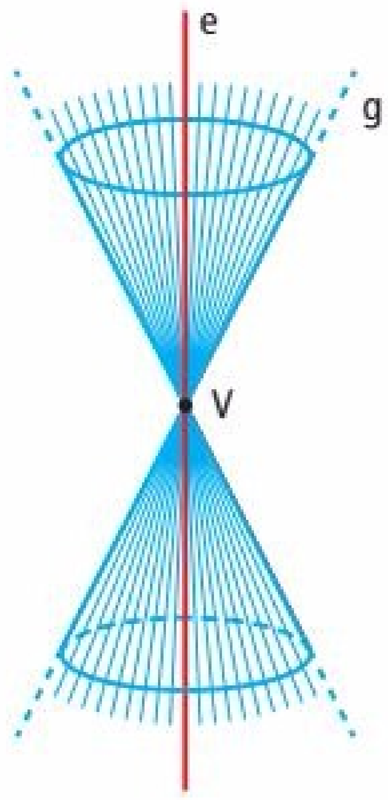


Figura 2

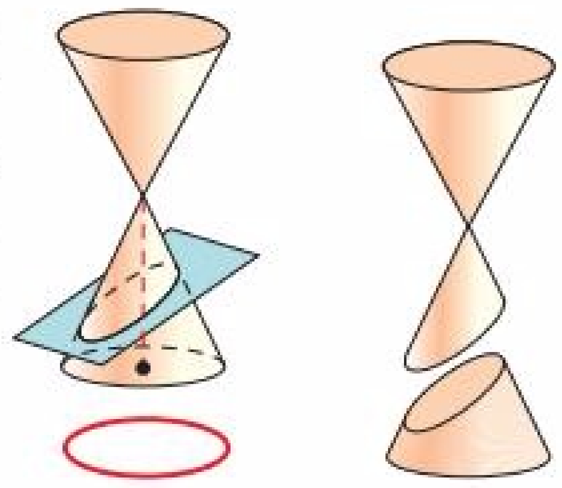


Ilustrações: Editoria de arte

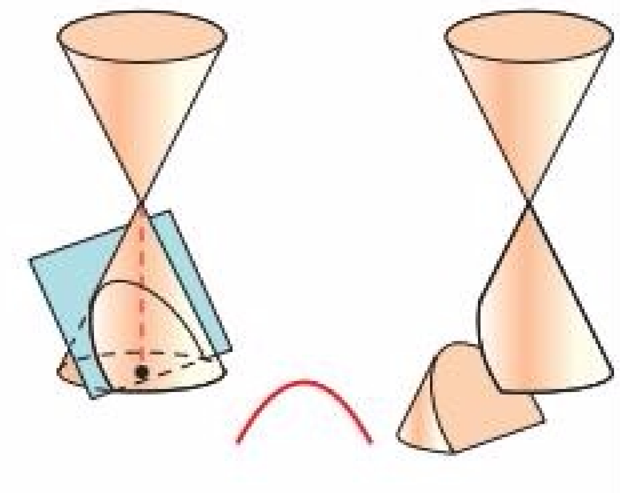
Ao rotacionar a reta *g* em torno de *e* por 360°, mantendo o ângulo α fixo, obtemos uma superfície denominada **superfície cônica de duas folhas** (Figura 2). A reta *e* é o eixo da superfície cônica e a reta *g* é a geratriz dessa superfície.

Geometricamente, as secções cônicas podem ser obtidas a partir da intersecção de um plano com uma superfície cônica de duas folhas. Dependendo da inclinação desse plano em relação à geratriz da superfície cônica, obtemos uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola.

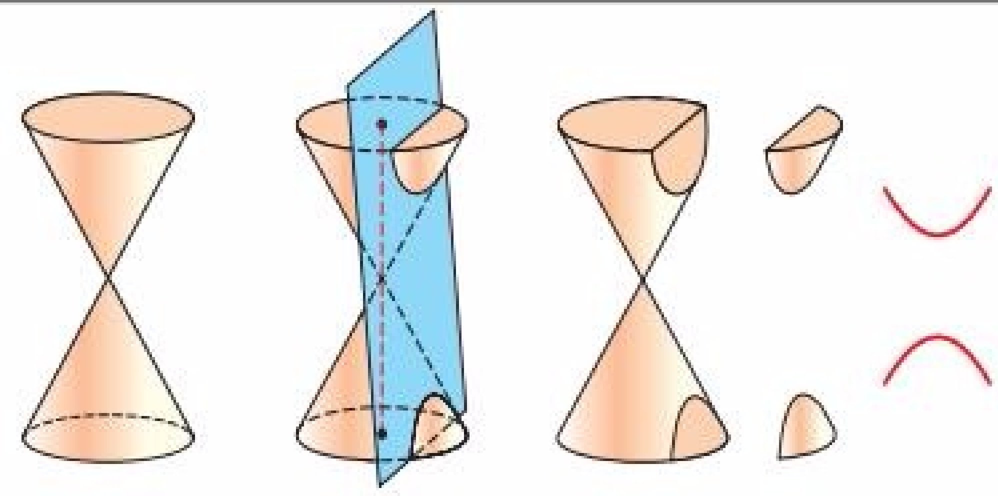
Elipse: quando o plano intersecta todas as geratrizes da superfície cônica obliquamente e corta apenas uma folha da superfície.



Parábola: quando o plano é paralelo a uma geratriz da superfície cônica.



Hipérbole: quando o plano é paralelo ao eixo da superfície cônica e corta as duas folhas da superfície.



Ilustrações: Editoria de arte

História da Matemática

World History Archive/Alamy/Latinstock

Matemáticos discutindo um problema de Geometria.

Aspectos históricos e a importância das cônicas

Tratados sobre as seções cônicas são conhecidos antes da época de Euclides (± 325-265 a.C.). E, associado à história dessas curvas, temos Apolônio que nasceu na cidade de Perga, região da Panfília (atualmente Turquia) por volta de 262 a.C. e viveu, aproximadamente, até 190 a.C.

Apolônio foi contemporâneo e rival de Arquimedes que viveu, aproximadamente, entre 287 a.C. e 212 a.C. e, juntamente com Euclides, formam a tríade considerada como sendo a dos maiores matemáticos gregos da antiguidade. Apolônio estudou com os discípulos de Euclides em Alexandria e foi astrônomo notável, talvez ele, e não Euclides, mereceu dos antigos o adjetivo de "o grande Geômetra". A maior parte das obras de Apolônio desapareceu. O que sabemos dessas obras perdidas devemos a Pappus de Alexandria (séc. IV a.C.). Sua obra-prima é **Seções Cônicas** composta por 8 volumes (aproximadamente 400 proposições!). Da obra original sobreviveram 7 volumes, sendo 4 escritos em grego e 3 traduzidos para o árabe por Thabit Ibn Qurra (826 a 901) no séc. IX. Os três primeiros volumes são baseados em trabalhos de Euclides e o oitavo volume foi, infelizmente, perdido. [...]

Apolônio foi o matemático que mais estudou e desenvolveu as seções cônicas na antiguidade. Suas contribuições foram: ter conseguido gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção; ter introduzido os nomes elipse e hipérbole e ter estudado as retas tangentes e normais a uma cônica.

A importância do estudo de Apolônio sobre as cônicas dificilmente pode ser questionada. Temos a inegável influência dele sobre os estudos de Ptolomeu. [...] Ptolomeu introduziu o sistema de latitude e longitude tal como é usado hoje [...]. As Cônicas de Apolônio também tiveram forte influência nos estudos de Kepler. O interesse de Kepler pelas cônicas surgiu devido às suas aplicações à óptica e à construção de espelhos parabólicos. Em 1609, Kepler edita a **Astronomia Nova**, onde apresenta a principal lei da astronomia: "os planetas descrevem órbitas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos". [...] Outra aplicação prática das cônicas aparece na obra de Galileu (1632), onde "desprezando a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma parábola". [...] Foi a Matemática pura de Apolônio que permitiu, cerca de 1800 anos mais tarde, os "Principia" [livro] de Sir Isaac Newton. A lei da gravitação de Newton matematizou as descobertas empíricas de Kepler e, a partir do século dezessete, possibilitou o estudo analítico das cônicas e das suas aplicações aos movimentos no espaço, este, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível. [...]

Fonte: SATO, Jocelino. **Aspectos históricos e a importância das cônicas**. Uberlândia: 2005. Disponível em: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node2.html>. Acesso em: 1º fev. 2016.

Atividades

Escreva no caderno

1. De acordo com o texto, quem são os estudiosos que compõem a tríade considerada como sendo a dos maiores matemáticos gregos da Antiguidade? Apolônio, Arquimedes e Euclides.

2. Qual dos matemáticos gregos da Antiguidade mais contribuiu para os estudos das cônicas? Apolônio.

3. Quais são as aplicações dos estudos das cônicas, conforme apresentado no texto?

Cartografia, Óptica, construção de espelhos parabólicos, trajetória de um projétil e movimentos no espaço.

Elipse

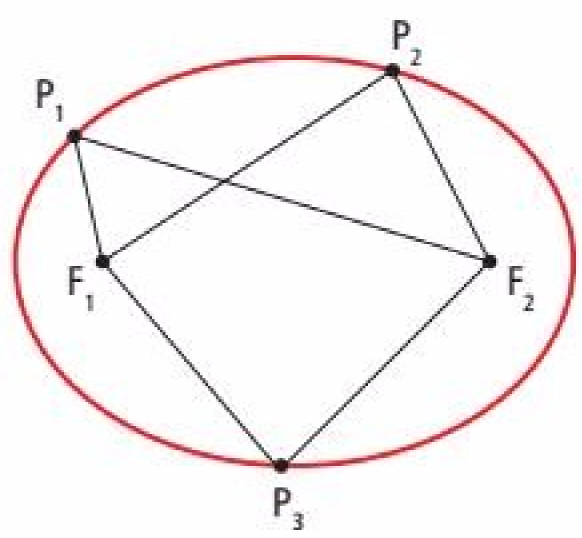
Definição

Considere dois pontos distintos, F_1 e F_2, que pertencem a um plano, de modo que a distância entre eles seja 2c.

Considere também um número real *a*, tal que $2a > 2c$. Chamamos de **elipse** o conjunto dos pontos *P* desse plano cuja soma das distâncias PF_1 e PF_2 é constante e igual a 2a.

Os pontos P_1, P_2 e P_3 pertencem à elipse representada na figura a seguir. Logo, podemos escrever:

Ilustrações: Editoria de arte



$$d(P_1, F_1) + d(P_1, F_2) = 2a$$

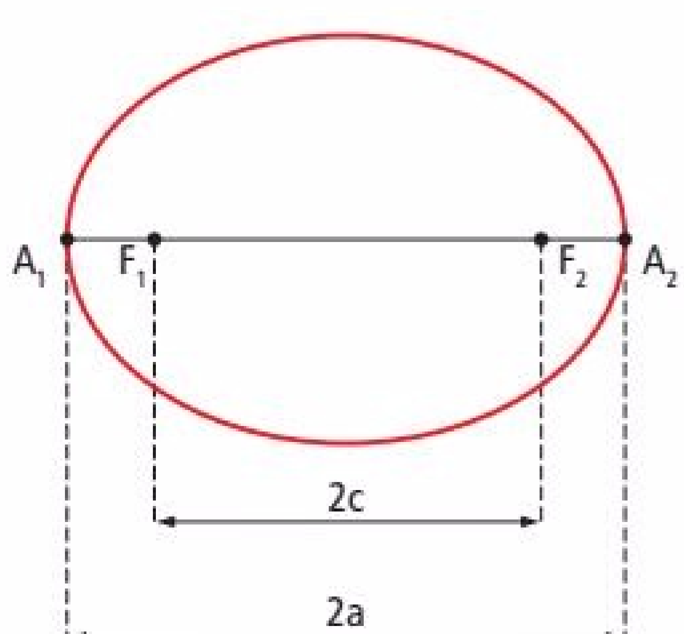
$$d(P_2, F_1) + d(P_2, F_2) = 2a$$

$$d(P_3, F_1) + d(P_3, F_2) = 2a$$

De modo geral, se *P* é um ponto qualquer da elipse, então:

$$\mathbf{d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a}$$

Agora, considere A_1 e A_2 as intersecções da elipse com a reta que passa por F_1 e F_2:



Note que $d(A_1, A_2) = 2a$, pois:

$$d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = d(A_2, F_2) + d(A_2, F_1)$$

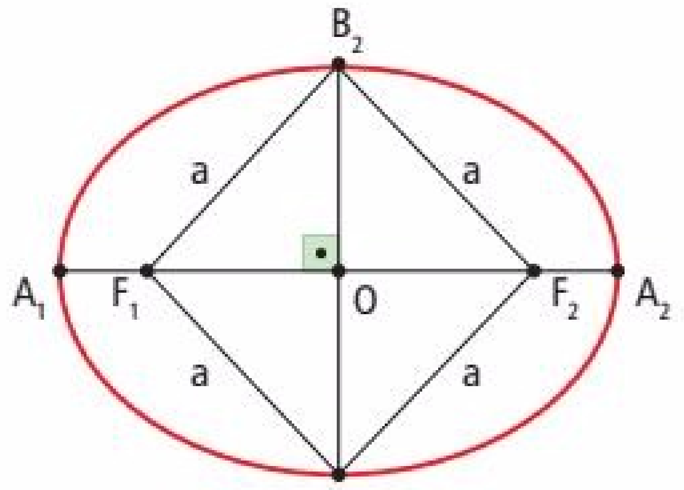
Sendo $x = d(A_1, F_1)$ e $y = d(A_2, F_2)$, temos:

$$x + (x + 2c) = y + (y + 2c)$$

e, portanto, $x = y$.

$$d(A_1, A_2) = d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) + d(F_2, A_2) =$$
$$= x + 2c + x = 2(x + c) = 2a$$

Sejam *O* o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ e B_1 e B_2 as intersecções da elipse com a mediatriz de $\overline{F_1F_2}$. Então:



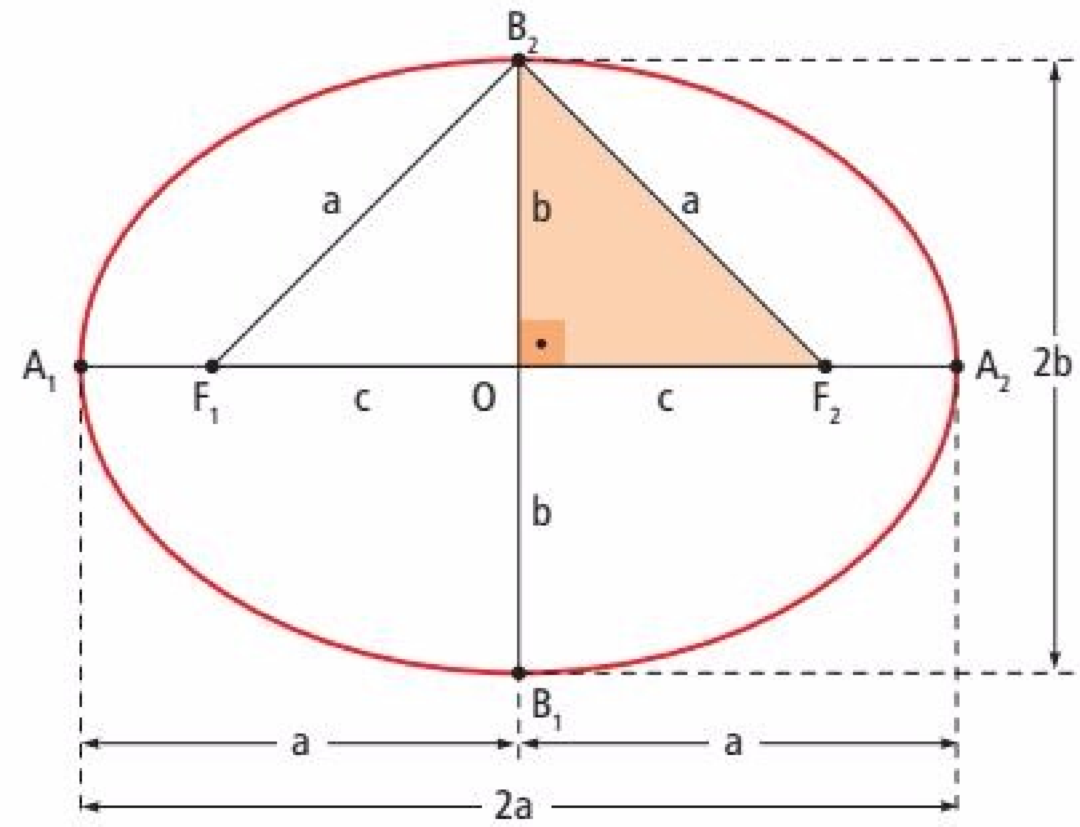
$$d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2)$$

$$d(B_1, F_1) + d(B_1, F_2) = 2a$$

Portanto: $d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2) = a$

Do mesmo modo: $d(B_2, F_1) = d(B_2, F_2) = a$

Elementos



Ilustrações: Editoria de arte

Em uma elipse destacamos os seguintes elementos:

- **focos**: são os pontos fixos F_1 e F_2;
- **vértices**: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2;
- **distância focal**: é a distância F_1F_2, cuja medida é 2c;
- **centro**: é o ponto *O*, ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$;
- **eixo maior**: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, cuja medida é 2a;
- **eixo menor**: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, cuja medida é 2b.

Como B_2 é um ponto da mediatriz de $\overline{F_1F_2}$, então, por construção, o ângulo F_2OB_2 é reto e o triângulo F_2OB_2 é retângulo em *O*, como mostra a figura acima. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Essa relação é conhecida como **relação fundamental** e será muito utilizada no estudo da elipse.

Calculando o quociente entre a distância focal (2c) e a medida do eixo maior (2a) obtemos:

$$e = \frac{c}{a}$$

Esse quociente é conhecido por **excentricidade** (*e*) da elipse e é um número entre 0 e 1 pois $a > c$.

A excentricidade de uma elipse indica quanto ela é mais "achatada" ou mais "arredondada". Assim, quanto mais próximo de 0 for o valor de *e*, mais a elipse se aproxima de uma circunferência. Já quando o valor da excentricidade se aproxima de 1, a elipse fica próxima de um segmento de reta.

Equação reduzida da elipse

Fixando um sistema cartesiano, vamos obter a equação da elipse nos casos em que o centro da elipse está na origem e seus eixos estão sobre os eixos coordenados, e quando o centro da elipse está fora da origem e seus eixos estão paralelos aos eixos coordenados.

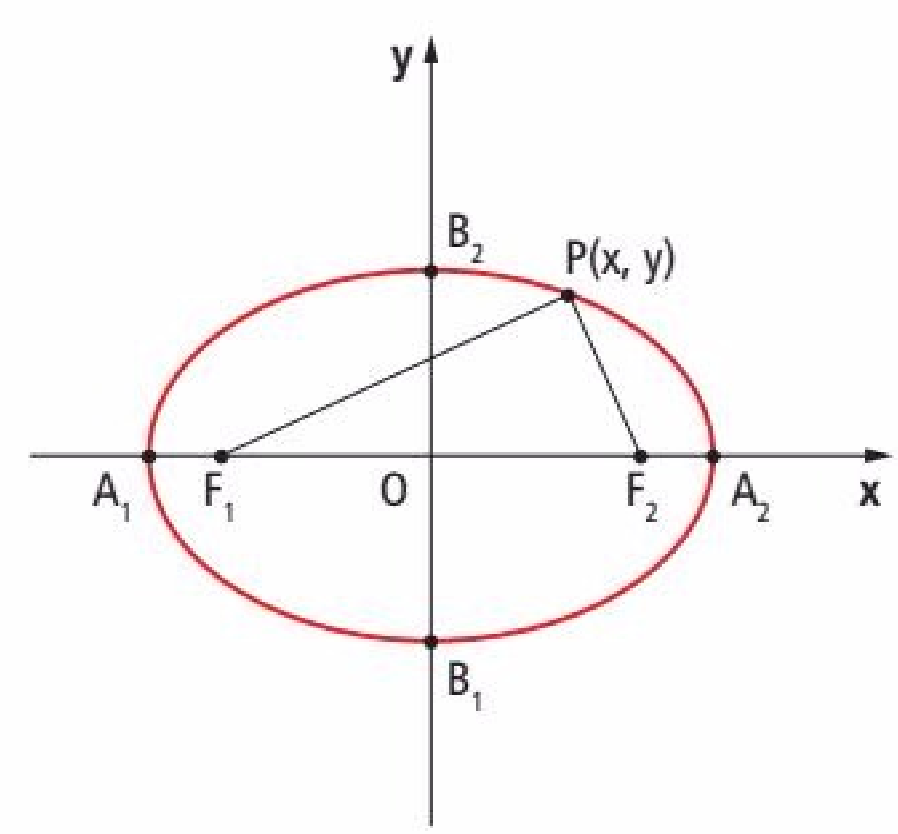
Primeiro vamos considerar uma elipse cujo eixo maior está sobre o eixo *x*, os focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e o centro da elipse é a origem O(0, 0). As extremidades do eixo maior são os pontos $A_1(-a, 0)$, e $A_2(a, 0)$ e do eixo menor são os pontos $B_1(0, -b)$ e $B_2(0, b)$.

Para um ponto P(x, y) qualquer da elipse, temos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$



Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$a^2[(x - c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2$

$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

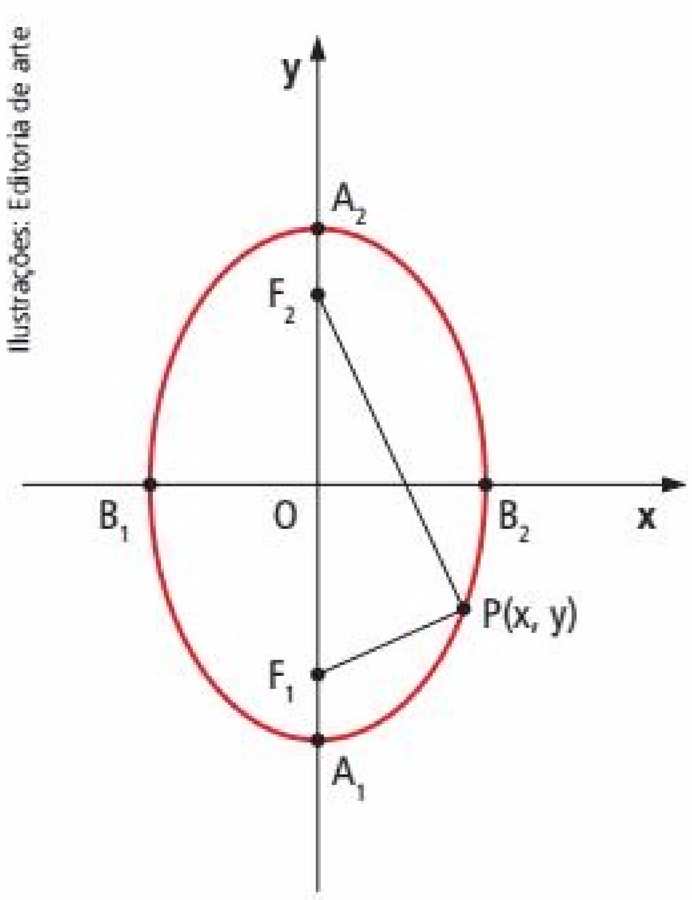
Pela relação fundamental, $a^2 = b^2 + c^2$, podemos escrever $a^2 - c^2 = b^2$. Daí, temos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo os dois membros por a^2b^2 ($a > 0$ e $b > 0$), temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa é a **equação reduzida da elipse de focos no eixo *x* e centro na origem**.



Agora considere uma elipse cujo eixo maior está sobre o eixo *y*, os focos são $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$ e o centro da elipse é a origem $O(0, 0)$. As extremidades do eixo maior são os pontos $A_1(0, -a)$ e $A_2(0, a)$, e do eixo menor são os pontos $B_1(-b, 0)$ e $B_2(b, 0)$.

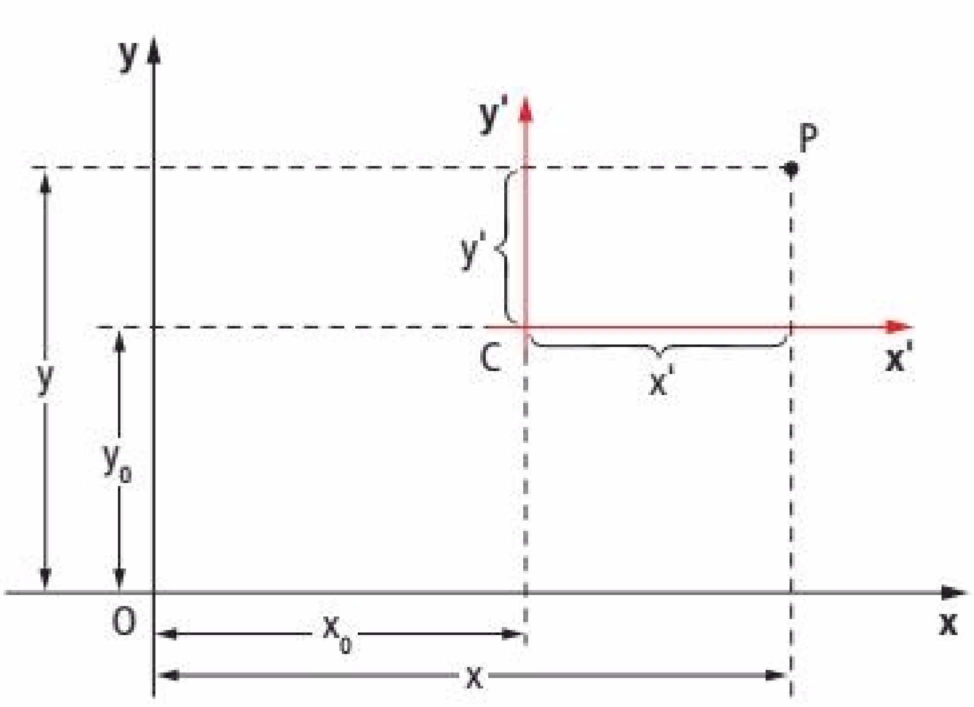
Para um ponto $P(x, y)$ qualquer da elipse, temos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = 2a$$

Desenvolvendo essa equação, de modo análogo ao caso anterior, obtemos a equação:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Essa é a **equação reduzida da elipse de focos no eixo *y* e centro na origem**.

Para determinar as equações de elipses com centro fora da origem, construímos um sistema de coordenadas auxiliar.

Assim, considere os sistemas cartesianos ortogonais xOy e $x'Cy'$, de eixos respectivamente paralelos. O ponto *C* tem coordenadas x_0 e y_0 em relação ao sistema xOy.

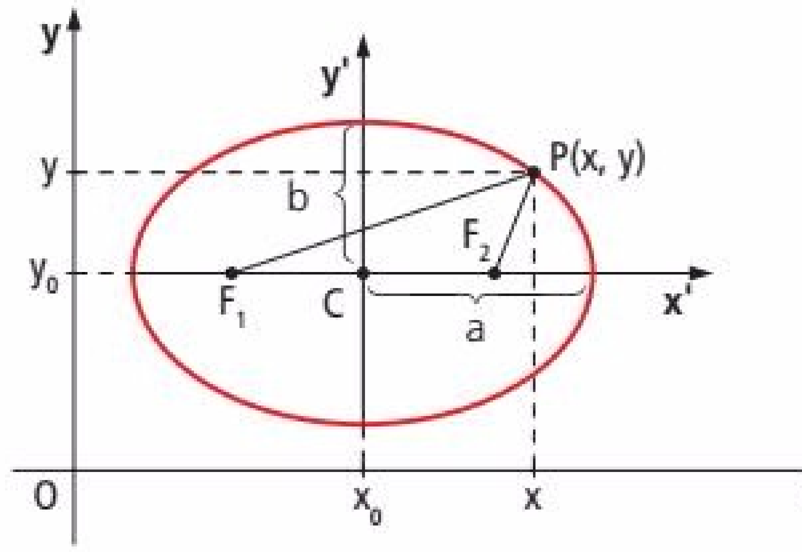
Vamos estabelecer relações entre as coordenadas de um ponto *P* considerando os sistemas $x'Cy'$ e xOy.

Assim, temos:

$$x' = x - x_0$$

$$y' = y - y_0$$

Agora, considere uma elipse com centro em um ponto $C(x_0, y_0)$ e eixos paralelos aos eixos coordenados. Observe que nesse caso o eixo maior da elipse está contido no eixo x' e o eixo menor, no eixo y'.



Ilustrações: Editoria de arte

Considerando o sistema x'Cy', a equação da elipse é:

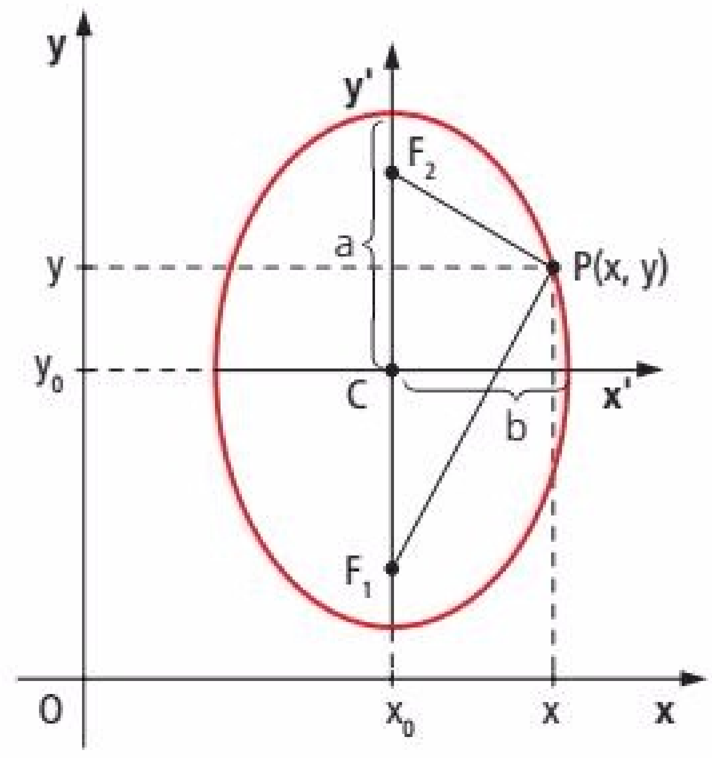
$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Então, em relação ao sistema xOy, a equação dessa elipse é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Essa é a **equação reduzida da elipse de centro (x_0, y_0) e eixo maior paralelo ao eixo *x***.

Raciocinando de modo análogo ao que fizemos para o caso anterior, quando o eixo maior está contido em y', temos a equação:



$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Essa é a **equação reduzida da elipse de centro (x_0, y_0) e eixo maior paralelo ao eixo *y***.

Exercícios resolvidos

1 Dada a equação reduzida da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, determine:

a) as medidas dos eixos maior e menor;

b) as coordenadas dos vértices e dos focos;

c) a excentricidade.

Resolução

a) Observando a equação dada, temos que o denominador de x^2 é maior que o denominador de y^2. Isso significa que o eixo maior da elipse está sobre o eixo *x* e, portanto, podemos comparar a equação dada com a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Assim:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ (pois $a > 0$)

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ (pois $b > 0$)

A partir dos valores de *a* e *b*, determinamos as medidas dos eixos. Assim:

eixo maior: $2a = 2 \cdot 5 = 10$

eixo menor: $2b = 2 \cdot 4 = 8$

b) As coordenadas dos vértices (A_1, A_2, B_1 e B_2) e dos focos (F_1 e F_2) de uma elipse com focos sobre o eixo *x* e centro na origem são dadas por: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$, $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

A partir da relação fundamental, calculamos o valor de *c*:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

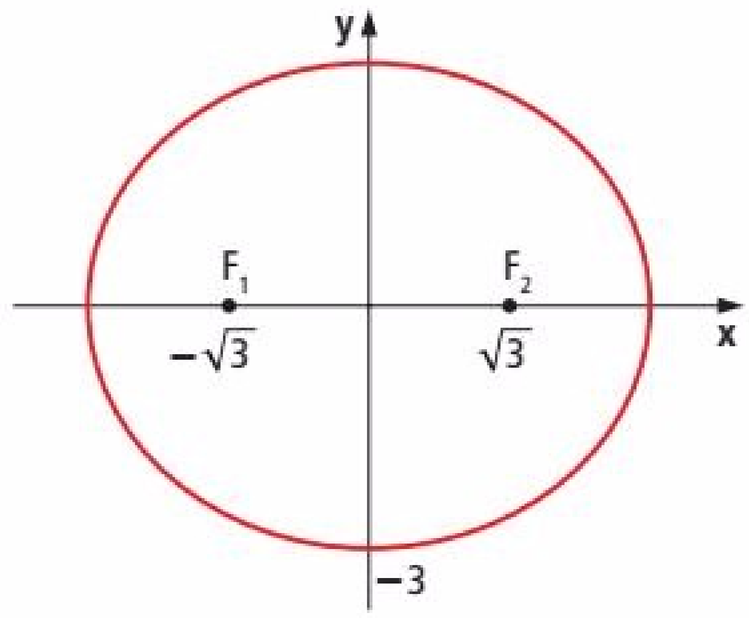
Então $c = 3$, pois $c > 0$.

Substituindo os valores de *a*, *b* e *c* nas coordenadas, temos:

$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(-4, 0)$, $B_2(4, 0)$, $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$.

c) A excentricidade da elipse é: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{3}{5}$.

2 Dada a elipse representada no plano cartesiano a seguir, determine sua equação.



Resolução

Pela figura, temos que:

- A elipse tem focos sobre o eixo x e centro na origem.

Então, sua equação pode ser escrita como $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- Um dos vértices da elipse é $B_1(0, -3)$, logo: $b = 3$.
- Os focos dessa elipse são $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ e $F_2(\sqrt{3}, 0)$, logo: $C = \sqrt{3}$

Pela relação fundamental:

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 3^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12$

Portanto, a equação da elipse dada é $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3 Determine as coordenadas do centro, as coordenadas dos focos e as medidas dos eixos da elipse de equação:

$$\frac{(x-5)^2}{100} + \frac{(y+4)^2}{64} = 1$$

Resolução

Observando a equação, vemos que a elipse tem centro fora da origem e eixo maior paralelo ao eixo *x*. Assim, podemos comparar a equação dada à equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

O centro dessa elipse tem coordenadas $x_0 = 5$ e $y_0 = -4$. Logo, $C(5, -4)$.

$a^2 = 100 \Rightarrow a = 10 \ (a > 0)$

$b^2 = 64 \Rightarrow b = 8 \ (b > 0)$

Então:

eixo maior: $2a = 2 \cdot 10 = 20$

eixo menor: $2b = 2 \cdot 8 = 16$

Pela relação fundamental, $a^2 = b^2 + c^2$, temos: $100 = 64 + c^2 \Rightarrow c = 6$

As coordenadas dos focos são dadas por $F_1(-c + x_0, y_0)$ e $F_2(c + x_0, y_0)$.

Portanto, as coordenadas dos focos da elipse são: $F_1(-1, -4)$ e $F_2(11, -4)$.

4 Determine a equação da elipse de focos $F_1(0, -4)$ e $F_2(0, 4)$, sabendo que o comprimento do eixo menor é 6.

Resolução

Como os focos estão no eixo *y*, o centro da elipse é a origem e a equação é da forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Sendo $2b = 6$, temos que $b = 3$.

Com $c = 4$ e $b = 3$, vamos calcular o valor de a^2:

$a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 25$

Portanto, a equação procurada é $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

5 Escreva na forma reduzida a equação da elipse $8x^2 + 5y^2 - 32x + 10y - 3 = 0$.

Resolução

Para determinar a equação reduzida da elipse, precisamos manipular algebricamente a equação dada para chegar a uma das equações reduzidas estudadas. Assim:

$8x^2 + 5y^2 - 32x + 10y - 3 = 0$

$8(x^2 - 4x) + 5(y^2 + 2y) - 3 = 0$

Completando quadrados:

$8(x^2 - 4x + 4) + 5(y^2 + 2y + 1) - 3 = 32 + 5$

$8(x - 2)^2 + 5(y + 1)^2 = 40$

Dividindo ambos os membros por 40, chegamos à equação reduzida da elipse: $\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1$

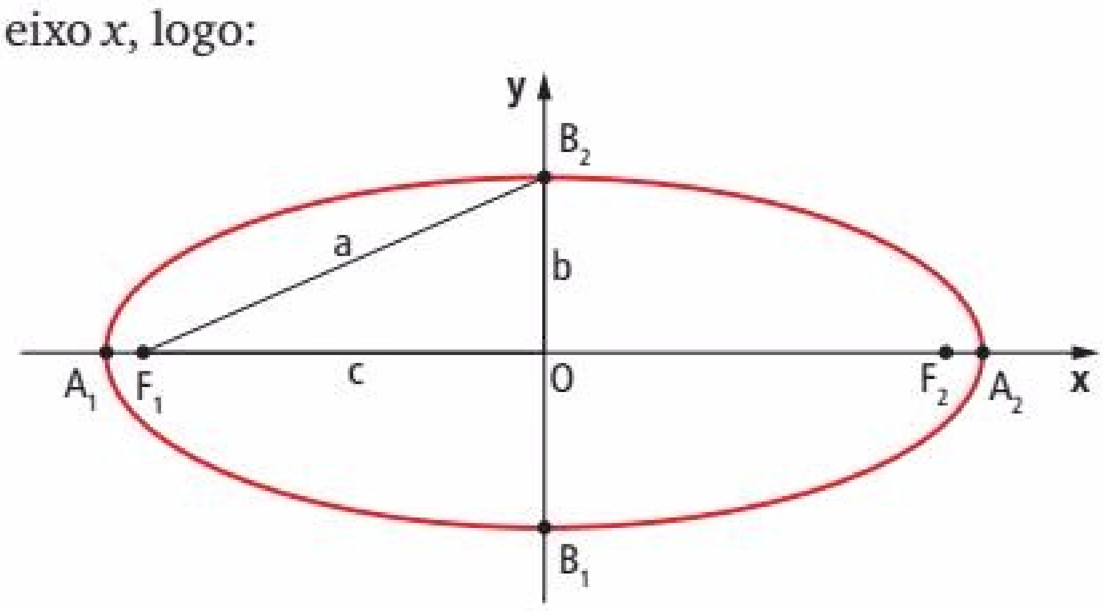
6 Determinar as coordenadas dos focos e dos vértices da elipse da equação $4x^2 + 25y^2 = 100$.

Resolução

Vamos escrever a equação na forma reduzida. Dividindo todos os termos por 100, temos:

$$4x^2 + 25y^2 = 100 \Rightarrow \frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = \frac{100}{100} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Como $25 > 4$, o eixo maior da elipse está contido no eixo *x*, logo:



Ilustrações: Editoria de arte

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 4 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

Analisando a equação da elipse e observando a figura, temos:

Coordenadas do centro: $O(0, 0)$

Coordenadas dos vértices: $A_1(-5, 0)$ e $A_2(5, 0)$

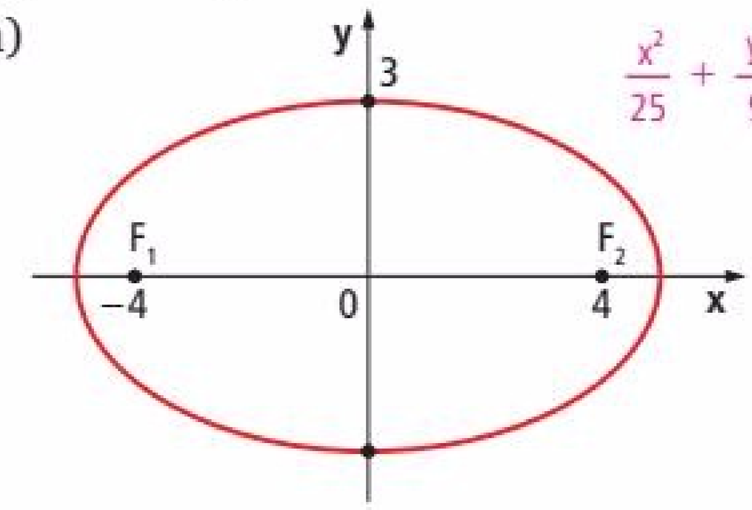
Coordenadas dos focos: $F_1(-\sqrt{21}, 0)$ e $F_2(\sqrt{21}, 0)$

10. centro: $C(1, 1)$; focos: $F_1(-\sqrt{3} + 1, 1)$ e $F_2(\sqrt{3} + 1, 1)$; vértices: $A_1(3, 1)$; $A_2(-1, 1)$; $B_1(1, 0)$ e $B_2(1, 2)$.

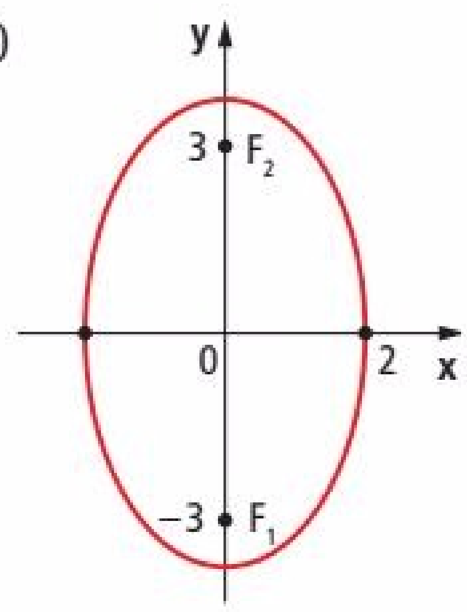
1. O eixo maior de uma elipse de centro na origem está contido no eixo x. Sabendo que o comprimento do eixo menor é 6 e a distância focal é 10, determine a equação da elipse. $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$

2. Determine as equações das elipses representadas nas figuras a seguir.

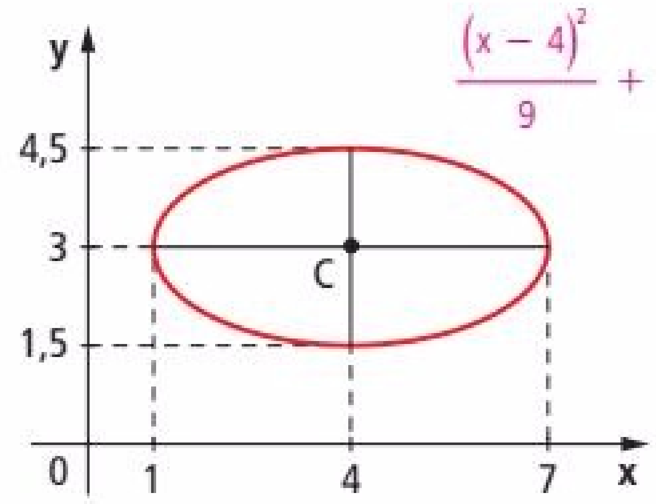
a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$



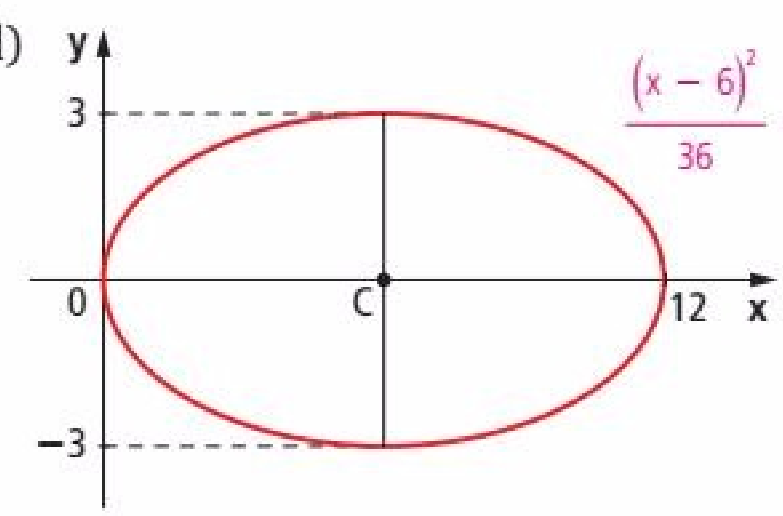
b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$



c) $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{2{,}25} = 1$



d) $\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$



Ilustrações: Editoria de arte

3. Determine a excentricidade da elipse de equação $x^2 + 5y^2 = 20$. $e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. Determine a equação de uma elipse com centro na origem do sistema cartesiano e focos no eixo Ox, sabendo que:

a) a sua distância focal é 16 e a sua excentricidade é $\frac{4}{5}$. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

b) o eixo menor mede 10 e a curva passa pelo ponto $(8, 3)$. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

5. O eixo maior de uma elipse mede 40 e é paralelo ao eixo y. Sabendo que o eixo menor mede 24 e seu centro é o ponto $(4, 2)$, determine a equação dessa elipse. $\frac{(x-4)^2}{144} + \frac{(y-2)^2}{400} = 1$

6. A equação de uma elipse é $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$. Sabendo que a elipse passa pelos pontos $A(2, 1)$ e $B(\sqrt{2}, 2)$, determine p e q. $p = \frac{\sqrt{42}}{3}$; $q = \sqrt{7}$

7. Determine a distância focal das elipses dadas por:

a) $x^2 + 3y^2 = 3$ $2\sqrt{2}$

b) $2x^2 + y^2 = 2$ 2

8. Dois vértices de uma elipse têm coordenadas $A_1(0, 5)$ e $A_2(0, -5)$. Determine a equação dessa elipse, sabendo que o comprimento do eixo menor é 3. $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

9. Considere a elipse de equação $3x^2 + 4y^2 = 48$.

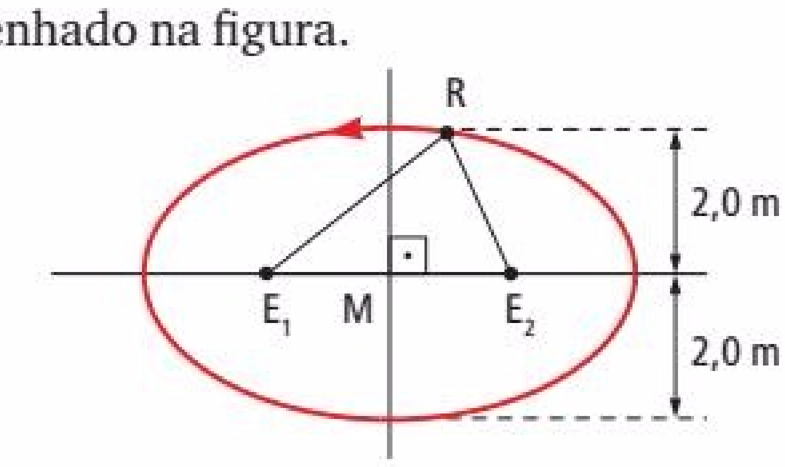
a) Calcule a medida do eixo maior e a do eixo menor da elipse. $2a = 8$ e $2b = 4\sqrt{3}$

b) Determine a excentricidade dessa elipse. $e = \frac{1}{2}$

10. Determine as coordenadas do centro, dos focos e dos vértices da elipse de equação $x^2 - 2x + 4y^2 - 8y + 1 = 0$.

11. Dada a elipse de equação $4x^2 + 9y^2 + 8x - 54y + 49 = 0$, obtenha sua equação reduzida e as coordenadas do centro e dos focos.

12. (UFF-RJ) Haroldo, ao construir uma piscina, amarra as extremidades de uma corda de 6,0 m de comprimento nas estacas E_1 e E_2, com o riscador R, estica a corda, de modo a obter o triângulo E_1RE_2. Deslizando o riscador R de forma que a corda fique sempre esticada e rente ao chão, obtém o contorno da piscina desenhado na figura.



Se M é o ponto médio de E_1E_2, a distância entre as estacas é:

a) $\sqrt{5}$ m
b) $\sqrt{6}$ m
X c) $2\sqrt{5}$ m
d) $2\sqrt{6}$ m
e) $6\sqrt{2}$ m

13. (FGV-SP) Determine a equação da elipse de centro na origem que passa pelos pontos $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$ e $C(0, 1)$. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

14. (ITA-SP) Os focos de uma elipse são $F_1(0, -6)$ e $F_2(0, 6)$. Os pontos $A(0, 9)$ e $B(x, 3)$, $x > 0$, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, F_1 e F_2 é igual a:

a) $22\sqrt{10}$
b) $18\sqrt{10}$
c) $15\sqrt{10}$
X d) $12\sqrt{10}$
e) $6\sqrt{10}$

11. Equação reduzida: $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$; centro: $C(-1, 3)$; focos: $F_1(-\sqrt{5} - 1, 3)$ e $F_2(\sqrt{5} - 1, 3)$.

15. O Universo sempre foi, e ainda é, objeto de estudo e curiosidade de pesquisadores e cientistas do mundo todo. Mais especificamente, a maneira como o Sistema Solar estava organizado despertou muita atenção de astrônomos e demais cientistas, séculos antes. Após muitas teorias, descobriu-se que cada planeta descreve uma elipse ao girar em torno do Sol e, em cada órbita, o Sol ocupa um dos focos da elipse, conferindo características como os ciclos das estações do ano, por exemplo. Leia o texto a seguir a respeito das órbitas dos planetas e faça o que se pede em cada item.

O Sistema Solar: característica e dinâmica

O sistema solar é uma unidade bem estruturada, com uma estrela, o Sol, no seu centro, ao redor do qual orbitam os [...] planetas. Por sua vez, ao redor dos planetas, giram os satélites, imitando pequenos sistemas solares. São conhecidos mais de 80 satélites presentemente, mas pode existir um número maior, especialmente ao redor dos planetas mais distantes. Também existem os planetas menores ou asteroides, milhares de corpos que orbitam ao redor do Sol, em sua maioria entre as órbitas de Marte e Júpiter, e os cometas [...].


cigdem/ Shutterstock.com
Representação fora de escala e cores-fantasia.

Comparadas ao tamanho dos planetas, e mesmo ao do Sol, as órbitas dos planetas, cometas e asteroides são gigantescas, e o seu raio é comumente expresso em unidades astronômicas. Uma unidade astronômica (UA) é igual à distância média da Terra ao Sol (1 UA = 149,6 milhões de km). [...]

A tabela abaixo mostra os parâmetros orbitais dos planetas. A distância de um dado planeta ao Sol não é fixa, pois as órbitas não são círculos, mas elipses. Estas últimas são figuras achatadas caracterizadas por um eixo maior (a) e um eixo menor (b). O semieixo maior da órbita é dado na 1ª linha, seguido da distância média ao Sol. O período sideral [...] é o intervalo de tempo necessário para o planeta descrever uma órbita completa em torno do Sol. [... A 4ª] linha mostra a excentricidade da elipse que representa a órbita [...].

Fonte: UFRGS, Instituto de Física. **O sistema solar:** característica e dinâmica. Porto Alegre: [s.d.]. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/oei/solar/solar04/solar04.htm>. Acesso em: 31 dez. 2015.

Parâmetros orbitais dos planetas

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
Semieixo maior (milhões de km)	69,7	109	152,1	249,1	815,7	1 507	3 004	4 537
Distância média ao Sol	57,9	108,2	149,6	227,9	778,3	1 427	2 869	4 496,6
Período sideral (em dias)	87,969	224,701	365,256	686,980	4 532,589	10 759,2	30 685,4	60 189
Excentricidade	0,2056	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086

Fonte: Detalhe da tabela obtida em: UFRGS, Instituto de Física. **O sistema solar**: característica e dinâmica. Porto Alegre: [s.d.]. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/oei/solar/solar04/solar04.htm>. Acesso em: 31 dez. 2015.

d) A órbita de Vênus, pois é a que possui excentricidade mais próxima de 0.

a) O que é uma Unidade Astronômica e qual é a sua finalidade? Unidade Astronômica (UA) é uma unidade de comprimento que equivale à distância média da Terra ao Sol (1 UA = 149,6 milhões de km). Sua finalidade é a de simplificar a representação de grandes distâncias.

b) Segundo a característica elíptica das órbitas dos planetas, o que podemos afirmar a respeito da distância dos planetas, ao longo de um período sideral?

c) O que representa a excentricidade de uma órbita? Por se tratar de órbitas elípticas, a excentricidade corresponde ao quão circular ou achatada é sua forma, conforme seu valor se aproxima de 0 ou 1, respectivamente.

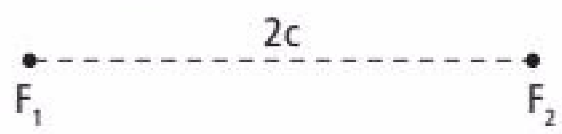
d) Qual é a órbita que mais se aproxima de uma circunferência? Justifique sua resposta.

b) A distância dos planetas ao longo do período sideral (tempo necessário para o planeta descrever uma órbita completa em torno do Sol) é variável, estando a diferentes distâncias do Sol, ao longo desse período. Isso porque a distância de qualquer ponto de uma elipse a um de seus focos varia dependendo da posição desse ponto na elipse. O que é constante é a soma das distâncias de um ponto da elipse a cada um dos focos.

Hipérbole

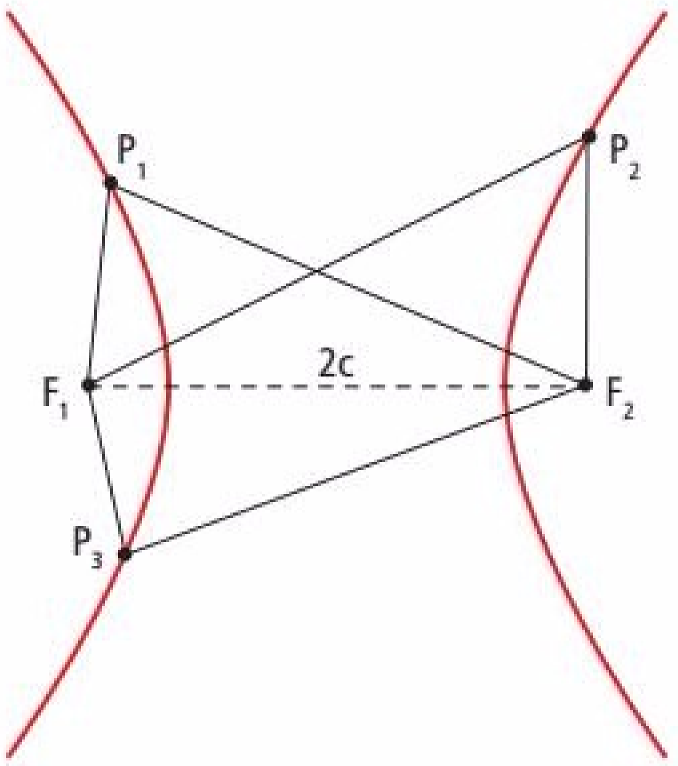
Definição

Considere dois pontos distintos, F_1 e F_2, que pertencem a um plano, de modo que a distância entre eles seja 2c.



Considere também um número real *a*, tal que $0 < 2a < 2c$. O conjunto de todos os pontos *P* desse plano, cuja diferença das distâncias de *P* aos pontos F_1 e F_2 (em módulo) é constante e igual a 2a, é chamado de **hipérbole** de focos F_1 e F_2 e constante 2a.

Os pontos P_1, P_2 e P_3 pertencem à hipérbole representada na figura abaixo. Logo, podemos escrever:

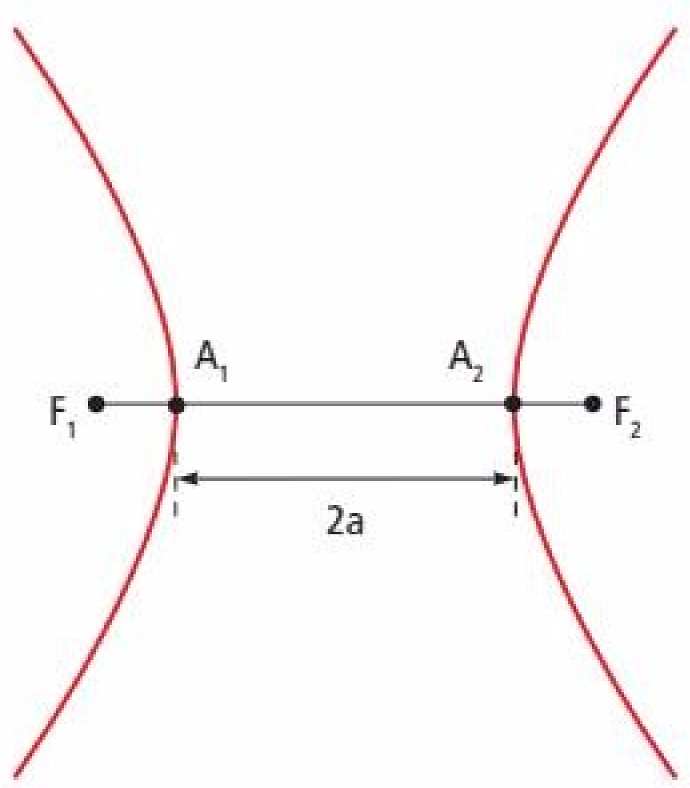


$$|d(P_1, F_1) - d(P_1, F_2)| = 2a$$
$$|d(P_2, F_1) - d(P_2, F_2)| = 2a$$
$$|d(P_3, F_1) - d(P_3, F_2)| = 2a$$

De modo geral, se *P* é um ponto qualquer da hipérbole, então:

$$\boldsymbol{|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a}$$

Sendo A_1 e A_2 as intersecções da hipérbole com $\overline{F_1F_2}$, temos que $d(A_1, A_2) = 2a$ e $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$. Veja:



Ilustrações: Editoria de arte

Como $d(A_1, F_2) > d(A_1, F_1)$ e $d(A_2, F_1) > d(A_2, F_2)$, temos:

$d(A_1, F_2) - d(A_1, F_1) = 2a \Rightarrow d(A_2, F_2) + d(A_1, A_2) - d(A_1, F_1) = 2a$ (I)

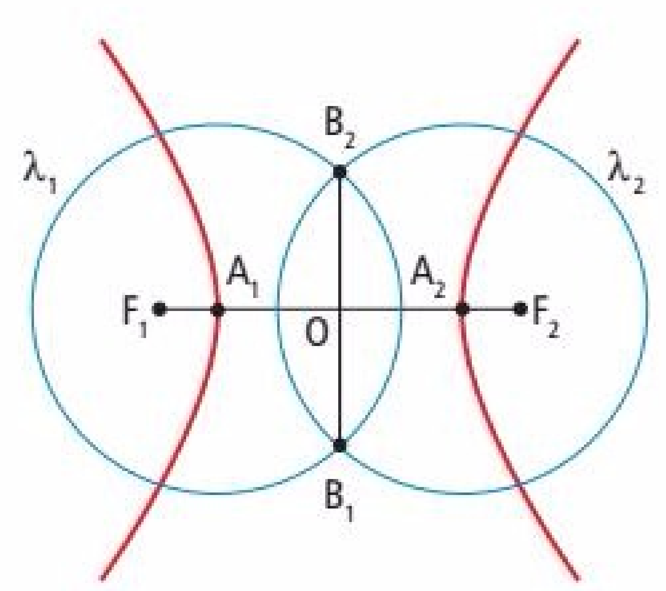
$d(A_2, F_1) - d(A_2, F_2) = 2a \Rightarrow d(A_1, F_1) + d(A_2, A_1) - d(A_2, F_2) = 2a$ (II)

Adicionando (I) e (II), membro a membro, resulta:

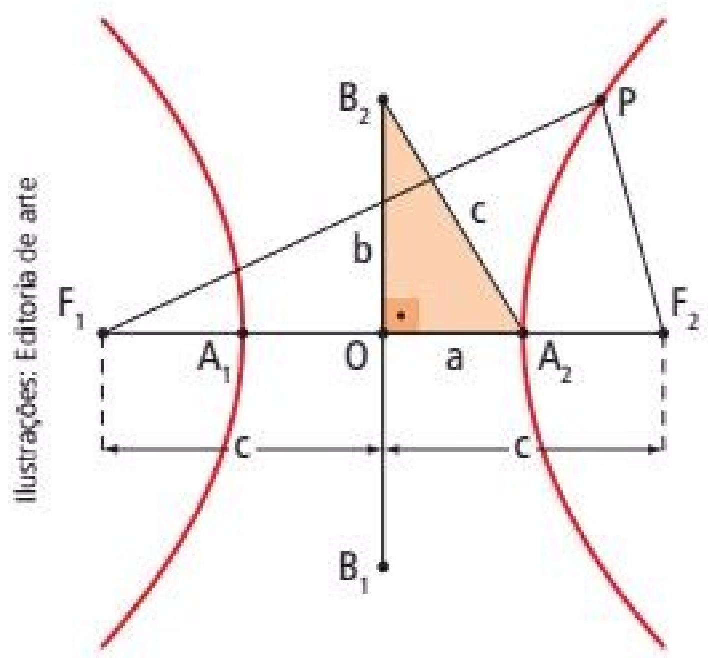
$2 \cdot d(A_1, A_2) = 4a \Rightarrow d(A_1, A_2) = 2a$

Substituindo $d(A_1, A_2)$ por 2a em (I), temos: $d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$.

Sejam as circunferências λ_1 e λ_2 de mesmo raio *c* e de centros, respectivamente, A_1 e A_2. Como $d(A_1, A_2) = 2a$ e $c > a$, as circunferências λ_1 e λ_2 são secantes entre si e determinam a corda $\overline{B_1B_2}$, cuja medida será indicada por 2b.



Por construção, $\overline{B_1B_2}$ está contido na mediatriz de $\overline{A_1A_2}$ e, portanto, é perpendicular a $\overline{A_1A_2}$. Além disso, o ponto *O*, intersecção de $\overline{B_1B_2}$ e $\overline{A_1A_2}$, é o ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ e de $\overline{F_1F_2}$.



Elementos

Em uma hipérbole, destacamos os seguintes elementos:

- **focos**: são os pontos F_1 e F_2;
- **vértices**: são os pontos A_1 e A_2 da hipérbole que estão no segmento $\overline{F_1F_2}$;
- **distância focal**: é a distância F_1F_2, cuja medida é 2c;
- **centro**: é o ponto *O*, ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$;
- **eixo real** ou **transverso**: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, cuja medida é 2a;
- **eixo imaginário** ou **conjugado**: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, cuja medida é 2b.

Como B_2 é um ponto da mediatriz de $\overline{A_1A_2}$, então, por construção, o triângulo B_2OA_2 é retângulo com ângulo reto no vértice *O*, como mostra a figura acima. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Essa relação é conhecida como **relação fundamental** e, do mesmo modo que no caso da elipse, será muito utilizada no estudo da hipérbole.

Assim como foi feito no estudo da elipse, podemos determinar a **excentricidade** da hipérbole. Calculando o quociente entre a distância focal (2c) e a medida do eixo real (2a), obtemos:

$$e = \frac{c}{a}$$

Para a hipérbole, a excentricidade é um número maior que 1 pois $0 < a < c$.

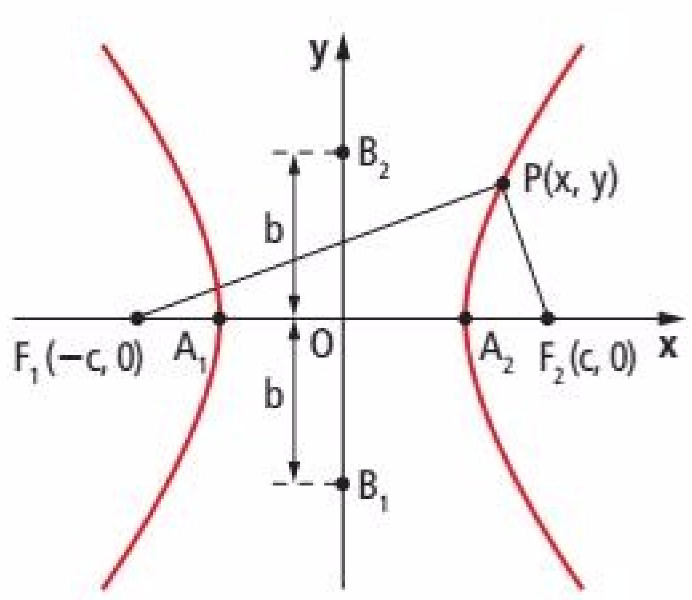
A excentricidade de uma hipérbole indica quanto ela é mais "fechada" ou mais "aberta" e quanto os ramos estão mais próximos um do outro. Quanto mais próximo de 1 estiver o valor de *e*, mais "fechada" será a hipérbole e maior será a distância entre os ramos.

Equação reduzida da hipérbole

Para determinar a equação reduzida da hipérbole, vamos fixar um plano cartesiano e analisar cada caso, como foi feito para o estudo da elipse. Assim, vamos determinar a equação reduzida da hipérbole quando o centro da hipérbole está na origem do plano cartesiano e seus eixos estão sobre os eixos coordenados, e nos casos em que o centro da hipérbole está fora da origem e seus eixos estão paralelos aos eixos coordenados.

Considere uma hipérbole cujo eixo real está sobre o eixo *x*, os focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ e o centro da hipérbole é a origem O(0, 0).

Sendo P(x, y) um ponto qualquer da hipérbole, temos:



$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4cx$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -a^2 + cx$$

Elevando ao quadrado os dois membros dessa equação, temos:

$$a^2[(x - c)^2 + y^2] = (-a^2 + cx)^2$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2c^2 - a^4 = c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2$$

$$a^2(c^2 - a^2) = x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2$$

Pela relação fundamental, na hipérbole $c^2 = a^2 + b^2$, podemos escrever $c^2 - a^2 = b^2$. Daí, temos:

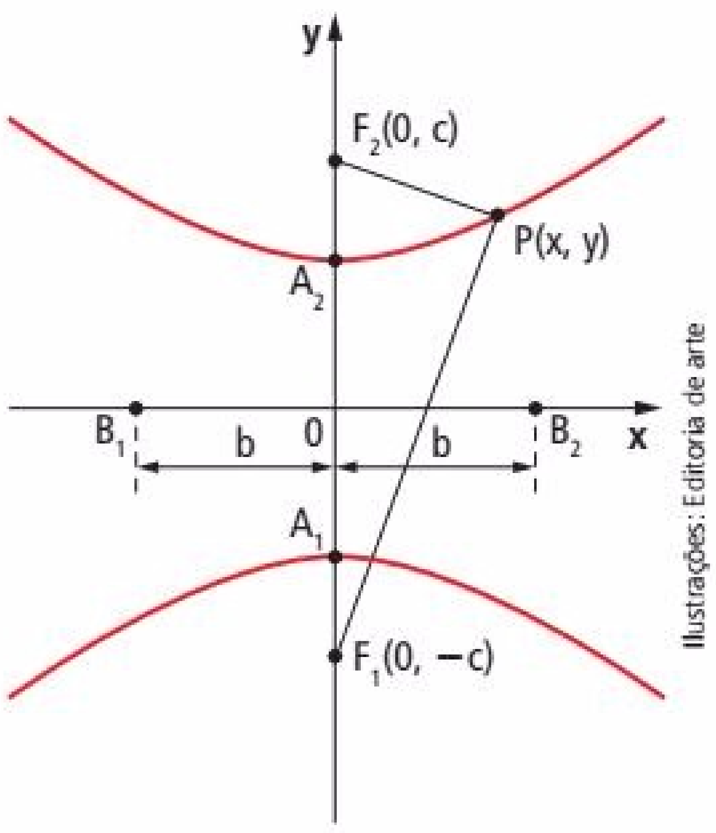
$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

Dividindo os dois membros por $a^2 b^2$ ($a > 0$ e $b > 0$), temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa é a **equação reduzida da hipérbole de focos no eixo *x* e centro na origem**.

Agora considere uma hipérbole cujo eixo real está sobre o eixo *y*, os focos são os pontos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$ e o centro da hipérbole é a origem $O(0, 0)$.



Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole, temos:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2}\right| = 2a$$

$$\left|\sqrt{x^2 + (y+c)^2} - \sqrt{x^2 + (y-c)^2}\right| = 2a$$

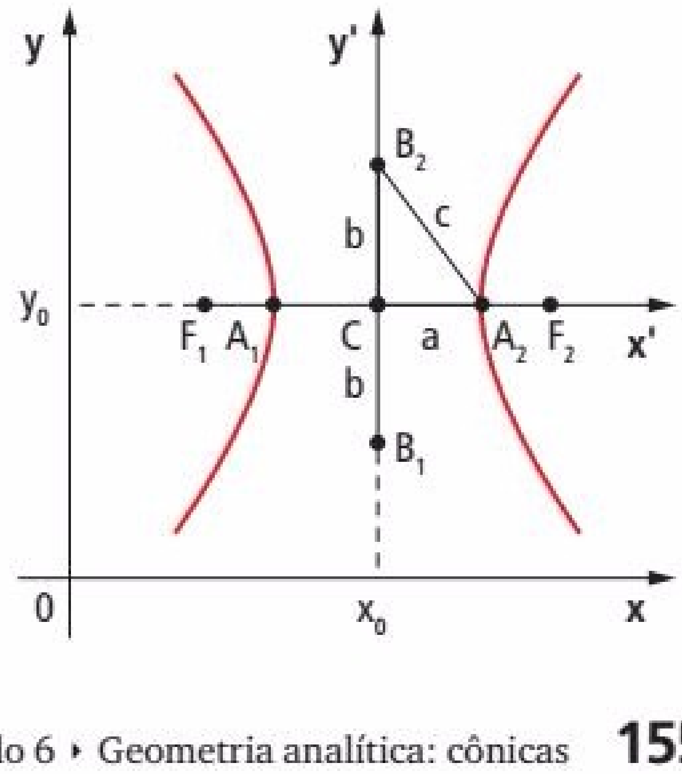
Desenvolvendo essa equação, de modo análogo ao caso anterior, obtemos a equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Essa é a **equação reduzida da hipérbole de focos no eixo *y* e centro na origem**.

Para determinar as equações de hipérboles com centro fora da origem e eixos paralelos aos eixos coordenados, o raciocínio é semelhante ao desenvolvido para as equações das elipses. Para isso, utilizamos o sistema de coordenadas x'Cy' e a relação entre as coordenadas nesse sistema e no sistema xOy já estudados.

Assim, considere uma hipérbole de centro $C(x_0, y_0)$ cujo eixo real é paralelo ao eixo *x*.

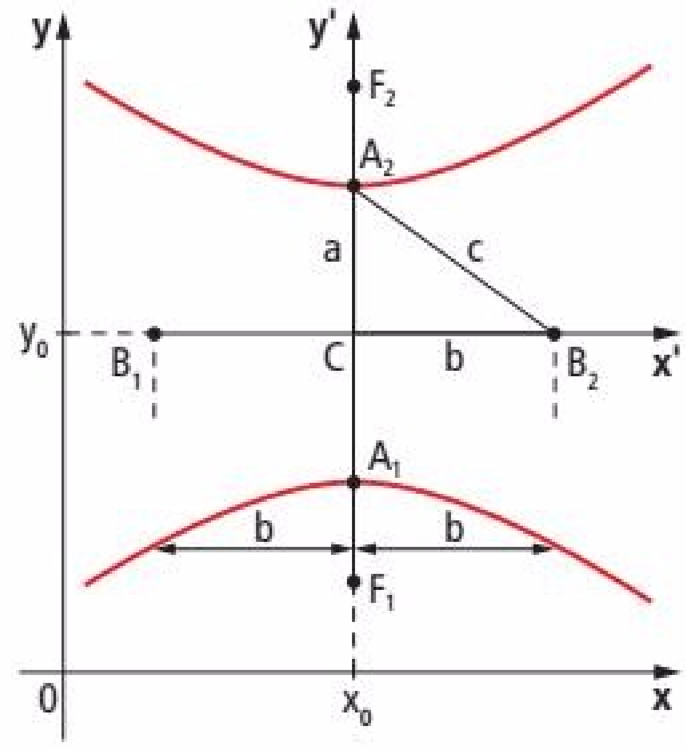


Nesse caso, a equação da hipérbole é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Essa é a **equação reduzida da hipérbole de centro (x_0, y_0) e eixo real paralelo ao eixo *x***.

De modo análogo, quando o eixo real é paralelo ao eixo y, a equação da hipérbole é dada por:



$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Essa é a **equação reduzida da hipérbole de centro (x_0, y_0) e eixo real paralelo ao eixo *y***.

Exercícios resolvidos

7 Determine a medida do eixo real, do eixo imaginário e a distância focal da hipérbole de equação $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Resolução

Vamos escrever a equação na forma reduzida, dividindo todos os seus termos por 36:

$$\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Como o termo positivo da equação é o que contém x^2, os vértices e os focos estão no eixo x. Temos:

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$ ($a > 0$ e $b > 0$)

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 9 \Rightarrow c = \sqrt{13}$ ($c > 0$)

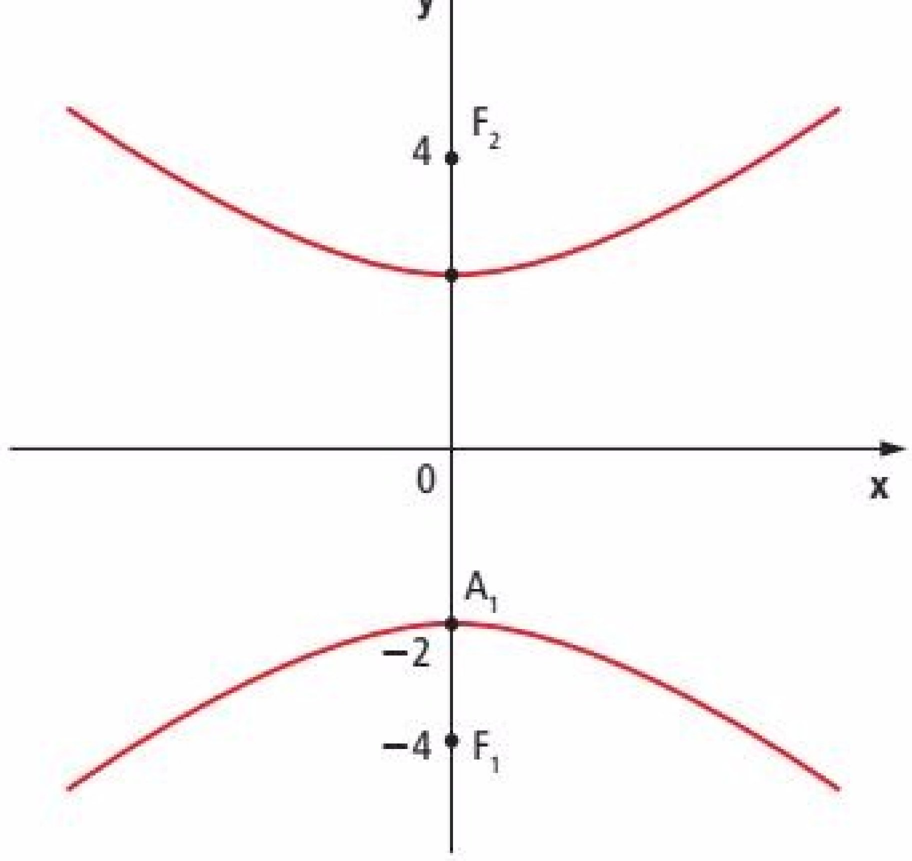
Portanto:

Eixo real: $2a = 2 \cdot 3 = 6$

Eixo imaginário: $2b = 2 \cdot 2 = 4$

Distância focal: $2c = 2 \cdot \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$

8 Dada a hipérbole representada no plano cartesiano a seguir, determine sua equação.



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

Pela figura, temos que:

- A hipérbole tem focos sobre o eixo y e centro na origem. Logo, sua equação pode ser escrita como:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

- Um dos vértices da elipse é $A_1(0, -2)$. Logo, $a = 2$.
- Os focos dessa elipse são $F_1(0, -4)$ e $F_2(0, 4)$.

Logo, $c = 4$.

Pela relação fundamental, temos:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

Portanto, a equação da hipérbole é $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$.

9 Considere a hipérbole de focos $F_1(-10, 0)$ e $F_2(10, 0)$ e de vértices $A_1(-6, 0)$ e $A_2(6, 0)$. Determine a equação dessa hipérbole e sua excentricidade.

Resolução

Como os focos estão no eixo x, a forma reduzida da equação é: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Pelos dados do problema, $a = 6$ e $c = 10$. Logo:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 64$

Substituindo os valores na equação, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

A excentricidade da hipérbole é dada por:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Portanto, a equação da hipérbole é $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ e sua excentricidade é $\frac{5}{3}$.

10 Determine as coordenadas do centro, dos vértices e dos focos da hipérbole de equação:

$y^2 - x^2 + 6y - 2x - 1 = 0$.

Resolução

Para determinar as coordenadas, precisamos obter a equação reduzida da hipérbole. Para isso, vamos manipular algebricamente a equação dada para chegar a uma das equações reduzidas estudadas. Assim:

$$y^2 - x^2 + 6y - 2x - 1 = 0$$
$$y^2 + 6y - \left(x^2 + 2x + 1\right) = 0$$
$$y^2 + 6y + 9 - \left(x^2 + 2x + 1\right) = 9$$
$$(y+3)^2 - (x+1)^2 = 9$$
$$\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$$

Como a equação é do tipo:

$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$, ela representa uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo *y* e centro fora da origem.

Determinando os valores de *a*, *b* e *c*:

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \ (a > 0)$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \ (b > 0)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 9 = 18$

$c = 3\sqrt{2} \ (c > 0)$

Portanto:

Coordenadas do centro: $C(-1, -3)$

Coordenadas dos vértices: $A_1(-1, -6)$ e $A_2(-1, 0)$

Coordenadas dos focos:

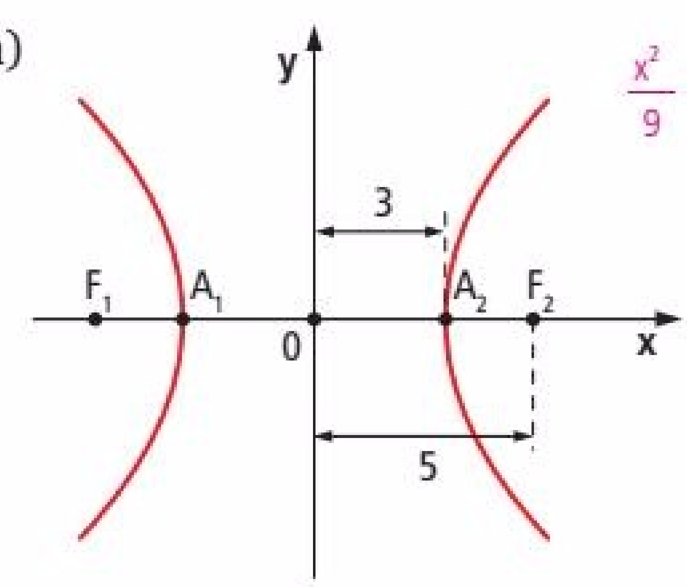
$F_1\left(-1, -3 - 3\sqrt{2}\right)$ e $F_2\left(-1, -3 + 3\sqrt{2}\right)$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

16. Determine a equação das hipérboles cujos gráficos são:

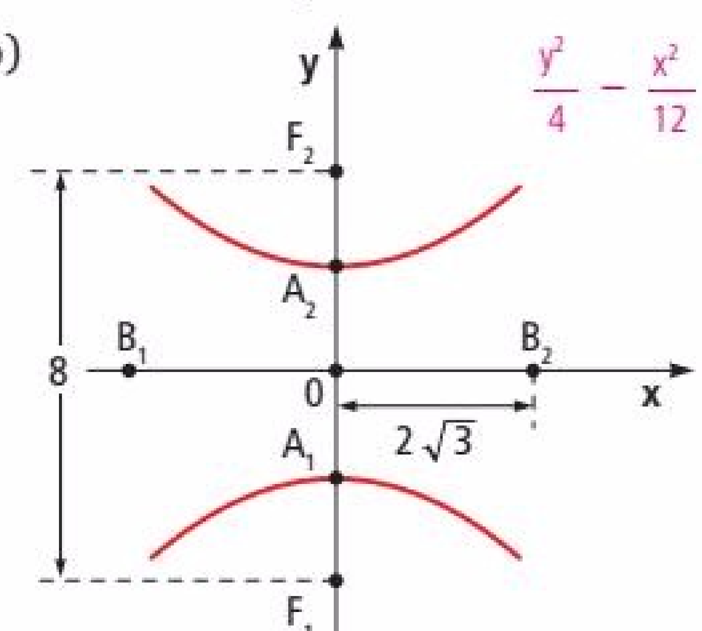
a)



$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Ilustrações: Editoria de arte

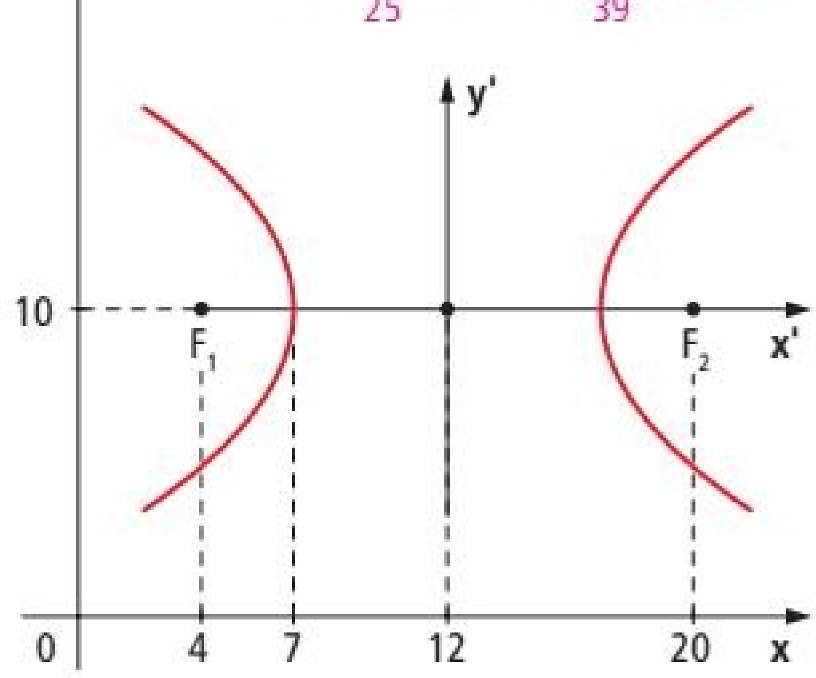
b)



$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

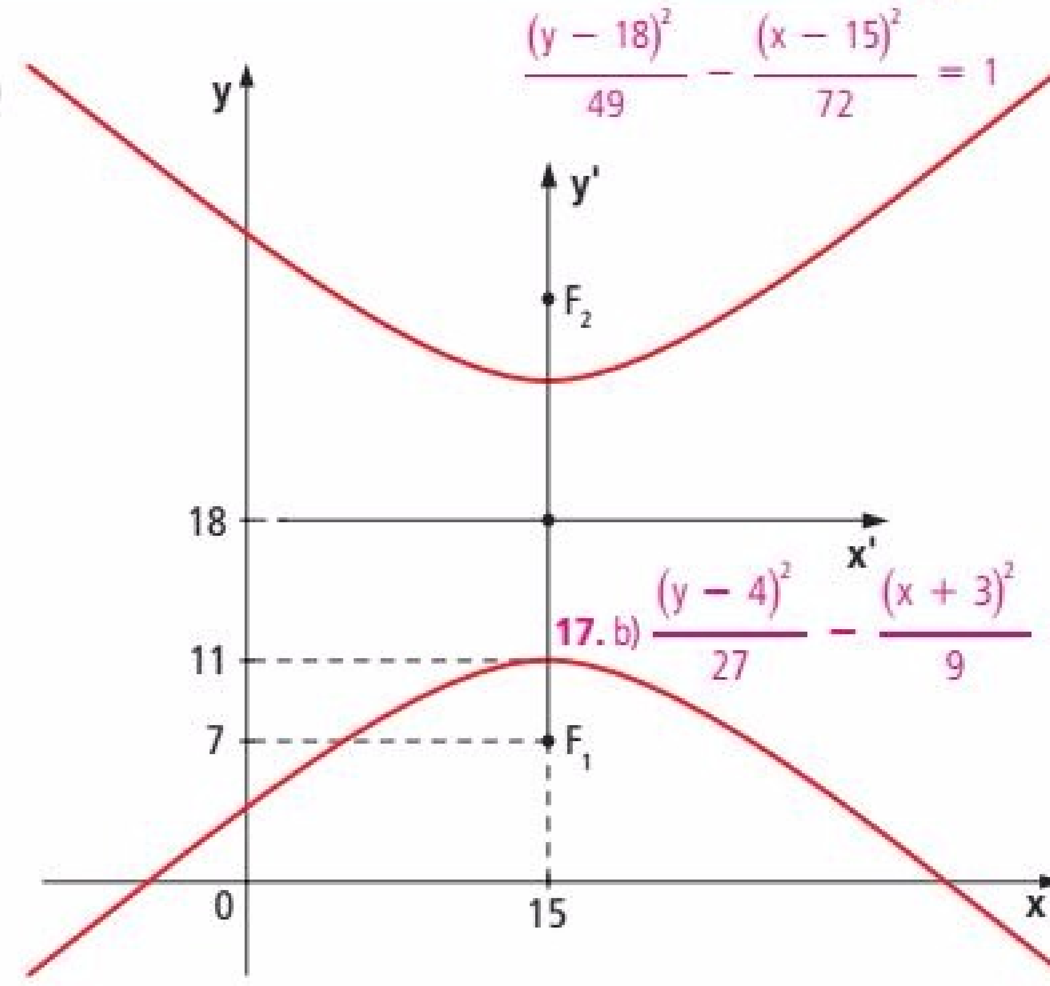
c)

$\frac{(x-12)^2}{25} - \frac{(y-10)^2}{39} = 1$



d)

$\frac{(y-18)^2}{49} - \frac{(x-15)^2}{72} = 1$



17. Determine a equação da hipérbole de centro $(-3, 4)$ e eixo real paralelo ao eixo *y* nos seguintes casos:

a) $2a = 20$ e $2b = 10$.

b) $2b = 6$ e $2c = 12$.

17. a) $\frac{(y-4)^2}{100} - \frac{(x+3)^2}{25} = 1$

17. b) $\frac{(y-4)^2}{27} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

18. Em uma hipérbole, a excentricidade é $\sqrt{5}$ e os vértices são $A_1(-2, 0)$ e $A_2(2, 0)$. Determine as coordenadas dos focos dessa hipérbole. $F_1 = \left(-2\sqrt{5}, 0\right)$ e $F_2 = \left(2\sqrt{5}, 0\right)$

19. Uma hipérbole tem focos $F_1(-3, 0)$ e $F_2(5, 0)$. Sabendo que sua excentricidade é igual a 2, determine sua equação. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

20. Determine as coordenadas dos focos da hipérbole de equação $-x^2 + 2y^2 - 4x - 2 = 0$. $F_1\left(-\sqrt{3} - 2, 0\right)$ e $F_2\left(\sqrt{3} - 2, 0\right)$

21. Quais são as coordenadas dos focos e dos vértices da hipérbole de equação dada por:

$9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y - 71 = 0$?

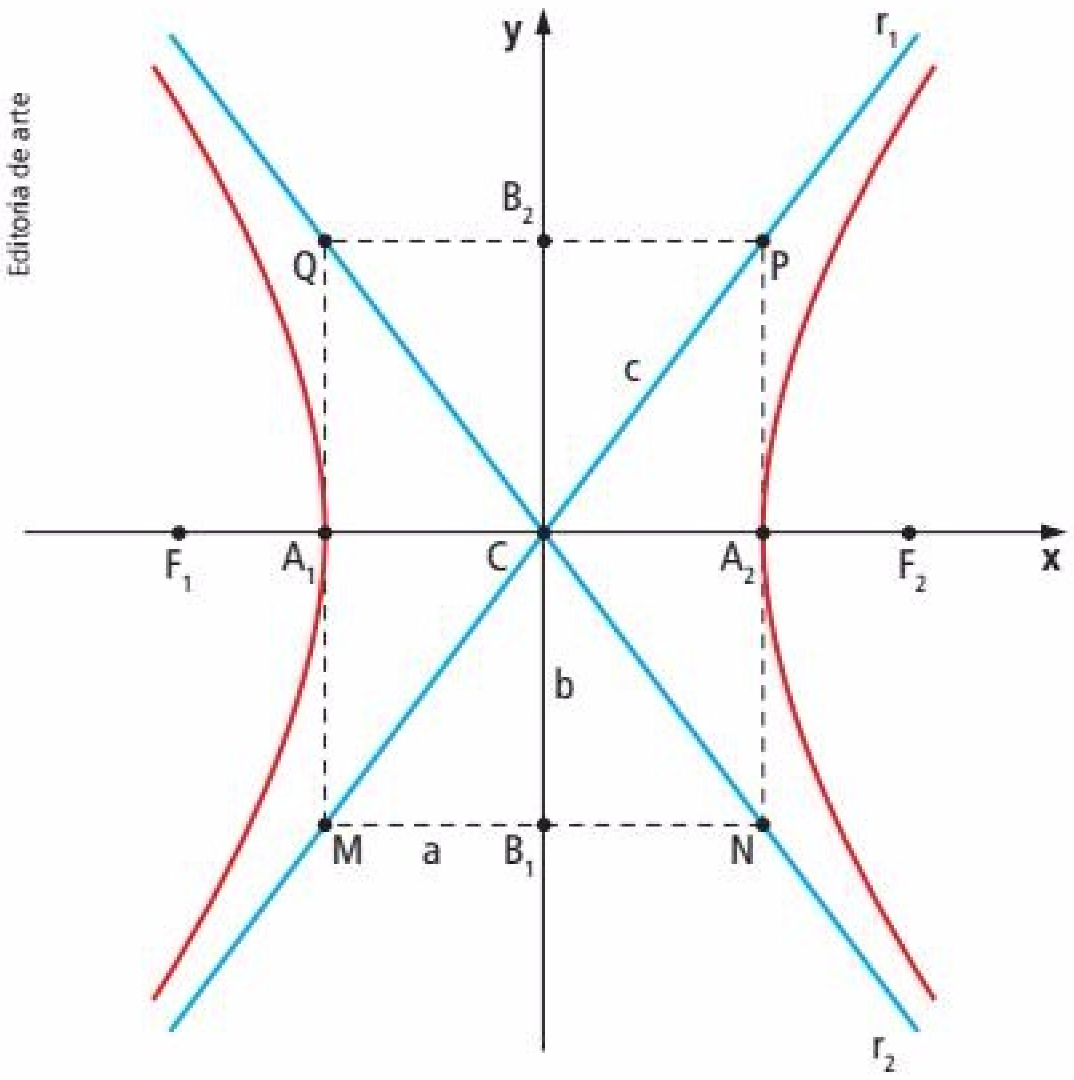
21. $F_1\left(-\frac{8}{3}, 2\right)$; $F_2\left(\frac{2}{3}, 2\right)$; $A_1\left(-\frac{7}{3}, 2\right)$; $A_2\left(\frac{1}{3}, 2\right)$

22. Determine a equação da hipérbole de focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$ e de vértices $A_1(0, 1)$ e $A_2(0, -1)$. $y^2 - \frac{x^2}{15} = 1$

Assíntotas da hipérbole

Na hipérbole representada na figura abaixo, observe o retângulo MNPQ com centro na origem e lados de comprimento 2a e 2b. As retas r_1 e r_2 que contêm as diagonais desse retângulo são chamadas de **assíntotas** da hipérbole.

As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos pontos A_1 e A_2, mas nunca cruzam a hipérbole.



Editoria de arte

Como os lados do retângulo passam pelos pontos A_1, A_2, B_1 e B_2, e as retas r_1 e r_2 passam pela origem, suas declividades são, respectivamente, $\frac{b}{a}$ e $-\frac{b}{a}$.

As equações dessas retas são r_1: $y=\frac{b}{a}x$ e r_2: $y=-\frac{b}{a}x$.

Generalizando, sendo (x_0, y_0) o centro da hipérbole, as equações das assíntotas serão:

$$y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0) \longrightarrow \text{eixo real horizontal}$$

e

$$y - y_0 = \pm\frac{a}{b}(x - x_0) \longrightarrow \text{eixo real vertical}$$

Podemos relacionar o ângulo entre as assíntotas de uma hipérbole com sua excentricidade. Vimos que a excentricidade de uma hipérbole indica quanto ela é mais "fechada" ou mais "aberta". Desse modo, quanto menor for o ângulo entre as assíntotas, mais "fechada" será a hipérbole e mais próximo de 1 estará o valor de e.

Observação:

Construir primeiro as assíntotas constitui um ótimo caminho para traçar o esboço da hipérbole.

Exercício resolvido

11 Determine as equações das assíntotas da hipérbole de equação: $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$.

Resolução

Observando a equação, temos:

- centro: C(2, 3)
- $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ $(a > 0)$
- $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ $(b > 0)$
- eixo real horizontal

Equações das assíntotas:

$$y - 3 = \pm\frac{4}{5}(x-2) \begin{cases} 5y - 15 = 4x - 8 \\ 5y - 15 = -4x + 8 \end{cases}$$

Portanto, as equações das assíntotas são $4x - 5y + 7 = 0$ e $4x + 5y - 23 = 0$.

Hipérbole equilátera

Uma hipérbole é **equilátera** quando os eixos real e imaginário possuem a mesma medida, ou seja, $2a = 2b$, ou simplesmente $a = b$.

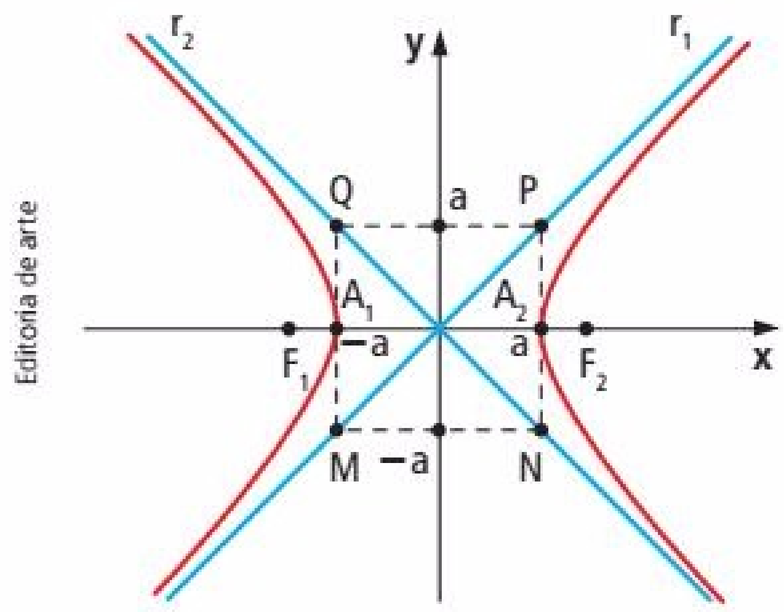
Assim, fazendo $a = b$ na equação reduzida da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

Logo, a equação de uma hipérbole equilátera com eixo real sobre o eixo *x* é dada por:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Veja a representação gráfica:



As retas r_1 e r_2 são as assíntotas da hipérbole equilátera e têm equações respectivamente iguais a $y = x$ e $y = -x$, ou seja, são as retas suporte das bissetrizes dos quadrantes ímpares e dos quadrantes pares.

Observe que sendo $a = b$, MNPQ é um quadrado, e nesse caso as assíntotas são perpendiculares entre si.

No caso de uma hipérbole equilátera com centro $C(x_0, y_0)$ e eixo real paralelo ao eixo *x*, a equação será dada por:

$$\boxed{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = a^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1}$$

Exercícios resolvidos

12 O eixo real de uma hipérbole equilátera mede 20. Sabendo que ela tem centro na origem e que os focos estão sobre o eixo *x*, faça o que se pede.

a) Calcule a distância focal;

b) Determine a equação dessa hipérbole.

Resolução

a) Eixo real: $2a = 20 \Rightarrow a = 10$.

Como a hipérbole é equilátera, $b = a = 10$.

Utilizando a relação $c^2 = a^2 + b^2$, temos:

$c^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow c^2 = 200 \Rightarrow c = 10\sqrt{2}$ $(c > 0)$.

Assim, a distância focal é $2c = 20\sqrt{2}$.

b) A hipérbole tem centro na origem e os focos estão sobre o eixo *x*. Então, sua equação é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{100} = 1$$

Logo, a equação da hipérbole é $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{100} = 1$.

13 Determine a equação de uma hipérbole equilátera de centro (3, 6) e um dos vértices em (3, 3).

Resolução

Temos $C(3, 6)$, $A_1(3, 3)$ e $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo *y*.

Então: $a = d(C, A_1) = \sqrt{(3-3)^2 + (3-6)^2} = 3$.

Como a hipérbole é equilátera, temos $a = b = 3$.

Portanto, a equação é: $\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$.

Escreva no caderno

23. Uma hipérbole tem o eixo real sobre o eixo x, passa pelo ponto (4, 6) e suas assíntotas são as retas $y = -\sqrt{3}x$ e $y = \sqrt{3}x$. Calcule a excentricidade dessa hipérbole. $e = 2$

24. (PUC-SP) A equação de uma das assíntotas da hipérbole $x^2 - y^2 = 16$ é

a) $y = 2x - 1$
X c) $y = x$
e) $y = 2x$
b) $y = 4x$
d) $y = 2x + 1$

25. Determine a equação da hipérbole equilátera que passa pelo ponto P(2, 0), sabendo que o eixo real está contido no eixo das abscissas. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

26. Determine as equações das hipérboles equiláteras com centro na origem cuja distância focal é igual a 10.

26. $\frac{2x^2}{25} - \frac{2y^2}{25} = 1$; $\frac{2y^2}{25} - \frac{2x^2}{25} = 1$

27. Determine a equação de cada uma das seguintes hipérboles equiláteras com centro na origem e eixo real sobre o eixo y, sabendo que:

a) medida do eixo real é igual a 10; $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{25} = 1$
b) distância focal é $4\sqrt{5}$. $\frac{y^2}{10} - \frac{x^2}{10} = 1$

28. Verifique se a equação dada a seguir é de uma hipérbole equilátera. Justifique sua resposta.

$2x^2 - 8x - 12 = 12y + 2y^2$ Sim, porque temos $a = b = 1$.

29. (USJT-SP) Consideremos uma hipérbole equilátera que passa pelo ponto P(13; −12) e cujo eixo real está contido no eixo das abscissas. Sendo F_1 e F_2 os focos da hipérbole, a área do triângulo PF_1F_2 será:

a) $120\sqrt{2}$
b) $-120\sqrt{2}$
c) $-60\sqrt{2}$
d) $180\sqrt{2}$
X e) $60\sqrt{2}$

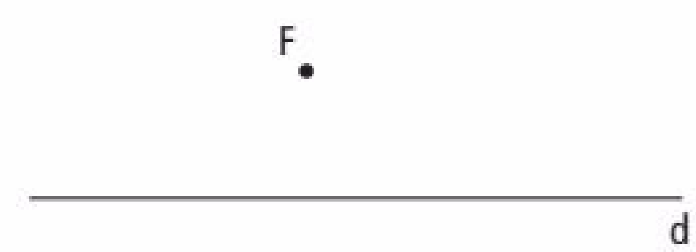
30. Determine a equação da hipérbole equilátera cuja distância focal é igual a $2\sqrt{2}$ e tem focos no eixo x. $x^2 - y^2 = 1$

Parábola

Definição

Considere, em um plano, uma reta *d* e um ponto *F* não pertencente a *d*.

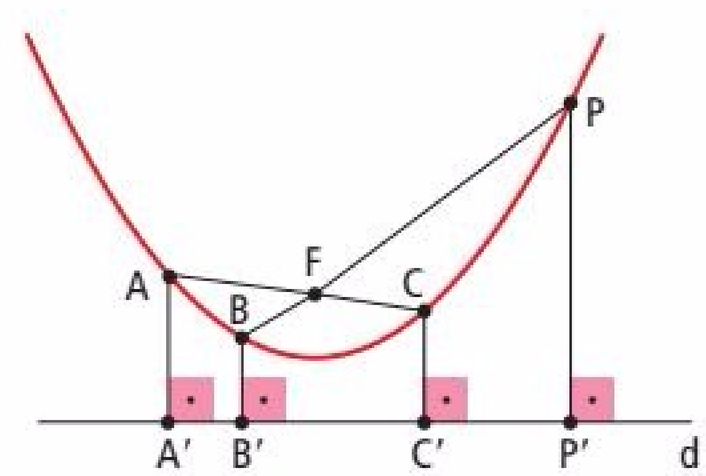
O conjunto de todos os pontos *P* desse plano que são equidistantes de *F* e *d* é chamado de **parábola**.



Sejam *A*, *B* e *C* pontos da parábola representada na figura ao lado e A′, B′ e C′ as respectivas projeções ortogonais sobre a reta *d*. Logo, podemos escrever:

d(A, F) = d(A, A′) d(B, F) = d(B, B′) d(C, F) = d(C, C′)

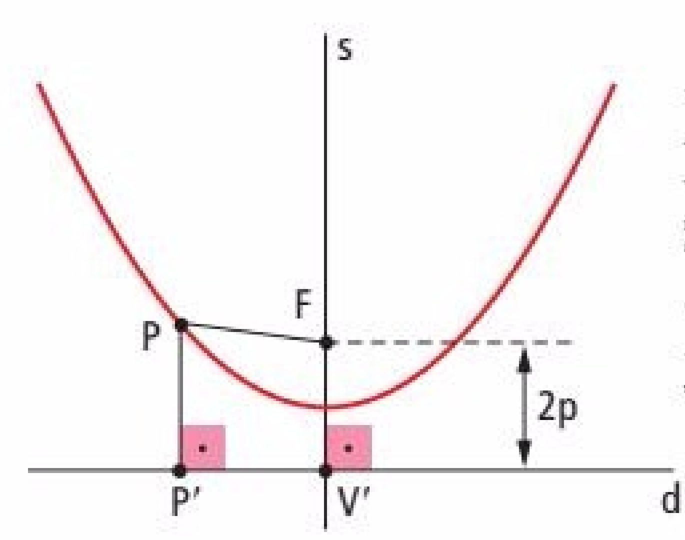
De modo geral, se *P* é um ponto qualquer da parábola e P′ é sua projeção ortogonal sobre *d*, então: d(P, F) = d(P, P′)



Elementos

Em uma parábola, destacamos os seguintes elementos:

- **foco**: é o ponto *F*;
- **diretriz**: é a reta *d*;
- **eixo de simetria**: é a reta *s*, que passa pelo foco *F* e é perpendicular à diretriz *d*;
- **vértice**: é o ponto *V*, ponto de intersecção entre o eixo de simetria e a parábola;
- **parâmetro da parábola (2p)**: distância do foco *F* à diretriz *d*.



Ilustrações: Editoria de arte

Seja V′ o ponto de intersecção entre a diretriz *d* e o eixo de simetria *s*. Note que, por construção, V′ também é a projeção ortogonal de *V* sobre *d*. Então, pela definição da parábola, temos:

d(V, F) = d(V, V′)

Além disso, d(F, d) = 2p, ou seja, d(F, V′) = 2p e d(F, V′) = d(F, V) + d(V, V′). Então podemos escrever d(F, V) + d(V, V′) = 2p e, portanto:

$$d(F, V) = d(V, V') = p$$

Assim, a distância do foco ao vértice da parábola é igual a *p* e *V* é o ponto médio de $\overline{FV'}$.

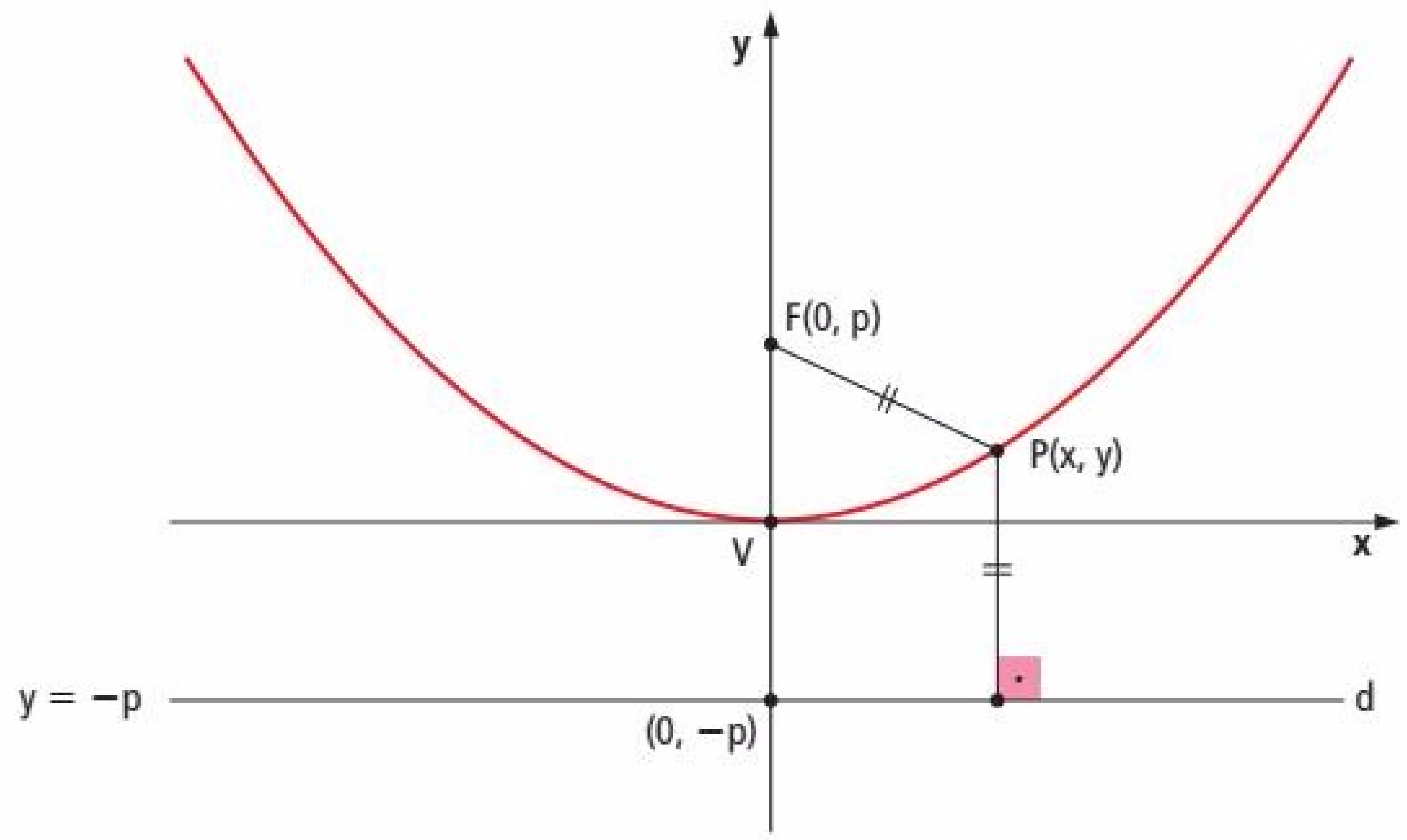
Equação reduzida da parábola

Professor, os exercícios propostos sobre este conteúdo encontram-se na página 166.

Para determinar as equações reduzidas da parábola, vamos proceder da mesma maneira que foi feito com o estudo da elipse e da hipérbole. Assim, fixando um sistema cartesiano ortogonal, vamos considerar os seguintes casos:

1º caso: Vértice na origem, diretriz horizontal e concavidade voltada para cima

Sendo F(0, p), $p > 0$, a diretriz *d* tem equação $y = -p$. Considerando um ponto P(x, y) qualquer da parábola, temos, por definição, que a distância de *P* a *F* é igual à distância de *P* à reta *d*. Então:



$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = |y + p|$$

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

Essa é a **equação reduzida da parábola com vértice na origem, diretriz horizontal e concavidade voltada para cima**.

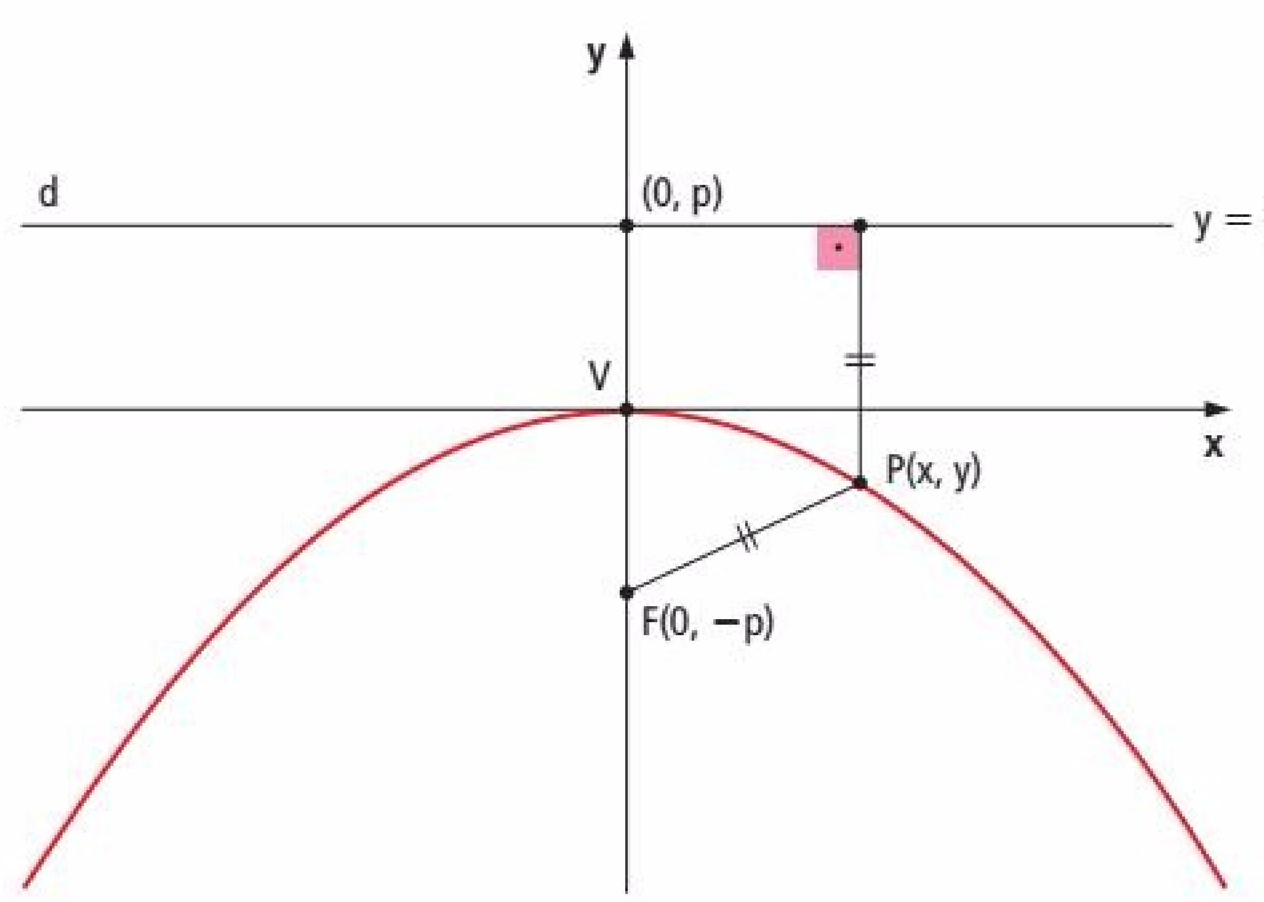
2º caso: Vértice na origem, diretriz horizontal e concavidade voltada para baixo

Neste caso, F(0, −p), e a diretriz tem equação $y = p$. Sendo P(x, y) um ponto qualquer da curva, temos que d(P, F) = d(P, d).

Utilizando um raciocínio análogo ao anterior, obtemos a equação:

$$\boxed{x^2 = -4py}$$

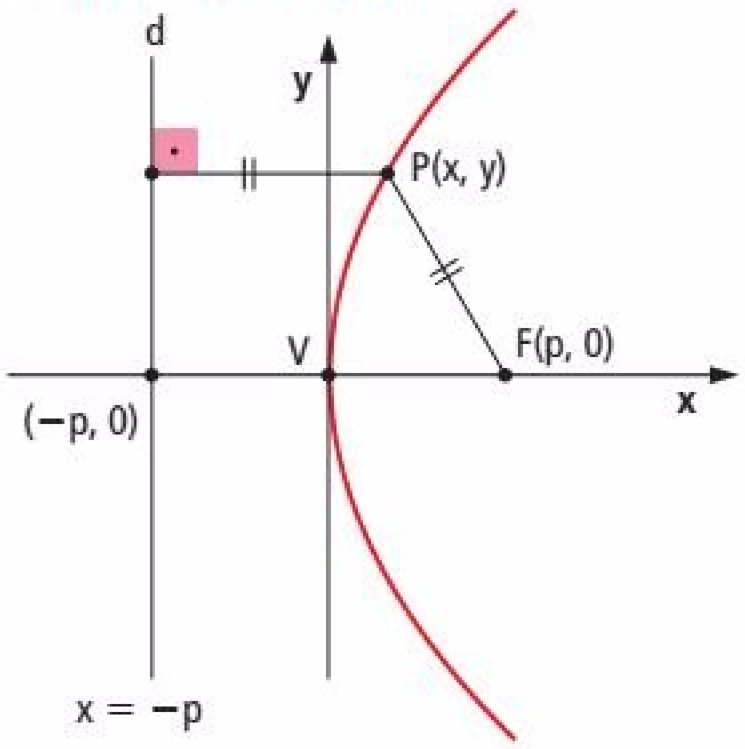
Essa é a **equação reduzida da parábola com vértice na origem, diretriz horizontal e concavidade voltada para baixo**.



Ilustrações: Editoria de arte

Nos casos apresentados até aqui, o eixo de simetria da parábola coincide com o eixo *y*.

Professor, os exercícios propostos sobre este conteúdo encontram-se na página 166.



3º caso: Vértice na origem, diretriz vertical e concavidade voltada para a direita

Nesse caso, o foco é o ponto F(p, 0) e a diretriz tem equação x = −p.

Sendo P(x, y) um ponto genérico da parábola, temos:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

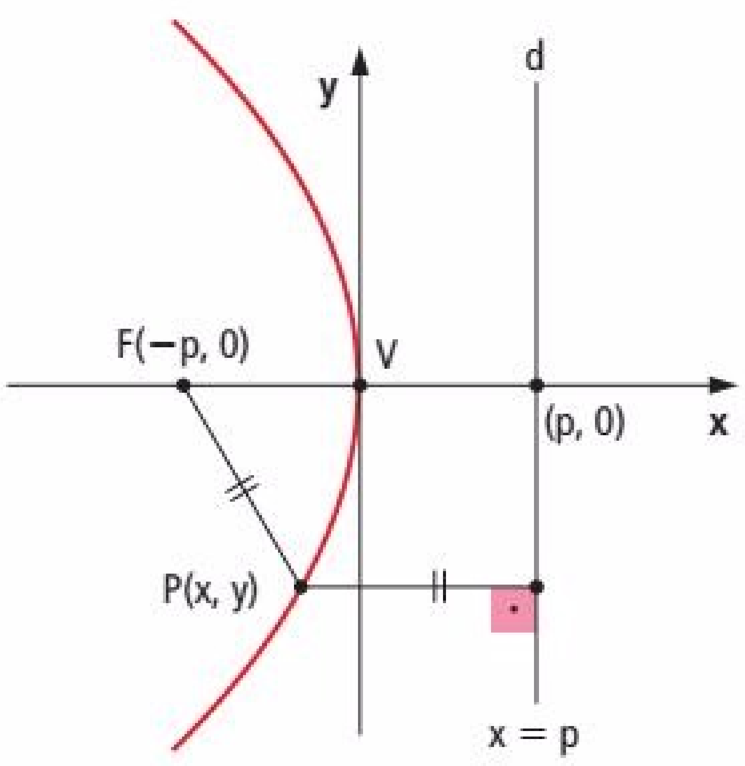
$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = |x + p|$$

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

Essa é a **equação reduzida da parábola com vértice na origem, diretriz vertical e concavidade voltada para a direita**.



4º caso: Vértice na origem, diretriz vertical e concavidade voltada para a esquerda

Nesse caso, o foco é o ponto F(−p, 0) e a diretriz é x = p.

Sendo P(x, y) um ponto qualquer da curva e utilizando raciocínio análogo ao caso anterior, temos a seguinte equação:

$$\boxed{y^2 = -4px}$$

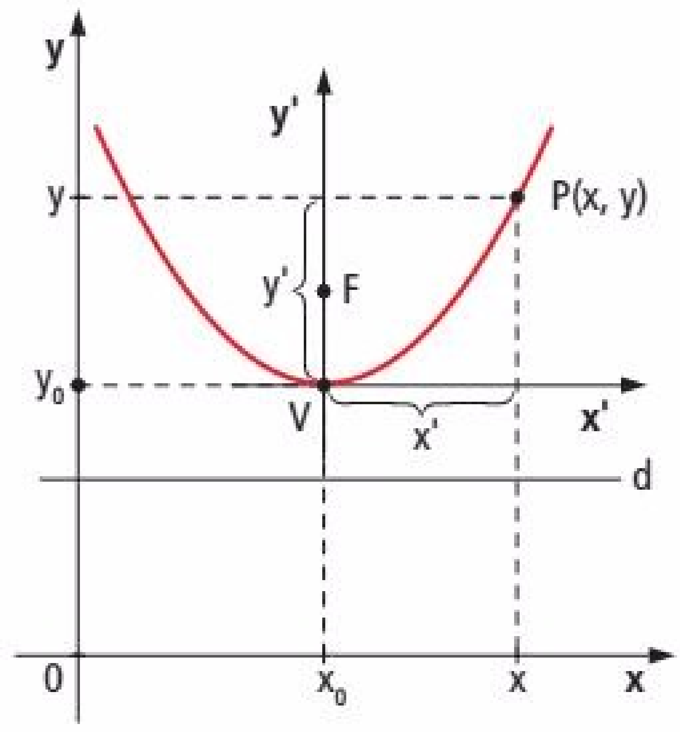
Essa é a **equação reduzida da parábola com vértice na origem, diretriz vertical e concavidade voltada para a esquerda**.

Quando o vértice está na origem e a reta diretriz é vertical (3º e 4º casos), o eixo de simetria da parábola coincide com o eixo *x*.

Para determinar as equações de parábolas com vértice fora da origem, utilizamos o sistema de coordenadas auxiliar x'Vy', semelhante ao utilizado no estudo da elipse e da hipérbole. Mas, no caso da parábola, posicionamos a origem desse sistema auxiliar no vértice *V* de coordenadas (x_0, y_0). Assim, temos as seguintes relações entre as coordenadas de um ponto qualquer nos dois sistemas cartesianos:

$$x' = x - x_0$$

$$y' = y - y_0$$



Ilustrações: Editoria de arte

5º caso: Vértice fora da origem, diretriz horizontal e concavidade voltada para cima

Considerando o sistema x'Vy', esse caso é similar ao 1º, portanto a equação da parábola é $(x')^2 = 4py'$. Substituindo pelas coordenadas do sistema xOy, obtemos a equação:

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)}$$

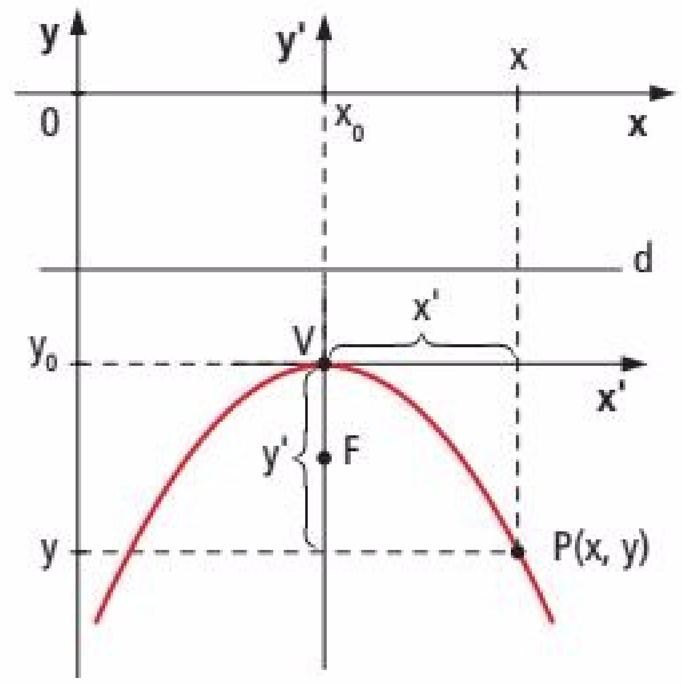
Essa é a **equação reduzida da parábola com vértice fora da origem, diretriz horizontal e concavidade voltada para cima**.

Nesse caso, a diretriz tem equação $y = y_0 - p$, o foco é o ponto $F(x_0, y_0 + p)$ e o eixo de simetria é paralelo ao eixo *y*.

O 6º, 7º e 8º casos são análogos aos 2º, 3º e 4º casos. Os casos a seguir mostram as informações a respeito de cada situação, utilizando a relação entre o sistema x'Vy' e o sistema xOy.

Professor, os exercícios propostos sobre este conteúdo encontram-se na página 166.

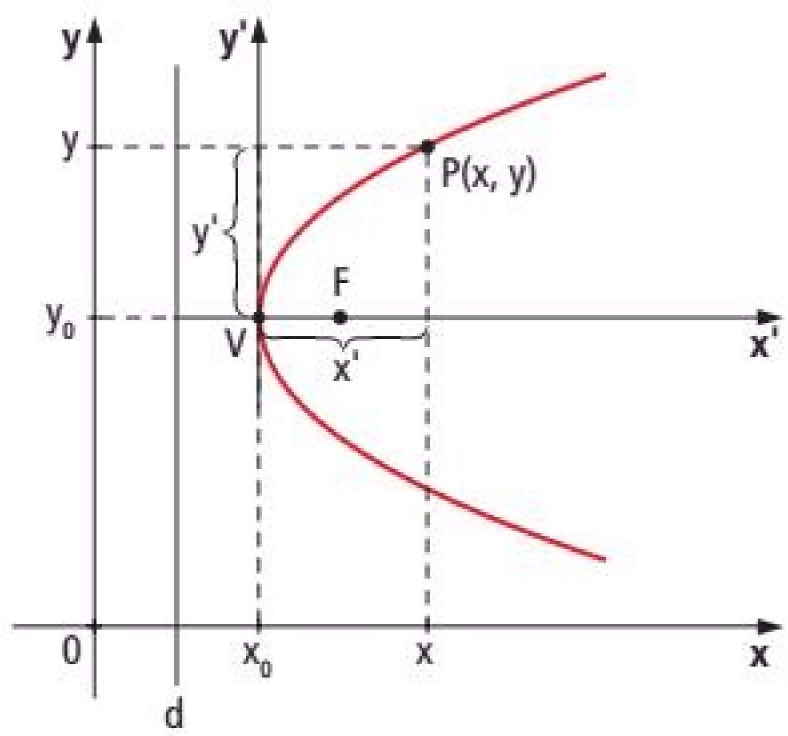
6º caso: Vértice fora da origem, diretriz horizontal e concavidade voltada para baixo



Ilustrações: Editoria de arte

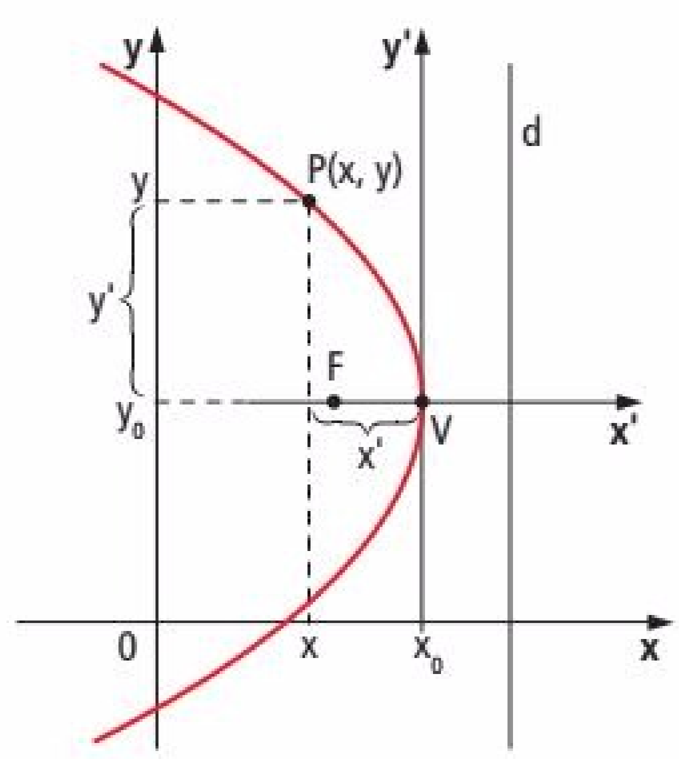
- Equação reduzida da parábola: $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$
- Equação da diretriz: $y = y_0 + p$
- Foco: $F(x_0, y_0 - p)$
- Eixo de simetria paralelo ao eixo *y*.

7º caso: Vértice fora da origem, diretriz vertical e concavidade voltada para a direita



- Equação reduzida da parábola: $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$
- Equação da diretriz: $x = x_0 - p$
- Foco: $F(x_0 + p, y_0)$
- Eixo de simetria paralelo ao eixo *x*.

8º caso: Vértice fora da origem, diretriz vertical e concavidade voltada para a esquerda



- Equação reduzida da parábola: $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$
- Equação da diretriz: $x = x_0 + p$
- Foco: $F(x_0 - p, y_0)$
- Eixo de simetria paralelo ao eixo *x*.

No volume 1 desta coleção, estudamos a função quadrática e vimos que seu gráfico é uma parábola. Essa curva é a mesma abordada aqui nos casos em que a diretriz é horizontal (1º, 2º, 5º e 6º casos). De fato, isolando a variável *y* nas equações reduzidas obtidas neste capítulo, chegaremos à lei da função quadrática estudada anteriormente. Acompanhe a seguir cada um desses casos.

1º caso: $x^2 = 4py \Rightarrow y = \frac{1}{4p}x^2$

Fazendo $a = \frac{1}{4p}$, obtemos a equação $y = ax^2$, em que $a > 0$, pois $p > 0$, o que confirma que temos uma parábola com vértice na origem e concavidade voltada para cima.

2º caso: $x^2 = -4py \Rightarrow y = -\frac{1}{4p}x^2$

Fazendo $a = -\frac{1}{4p}$, obtemos a equação $y = ax^2$, em que $a < 0$, pois $p > 0$, o que confirma que temos uma parábola com vértice na origem e concavidade voltada para baixo.

5º caso: $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 = 4py - 4py_0$$

Dividindo ambos os membros da equação por 4p:

$$\frac{1}{4p}x^2 - \frac{x_0}{2p}x + \frac{x_0^2}{4p} = y - y_0$$

$$y = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{x_0}{2p}x + y_0 + \frac{x_0^2}{4p}$$

Fazendo $a = \frac{1}{4p}$, $b = -\frac{x_0}{2p}$ e $c = y_0 + \frac{x_0^2}{4p}$, obtemos a equação $y = ax^2 + bx + c$, em que $a > 0$, pois $p > 0$ (concavidade para cima).

6º caso: $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 = -4py + 4py_0$$

Dividindo ambos os membros da equação por $-4p$:

$$\frac{1}{-4p}x^2 - \frac{x_0}{-2p}x + \frac{x_0^2}{-4p} = y - y_0$$

$$y = -\frac{1}{4p}x^2 + \frac{x_0}{2p}x + y_0 - \frac{x_0^2}{4p}$$

Fazendo $a = -\frac{1}{4p}$, $b = \frac{x_0}{2p}$ e $c = y_0 - \frac{x_0^2}{4p}$, obtemos a equação $y = ax^2 + bx + c$, em que $a < 0$, pois $p > 0$ (concavidade para baixo).

Exercícios resolvidos

14 Dada uma parábola de equação $y^2 = -20x$, pede-se:

a) as coordenadas do foco;

b) a equação da diretriz.

Resolução

Na parábola de equação $y^2 = -20x$, o eixo de simetria é o eixo *x*, a reta diretriz é vertical, o vértice está na origem e a concavidade está voltada para a esquerda ($y^2 = -4px$).

a) Sendo *x* o eixo de simetria, então $F(-p, 0)$:

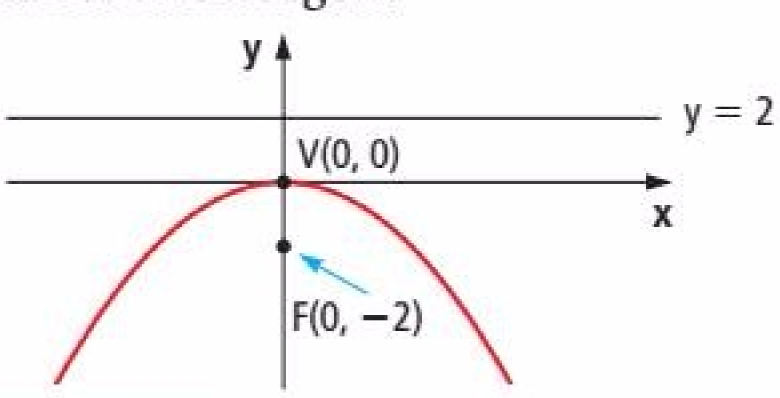
$-4p = -20 \Rightarrow p = 5$

Assim, $F(-5, 0)$.

b) Equação da diretriz:

$x = p \Rightarrow x = 5$

15 Determine a equação da parábola representada no plano cartesiano a seguir.



Editoria de arte

Resolução

Observando a figura, temos que o foco tem coordenadas $F(0, -2)$ e a reta diretriz tem equação $y = 2$. Então, *p* é igual a 2.

Como a diretriz é horizontal, o vértice está na origem e a concavidade é voltada para baixo, a parábola tem equação na forma $x^2 = -4py$, com $p = 2$.

Logo: $x^2 = -4 \cdot 2 \cdot y \Rightarrow x^2 = -8y$.

16 Determine a equação da parábola cujo vértice é a origem dos eixos coordenados, o eixo de simetria é o eixo *y* e que passa pelo ponto $P(-3, 7)$.

Resolução

Como o eixo de simetria é o eixo *y*, então a reta diretriz é horizontal, paralela ao eixo *x*. Como o vértice está na origem e a parábola passa pelo ponto $P(-3, 7)$, localizado no 4º quadrante, então sua concavidade é voltada para cima. Desse modo, a equação da parábola é do tipo $x^2 = 4py$.
Se $P(-3, 7)$ pertence à parábola, temos:

$$x^2 = 4py \Rightarrow (-3)^2 = 4p \cdot 7 \Rightarrow 28p = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p = \frac{9}{28}$$

Substituindo o valor de *p* na equação, temos:

$$x^2 = 4py \Rightarrow x^2 = 4 \cdot \frac{9}{28} \cdot y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{9}{7}y \text{ ou } y = \frac{7x^2}{9}$$

Portanto, a parábola é $x^2 = \frac{9}{7}y$ ou $y = \frac{7x^2}{9}$.

17 Uma parábola tem foco $F(2, 3)$ e diretriz dada pela reta de equação $x = -4$.

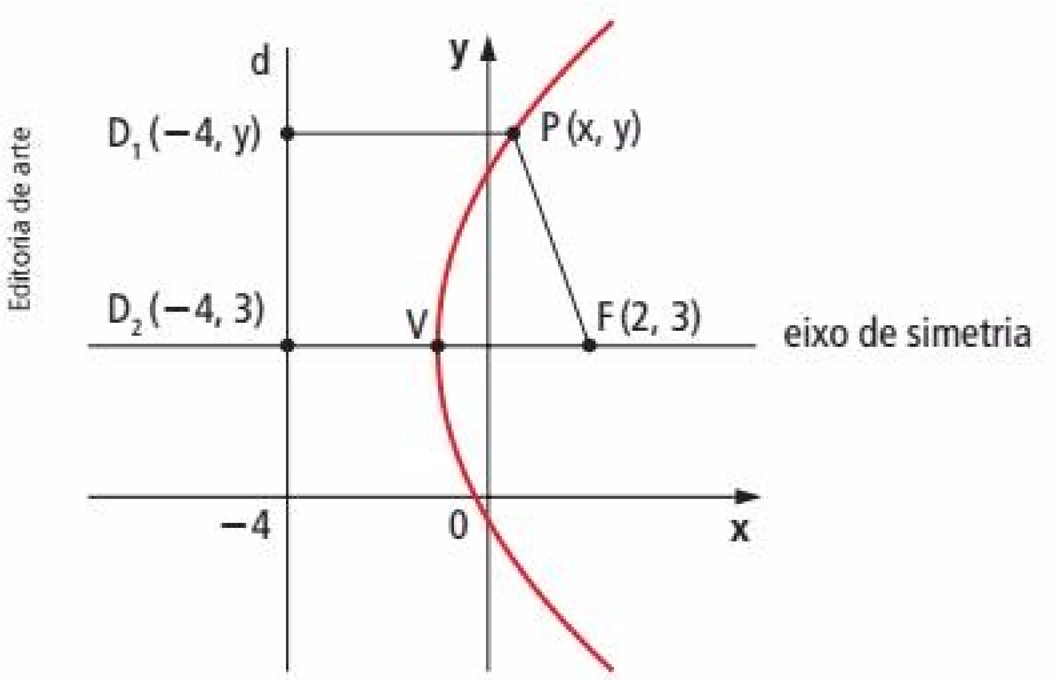
a) Determine as coordenadas do vértice dessa parábola.

b) Calcule a distância *p* do vértice ao foco.

c) Determine a equação dessa parábola.

Resolução

a) A diretriz é $x = -4$, então o eixo de simetria da parábola é horizontal. Logo, temos a figura:



Como o vértice $V(x_0, y_0)$ é o ponto médio do segmento de reta de extremidades $F(2, 3)$ e $D_2(-4, 3)$, temos:

$$x_0 = \frac{2-4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$y_0 = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Logo, $V(-1, 3)$.

b) $p = d(V, F) = \sqrt{(2+1)^2 + (3-3)^2} = 3$

Portanto, $p = 3$.

c) Se $P(x, y)$ é um ponto qualquer da parábola, temos:

$d(F, P) = d(D_1, P)$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-y)^2}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (x+4)^2$$

$$(y-3)^2 = (x+4)^2 - (x-2)^2$$

Desenvolvendo o 2º membro, temos:

$$(y-3)^2 = 12(x+1)$$

Outra maneira de determinar essa equação é por meio da fórmula:

$$(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0) \Rightarrow (y-3)^2 = 12(x+1)$$

18 Determine as coordenadas do vértice, as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola de equação $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

Resolução

Para determinar as coordenadas e a equação pedidas, precisamos obter a equação reduzida da parábola. Para isso vamos manipular algebricamente a equação dada para chegar a uma das equações reduzidas estudadas.

Assim, isolando os termos em *y* no 1º membro, temos:

$$y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$$
$$y^2 - 4y = 8x - 28$$

Completando o quadrado perfeito, temos:

$$y^2 - 4y + 4 = 8x - 28 + 4$$
$$(y-2)^2 = 8x - 24$$
$$(y-2)^2 = 8(x-3)$$

Essa equação representa uma parábola com diretriz vertical, vértice fora da origem e concavidade para a direita. Então a equação é do tipo:

$$(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0)$$

Assim: $y_0 = 2$, $x_0 = 3$ e $p = 2$.

Logo, $V(x_0, y_0) = V(3, 2)$ e $F(x_0 + p, y_0) = F(5, 2)$.

Portanto, a equação da diretriz é: $x = x_0 - p \Rightarrow x = 1$.

19 Determine a equação da parábola cuja reta diretriz é horizontal e que passa pelos pontos $A(-3, 5)$, $B(0, -4)$ e $C(2, 0)$.

Resolução

Se a reta diretriz é horizontal, então a equação da parábola é da forma $y = ax^2 + bx + c$.

Os pontos *A*, *B* e *C* pertencem à parábola.

$A(-3, 5)$: $9a - 3b + c = 5$ (I)

$B(0, -4)$: $c = -4$

$C(2, 0)$: $4a + 2b + c = 0$ (II)

Substituindo *c* por -4 em (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} 9a - 3b = 9 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - b = 3 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$

Somando membro a membro as duas equações do último sistema, obtemos:

$5a = 5 \Rightarrow a = 1$

Voltando à equação $2a + b = 2$, temos:

$2 \cdot 1 + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 2 \Rightarrow b = 0$

Substituindo os valores de *a*, *b* e *c*, temos:

$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 4$

Portanto, $y = x^2 - 4$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

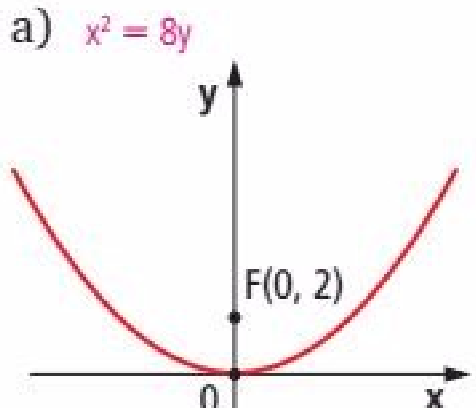
31. Determine as coordenadas do foco e a equação da reta diretriz das seguintes parábolas:

a) $y^2 = 30x$ $F(7{,}5; 0)$ e $x = -7{,}5$

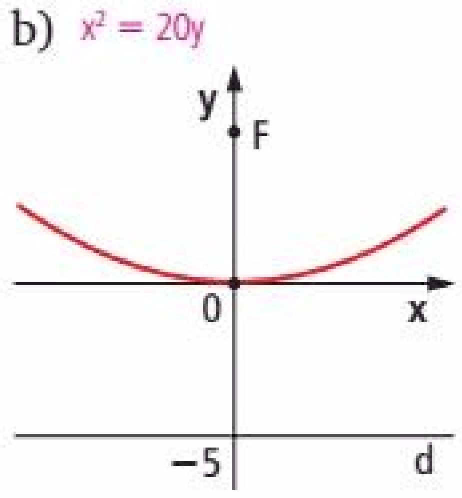
b) $x^2 + y = 0$ $F(0; -0{,}25)$ e $y = 0{,}25$

32. Determine a equação correspondente a cada uma das seguintes parábolas.

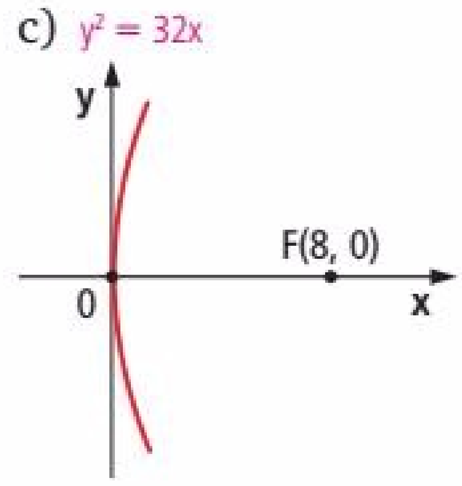
a) $x^2 = 8y$



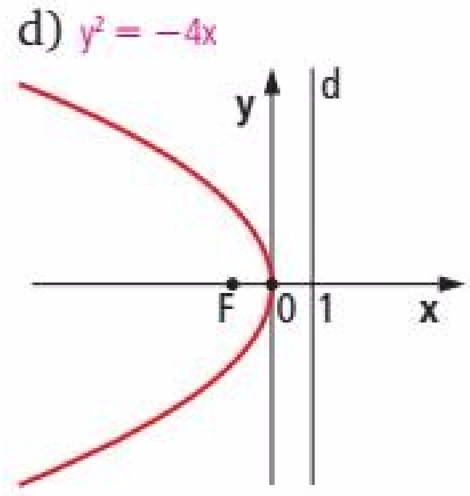
b) $x^2 = 20y$



c) $y^2 = 32x$



d) $y^2 = -4x$



Ilustrações: Editoria de arte

33. Escreva, em cada situação, a equação da parábola com vértice na origem, sabendo que:

a) o foco é $(0, 8)$; $x^2 = 32y$

b) é simétrica em relação ao eixo *x* e o foco é $\left(-\dfrac{11}{2}, 0\right)$. $y^2 = -22x$

34. Determine a equação da parábola de foco *F* e diretriz *d*, nos seguintes casos:

a) $F(1, 0)$ e d: $x = -1$ $y^2 - 4x = 0$

b) $F\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$ e d: $y - \dfrac{3}{2} = 0$ $x^2 + 6y = 0$

35. Dada a parábola de equação $x^2 - 8y = 0$, determine as coordenadas do foco, a equação da diretriz, o eixo de simetria e as coordenadas do vértice.
$F(0, 2)$; $y + 2 = 0$; eixo das ordenadas e $V(0, 0)$.

36. Qual é a distância da origem do sistema cartesiano ao vértice da parábola de equação $x^2 - 6x - y + 10 = 0$?
$d(O, V) = \sqrt{10}$

37. Em uma parábola, o vértice é o ponto $(0, 0)$ e o eixo de simetria é o eixo *x*. Determine a equação da parábola, sabendo que ela passa pelo ponto $(3, -6)$. $y^2 - 12x = 0$

38. Determine as coordenadas do foco, as coordenadas do vértice e a equação da diretriz das parábolas:

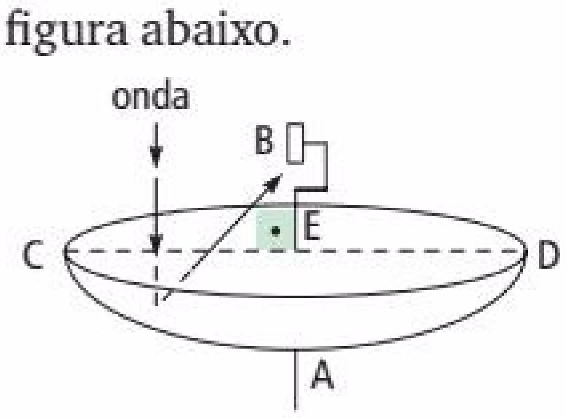
a) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$ $F(-2, -3)$; $V(-2, -1)$ e $y = 1$

b) $y^2 - 6y - 12x + 21 = 0$ $F(4, 3)$; $V(1, 3)$ e $x = -2$

c) $4y^2 + 40y - 2x + 101 = 0$ $F\left(\dfrac{5}{8}, -5\right)$; $V\left(\dfrac{1}{2}, -5\right)$ e $x = \dfrac{3}{8}$

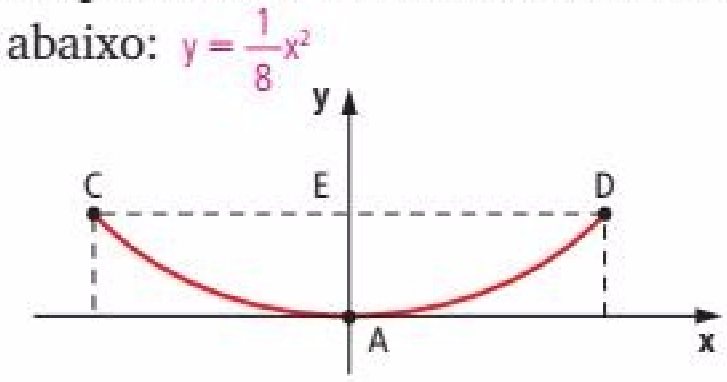
39. Identifique a cônica representada pela equação $x^2 - 6x - 4y + 5 = 0$. Parábola de vértice $(3, -1)$; foco: $F(3, 0)$ e diretriz: $y = -2$.

40. (UERJ) A superfície de uma antena parabólica pode ser gerada pela rotação completa de uma parábola ao redor do seu eixo. A intersecção dessa superfície com qualquer plano perpendicular ao eixo é um círculo. Observe a figura abaixo.



Considere um círculo de centro (E) e diâmetro $(\overline{CD})$ de 4 metros de comprimento, cuja medida da distância do centro (E) ao vértice (A) do paraboloide é 0,5 metro.

a) Escreva no caderno a equação cartesiana da parábola de foco (B) contida no plano CAD, sendo o vértice (A) a origem do sistema cartesiano e o eixo das abscissas paralelo ao diâmetro $\overline{CD}$, como mostra a figura abaixo: $y = \dfrac{1}{8}x^2$



b) Calcule a distância do vértice (A) ao foco (B). 2 m

Explorando a tecnologia

Visualização das intersecções de um plano com o cone duplo

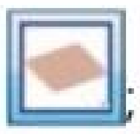
Estudamos neste capítulo que as secções cônicas são curvas obtidas pela intersecção de um plano com a superfície lateral de um cone circular reto. Dependendo da inclinação do corte podemos obter uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola.

Agora, vamos construir um esquema no GeoGebra para visualizar essas intersecções, utilizando um cone e um plano, manipulando a inclinação do cone utilizando Controles Deslizantes.

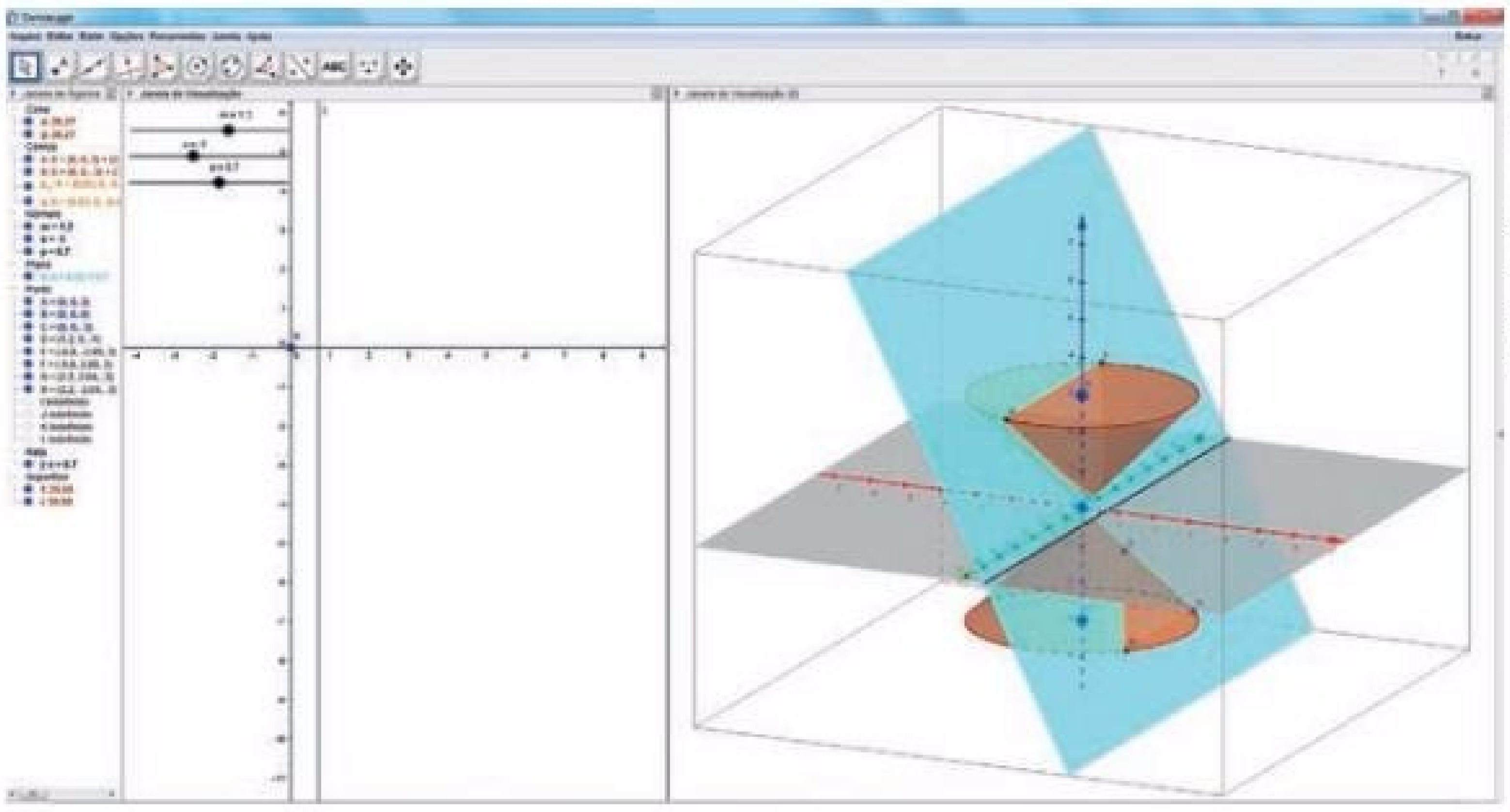
Para isso, acompanhe a sequência de passos a seguir.

1. Ao abrir o GeoGebra, no menu **Exibir**, clique em **Janela de Visualização 3D**. Uma nova janela de visualização abrirá, com os eixos coordenados *x*, *y* e *z*. Note que, ao clicar em cada uma das janelas de visualização (2D e 3D), as ferramentas disponíveis na barra de ferramentas se alteram.
2. No **Campo de Entrada**, digite ‘A=(0, 0, 3)’, ‘B=(0, 0, 0)’ e ‘C=(0, 0, −3)’ para criar os pontos *A*, *B* e *C*.
3. Na barra de ferramentas da **Janela de Visualização 3D**, selecione a ferramenta **Cone**, , e, em seguida, selecione primeiro o ponto *A*, depois o ponto *B* e digite ‘3’ para o valor do raio da base na janela que vai aparecer.
4. Ainda com a mesma ferramenta, selecione o ponto *C*, depois o ponto *B* e também digite ‘3’ para o valor do raio. Assim, criamos o cone de duas folhas.
5. Agora, vamos criar um ponto *D* que servirá para construção e movimentação do plano. Digite no **Campo de Entrada** ‘D=(m, 0, n)’ e clique em “Criar Controles Deslizantes” para criar os controles deslizantes dos coeficientes *m* e *n*.
6. Como já temos o ponto *D*, para criar um plano, precisamos de uma reta que servirá como suporte. Clique na **Janela de Visualização 2D** e, no **Campo de Entrada**, digite ‘x=p’ e, em seguida, clique em “Criar Controle Deslizante”.

> Se a **Janela de Visualização 3D** estiver selecionada, ao digitar ‘x=p’ obteremos um plano e não uma reta, como desejado. Por isso devemos primeiro clicar na **Janela de Visualização 2D**.

7. Na barra de ferramentas da **Janela de Visualização 3D**, selecione a ferramenta **Plano**, ; selecione primeiro o ponto *D* e depois a reta *g*. O programa fornecerá um plano. Manipule os valores dos controles deslizantes para ver como o plano se comporta diante dos cones. Com o botão direito do *mouse* acionado sobre a **Janela de Visualização 3D**, mova o cursor para encontrar um ângulo de visão que considere mais adequado.
8. Selecione a ferramenta **Intersecção de Duas Superfícies**, , e clique sobre o cone superior e o plano. Em seguida, repita o processo para o cone inferior. Repare que a intersecção entre as superfícies ficará destacada.

Com a construção finalizada, a tela do GeoGebra ficará semelhante à figura ao lado.



Crédito das imagens: Geogebra

Movimente os controles deslizantes e observe as intersecções entre o plano e a superfície do cone de duas folhas.

Atividade

Escreva no caderno

a) O plano não pode ser paralelo à geratriz do cone, porém a inclinação do plano precisa ser menor que a da geratriz, portanto, para a nossa construção, há muitas respostas. Uma possível resposta é m = −2, n = 2 e p = 2.

b) O plano precisa ser paralelo à geratriz do cone, portanto, para a nossa construção, há muitas respostas. Uma possível resposta é m = 0, n = 2 e p = 2.

1. Forneça um valor para m, n e p de tal forma que a intersecção entre as duas superfícies seja:

a) uma elipse;

b) uma parábola;

c) uma hipérbole; Os valores de *m*, *n* e *p* devem ser iguais.

d) um ponto; n = p = 0

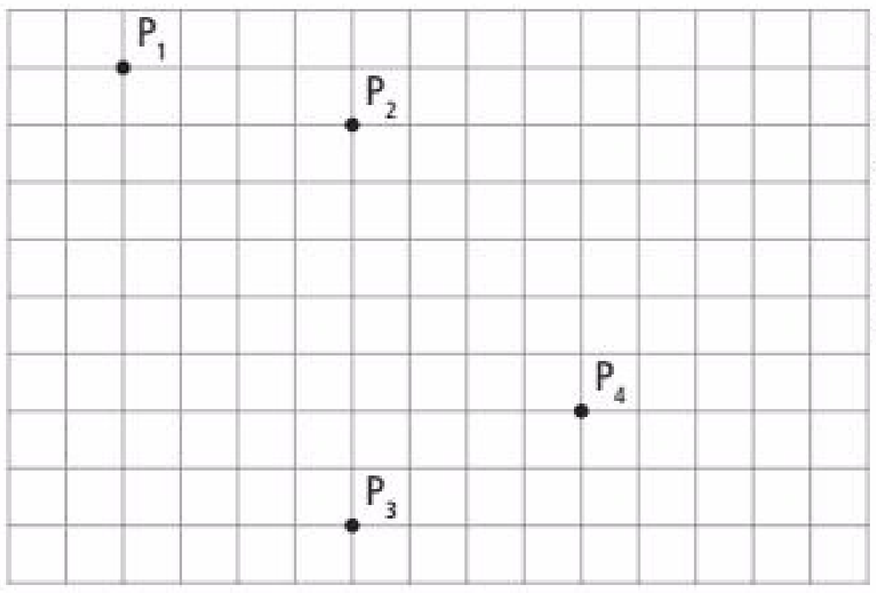
e) dois pontos; m = n = p = −3 ou m = n = p = 3

f) uma reta.

f) O plano precisa conter a geratriz. Uma resposta possível é m = −2, n = 2 e p = 0.

Escreva no caderno

1. (UFRN) O piso de um salão de 4 m de largura por 6 m de comprimento é revestido com pedras de granito quadradas, como mostra a figura abaixo. Em cada uma das posições – P_1, P_2, P_3 e P_4 – existe uma pessoa.



Ilustrações: Editoria de arte

As distâncias entre P_2 e P_3 e entre P_1 e P_4 são, respectivamente:

x a) 2,8 m e 4,0 m
b) 2,8 m e 3,4 m
c) 3,2 m e 3,2 m
d) 3,0 m e 3,6 m

2. (UFPel-RS) Na arquitetura, a Matemática é usada a todo momento. A Geometria é especialmente necessária no desenho de projetos. Essa parte da Matemática ajuda a definir a forma dos espaços, usando as propriedades de figuras planas e sólidas. Ajuda também a definir as medidas desses espaços.

Uma arquiteta é contratada para fazer o jardim de uma residência, que deve ter formato triangular. Analisando a planta baixa, verifica-se que os vértices possuem coordenadas A(8, 4), B(4, 6) e C(2, 4). No ponto médio do lado formado pelos pontos *A* e *C*, é colocado um suporte para luminárias.

Considerando o texto e seus conhecimentos, é correto afirmar que a distância do suporte até o ponto *B* mede, em unidades de comprimento:

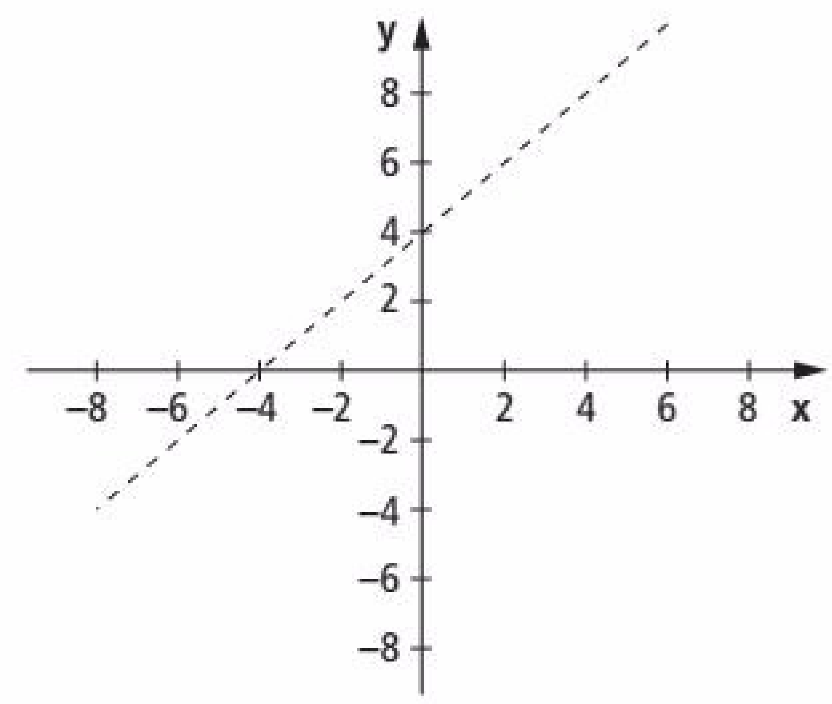
a) $\sqrt{37}$
b) $\sqrt{3}$
x c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{13}$
e) $\sqrt{17}$
f) I.R.

3. (Fuvest-SP) A tabela mostra a temperatura das águas do Oceano Atlântico (ao nível do Equador) em função da profundidade.

Profundidade	Temperatura
Superfície	27 °C
100 m	21 °C
500 m	7 °C
1 000 m	4 °C
3 000 m	2,8 °C

Admitindo que a variação da temperatura seja linear entre duas medições consecutivas quaisquer feitas para a profundidade, qual a temperatura prevista para a profundidade de 400 m? 10,5 °C

4. Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.

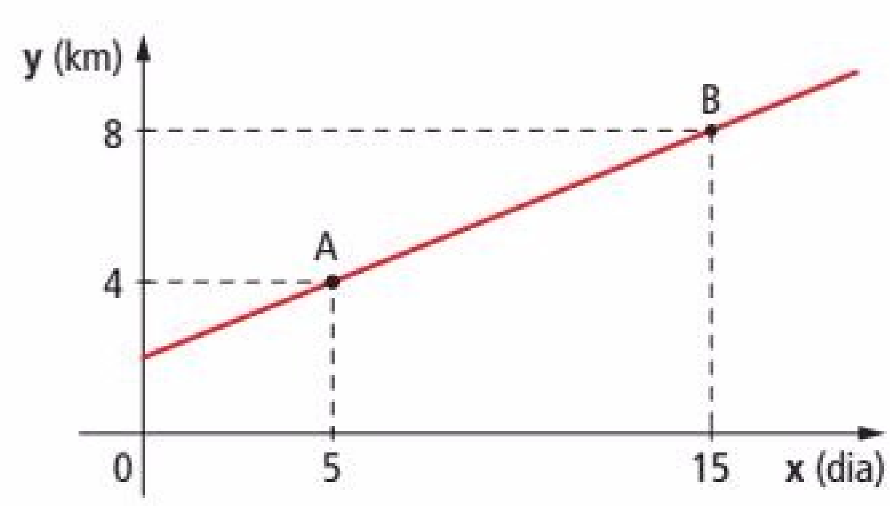


A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

a) (–5, 0).
x b) (–3, 1).
c) (–2, 1).
d) (0, 4).
e) (2, 6).

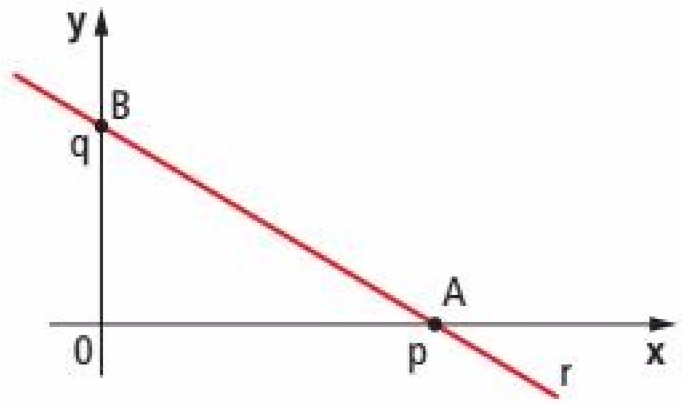
5. (UEPA) Um *personal trainer*, acompanhando os preparativos de um atleta, observou que o rendimento deste crescia linearmente com o tempo. Aproveitando seus conhecimentos matemáticos, registrou em um gráfico cartesiano o percurso, em km, no final do 5º dia e do 15º dia, conforme a figura abaixo.



A equação da reta que passa pelos pontos *A* e *B* é:

a) $2x - 5y - 2 = 0$
x b) $2x - 5y + 10 = 0$
c) $5x + 2y - 2 = 0$
d) $2x + 5y + 10 = 0$
e) $5x - 2y - 2 = 0$

6. (UFVJM-MG) Observe esta figura:



Ilustrações: Editoria de arte

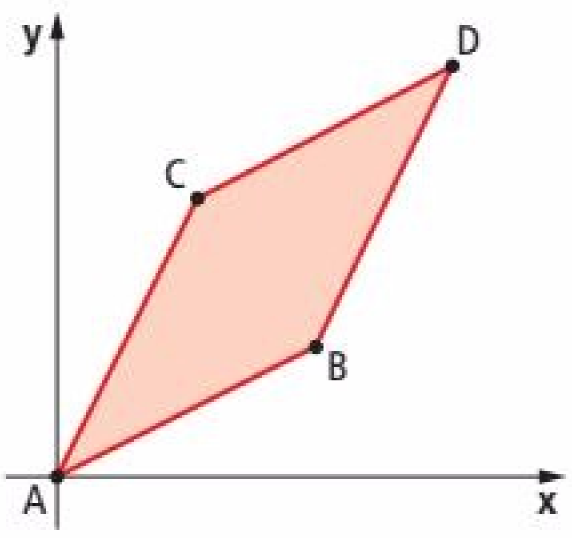
A forma segmentária da reta *r* é dada por $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$.

A abscissa do ponto *A* é *p* e a ordenada do ponto *B* é *q*. Com base nessas informações, faça o que se pede:

a) escreva a equação $3x + 5y - 15 = 0$ na forma segmentária; $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$

b) determine o valor de $p + q$. $p + q = 5 + 3 = 8$

7. (UnB-DF) No plano cartesiano, os pontos A(0, 0), B(10, 5) e C(6, 12) são vértices do paralelogramo ABCD. Determine a soma das coordenadas do vértice *D*. 33



8. (FEI-SP) As retas *r* e *s* são dadas na forma de determinantes, como segue:

$$r: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad s: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Para que valores de *a*, as retas são paralelas?
$a = -1$ ou $a = 3$

9. (UFPA) Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e é perpendicular a uma reta que forma com o sentido positivo do eixo *x* um ângulo cuja tangente é $\frac{5}{2}$. $2x + 5y + 4 = 0$

10. (UFG-GO) Para medir a área de uma fazenda de forma triangular, um agrimensor, utilizando um sistema de localização por satélite, encontrou como vértices desse triângulo os pontos A(2, 1), B(3, 5) e C(7, 4) do plano cartesiano, com as medidas em km. A área dessa fazenda, em km², é de:

X a) $\frac{17}{2}$
b) 17
c) $2\sqrt{17}$
d) $4\sqrt{17}$
e) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

11. (IFRS) O par ordenado que é solução da equação matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ é o centro de qual das circunferências abaixo?

X a) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$
b) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$
c) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
d) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$
e) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

12. (UFSM-RS) A massa utilizada para fazer pastéis folhados, depois de esticada, é recortada em círculos (discos) de igual tamanho. Sabendo que a equação matemática da circunferência que limita o círculo é $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 36 = 0$ e adotando $\pi = 3{,}14$, o diâmetro de cada disco e a área da massa utilizada para confeccionar cada pastel são respectivamente:

a) 7 e 113,04
b) 7 e 153,86
c) 12 e 113,04
d) 14 e 113,04
X e) 14 e 153,86

13. (Mack-SP) Vitória-régia é uma planta aquática típica da região amazônica. Suas folhas são grandes e têm formato circular, com uma capacidade notável de flutuação, graças aos compartimentos de ar em sua face inferior.

Em um belo dia, um sapo estava sobre uma folha de vitória-régia, cuja borda obedece à equação $x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$, apreciando a paisagem ao seu redor. Percebendo que a folha que flutuava à sua frente era maior e mais bonita, resolveu pular para essa folha, cuja borda é descrita pela equação $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 1 = 0$.

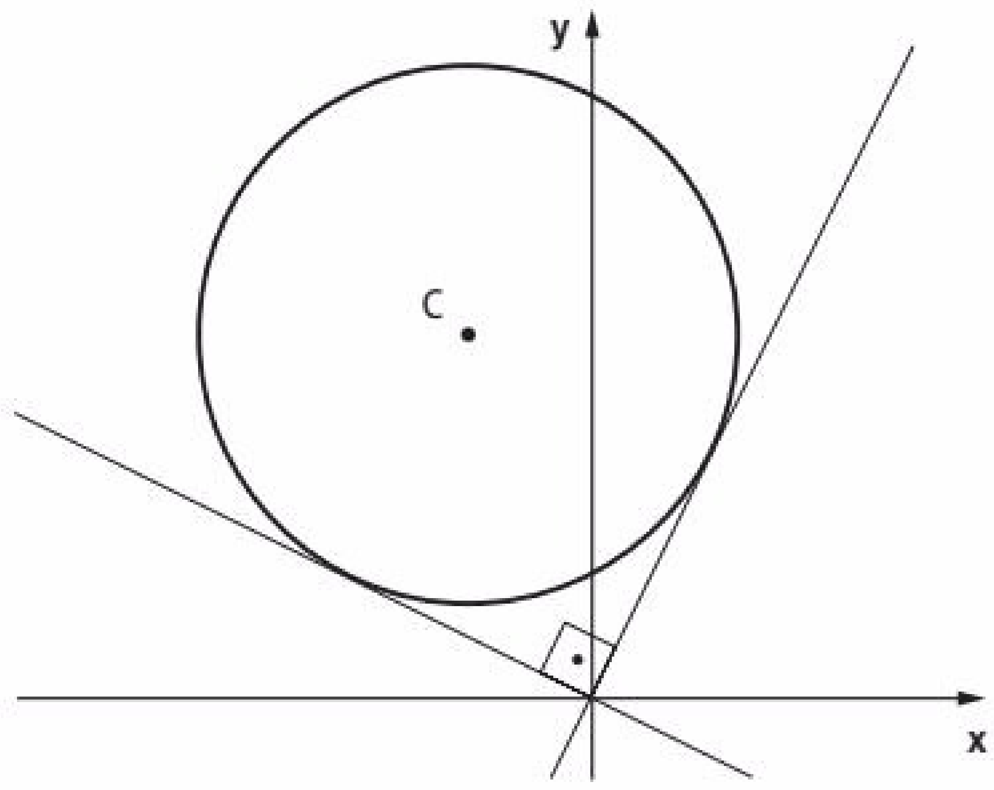
A distância linear mínima que o sapo deve percorrer em um salto para não cair na água é:

X a) $2\left(\sqrt{2} - 1\right)$
b) 2
c) $2\sqrt{2}$
d) $\sqrt{2} - 2$
e) $\sqrt{5}$

14. (UFRGS-RS) A altura de um triângulo equilátero é igual ao diâmetro do círculo de equação $x^2 + y^2 = 3y$. Dois dos vértices do triângulo pertencem ao eixo das abscissas, e o outro, ao círculo. A equação da reta que tem inclinação positiva e que contém um dos lados do triângulo é:

a) $y = 3x + \sqrt{3}$
X b) $y = \sqrt{3}x + 3$
c) $y = \sqrt{3}x + 1$
d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$
e) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$

15. (Unicamp-SP) Um círculo de raio 2 foi apoiado sobre as retas $y = 2x$ e $y = -\dfrac{x}{2}$, conforme mostra a figura abaixo.

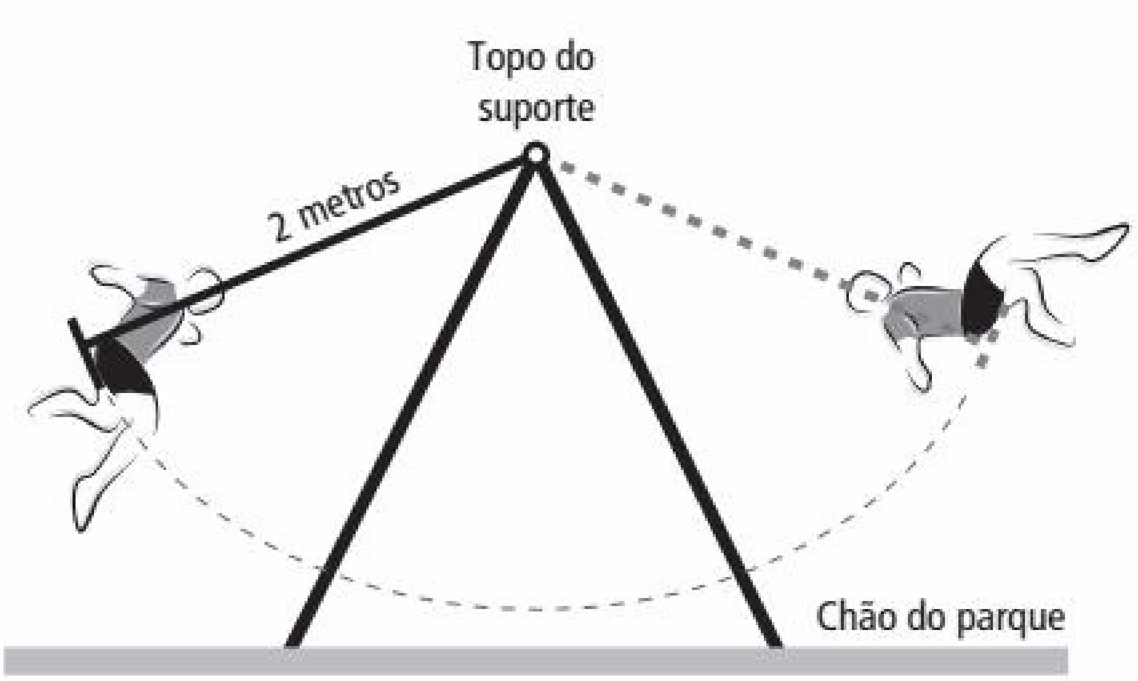


Ilustrações: Editoria de arte

a) Determine as coordenadas do ponto de tangência entre o círculo e a reta $y = -\dfrac{x}{2}$. $\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

b) Determine a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto *C*, centro do círculo. $y = -3x$

16. (Enem/MEC) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo *X* é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

a) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

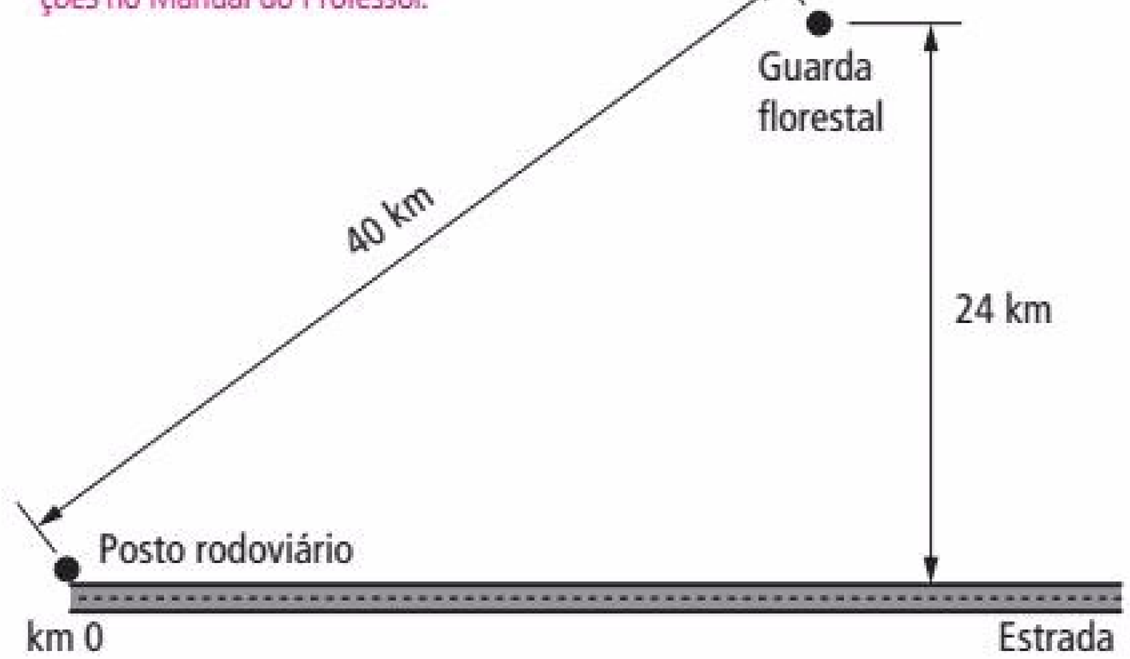
c) $f(x) = x^2 - 2$

x d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

17. (Unicamp-SP) Suponha um trecho retilíneo de estrada, com um posto rodoviário no quilômetro zero. Suponha, também, que uma estação da guarda florestal esteja localizada a 40 km do posto rodoviário, em linha reta, e a 24 km de distância da estrada, conforme a figura abaixo.

Veja resposta na seção de *Resoluções* no Manual do Professor.



a) Duas antenas de rádio atendem a região. A área de cobertura da primeira antena, localizada na estação da guarda florestal, corresponde a um círculo que tangencia a estrada. O alcance da segunda, instalada no posto rodoviário, atinge, sem ultrapassar, o ponto da estrada que está mais próximo da estação da guarda florestal. Explicite as duas desigualdades que definem as regiões circulares cobertas por essas antenas, e esboce o gráfico dessas regiões, identificando a área coberta simultaneamente pelas duas antenas.

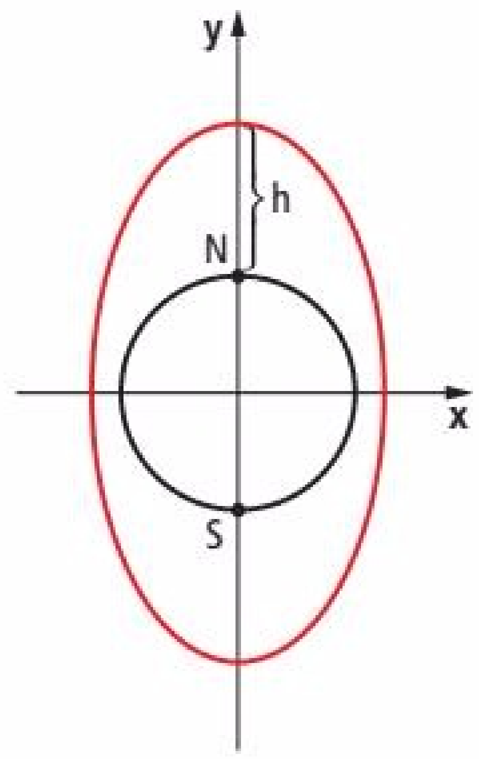
b) Pretende-se substituir as antenas atuais por uma única antena, mais potente, a ser instalada em um ponto da estrada, de modo que as distâncias dessa antena ao posto rodoviário e à estação da guarda florestal sejam iguais. Determine em que quilômetro da estrada essa antena deve ser instalada.

18. (Uesb-BA) No projeto para a expansão do sistema viário de uma cidade do sudoeste da Bahia, um arquiteto representou, em um plano cartesiano, um anel rodoviário pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$ e uma estrada pela equação $2x - y + k = 0$.

Assim, o número de valores inteiros que **k** pode assumir, de modo que a estrada e o anel possuam duas interseções distintas, é

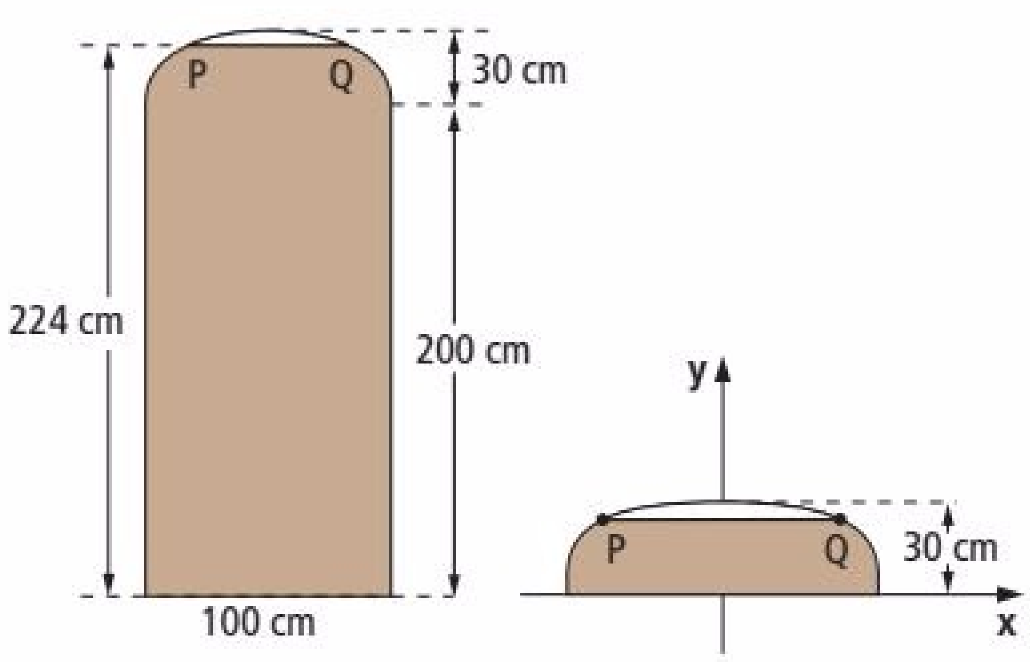
x 01) 9
02) 8
03) 7
04) 6
05) 5

19. (UFRJ) Um satélite é colocado em órbita elíptica em torno da Terra (suposta esférica), tendo seus polos como focos. Em um certo sistema de medidas, o raio da Terra mede três unidades. Ao passar pelo plano do Equador, o satélite está, no mesmo sistema de medidas, a uma unidade acima da superfície terrestre.



Determine a que altura h o satélite estará quando passar diretamente sobre o polo Norte. 2 unidades.

20. (UERJ) Uma porta colonial é formada por um retângulo de 100 cm × 200 cm e uma semielipse. Observe as figuras:



Na semielipse o eixo maior mede 100 cm e o semieixo menor, 30 cm. Calcule a medida da corda $\overline{PQ}$, paralela ao eixo maior, que representa a largura da porta a 224 cm de altura. 60 cm

21. (Unifor-CE) A figura abaixo mostra o vão da entrada de um armazém pelo qual passará um caminhão com 4 metros de largura. Sabendo-se que o arco superior do vão é semielíptico, a altura máxima permitida do caminhão é de:

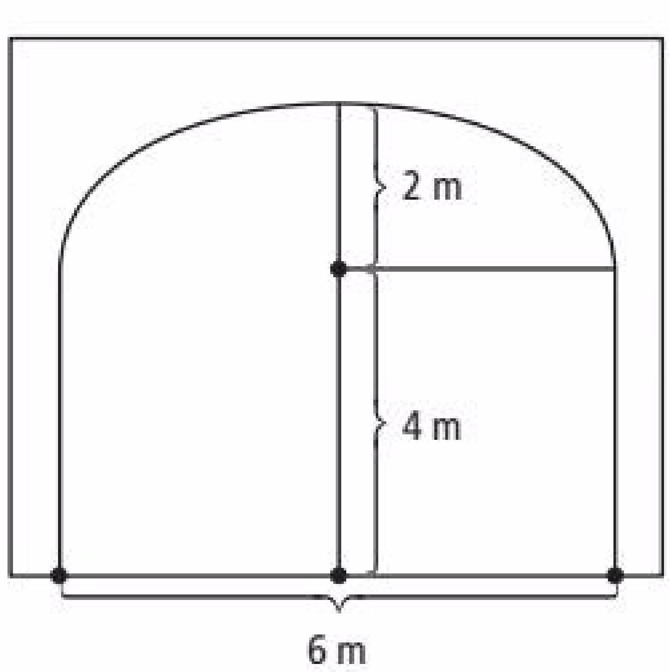
a) $4+\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

x b) $4+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

c) $4+\dfrac{3\sqrt{5}}{3}$

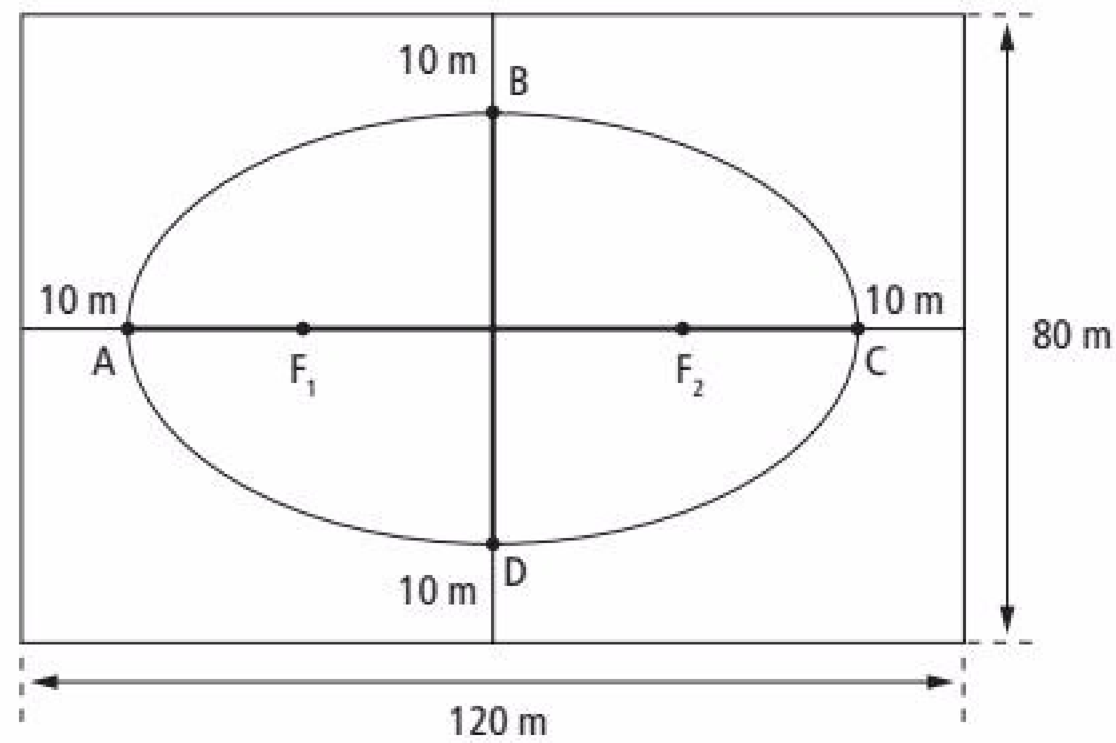
d) $4+\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

e) $4+\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$



Ilustrações: Editoria de arte

22. (UFPB) A secretaria de infraestrutura de um município contratou um arquiteto para fazer o projeto de uma praça. Na figura a seguir, está o esboço do projeto proposto pelo arquiteto: uma praça em formato retangular medindo 80 m × 120 m, onde deverá ser construído um jardim em forma de elipse na parte central.



Estão destacados na figura os segmentos AC e BD que são, respectivamente, o eixo maior e o menor da elipse, bem como os pontos F_1 e F_2, que são os focos da elipse onde deverão ser colocados dois postes de iluminação.

Com base nessas informações, conclui-se que a distância entre os postes de iluminação será, aproximadamente, de:

a) 68 m
b) 72 m
c) 76 m
x d) 80 m
e) 84 m

23. Determine p de modo que a reta de equação $y = x + p$ seja tangente à elipse $x^2 + 2y^2 = 6$.
$p = -3$ ou $p = 3$

24. (Epcar-MG) Suponha um terreno retangular com medidas de 18 m de largura por 30 m de comprimento, como na figura abaixo.

Um jardineiro deseja construir nesse terreno um jardim elíptico que tenha os dois eixos com o maior comprimento possível. Ele escolhe dois pontos fixos P e Q, onde fixará a corda que vai auxiliar no traçado. Nesse jardim, o jardineiro pretende deixar para o plantio de rosas uma região limitada por uma hipérbole que possui:

- eixo real com extremidades em P e Q;
- excentricidade $e = \dfrac{5}{4}$.

Considerando o ponto *A* coincidente com a origem do plano cartesiano e a elipse tangente aos eixos coordenados, no primeiro quadrante, julgue as afirmativas a seguir.

(01) O centro da elipse estará a uma distância de $3\sqrt{34}$ m do ponto *A*.

(02) Para fazer o traçado da elipse o jardineiro precisará de menos de 24 m de corda.

(04) O número que representa a medida do eixo real da hipérbole, em metros, é múltiplo de 5.

(08) Um dos focos dessa hipérbole estará sobre um dos eixos coordenados.

A soma dos itens verdadeiros pertence ao intervalo:

a) [1, 5[

x c) [7, 11[

b) [5, 7[

d) [11, 15]

Soma: 1 + 8 = 9

25. $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ u.a.

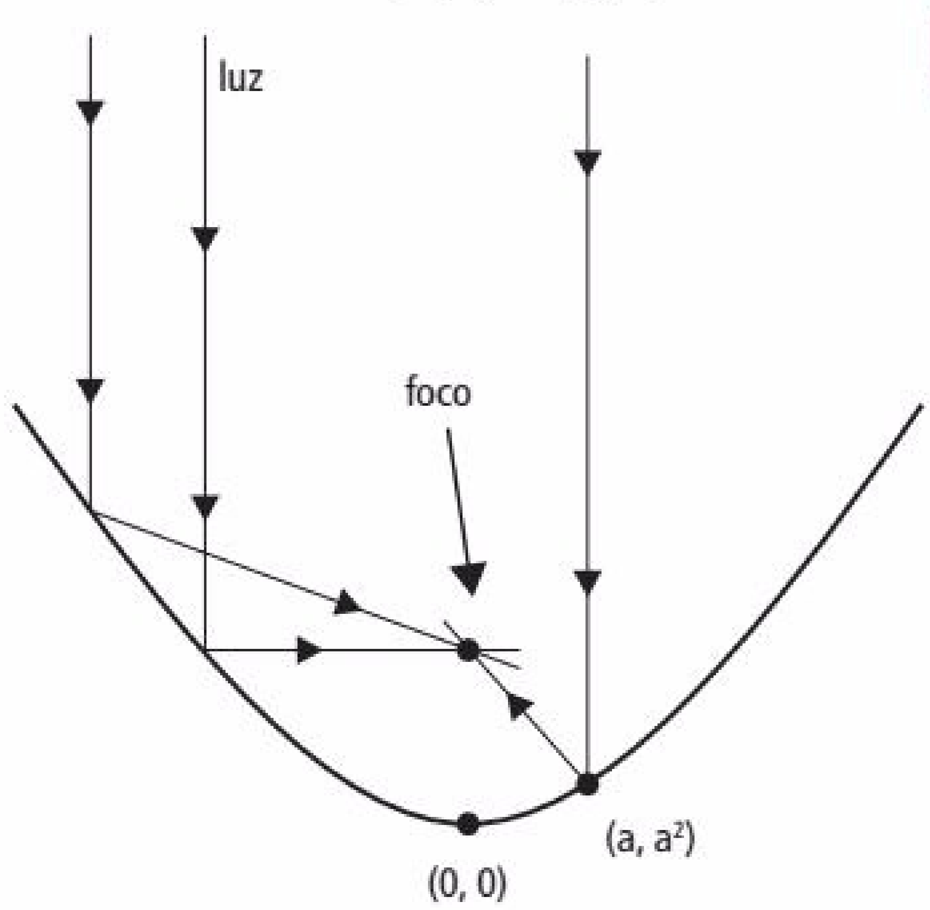
25. (UFBA) Determine a área do quadrilátero ABCD, no qual *A* e *C* são vértices da cônica $9x^2 - 4y^2 = 36$, e *B* e *D* são os pontos de intersecção dessa cônica com a reta que contém a bissetriz do primeiro quadrante.

26. (UFAL) Determine a equação da reta paralela ao eixo *x* e que passa pelo vértice da parábola de equação $x^2 - 10x - 4y + 29 = 0$. $y = 1$

27. (UFPR) Alguns telescópios usam espelhos parabólicos, pois essa forma geométrica reflete a luz que entra para um único ponto, chamado foco. O gráfico de $y = x^2$, por exemplo, tem a forma de uma parábola. A luz que vem verticalmente, de cima para baixo (paralelamente ao eixo *y*), encontra a parábola e é refletida segundo a lei de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Essa lei implica que os raios de luz verticais, encontrando a parábola no ponto (a, a^2), serão refletidos na direção da reta $4ay + (1 - 4a^2)x = a$.

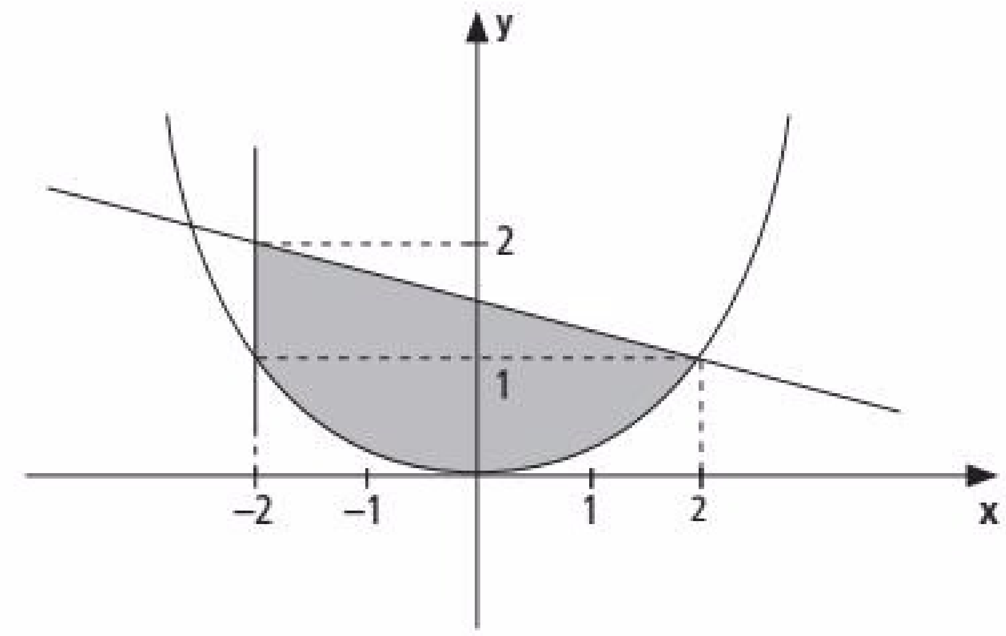
Sendo assim, calcule o ponto em que os raios de luz verticais refletidos em (1, 1) e (2, 4) se encontrarão.

$\left(0, \frac{1}{4}\right)$



Ilustrações: Editoria de arte

28. (UFG-GO) A região do plano cartesiano, destacada na figura a seguir, é determinada por uma parábola, com vértice na origem, e duas retas.



Esta região pode ser descrita como o conjunto dos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}$, satisfazendo:

x a) $-2 \leq x \leq 2$ e $\frac{x^2}{4} \leq y \leq -\left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)$.

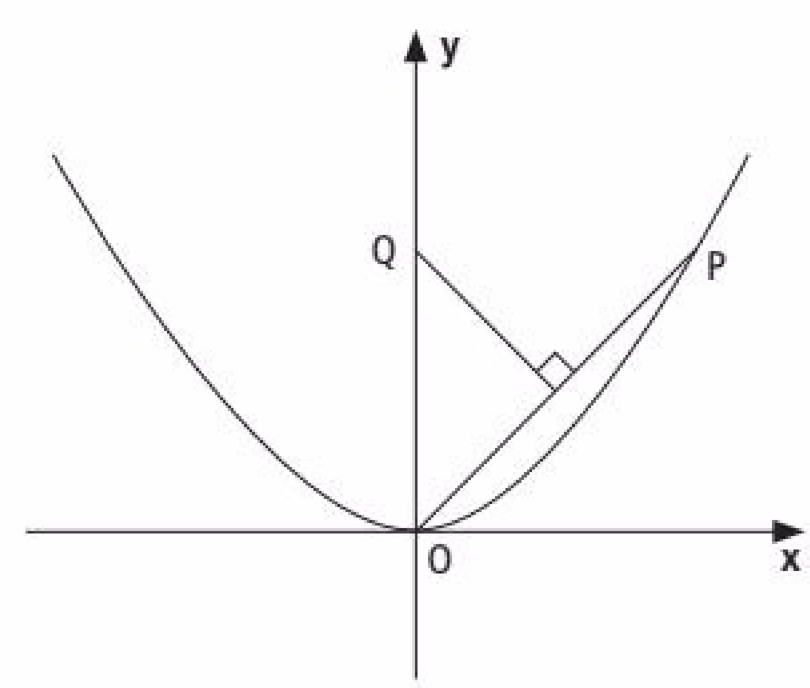
b) $-2 \leq x \leq 2$ e $-\left(\frac{x^2}{4}\right) \leq y \leq \left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)$.

c) $-2 \leq x \leq 2$ e $4x^2 \leq y \leq -\left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)$.

d) $-2 \leq x \leq 2$ e $-4x^2 \leq y \leq -\left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)$.

e) $-2 \leq x \leq 2$ e $\frac{x^2}{4} \leq y \leq \left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)$.

29. (CPAEN-RJ) A figura abaixo mostra um ponto $P \neq O$, *O* origem, sobre a parábola $y = x^2$ e o ponto *Q*, interseção da mediatriz do segmento OP com eixo *y*. À medida que *P* tende à origem ao longo da parábola, o ponto *Q* se aproxima do ponto:



a) (0, 0)

b) $\left(0, \frac{1}{8}\right)$

c) $\left(0, \frac{1}{6}\right)$

d) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

x e) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

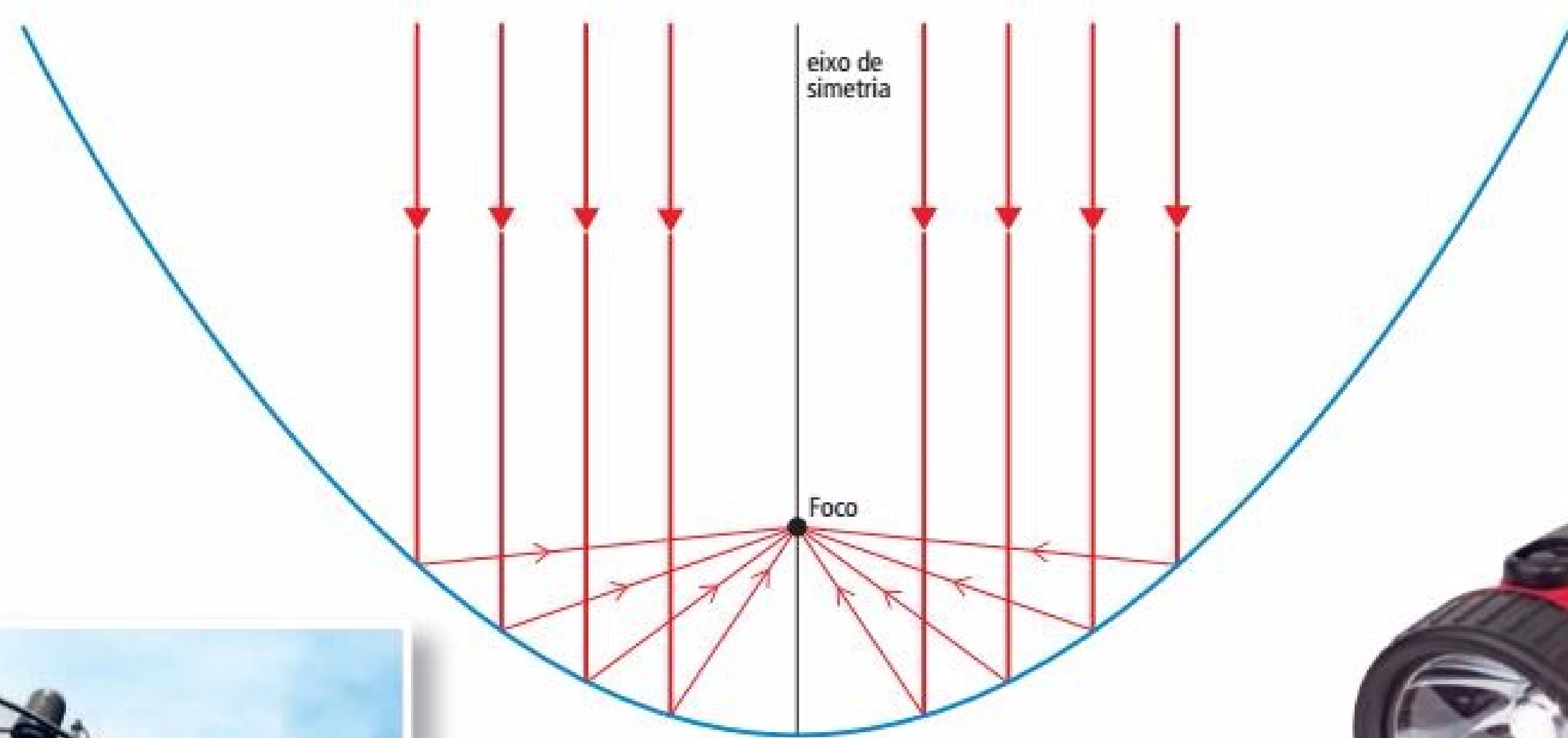
Retomando e pesquisando

Escreva no caderno

A Geometria analítica é um ramo da Matemática que se baseia essencialmente na ideia de representar os pontos, pares ordenados, em um plano cartesiano. Nesta unidade estudamos as retas, a circunferência e as cônicas de forma analítica, ou seja, por meio das coordenadas dos seus pontos, as equações algébricas e as posições em relação a outras figuras como um ponto ou uma reta. Na abertura desta unidade, verificamos que as antenas parabólicas, além de receber sinais de satélites, podem receber sinais emitidos do espaço. Ainda nesta unidade vimos que a parábola é uma cônica definida pelo conjunto de todos os pontos de um plano que são equidistantes do foco F e da diretriz d.

As ondas de rádio ou televisão, que se originam dos satélites no espaço, chegam paralelas e muito fracas devido à distância entre o satélite e a superfície terrestre. A antena parabólica capta essas ondas em sua superfície e as concentra em um único ponto, o foco. Observe a imagem a seguir.

Outros exemplos de superfícies que formam uma parábola são os faróis de automóveis e as lanternas. Nesses casos, a lâmpada é posicionada no foco da parábola e seus raios são refletidos paralelamente ao eixo de simetria.



Editoria de arte

mrpuiii/Shutterstock.com

Antena parabólica residencial utilizada para captar sinal de televisão.

Larry Cole/Getty Images

Lanterna com a lâmpada posicionada no foco da superfície parabólica.

3. As antenas do projeto ALMA precisam captar um sinal muito mais fraco que os sinais emitidos pelos satélites de rádio e televisão, pois os objetos que emitem a radiação estão mais distantes da superfície terrestre e, por isso, as antenas devem ser muito maiores.

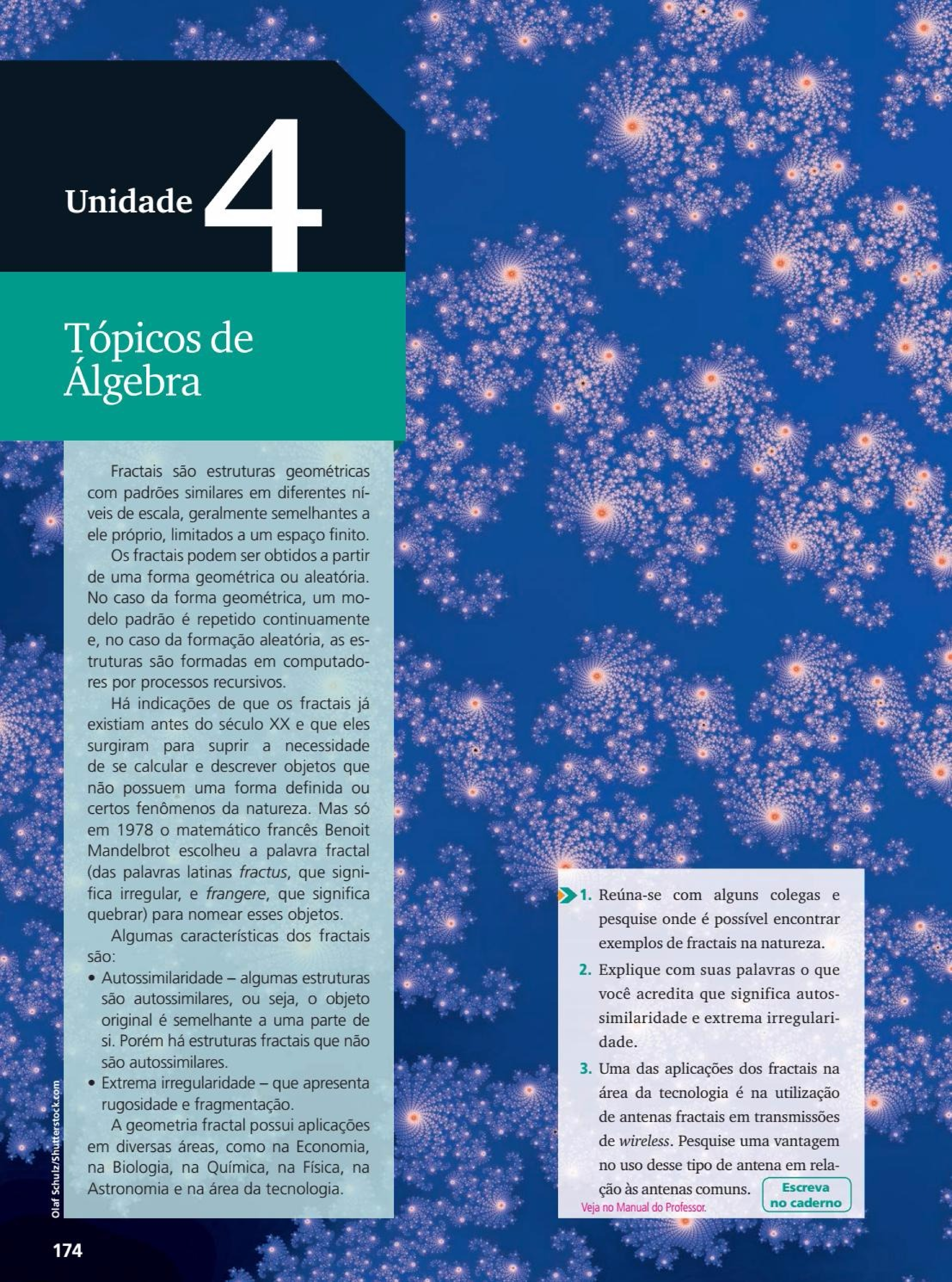
1. Pesquise a medida do diâmetro de cada uma das antenas parabólicas do projeto ALMA e a medida média do diâmetro de uma antena parabólica caseira. Das 66 antenas do projeto ALMA, 54 têm diâmetro de 12 metros e as outras, 7 metros de diâmetro. Uma antena parabólica caseira tem 1,8 metro de diâmetro em média.

2. O diâmetro da antena parabólica influencia na qualidade do sinal transmitido por ela?
Sim, quanto maior o diâmetro da antena mais ondas ela receberá, concentrando-as no foco; assim, o sinal será mais forte.

3. Por que as antenas do projeto ALMA são muito maiores que as antenas parabólicas caseiras?

Ariel Marinkovic/Getty Images

Antenas do Projeto ALMA, Chile (2013).



Olaf Schulz/Shutterstock.com

Unidade 4

Tópicos de Álgebra

Fractais são estruturas geométricas com padrões similares em diferentes níveis de escala, geralmente semelhantes a ele próprio, limitados a um espaço finito.

Os fractais podem ser obtidos a partir de uma forma geométrica ou aleatória. No caso da forma geométrica, um modelo padrão é repetido continuamente e, no caso da formação aleatória, as estruturas são formadas em computadores por processos recursivos.

Há indicações de que os fractais já existiam antes do século XX e que eles surgiram para suprir a necessidade de se calcular e descrever objetos que não possuem uma forma definida ou certos fenômenos da natureza. Mas só em 1978 o matemático francês Benoit Mandelbrot escolheu a palavra fractal (das palavras latinas *fractus*, que significa irregular, e *frangere*, que significa quebrar) para nomear esses objetos.

Algumas características dos fractais são:

- Autossimilaridade – algumas estruturas são autossimilares, ou seja, o objeto original é semelhante a uma parte de si. Porém há estruturas fractais que não são autossimilares.
- Extrema irregularidade – que apresenta rugosidade e fragmentação.

A geometria fractal possui aplicações em diversas áreas, como na Economia, na Biologia, na Química, na Física, na Astronomia e na área da tecnologia.

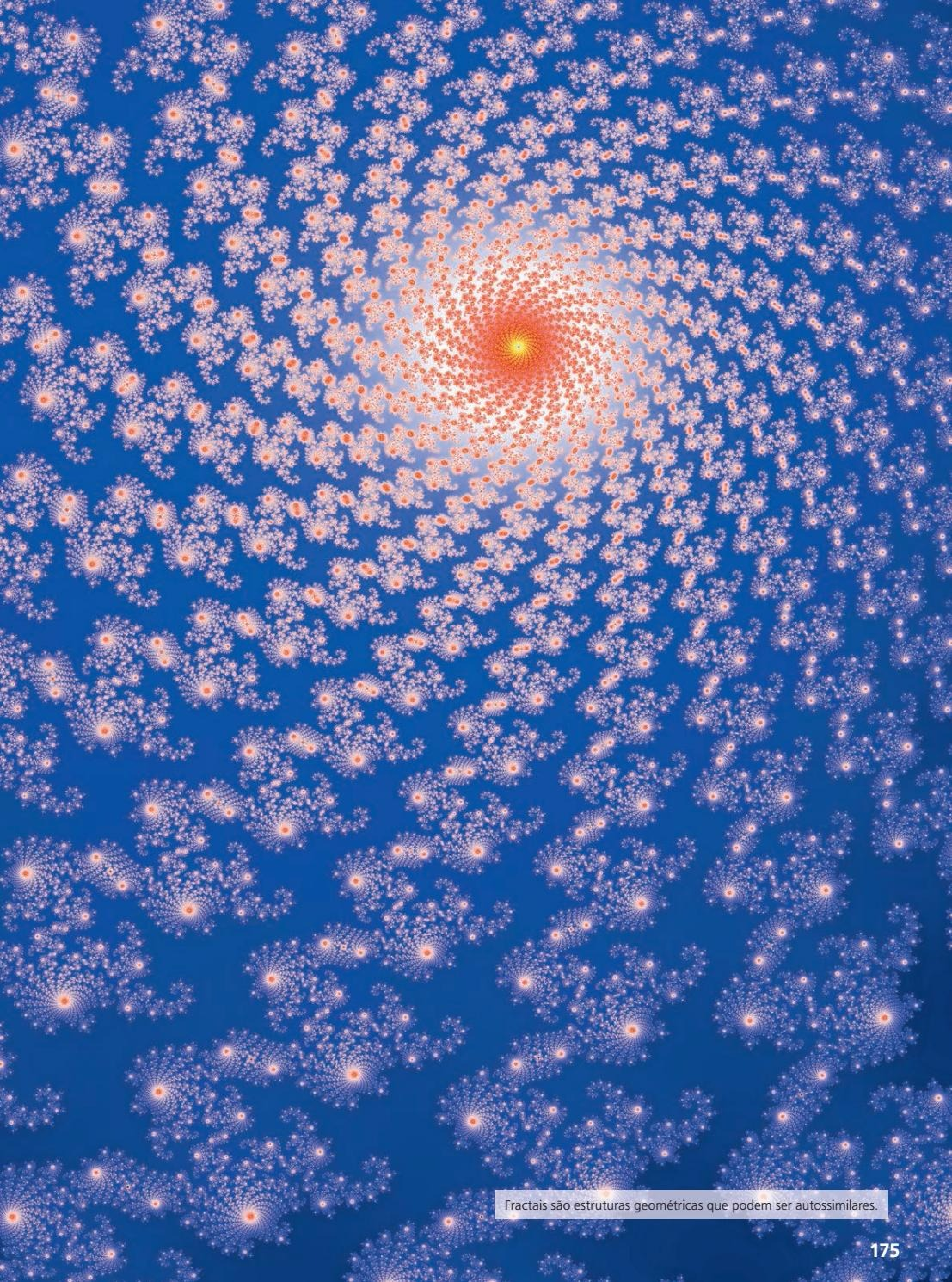
1. Reúna-se com alguns colegas e pesquise onde é possível encontrar exemplos de fractais na natureza.

2. Explique com suas palavras o que você acredita que significa autossimilaridade e extrema irregularidade.

3. Uma das aplicações dos fractais na área da tecnologia é na utilização de antenas fractais em transmissões de *wireless*. Pesquise uma vantagem no uso desse tipo de antena em relação às antenas comuns.

Escreva no caderno

Veja no Manual do Professor.



Fractais são estruturas geométricas que podem ser autossimilares.

CAPÍTULO 7

Números complexos

Por volta do ano 1500, o pensamento corrente era que um número negativo não é raiz quadrada de nenhum número real; logo, não existe raiz quadrada de número negativo. Contudo, a situação tornava-se bem incômoda quando os matemáticos se deparavam com problemas de enunciados simples como o seguinte:

Dividir o número 18 em duas "partes" cujo produto seja 82.

Para resolver o problema proposto, podemos dizer que dividir o número 18 em duas "partes" cujo produto seja 82, equivale a dizer que procuramos dois números cuja soma é $S = 18$ e o produto é $P = 82$. Já estudamos que esses dois números são as raízes de uma equação do tipo $x^2 - Sx + P = 0$. Nesse caso, a equação do 2º grau obtida é $x^2 - 18x + 82 = 0$.

Acompanhe a resolução desta equação:

$$x^2 - 18x + 82 = 0 \Rightarrow \Delta = -4$$

$$x = \frac{+18 \pm \sqrt{-4}}{2} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{18 + \sqrt{-4}}{2} \\[2ex] x'' = \dfrac{18 - \sqrt{-4}}{2} \end{cases}$$

Como $\sqrt{-4}$ não é um número real, pois, em $\mathbb{R}$, o quadrado de um número x qualquer é tal que $x^2 \geqslant 0$, os algebristas diziam, simplesmente, que a equação não podia ser resolvida.

No entanto, quando publicaram a fórmula para equações do 3º grau do tipo $x^3 + ax + b = 0$, que fornecia raízes reais mediante expressões nas quais apareciam raízes quadradas de números negativos, foi necessário criar subsídios para lidar com essa situação.

Anos mais tarde, no século XVIII, o matemático Leonhard Euler (1707-1783) foi o primeiro a usar a notação *i*, denominada unidade imaginária, de modo que seu quadrado fosse igual a -1. Essa notação se perpetuou ao longo do tempo e é utilizada até hoje. Desse modo, definimos: $\boxed{i^2 = -1}$

Assim, voltando ao cálculo das raízes da equação do problema inicial, podemos escrever:

$$x' = \frac{18 + \sqrt{-4}}{2} = \frac{18 + \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{18 + \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{18 + 2i}{2} = 9 + i$$

e

$$x'' = \frac{18 - \sqrt{-4}}{2} = \frac{18 - \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{18 - \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{18 - 2i}{2} = 9 - i$$

Desse modo, temos que os números $9 + i$ e $9 - i$ são as raízes da equação $x^2 - 18x + 82 = 0$ e, portanto, são os dois números que satisfazem a condição de soma 18 e produto 82, ou seja:

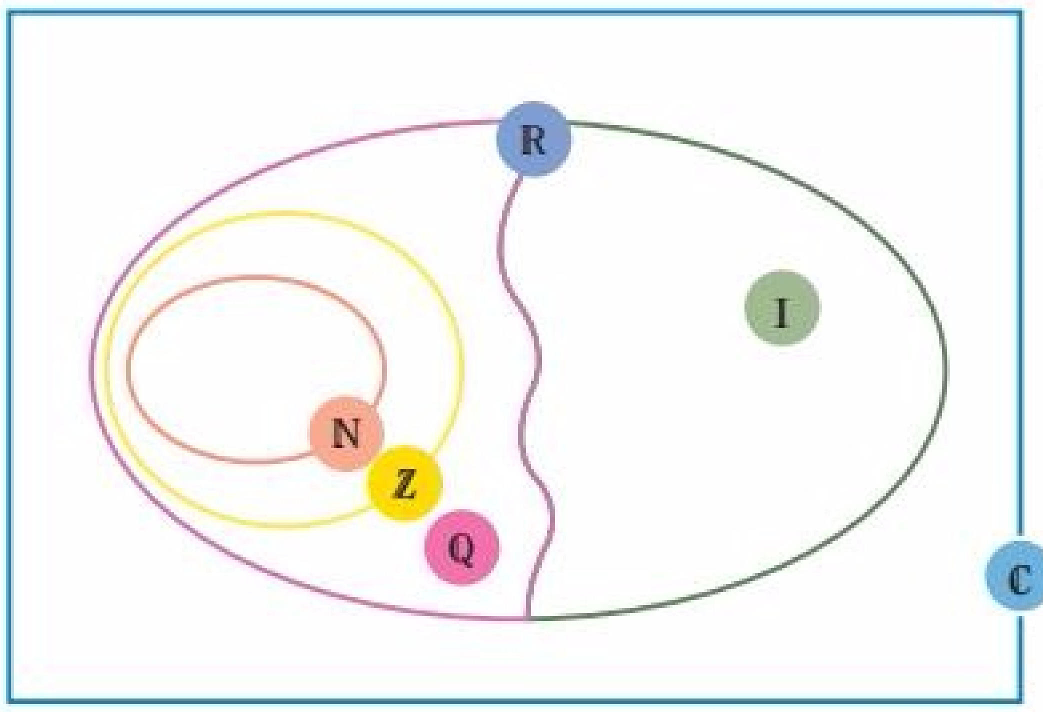
$$(9 + i) + (9 - i) = 18 \text{ e } (9 - i)(9 + i) = 82$$

O conjunto dos números complexos

Com o desenvolvimento dos conceitos acerca da unidade imaginária *i*, foi necessário ampliar os conjuntos numéricos conhecidos, dando origem ao **conjunto dos números complexos**, representado por $\mathbb{C}$.

O conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, como mostra o diagrama de Venn ao lado.

A seguir, vamos estudar as características e como operar com os números pertencentes ao conjunto $\mathbb{C}$.



Editoria de arte

O conjunto dos números complexos é uma extensão do conjunto dos números reais.

Forma algébrica de um número complexo

Número complexo é todo número da forma **z = a + bi**, denominada **forma algébrica**, sendo *a* e *b* números reais e *i* a unidade imaginária.

Desse modo, o conjunto dos números complexos pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i \text{ é a unidade imaginária}\}.$$

Em $z = a + bi$, *a* é denominado **parte real** de *z* e *b* é a **parte imaginária**.

Indicamos:

$$\mathrm{Re}(z) = a \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = b$$

Se a parte imaginária do número complexo *z* é nula ($b = 0$), então o número *z* é um número **real**.

$$z = a + 0i \Rightarrow z = a \longrightarrow z \text{ é um número real}$$

Como $z = a + 0i$ é um número real, podemos indicar qualquer *x* real por $x + 0i$. Portanto, o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, ou seja, $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Se a parte real do número complexo *z* é nula ($a = 0$) e a parte imaginária é diferente de zero ($b \neq 0$), então o número *z* é **imaginário puro**.

$$z = 0 + bi \Rightarrow z = bi \longrightarrow z \text{ é um número imaginário puro.}$$

Observe os exemplos a seguir.

a) Se $z = -4 - i\sqrt{3}$, então $\mathrm{Re}(z) = -4$ e $\mathrm{Im}(z) = -\sqrt{3}$.

b) Se $z = \frac{2i}{5}$, então $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = \frac{2}{5}$, logo *z* é um imaginário puro.

c) Se $z = 3{,}71$, então $\mathrm{Re}(z) = 3{,}71$ e $\mathrm{Im}(z) = 0$, logo *z* é um número real.

d) Se $z = 0$, então $\mathrm{Re}(z) = 0$ e $\mathrm{Im}(z) = 0$, logo *z* é um número real.

Observações:

- Todo número complexo $z = a + bi$ tem um oposto dado por $-z = -a - bi$.
- Todo número complexo $z = a + bi$ pode ser representado pelo par ordenado (a, b).
- Em $\mathbb{C}$ **não** é definida a relação de ordem, isto é, um número complexo não real não é maior nem menor que outro complexo.

Representação geométrica de um número complexo

Os números complexos podem ser representados em um plano cartesiano. Esse plano é denominado **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**, em homenagem aos matemáticos Jean-Robert Argand e Carl Friedrich Gauss, idealizadores dessa representação.

Ilustrações: Ilustra Cartoon

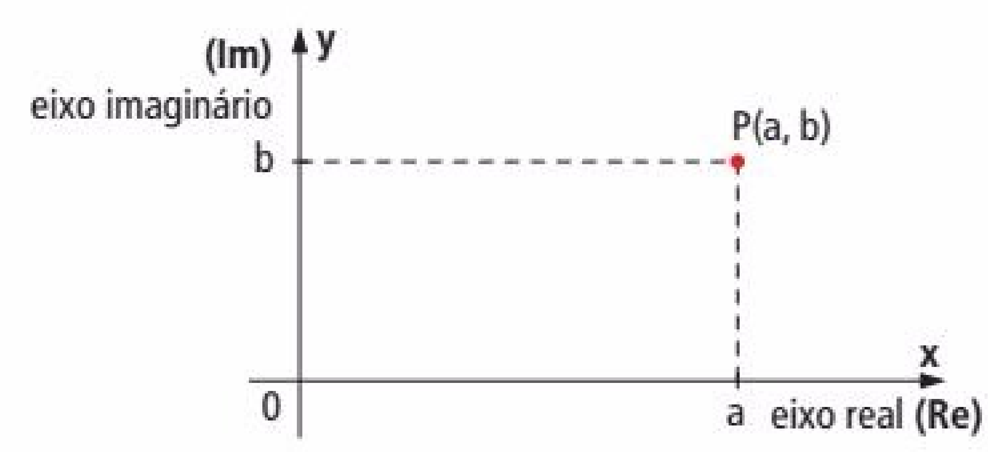
Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Jean-Robert Argand (1768-1822).

No plano de Argand-Gauss, cada ponto é associado a um número complexo. Convencionou-se, então, associar o número complexo $z = a + bi$ ao par ordenado (a, b) cuja representação geométrica é um ponto *P* do plano, estabelecendo-se uma correspondência biunívoca entre os números complexos e os pontos do plano Oxy.

Assim, no eixo das abscissas, representa-se a parte real de *z* e, no eixo das ordenadas, a parte imaginária de *z*.

- $\overrightarrow{0x}$ é o eixo real (Re).
- $\overrightarrow{0y}$ é o eixo imaginário (Im).
- *P* é o **afixo** ou a **imagem geométrica** de *z*.

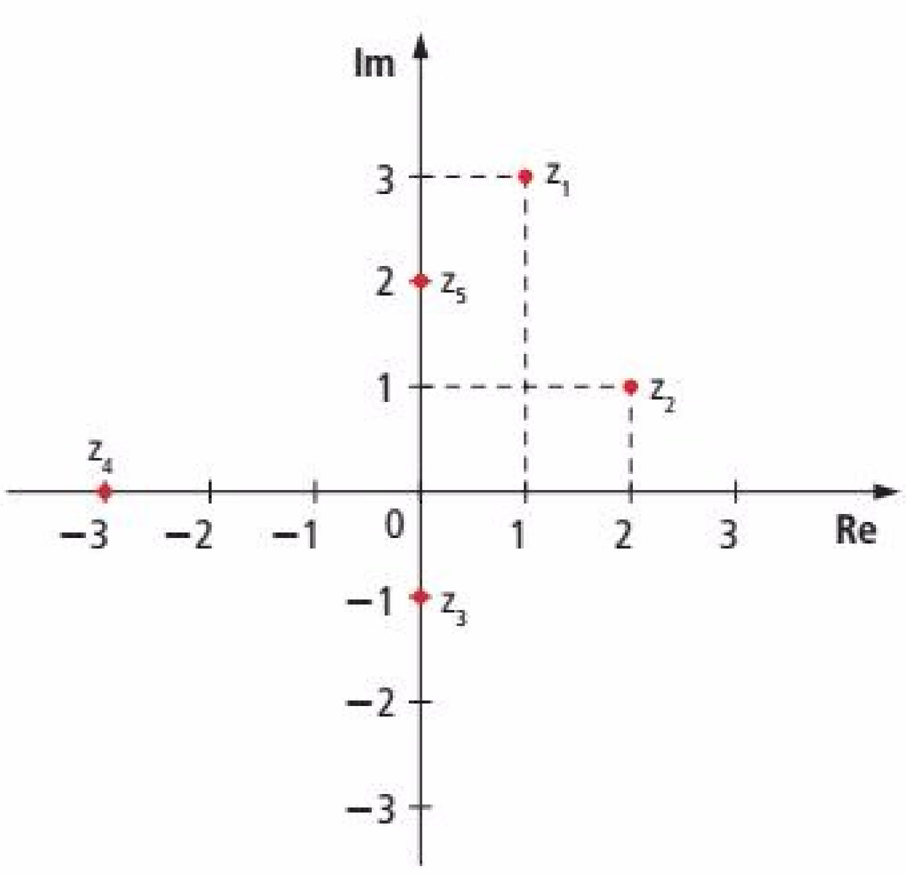


Plano de Argand-Gauss

Ilustrações: Editoria de arte

Veja a representação no plano complexo dos seguintes números:

$z_1 = 1 + 3i$
$z_2 = 2 + i$
$z_3 = 0 - i$ ou $z_3 = -i$
$z_4 = -3 + 0i$ ou $z_4 = -3$
$z_5 = 0 + 2i$ ou $z_5 = 2i$



Se o número complexo estiver representado no eixo das abscissas, então ele é um número real; se estiver no eixo das ordenadas e não for nulo, é um imaginário puro.

Exercícios resolvidos

1 Resolva as equações:

a) $x^2 + 9 = 0$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

Resolução

a) $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \Rightarrow x = \pm 3i$,

pois $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9i^2} = 3i$

$S = \{-3i, 3i\}$

Observe que números complexos que elevados ao quadrado resultam em -9 são $-3i$ e $3i$, pois:

$(-3i)^2 = 9i^2 = -9$ e $(3i)^2 = 9i^2 = -9$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow \Delta = -3$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

Então:

$$x' = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ou } x'' = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

2 Considerando o número complexo:
$z = (m - 3) + (n^2 - 25)i$, determine *m* e *n* de modo que *z* seja:

a) um número real;

b) um número imaginário puro.

Resolução

a) Para que *z* seja real, devemos ter:

$n^2 - 25 = 0 \Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow n = 5$ ou $n = -5$

$(m - 3) \in \mathbb{R} \Rightarrow m \in \mathbb{R}$

b) Para que *z* seja imaginário puro, devemos ter:

$m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

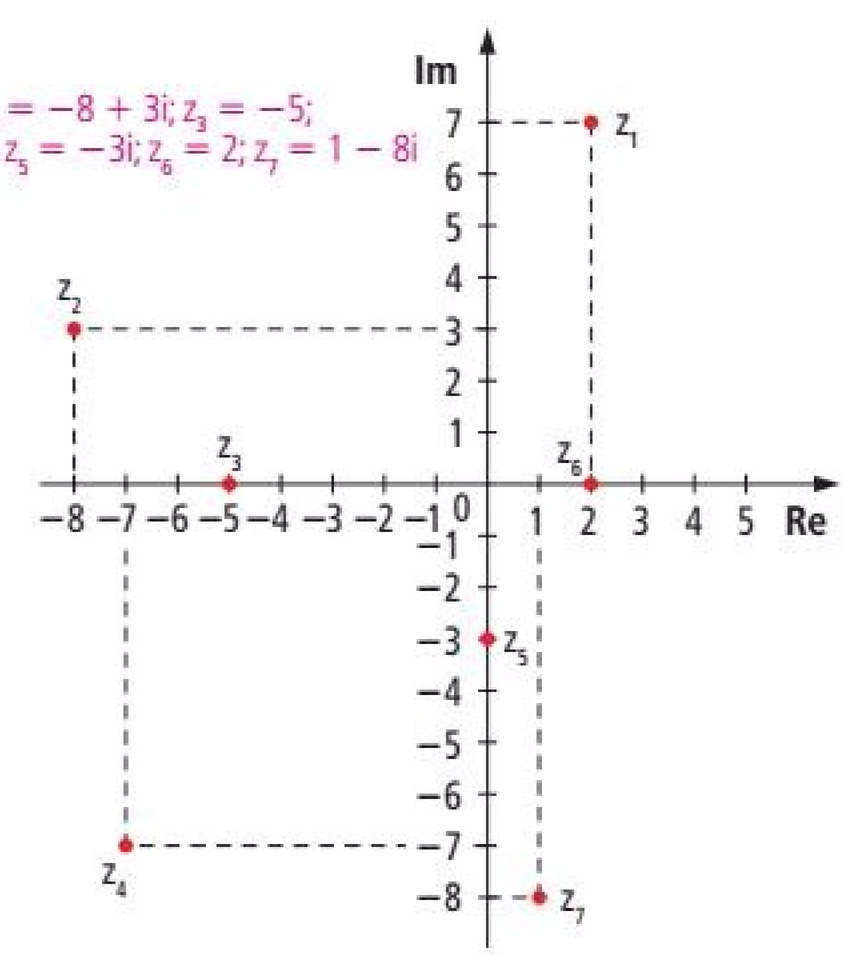
$n^2 - 25 \neq 0 \Rightarrow n \neq 5$ e $n \neq -5$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. No plano de Argand-Gauss a seguir, estão representadas as imagens de alguns números complexos. Escreva a forma algébrica de cada um desses complexos.

$z_1 = 2 + 7i$; $z_2 = -8 + 3i$; $z_3 = -5$; $z_4 = -7 - 7i$; $z_5 = -3i$; $z_6 = 2$; $z_7 = 1 - 8i$



Editoria de arte

2. Para cada número complexo a seguir, qual é o valor de Re(z) e Im(z)?

a) $z = 5 + 7i$ Re(z) = 5 e Im(z) = 7

b) $z = -\frac{1}{2} + i$ Re(z) = $-\frac{1}{2}$ e Im(z) = 1

c) $z = \sqrt{3} - i\sqrt{2}$ Re(z) = $\sqrt{3}$ e Im(z) = $-\sqrt{2}$

d) $z = 4i$ Re(z) = 0 e Im(z) = 4

e) $z = 0$ Re(z) = 0 e Im(z) = 0

3. Determine *k* de modo que o número complexo $z = (k + 5) - 4i$ seja imaginário puro. $k = -5$

4. Determine *m* para que o número complexo $z = 1 + (m^2 - 81)i$ seja um número real. $m = \pm 9$

5. Determine *x* e *y* para que o número complexo $z = (x + 6) - (y^2 - 16)i$ seja:

a) um número real;

b) um número imaginário puro.

a) $x \in \mathbb{R}$ e $y = 4$ ou $y = -4$
b) $x = -6$ e $y \neq 4$ ou $x = -6$ e $y \neq -4$

6. Considere o número complexo $z = (2x - 6) + (y + 7)i$. Determine os números reais *x* e *y*, tais que $z = 0$. $x = 3$ e $y = -7$

7. Resolva, no universo dos números complexos, as equações: d) $S = \left\{\frac{1}{2} + i, \frac{1}{2} - i\right\}$

a) $x^2 + 4 = 0$ $S = \{2i, -2i\}$

b) $x^2 + 121 = 0$ $S = \{11i, -11i\}$

c) $x^2 - 6x + 13 = 0$ $S = \{3 + 2i, 3 - 2i\}$

d) $4x^2 - 4x + 5 = 0$

8. Divida o número 16 em duas partes cujo produto seja 70. $8 + i\sqrt{6}$ e $8 - i\sqrt{6}$

9. Dado o número complexo $z = (3x - 5) + (x^2 - 3)i$. Calcule os valores de *x* para que:

a) a parte real seja igual à imaginária. $x = 1$ ou $x = 2$

b) a parte real seja maior que a imaginária. $]1, 2[$

c) a parte real seja menor que a imaginária. $]-\infty, 1[\cup]2, \infty[$

10. Resolva a equação $x^3 + 5x^2 + 2x + 10 = 0$ utilizando a fatoração. $S = \{-5, -\sqrt{2}i, \sqrt{2}i\}$

História da Matemática

Complexos: um pouco de história

Raphael Bombelli (1526-1573) era um admirador da **Ars Magna** de Cardano, mas achava que seu estilo de exposição não era claro (ou, em suas próprias palavras, *ma nel dire fù oscuro*). Decidiu, então, escrever um livro expondo os mesmos assuntos, mas de forma tal que um principiante pudesse estudá-los sem necessidade de nenhuma outra referência. Publicou **L'Algebra**, em três volumes, em 1572, em Veneza, obra que viria a se tornar muito influente. No capítulo II dessa obra, ele estuda a resolução de equações de grau não superior a quatro. Em particular na página 294 e nas seguintes, ele considera a equação $x^3 = 15x + 4$. Ao aplicar a fórmula de Cardano para o cálculo de uma raiz, ele obtém:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Seguindo Cardano, ele também chama essa expressão de **sofística**, mas, por outro lado, ele percebe que $x = 4$ é, de fato, uma raiz da equação proposta.

Assim, pela primeira vez, nos deparamos com uma situação em que, apesar de termos radicais de números negativos, existe verdadeiramente uma solução da equação proposta. É necessário, então, compreender o que está acontecendo.

Séc. XVI. Gravura. Coleção particular. Foto: The Art Archive/Alamy/Latinstock

Capa do livro **Ars Magna** escrito por Cardano.

Bombelli concebe então a possibilidade de que exista uma expressão da forma $a + \sqrt{-b}$ que possa ser considerada como raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$, ou seja, que verifique $\left(a + \sqrt{-b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$. A forma em que ele calcula essa raiz é um tanto peculiar; ele assume que a raiz cúbica de $2 - \sqrt{-121}$ seja da forma $a - \sqrt{-b}$. Como ele sabe que 4 deve ser raiz da equação, necessariamente $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$. Neste ponto, felizmente, as quantidades não existentes se cancelam e obtemos $a = 2$. Com esse resultado, é muito fácil voltar à equação $\left(a + \sqrt{-b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$ e deduzir que $b = 1$. Assim, ele obtém que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ e que:

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

é uma solução da equação dada.

[...]

Faremos aqui um pequeno resumo da evolução dos números complexos, para que o leitor tenha uma visão global da história do assunto. Começaremos listando alguns progressos na notação para depois nos ocuparmos da evolução dos conhecimentos.

- O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido em 1629 por Albert Girard.
- O símbolo *i* foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler em 1777, apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss em 1801.
- Os termos **real** e **imaginário** foram empregados pela primeira vez por René Descartes em 1637.
- A expressão **número complexo** foi introduzida por Carl Friedrich Gauss em 1832.

[...] a partir do trabalho de Bombelli, os números complexos começaram a ser utilizados devido à sua óbvia utilidade para resolver equações do terceiro grau, mas, ao mesmo tempo, era claro que tais números não poderiam existir. A primeira tentativa de legitimação, via uma "interpretação geométrica", é devida a John Wallis (1616-1703), contemporâneo de Newton e professor na Universidade de Oxford.

MILIES, César Polcino. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo: SBM, n. 24, p. 7-10, 1993.

Atividades

Escreva no caderno

1. No texto, quem também nomeia a expressão sofística? Qual é essa expressão? Cardano também chamou a equação $x^3 = 15x + 4$ de sofística.

2. O valor $x = 4$ é realmente uma raiz da equação $x^3 = 15x + 4$? Sim, $x = 4$ é uma raiz válida.

Igualdade de números complexos

Apresentamos a seguir a definição de igualdade de números complexos.

Dois números complexos são **iguais** se, e somente se, suas partes reais e imaginárias forem respectivamente iguais.

Desse modo, dados dois números complexos $z = a + bi$ e $t = c + di$, temos que $z = t$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Como consequência, se $a + bi = 0$, então $a = 0$ e $b = 0$.

Conjugado de um número complexo

Apresentamos a seguir a definição de conjugado de um número complexo.

O **conjugado** de um número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $\overline{z} = a - bi$.

Veja exemplos do conjugado de alguns números complexos:

a) Se $z_1 = 4 + 5i$, então $\overline{z_1} = 4 - 5i$

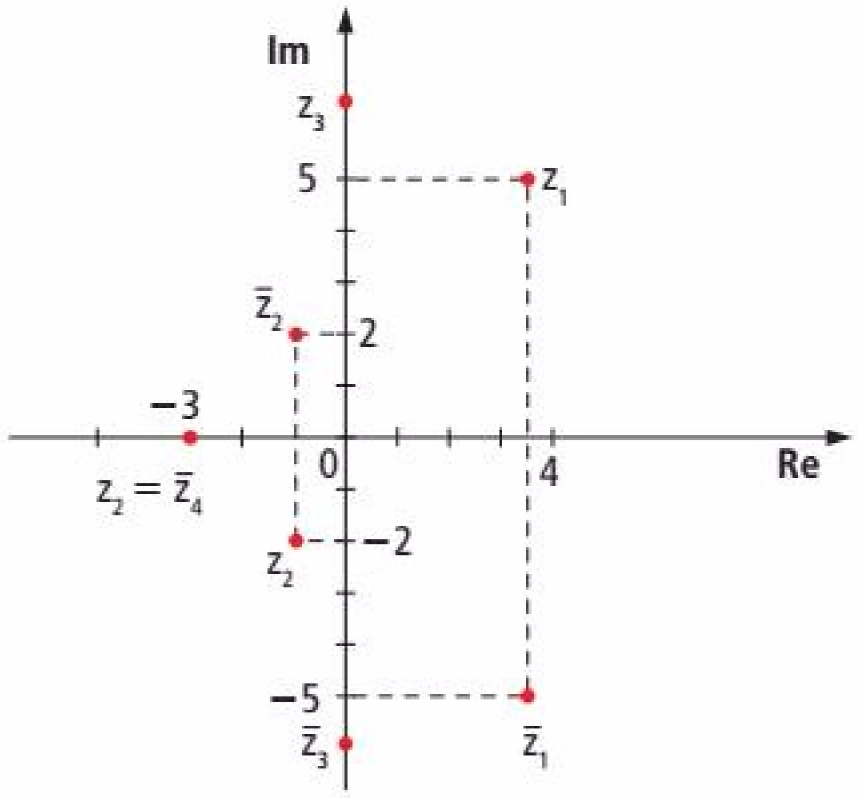
b) Se $z_2 = -1 - 2i$, então $\overline{z_2} = -1 + 2i$

c) Se $z_3 = 6i$, então $\overline{z_3} = -6i$

d) Se $z_4 = -3$, então $\overline{z_4} = -3$

Representação geométrica de um número conjugado

Ao representar cada afixo do exemplo acima no plano de Argand-Gauss, podemos perceber que cada número complexo é simétrico ao seu respectivo conjugado em relação ao eixo real.



Editoria de arte

São válidas as seguintes propriedades:

a) Dado o conjugado de $\overline{z}$, indicado por $\overline{\overline{z}}$, temos que $\overline{\overline{z}} = z$.

b) $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

c) $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z$ é imaginário puro.

Exercícios resolvidos

3 Considere os números complexos $z = -4 + 2i$ e $w = (p + q) + pi$. Determine *p* e *q* para que $z = w$.

Resolução

$z = w \Rightarrow p + q = -4$ (I)

e

$p = 2$ (II)

Substituindo *p* por 2 na equação (I), temos:

$p + q = -4$

$2 + q = -4$

$q = -6$

Portanto, $p = 2$ e $q = -6$.

4 Sendo $z_1 = 2x + y + 6i$ e $z_2 = 5 - (x + 4y)i$, determine *x* e *y* de modo que $z_1 = \overline{z}_2$.

Resolução

Se $\overline{z}_2 = 5 + (x + 4y)i$, devemos ter:

$z_1 = \overline{z}_2 \Rightarrow (2x + y) + 6i = 5 + (x + 4y)i$

Para que haja igualdade, as partes reais de z_1 e $\overline{z}_2$ devem ser iguais entre si e as partes imaginárias também.

Logo:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x - 8y = -12 \end{cases}$$

$-7y = -7$

$y = 1$

Substituindo *y* por 1, temos:

$2x + y = 5$

$2x + 1 = 5$

$x = 2$

Logo, $x = 2$ e $y = 1$.

5 Sendo *z* um número complexo, prove que $z = \overline{z} \Leftrightarrow z$ é um número real.

Resolução

Sendo $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$, temos:

$z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow b = 0$

Logo, $z = a + 0i = a$.

Portanto, *z* é um número real.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

11. Dê o conjugado de cada um dos complexos a seguir:

a) $z = 7 + 3i$ $\overline{z} = 7 - 3i$

b) $z = -5 - 2i$ $\overline{z} = -5 + 2i$

c) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$ $\overline{z} = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

d) $z = 5i$ $\overline{z} = -5i$

e) $z = 1$ $\overline{z} = 1$

f) $z = i - 4$ $\overline{z} = -4 - i$

12. Considere o número complexo $z = (x + 7) + (3y - 5)i$. Determine os números reais *x* e *y*, tais que $z = -2 + 10i$.
$x = -9$ e $y = 5$

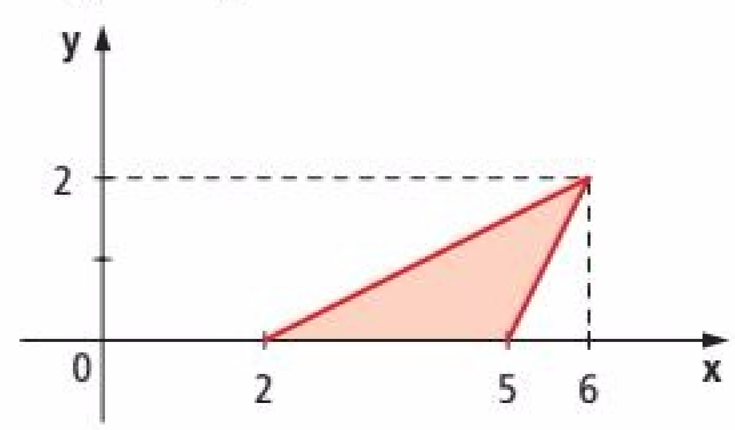
13. (UFU-MG) Sejam os complexos $z = 2x - 3i$ e $t = 2 + yi$, onde *x* e *y* são números reais. Se $z = t$, então o produto $x \cdot y$ é:

a) 6 b) 4 c) 3 X d) -3 e) -6

14. Sejam os números complexos $z_1 = x^2 - 5 + (2 + y)i$ e $z_2 = 4 - 3i$. Determine *x* e *y* para que $z_1 = \overline{z}_2$.
$x = 3$ e $y = 1$ ou $x = -3$ e $y = 1$

15. (UFMT) O número complexo $z = a + bi$ é representado geometricamente por um ponto P(a, b) no plano de Argand-Gauss que se denomina afixo. Seja $z = 2 + 3i$ e $\overline{z}$ seu conjugado. Os afixos de z, $\overline{z}$, $-z$ e $-\overline{z}$, representados no plano de Argand-Gauss, são os vértices de um quadrilátero *Q*. Determine o perímetro de *Q*. 20

16. (Unifesp) Considere, no plano complexo, conforme a figura, o triângulo de vértices $z_1 = 2$, $z_2 = 5$ e $z_3 = 6 + 2i$. A área do triângulo de vértices $w_1 = iz_1$, $w_2 = iz_2$ e $w_3 = 2iz_3$ é:



Editoria de arte

a) 8 X b) 6 c) 4 d) 3 e) 2

17. Sendo $z = a + bi$ um número complexo, mostre que:

a) $\overline{\overline{z}} = z$ Demonstração.

b) $\overline{\overline{\overline{z}}} = \overline{z}$ Demonstração.

18. (Cefet-MG) Os pontos *A*, *B* e *C* são, respectivamente, os afixos dos números complexos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -4 + i$ e $z_3 = bi$, com $b < 0$, no plano Argand-Gauss. Se a área do triângulo ABC é 12, então *b* vale:

a) -2 b) $-\dfrac{5}{2}$ X c) -3 d) $-\dfrac{7}{2}$ e) -4

19. (UniFOA-RJ) Determine *p* para que $z = (3p + 12) + i(4p^2 - 64)$ seja real e não nulo.

a) $p = -4$

b) $p = 0$

c) $p = 16$

X d) $p = 4$

e) $p = -16$

Operações com números complexos na forma algébrica

Adição e subtração de números complexos

Considerando os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com *a*, *b*, *c* e *d* reais, a soma $z_1 + z_2$ é dada por:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

E a diferença $z_1 - z_2$ é dada por:

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplos:

a) $(6 + 4i) + (2 + 3i) = 6 + 4i + 2 + 3i = 8 + 7i$

b) $(5 - 3i) - (-1 + 7i) = 5 - 3i + 1 - 7i = 6 - 10i$

Na adição de números complexos são válidas as propriedades comutativa e associativa. No entanto, optamos por explorar a propriedade da soma dos conjugados de dois complexos z_1 e z_2 por causa da sua importância no estudo das equações algébricas.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

O conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos conjugados desses números complexos.

Demonstração

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

De maneira análoga, podemos provar que $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$.

Multiplicação de números complexos

O produto de dois números complexos, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, é dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

A multiplicação de complexos segue a mesma regra de multiplicação de binômios, considerando $i^2 = -1$. Portanto, observe como obtemos a relação acima:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + bdi^2 + adi + bci$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + bd \cdot (-1) + (ad + bc)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Na forma algébrica, tanto a multiplicação como as operações de adição e subtração mantêm a mesma estrutura de adição, subtração e multiplicação de binômios. Portanto, é opcional o uso das relações que foram apresentadas.

a) $(5 + i) \cdot (3 - 2i) = 15 - 10i + 3i - 2i^2 = 15 - 7i - 2(-1) = 17 - 7i$

b) $\left(\frac{1}{3} + i\right)\left(\frac{1}{2} - 2i\right) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}i + \frac{i}{2} - 2i^2 = \frac{1}{6} - 2 - \frac{2}{3}i + \frac{i}{2} = \frac{1 + 12 - 4i + 3i}{6} = \frac{13 - i}{6} = \frac{13}{6} - \frac{1}{6}i$

Em relação à multiplicação, são válidas as seguintes propriedades do conjugado:

1ª) Se $z = a + bi$, então $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

A multiplicação de um número complexo pelo seu conjugado é igual a um número real.

Demonstração

Sendo $z = a + bi$ e $\overline{z} = a - bi$, temos:
$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2$

2ª) Se z_1 e z_2 são números complexos, então $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

O conjugado do produto de dois números complexos é igual ao produto dos seus conjugados.

Demonstração

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:
$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$ (I)
O conjugado de z_1 é $\overline{z_1} = a - bi$ e de z_2 é $\overline{z_2} = c - di$. Logo:
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = ac - adi - bci + bdi^2 = (ac - bd) - (ad + bc)i$ (II)
Comparando (I) e (II), concluímos que:
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Divisão de números complexos

Consideremos dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $z_2 \neq 0$. O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ é um número complexo e, para exprimi-lo na forma $a + bi$, usa-se o procedimento de multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Já vimos que o produto $z_2 \cdot \overline{z_2}$ é um número real, pois: $z_2 \cdot \overline{z_2} = (c + di) \cdot (c - di) = \underbrace{c^2 + d^2}_{\text{número real}}$

Assim, obtemos um quociente equivalente com denominador real.
Acompanhe os exemplos:

a) $\frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i} \cdot \frac{(2-i)}{(2-i)} = \frac{2-i}{4-2i+2i-i^2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

Multiplicamos o numerador e o denominador pelo número complexo conjugado do denominador.

b) $\frac{3-i}{1+i} = \frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{3-3i-i+i^2}{1-i^2} = \frac{2}{2} - \frac{4}{2}i = 1 - 2i$

Potências de *i*

As potências de um número complexo *z* com expoentes naturais são definidas de modo análogo ao das potências de base real. Observe:

$$z^0 = 1$$

$$z^1 = z$$

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ fatores}};\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2$$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n};\ n \in \mathbb{N}^* \text{ e } z \neq 0$$

Note que, para a unidade imaginária *i*, os resultados das potências se repetem de 4 em 4.

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

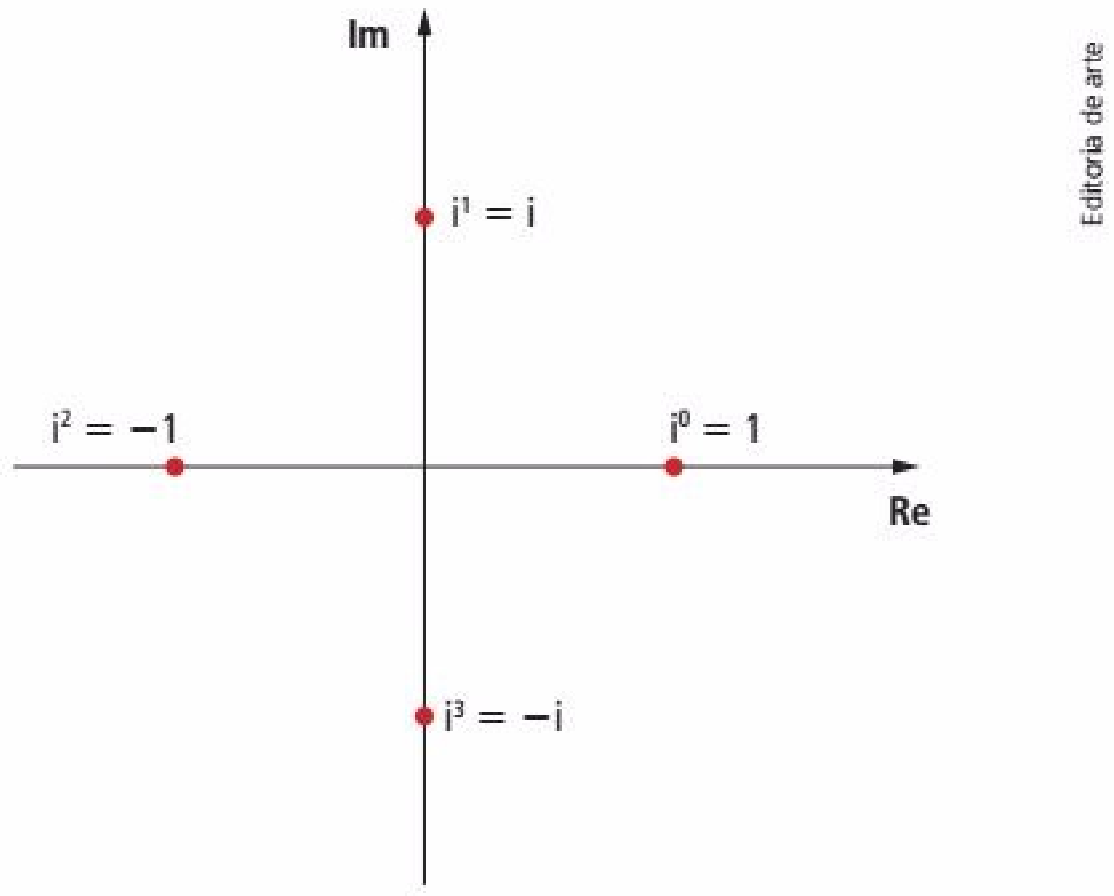
$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

Portanto, $i^8 = 1$, $i^9 = i$, $i^{10} = -1$, $i^{11} = -i$ e assim por diante. Logo, qualquer potência de *i* com expoente natural pode ser igual a 1, *i*, -1 ou $-i$.

Desse modo, para calcular potências de *i* basta dividir o expoente *n* natural por 4, em que *r* é o resto dessa divisão:

- se o resto *r* for 0, $i^r = i^0 = 1$
- se o resto *r* for 1, $i^r = i^1 = i$
- se o resto *r* for 2, $i^r = i^2 = -1$
- se o resto *r* for 3, $i^r = i^3 = -i$

Abaixo estão os afixos das potências de *i* no plano de Argand-Gauss:



Observação:

Para calcular i^{-n}, $n \in \mathbb{N}^*$, aplicamos o conceito de inverso, ou seja, $i^{-n} = \frac{1}{i^n}$.

Exercícios resolvidos

6 Efetue: $(6 + 5i) - (2 + 3i)$.

Resolução

$(6 + 5i) - (2 + 3i) = (6 - 2) + (5 - 3)i = 4 + 2i$

7 Determine o número complexo z, tal que $5z + \overline{z} = 12 + 16i$.

Resolução

Fazendo $z = a + bi$, temos $\overline{z} = a - bi$. Substituindo na igualdade dada, obtemos:

$5(a + bi) + a - bi = 12 + 16i \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a + 5bi + a - bi = 12 + 16i \Rightarrow 6a + 4bi = 12 + 16i$

Da igualdade, temos:

$6a = 12 \Rightarrow a = 2 \qquad 4b = 16 \Rightarrow b = 4$

Logo, $z = 2 + 4i$.

8 Efetue $(2 + 4i)(1 + 3i)$.

Resolução

$(2 + 4i)(1 + 3i) = 2 + 6i + 4i + 12i^2 =$

$= 2 + 6i + 4i - 12 = -10 + 10i$

9 Determinar o número complexo z tal que $z\overline{z} - 6\overline{z} = 7 + 24i$.

Resolução

Sendo $z = a + bi$, temos:

$z\overline{z} - 6\overline{z} = a^2 + b^2 - 6(a - bi) = 7 + 24i \Rightarrow$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 - 6a) + 6bi = 7 + 24i$

Assim

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 6a = 7 & \text{(I)} \\ 6b = 24 \Rightarrow b = 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo $b = 4$ em (I), temos:

$a^2 + 4^2 - 6a = 7 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0$

Logo, as raízes são $a_1 = a_2 = 3$.

Portanto, $z = a + bi = 3 + 4i$.

10 Sendo $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 1 + i$, obtenha $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Resolução

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{1+i} = \frac{3+2i}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{3-3i+2i-2i^2}{1-i^2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$$

Multiplicamos o numerador e o denominador pelo número complexo conjugado do denominador.

11 Sendo $z = -1 + i$, determine seu inverso $\dfrac{1}{z}$ (ou z^{-1}).

Resolução

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-1+i} = \frac{1}{-1+i} \cdot \frac{(-1-i)}{(-1-i)} = \frac{-1-i}{1+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

12 Calcule:

a) i^{23}

b) i^{678}

Resolução

a) $i^{23} = i^{4 \cdot 5 + 3} = (i^4)^5 \cdot i^3 = 1^5 \cdot i^3 = i^3 = -i$

Outra maneira:

Sendo o resto da divisão de 23 por 4 igual a 3, temos:

$i^{23} = i^3 = -i$

b) $i^{678} = i^{4 \cdot 169 + 2} = (i^4)^{169} \cdot i^2 = 1^{169} \cdot i^2 = i^2 = -1$

Outra maneira: $i^{678} = i^2 = -1$, pois o resto da divisão de 678 por 4 é igual a 2.

13 Calcule o valor de:

a) $(1 + i)^2$

b) $(1 + i)^{16}$

Resolução

a) $(1 + i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

b) $(1 + i)^{16} = [(1 + i)^2]^8 = (2i)^8 = 2^8 \cdot i^8 = 256$

14 Determine as raízes quadradas de $8 - 6i$.

Resolução

Devemos obter os números complexos $z = a + bi$, com a e b reais, tais que $z^2 = 8 - 6i$.

$(a + bi)^2 = 8 - 6i \Rightarrow a^2 + 2abi + b^2i^2 = 8 - 6i \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 8 - 6i$

Da igualdade acima, temos:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 & \text{(I)} \\ ab = -3 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), obtemos: $a = -\dfrac{3}{b}$ (III)

Substituindo (III) em (I):

$$\left(-\frac{3}{b}\right)^2 - b^2 = 8 \Rightarrow \frac{9}{b^2} - b^2 = 8 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9 - b^4 = 8b^2 \Rightarrow b^4 + 8b^2 - 9 = 0$

Seja $b^2 = y$: $y^2 + 8y - 9 = 0 \Rightarrow y' = 1$ ou $y'' = -9$.

Logo, $b^2 = y \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$ ou $b = -1$

ou $b^2 = -9$ (impossível, pois $b \in \mathbb{R}$).

Se $b = 1$, então $a = -3$. Se $b = -1$, $a = 3$.

As raízes são $z = 3 - i$ ou $z = -3 + i$.

20. Calcule:

a) $(6 + 5i) + (2 - i)$ $8 + 4i$

b) $(6 - i) + (4 + 2i) - (5 - 3i)$ $5 + 4i$

c) $(\sqrt{2} + i) - (\sqrt{3} + i)$ $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

21. Efetue:

a) $(5 + i)(2 - i)$ $11 - 3i$

b) $(-1 + 2i)(3 + i)$ $-5 + 5i$

c) $\left(\frac{1}{2} + i\right)\left(\frac{1}{2} - i\right)$ $\frac{5}{4}$

d) $i \cdot (3 - 2i)$ $2 + 3i$

22. Dados $z_1 = 4 + i$, $z_2 = -1 + 2i$ e $z_3 = 5 - 3i$, calcule:

a) $z_1 + z_2 - z_3$ $-2 + 6i$

b) $2z_1 - 4z_2 + \frac{1}{2}z_3$ $\frac{29}{2} - \frac{15}{2}i$

c) $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 - \overline{z}_3$ $-2 - 6i$

d) $2(z_1 + \overline{z}_2) + 5\,\overline{z}_3$ $31 + 13i$

23. Escreva as expressões abaixo na forma algébrica:

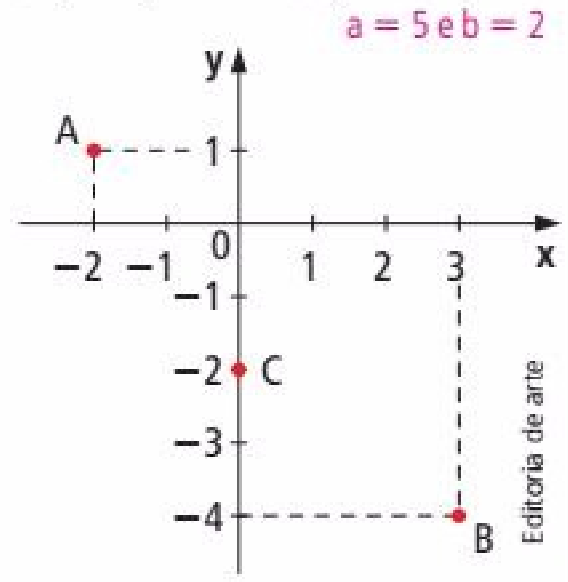
a) $(1 + i)(2 - i)(3 + 2i)$ $7 + 9i$

b) $(-1 + 3i)(1 - i) - 2i(5 + 2i)$ $6 - 6i$

c) $(2i - 1)(1 - i)^2(2 - 3i)$ $14 - 8i$

24. Calcule *a* e *b*, para que $(4 + 5i) - (-1 + 3i) = a + bi$. $a = 5$ e $b = 2$

25. Na figura ao lado, os pontos *A*, *B* e *C* representam as imagens dos números complexos z_1, z_2 e z_3, respectivamente.



Calcule:

a) $z_1 + z_2 + z_3$ $1 - 5i$

b) $(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) - \overline{z}_3$ $-5 - 7i$

26. Determine o número complexo *z* que verifica a equação $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$. $z = -1 - i$

27. Determine o valor de *x* para que o produto $(12 - 2i)[18 + (x - 2)i]$ seja um número real. $x = 5$

28. Determine o complexo *z*, de modo que:
$z - (2 + 6i) = 2(1 + 4i) - (1 - 2i)(i + 3)$ $z = -1 + 19i$

29. Encontre o número complexo *z* sabendo que:

$$\begin{cases} z + \overline{z} = 6 \\ z \cdot \overline{z} = 25 \end{cases}$$

$z = 3 + 4i$ ou $z = 3 - 4i$

30. Determine os números complexos z_1 e z_2, tais que:

$$\begin{cases} z_1 - \overline{z}_2 = 1 - 5i \\ z_1 \cdot z_2 = -13i \end{cases}$$

$z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = 2 - 3i$

31. Calcule $a, b \in \mathbb{R}$, sabendo que $\begin{vmatrix} a + 2i & -3 \\ 1 - i & i^3 \end{vmatrix} = b + 2i$. $a = -5$; $b = 5$

32. Calcule:

a) i^{92} 1

b) i^{45} i

c) i^{310} -1

d) i^{1081} i

33. Calcule:

a) $i^5 + i^2$ $-1 + i$

b) $i^9 - i^{11}$ $2i$

c) $i^{280} + i^{281}$ $1 + i$

d) $i^{123} + i^{180}$ $1 - i$

34. Calcule:

a) $\frac{2 + i}{5 - 3i}$ $\frac{7}{34} + \frac{11}{34}i$

b) $\frac{5 + i}{i}$ $1 - 5i$

c) $\frac{i}{2 + 3i}$ $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

d) $\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}$ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

35. Efetue:

a) $(1 - i)^2$ $-2i$

b) $(3 + 4i)^2$ $-7 + 24i$

c) $(2 + i)^3$ $2 + 11i$

d) $(1 - i)^4$ -4

36. Sendo $z = 1 - 3i$ e $w = 1 - i$, calcule $\frac{z}{w}$. $2 - i$

37. Qual é o conjugado do número complexo $z = \frac{4}{1 - i}$? $2 - 2i$

38. (UFC-CE) Se *i* representa o número complexo cujo quadrado é igual a -1, determine o valor numérico da soma $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{27}$. Zero.

39. Coloque na forma $a + bi$ a expressão $\frac{1 - i}{1 + i} + \frac{i}{i - 2}$. $\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$

40. Determine o número complexo *z* tal que $\frac{i}{z} = 2 - 2i$. $z = -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}$

41. Qual é o valor da expressão $2x^4 - 4x^3 + x^2 - x + 1$ para $x = 2i$? $29 + 30i$

42. Determine as raízes quadradas de:

a) $5 - 12i$ $3 - 2i$ ou $-3 + 2i$

b) $-3 + 4i$ $1 + 2i$ ou $-1 - 2i$

43. Determine o número complexo *z*, tal que $z^2 = 21 + 20i$. $z_1 = 5 + 2i$; $z_2 = -5 - 2i$

44. Qual é o conjugado do número complexo $z = \frac{(3 - i)(2 + 2i)^2}{3 + i}$? $\overline{z} = \frac{24}{5} - \frac{32i}{5}$

45. (Mack-SP) $\left[\frac{(1 + i)}{1 - i}\right]^{102}$, onde $i = \sqrt{-1}$, é igual a:

a) i

b) $-i$

c) 1

d) $1 + i$

x e) -1

46. (FEI-SP) O resultado da expressão complexa $\frac{1}{2 + i} + \frac{3}{1 - 2i}$ é:

a) $1 - i$

x b) $1 + i$

c) $2 + i$

d) $2 - i$

e) $3 + 3i$

47. (FEI-SP) Se $\frac{2i}{z} = 1 + i$, então o número complexo *z* é:

a) $1 - 2i$

b) $-1 + i$

c) $1 - i$

x d) $1 + i$

e) $-1 + 2i$

48. A beleza e o fascínio dos fractais os tornaram muito famosos, despertando interesse de muitas áreas como a Arquitetura, Arte e Música. Muitos modelos matemáticos modelam a estrutura dos inúmeros fractais já conhecidos, e entre eles, há os que envolvem números complexos.

> [...] Foi da necessidade de se calcular e descrever certos fenômenos da natureza ou objetos intricados que não possui forma definida, que surgiu a Geometria Fractal, uma geometria que apresenta estruturas geometricamente complexas e infinitamente variadas. Sua nomenclatura se origina do adjetivo em latim *fractus*. O verbo latino corresponde *frangere* que significa "quebrado" ou "fraturado": criar fragmentos irregulares. Caracterizam-se por repetir um determinado padrão com ligeiras e constantes variações. Como consequência dessa autossimilaridade, as diferentes partes de um fractal se mostram similares ao todo. Assim, os fractais têm cópias aproximadas de si em seu interior.
>
> Ainda podemos dizer que "os fractais são conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e que têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas". Porém somente há poucos anos, com o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos computadores, a Geometria Fractal vem se consolidando.


chaoss/ Shutterstock.com

A estrutura dos brócolis possui variações constantes e autossimilares.

BEMFICA, Andrios; ALVES, Cassiana. **Fractais**: progressão e série geométrica, 2011. Disponível em: <http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/fractais_progressao_e_serie_geometrica.pdf>. Acesso em: 4 jan. 2016.

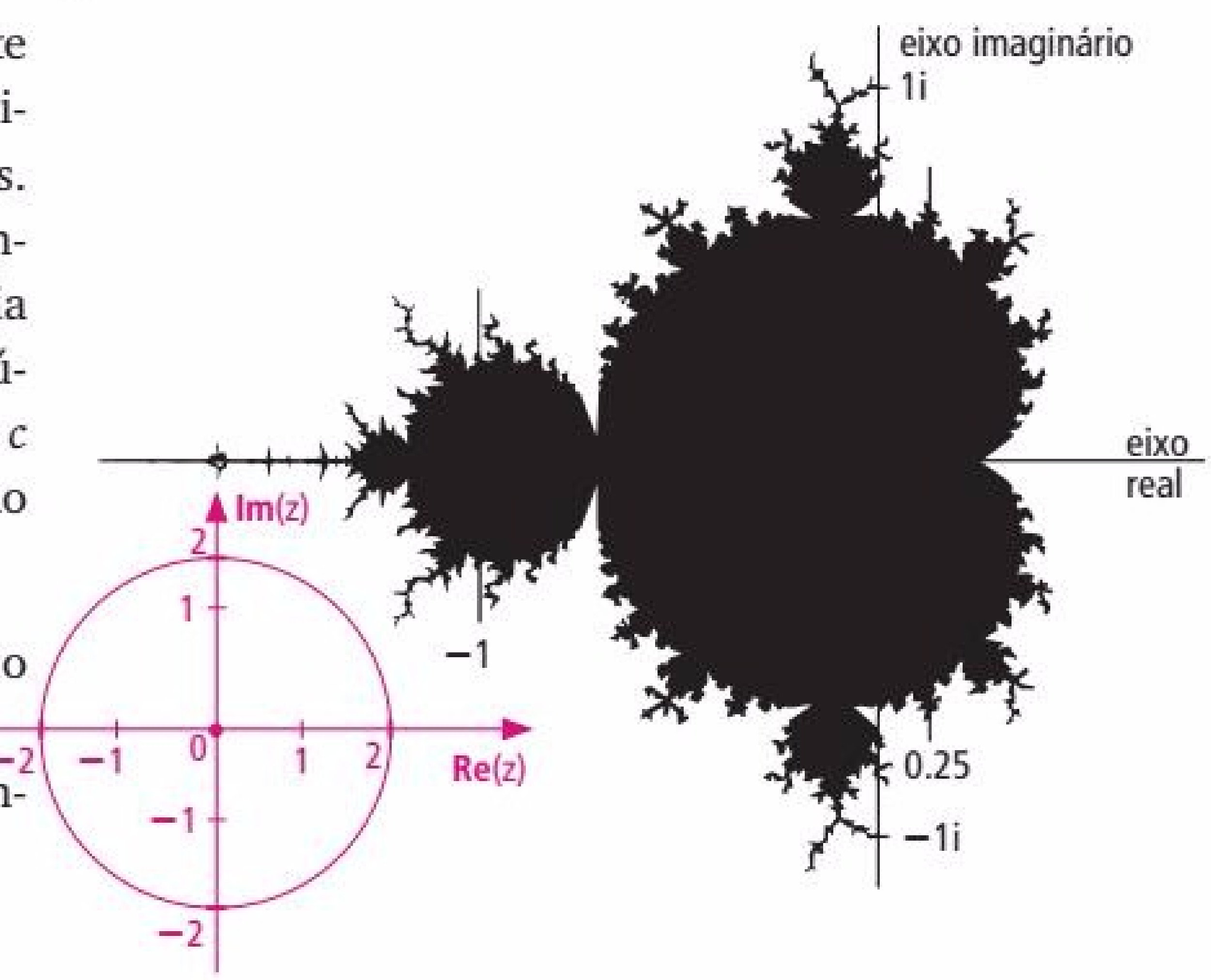
> [...] Os Fractais são normalmente gerados através de computadores com *softwares* específicos.
>
> Através de seu estudo podemos descrever muitos objetos extremamente irregulares do mundo real. Os meteorologistas utilizam o cálculo fractal para verificar as turbulências da atmosfera incluindo dados como nuvens, montanhas, a própria turbulência, os litorais, e árvores. As técnicas fractais também estão sendo empregadas para a compactação de imagens através da compressão fractal, animação digital. Os fractais encontram aplicações artísticas variadas, como gerar texturas, simulação de vegetação e confecção de paisagens. Na música, sons baseados em fractais são surpreendentemente realistas e parecem mais capazes de produzir sons parecidos com os naturais que outros processos artificiais. Além das mais diversas disciplinas científicas que utilizam o processo. [...]

MIRANDA, Aldício J. **Fractais**: conjuntos de Julia e conjuntos de Mandelbrot, 2012. Disponível em: <https://publicacoes.unifal-mg.edu.br/revistas/index.php/sigmae/article/download/97/pdf>. Acesso em: 4 jan. 2016.

a) A geometria dos fractais evoluiu com o auxílio de qual ramo do conhecimento?
Com o auxílio da computação.

b) Cite alguns campos de aplicação dos fractais, conforme apresentado no texto?
Meteorologia, animação digital, artes e música.

c) O conjunto de Mandelbrot é um fractal bastante popular e muito interessante, devido a sua estética e estrutura Matemática relativamente simples. O conjunto de Mandelbrot é definido como o conjunto de números complexos baseado na sequência $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$: $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$, em que $n \in \mathbb{N}$, z_n e c são números complexos e $z_0 = 0$. Além disso, os valores de c são tais que z_n pertence ao círculo de raio 2 no plano complexo.
Esta imagem é interessante, pois está plotada no plano de Argand-Gauss.



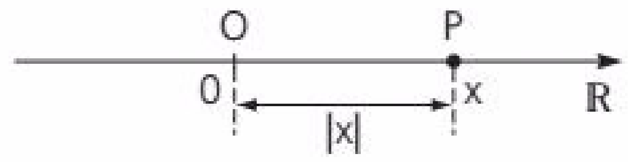
Editoria de arte

- Represente no plano Argand-Gauss a região onde o conjunto de Mandelbrot está inserido.
- Se $c = 1 - 2i$, determine a segunda iteração do conjunto de Mandelbrot, ou seja z_2.

$z_1 = (z_0)^2 + 1 + i = 0 + 1 + i = 1 + i$
$z_2 = (z_1)^2 + 1 + i = (1 + i)^2 + 1 + i = 5 + i$

Módulo de um número complexo

O módulo de um número real *x* é definido, geometricamente, como a distância do ponto *P* que o representa na reta real até a origem *O*.



No conjunto dos números complexos, o conceito de módulo também está relacionado à representação geométrica, como podemos ver na definição a seguir.

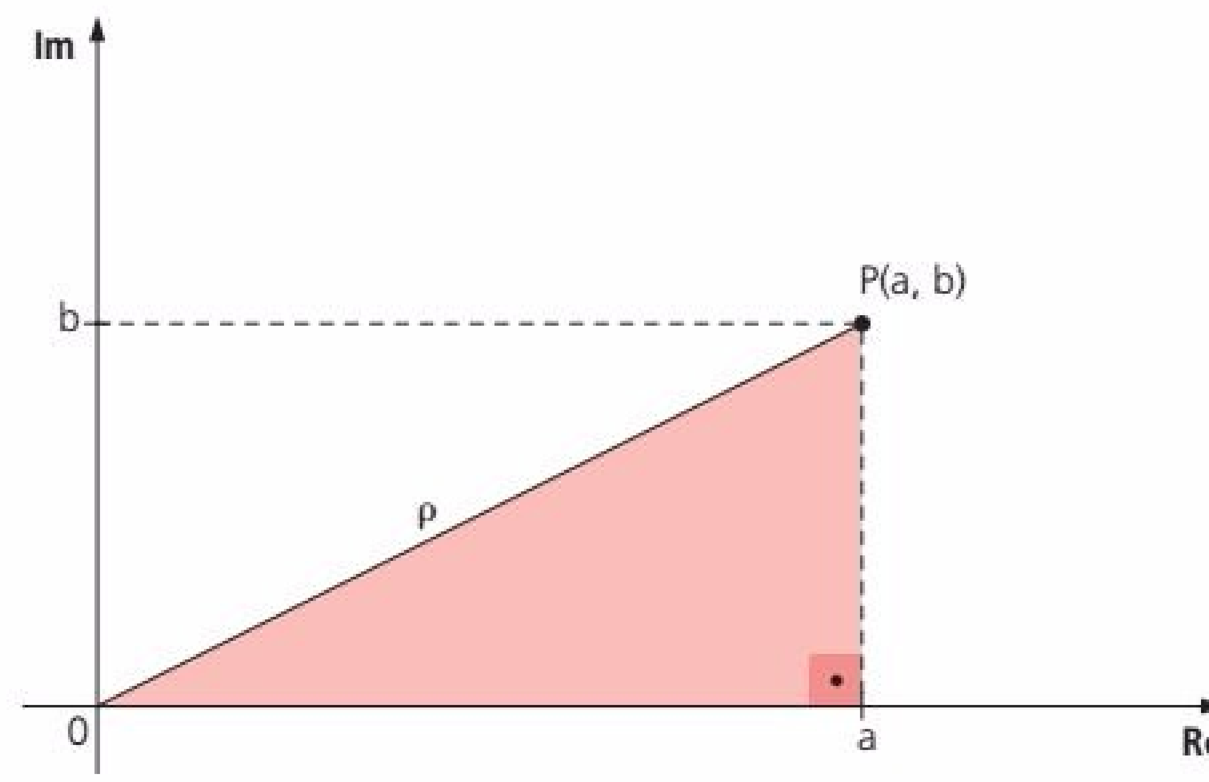
O **módulo de um número complexo** $z = a + bi$ é a distância do afixo *P* desse complexo à origem *O* do plano complexo.

Indicamos o módulo de *z* pela letra grega ρ (rô) ou por $|z|$.

Observando a figura ao lado, temos que o módulo de *z* é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem *a* e *b*. Desse modo, $\rho = |z|$ é um número real não negativo, ou seja, $\rho \geqslant 0$. Assim, podemos determinar o valor de ρ aplicando o teorema de Pitágoras:

$\rho^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ou seja,

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Ilustrações: Editoria de arte

Portanto, o módulo de um número complexo $z = a + bi$ é a distância do seu afixo $P(a, b)$ à origem $O(0, 0)$ que é igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercícios resolvidos

15 Determine o módulo dos seguintes números complexos

a) $z = 2 + \sqrt{3}i$
b) $z = 3 - 4i$
c) $z = 2i$
d) $z = -1$

Resolução

a) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$

b) $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

c) $|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

d) $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

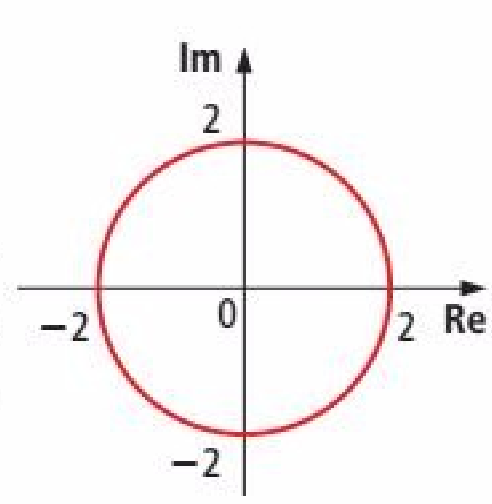
16 Qual é a representação geométrica dos números complexos $z = x + yi$ que satisfazem à condição $|z| = 2$?

Resolução

$|z| = 2 \Rightarrow |x + yi| = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

Essa equação representa uma circunferência de centro na origem e raio igual a 2.



17 Determinar o número complexo *z* de modo que $|z| = 2$ e $|z - i| = 1$.

Resolução

Fazendo $z = a + bi$, temos:

$$\begin{cases} |a + bi| = 2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \quad \text{(I)} \\ |a + bi - i| = 1 \Rightarrow |a + (b - 1)i| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = 1 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros das equações (I) e (II), vem:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ a^2 + (b-1)^2 = 1 \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_{4} - 2b + \cancel{1} = \cancel{1} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 - 2b = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

Substituindo $b = 2$, obtemos:

$a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow a^2 + 4 = 4 \Rightarrow a = 0$

Logo, $z = 2i$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

49. Determine o módulo dos seguintes números complexos:

a) $z = 4 - i$ $\sqrt{17}$

b) $z = -5i$ 5

c) $z = \sqrt{2} + i$ $\sqrt{3}$

d) $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$ $\frac{\sqrt{13}}{6}$

e) $z = 8$ 8

f) $z = 0$ 0

50. Faça a representação gráfica dos conjuntos:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 2\}$

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

51. Sendo $z = -4 + i$ e $w = 3 + 2i$, calcule:

a) $|z|$ $\sqrt{17}$ b) $|\overline{w}|$ $\sqrt{13}$ c) $|z \cdot \overline{w}|$ $\sqrt{221}$

52. Sabendo que os números complexos $z_1 = 2 - i$ e $z_2 = x + 1$, *x* real e positivo, são tais que $|z_1 \cdot z_2|^2 = 10$, calcule *x*. $x = -1 + \sqrt{2}$

53. (Cesesp-PE) O lugar geométrico descrito pelo número complexo $z = a + bi$, tal que $|z - 2 - i| = 5$, é:

a) uma circunferência de centro (0, 5) e raio 2.

b) uma parábola.

X c) uma circunferência de centro (2, 1) e raio 5.

d) uma elipse.

e) uma circunferência de centro (−2, −1) e raio 5.

54. O determinante $\begin{vmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1+i & 1-i & 0 \end{vmatrix}$ define um número complexo. Encontre o módulo desse complexo.

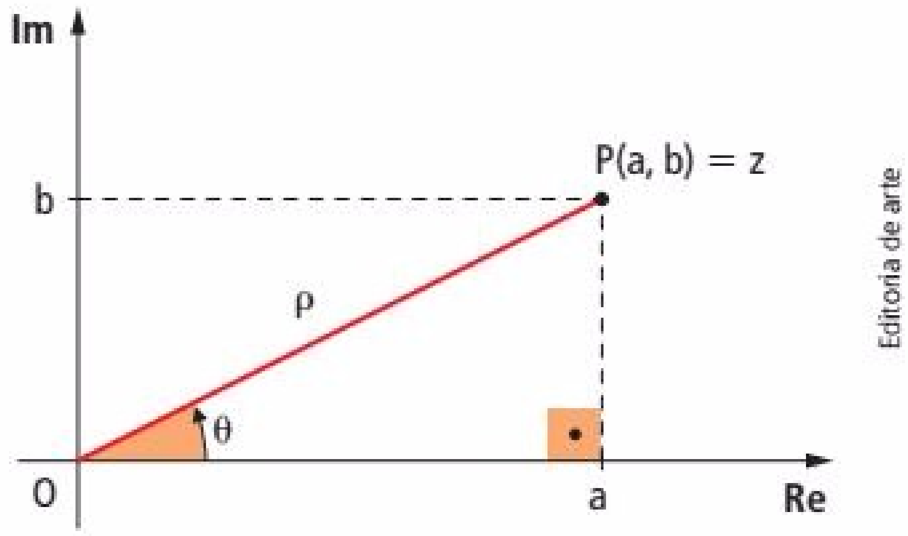
$|z| = 2\sqrt{2}$

Argumento de um número complexo

Na representação geométrica de um número complexo $z = a + bi$, com $z \neq 0$, cujo afixo é *P*, o ângulo θ formado pela semirreta $\overrightarrow{OP}$ e o eixo real, medido no sentido anti-horário, é denominado **argumento de z** e é indicado por **arg(z)**.

O ângulo θ é tal que $0 \leqslant \theta < 2\pi$ (ou $0° \leqslant \theta < 360°$).

Observando a figura, temos:



$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cdot \cos\theta \ \text{ e } \ \text{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \cdot \text{sen}\,\theta$$

Assim, o argumento θ do número complexo não nulo $z = a + bi$, cujo módulo é ρ, é o ângulo cujo cosseno é $\frac{a}{\rho}$ e seno é $\frac{b}{\rho}$.

Forma trigonométrica de um número complexo

Considere um número complexo, $z = a + bi$, não nulo com módulo ρ e argumento θ. Sabendo que $a = \rho \cdot \cos\theta$ e $b = \rho \cdot \text{sen}\,\theta$, e substituindo essas relações na forma algébrica de *z*, temos:

$$z = a + bi \Rightarrow z = \rho \cdot \cos\theta + (\rho \cdot \text{sen}\,\theta) \cdot i$$

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)}$$

A representação obtida é chamada **forma trigonométrica** ou **forma polar** do complexo número *z*.

Exercícios resolvidos

18 Determine o argumento dos complexos a seguir e represente o resultado no plano de Argand-Gauss:

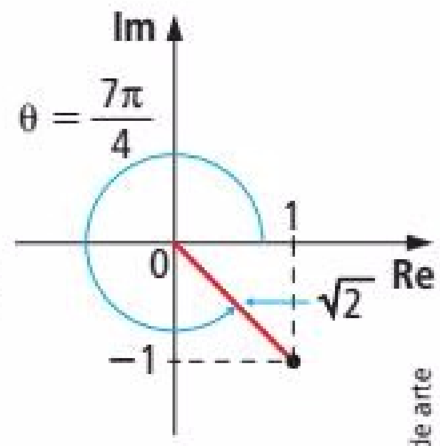
a) $z = 1 - i$

b) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

Resolução

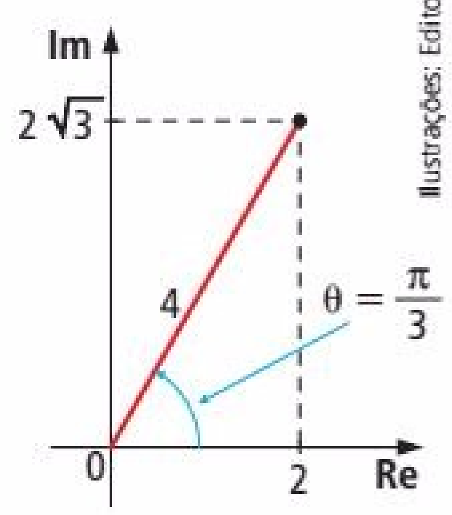
a) $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$



b) $\rho = \sqrt{4+12} = 4$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \text{sen}\,\theta &= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$



Ilustrações: Editoria de arte

19 Qual é a forma algébrica do número complexo z, cujo módulo é 2 e o argumento é 45°?

Resolução

$|z| = 2$; $\theta = 45°$

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) = 2(\cos 45° + i \cdot \text{sen}\,45°) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

20 Determine o módulo e o argumento do complexo $z = \sqrt{3} + i$.

Resolução

Cálculo do módulo: $a = \sqrt{3}$; $\rho = 1$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \quad \rho = \sqrt{4} \quad \rho = 2$

Cálculo do argumento:

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{\rho} \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\theta &= \frac{b}{\rho} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad ou } \theta = 30°$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

55. Determine o argumento dos complexos a seguir.

a) $z = 1 - i$ $\theta = \frac{7\pi}{4}$

b) $z = 2 + 2i\sqrt{3}$ $\theta = \frac{\pi}{3}$

c) $z = 4i$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

d) $z = -2 + 2i\sqrt{3}$ $\theta = \frac{2\pi}{3}$

56. Represente na forma trigonométrica os seguintes complexos: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $z = -4\sqrt{3} - 4i$

b) $z = 8i$

c) $z = -7 - 7i$

d) $z = 1 - i\sqrt{3}$

e) $z = -5$

f) $z = -i$

57. Escreva na forma algébrica os complexos:

a) $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$ $z = -2 + 2i\sqrt{3}$

b) $z = 2(\cos 315° + i \cdot \text{sen}\,315°)$ $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

c) $z = \cos 0° + i \cdot \text{sen}\,0°$ $z = 1$

d) $z = -8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$ $z = -4\sqrt{3} - 4i$

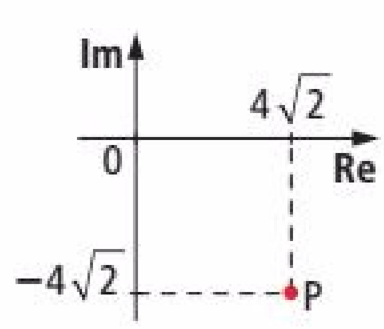
58. Considere o número complexo:

$z = \cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}$

a) Represente-o na forma algébrica. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) Represente na forma trigonométrica o complexo $(z + 1)$. $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

59. A figura mostra a imagem P do número complexo z. Escreva z na forma trigonométrica.



$z = 8\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$

60. Determine x e y para que:

$(2 + xi)\left(y + \frac{1}{2}i\right) = 2(\cos 30° + i \cdot \text{sen}\,30°)$

se $x = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

se $y = 0 \Rightarrow x = -2\sqrt{3}$

61. Represente o número $\frac{i}{1+i} - \frac{3}{1-i}$ na forma trigonométrica. $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)$

62. Um número complexo z e seu conjugado $\overline{z}$ são tais que $z + \overline{z} = 4$ e $z - \overline{z} = -4i$. Qual é a forma trigonométrica de z^2? $8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$

63. (UFPel-RS) Em meados do século XVI, quando a ciência europeia ainda discutia a validade do emprego dos números irracionais e negativos, Gerônimo Cardano (1501-1576), eminente matemático, médico e físico, publicou a obra **Ars Magna**, na qual – ao escrever que, se alguém procurar dividir 10 em duas partes, de modo que seu produto seja 40, verificará que isso é impossível – lançou as bases para o desenvolvimento da Teoria dos Números Complexos, com infindáveis aplicações práticas, principalmente no ramo da eletrônica.

Com base nessa Teoria, determine dois números cuja soma seja −4 e o produto seja 8, representando-os na forma trigonométrica. $z_1 = -2 + 2i$; $z_2 = -2 - 2i$;
$z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 135° + i \cdot \text{sen}\,135°)$ e
$z_2 = 2\sqrt{2}(\cos 225° + i \cdot \text{sen}\,225°)$

Operações com números complexos na forma trigonométrica

As operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números complexos podem ser efetuadas na forma trigonométrica. Acompanhe cada um dos casos.

Multiplicação

Dados os complexos $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2)$ não nulos, vamos calcular o produto $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i \cdot \cos\theta_1\text{sen}\,\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + i^2 \cdot \text{sen}\,\theta_1\text{sen}\,\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\text{sen}\,\theta_2) + i(\cos\theta_1\text{sen}\,\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)]$$

Logo: $\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]}$

Para multiplicar dois números complexos, multiplicamos os módulos e adicionamos os argumentos. Para *n* complexos não nulos, $z_1, z_2, ..., z_n$, temos:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot ... \cdot \rho_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i \cdot \text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)]}$$

Por exemplo, vamos calcular $z_1 \cdot z_2$ sabendo que $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

Temos: $\rho_1\rho_2 = 3 \cdot 4 = 12$ e $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right] = 12\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$$

Divisão

Agora, vamos calcular o quociente $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2)}$, com $z_2 \neq 0$.

Multiplicando numerador e denominador por $\rho_2(\cos\theta_2 - i \cdot \text{sen}\,\theta_2)$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_2)} \cdot \frac{\rho_2(\cos\theta_2 - i \cdot \text{sen}\,\theta_2)}{\rho_2(\cos\theta_2 - i \cdot \text{sen}\,\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i \cdot \cos\theta_1\text{sen}\,\theta_2 + i \cdot \text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - i^2 \cdot \text{sen}\,\theta_1\text{sen}\,\theta_2)}{\rho_2^2(\cos^2\theta_2 - i^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)]}{\rho_2(\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2)}$$

Logo: $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]}$

Para dividir dois números complexos, dividimos os módulos e subtraímos os argumentos.

Por exemplo, vamos calcular $\frac{z_1}{z_2}$ sabendo que $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

Temos: $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$ e $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right] = \frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$$

Potenciação

Sendo $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$ um número complexo não nulo e *n* um número inteiro maior que 1, temos:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ fatores}} \Rightarrow z^n = \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot \ldots \cdot \rho}_{n \text{ fatores}}[\cos(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{n \text{ parcelas}}) + i \cdot \operatorname{sen}(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{n \text{ parcelas}})]$$

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \cdot \operatorname{sen} n\theta)}$$

Essa fórmula é conhecida como **1ª fórmula de De Moivre**.

Por exemplo, sendo $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, vamos calcular z^6:

$$z^6 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\right]^6 = 2^6\left(\cos 6 \cdot \frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen} 6 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 32(\cos 3\pi + i\operatorname{sen} 3\pi)$$

Radiciação

Dados um número complexo *z* não nulo e um número natural *n*, $n > 1$, chamamos **raiz enésima de *z*** a todo número complexo ***w***, tal que $w^n = z$.

Observe os exemplos a seguir:

a) As raízes quadradas de -1 são *i* e $-i$, pois $i^2 = -1$ e $(-i)^2 = -1$
b) As raízes quartas de 1 são 1, $-i$, *i* e -1, pois $1^4 = 1$; $(-1)^4 = 1$; $i^4 = 1$ e $(-i)^4 = 1$

Vamos agora deduzir uma **fórmula** que permite determinar as raízes enésimas de um número complexo *z* não nulo.

Dado o número complexo $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$, seja $w = r(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$ uma raiz enésima de *z*, isto é, $w^n = z$.

$$w^n = z \Rightarrow r^n(\cos n\alpha + i \cdot \operatorname{sen} n\alpha) = \rho(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) \quad \text{(I)}$$

Da igualdade (I), temos:

$$\begin{cases} r^n = \rho \Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho} \text{ (pois } r > 0) \quad \text{(II)} \\ \cos(n\alpha) = \cos\theta \text{ e } \operatorname{sen}(n\alpha) = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow n\alpha = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (II) e (III) em $w = r(\cos \alpha + i \cdot \text{sen } \alpha)$, temos:

$$w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen } \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

Essa fórmula é conhecida como **2ª fórmula de De Moivre**.

Todo número complexo, não nulo, tem *n* raízes enésimas distintas.

Por exemplo, vamos calcular as raízes cúbicas de $z = 1$.

Podemos escrever $z = 1 + 0i$ e na forma trigonométrica, temos:

$$\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \text{ e } \left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{1} \\ \text{sen}\,\theta = \frac{0}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 0$$

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \Rightarrow z = 1(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$$

As raízes cúbicas de $z = 1$ são dadas por: $w_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{0 + 2k\pi}{3}\right)$

O número *k* pode assumir os valores 0, 1 e 2, assim:

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 1(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) = 1(1 + 0i) = 1$$

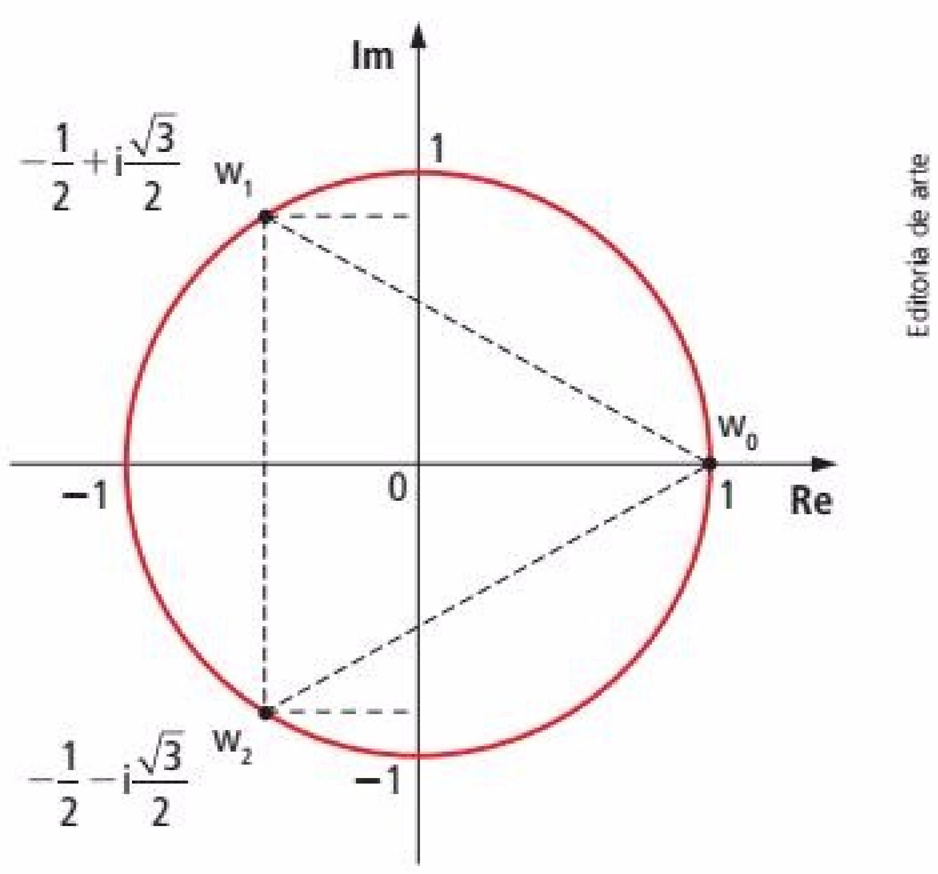
$$k = 1 \Rightarrow w_1 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) = 1\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = 1\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\sqrt[n]{\rho}$ é constante e os argumentos diferem de $\frac{2\pi}{n}$ (para valores consecutivos de *n*), conclui-se que as imagens geométricas (afixos) das *n* raízes de um número complexo, para $n \geqslant 3$, são vértices de um polígono regular de *n* lados, inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$, tendo uma das raízes o argumento $\frac{\theta}{n}$.

Observe que as três raízes do exemplo estão sobre uma circunferência de raio 1 e são vértices de um triângulo equilátero; seus argumentos formam uma PA, com o primeiro termo $\frac{\theta}{n}$, ou seja, $a_1 = 0$ e razão $\frac{2\pi}{n}$, ou seja, $\frac{2\pi}{3}$.

Observe a representação geométrica:



Observação:

Durante a resolução de problemas, utilizaremos a notação w_k para as raízes enésimas de *z*, considerando que *k* varia de 0 até $n - 1$.

Exercícios resolvidos

21 Calcule $z_1 \cdot z_2$, sabendo que

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) \text{ e } z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right).$$

Resolução

$$\text{Dados } \begin{cases} \rho_1 = 2 \text{ e } \theta_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ \rho_2 = 3 \text{ e } \theta_2 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \rho_1\rho_2 = 2 \cdot 3 = 6 \\ \theta_1 + \theta_2 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} \end{matrix}$$

Portanto, $z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = 6\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right]$$

22 Dados $z_1 = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$ e

$z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{5}\right)$, calcule $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Resolução

$$\text{Dados } \begin{cases} \rho_1 = 6 \text{ e } \theta_1 = \dfrac{\pi}{4} \\ \rho_2 = 2 \text{ e } \theta_2 = \dfrac{\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \theta_1 - \theta_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\pi}{20} \end{matrix}$$

Substituindo em $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$,

temos: $\dfrac{z_1}{z_2} = 3\left[\cos\dfrac{\pi}{20} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{20}\right]$

23 Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^n$ seja real.

Resolução

Dados: $a = \sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{2}$

$$\rho = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Logo, $z^n = \left(\sqrt{2} - \sqrt{2i}\right)^n = 2^n\left(\cos n \cdot \dfrac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,n \cdot \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

Queremos que z^n seja real; para tanto, $\text{Im}(z) = 0$, ou seja:

$$\text{sen}\,n \cdot \frac{7\pi}{4} = 0 \Rightarrow n \cdot \frac{7\pi}{4} = k\pi \Rightarrow n = \frac{4k}{7}$$

Se *n* é natural, *k* deve ser múltiplo de 7. Logo, o menor valor não nulo de *n* é obtido quando $k = 7$. Portanto, $n = 4$.

24 Calcular as raízes quadradas de $z = 2\sqrt{3} + 2i$ e fazer a representação geométrica.

Resolução

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} \Rightarrow \rho = 4$$

$$\left.\begin{matrix} \cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Logo, $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta) \Rightarrow z = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$.

As raízes quadradas são dadas por:

$$w_k = \sqrt[2]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2}\right)$$

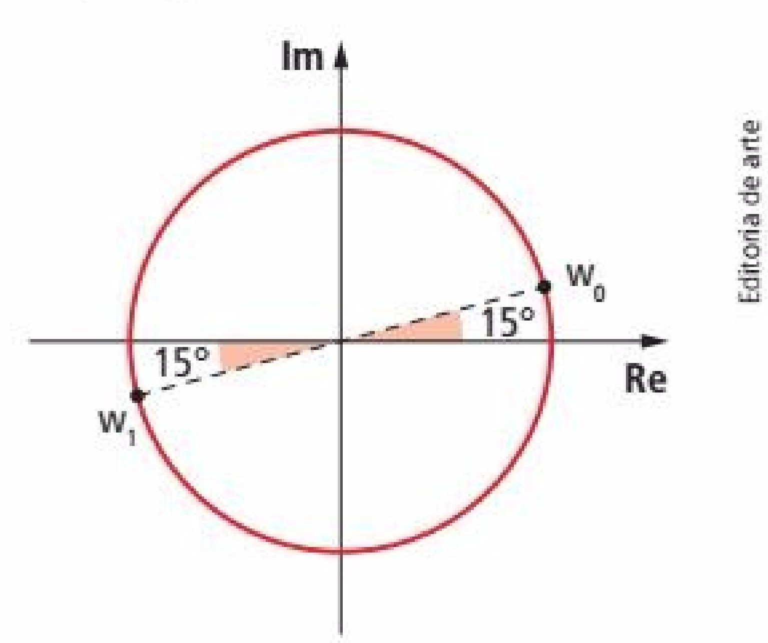
$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= 2(\cos 15° + i \cdot \text{sen}\,15°)$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = 2\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i \cdot \text{sen}\,\frac{13\pi}{12}\right) =$$

$$= 2(-\cos 15° - i \cdot \text{sen}\,15°)$$

Representação geométrica:



64. Considere os números complexos:

$z_1 = 4(\cos 10° + i \cdot \text{sen } 10°)$

$z_2 = 2(\cos 20° + i \cdot \text{sen } 20°)$

$z_3 = \cos 15° + i \cdot \text{sen } 15°$

Calcule:

a) $z_1 \cdot z_2$ $8(\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$

b) $z_2 \cdot z_3$ $2(\cos 35° + i \cdot \text{sen } 35°)$

c) $z_1 \cdot z_3$ $4(\cos 25° + i \cdot \text{sen } 25°)$

d) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ $8(\cos 45° + i \cdot \text{sen } 45°)$

65. Dados $z_1 = 5(\cos \pi + i \cdot \text{sen } \pi)$ e $z_2 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3}\right)$, obtenha $z_1 \cdot z_2$. $15\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \frac{4\pi}{3}\right)$

66. Dados os complexos $z_1 = 6(\cos 85° + i \cdot \text{sen } 85°)$ e $z_2 = 3(\cos 25° + i \cdot \text{sen } 25°)$, calcule:

a) $\frac{z_1}{z_2}$ $2(\cos 60° + i \cdot \text{sen } 60°)$

b) $\frac{z_2}{z_1}$ $\frac{1}{2}(\cos 300° + i \cdot \text{sen } 300°)$

67. Efetue as seguintes operações e expresse o resultado na forma algébrica:

a) $2(\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°) \cdot 5(\cos 60° + i \cdot \text{sen } 60°)$ $10i$

b) $\dfrac{27(\cos 45° + i \cdot \text{sen } 45°)}{9(\cos 15° + i \cdot \text{sen } 15°)}$ $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}$

c) $\dfrac{2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}\right)}{\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3}}$ $\sqrt{3} + i$

68. Efetue $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{21}$. i

69. Considere o complexo $z = (2 - 2i)^5$. $128\sqrt{2}$ e $\frac{3\pi}{4}$

a) Determine o seu módulo e o argumento principal.

b) Escreva, no caderno, z na forma algébrica e na forma trigonométrica. $-128 + 128i$; $128\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{4}\right)$

70. Seja o número complexo $z = (x + i)^6$. Determine x para que $|z| = 1000$. $x = \pm 3$

71. Determine:

a) as raízes sextas de 1.

b) as raízes cúbicas de -64. $-4, 2 + 2i\sqrt{3}, 2 - 2i\sqrt{3}$

71. a) -1; 1; $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

72. Resolva, no conjunto dos números complexos, a equação: $x^4 - 1 = 0$ $S = \{-1, 1, -i, i\}$

73. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação: $5x^2 - 5i = 0$

$S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

74. Resolva a equação: $z^4 + z = 0$ $S = \left\{0, -1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

75. (UFSC) Dado o número complexo:

$z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3}\right)$, determine o valor de $z^6 - 2z^3$. 80

76. (UFMS) Dados os números complexos:

$z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{6}\right)$ e $w = 3i + 2i^2 + i^3$, determine a parte real de $A = z^6 - w^4$. 56

77. (UEA-AM) Dados os números complexos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -i$ e $z_3 = z_1 \cdot z_2$, é correto afirmar que a forma trigonométrica do número complexo z_3 é:

a) $1\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{7\pi}{4}\right)$

b) $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4}\right)$

c) $2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{5\pi}{4}\right)$

X d) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{7\pi}{4}\right)$

e) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{4}\right)$

78. (UERJ) João desenhou um mapa do quintal da sua casa onde enterrou um cofre. Para isso, usou um sistema de coordenadas retangulares, colocando a origem O na base de uma mangueira, e os eixos Ox e Oy com sentidos oeste-leste e sul-norte, respectivamente. Cada ponto (x, y), nesse sistema, é a representação de um número complexo $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Para indicar a posição (x_1, y_1) e a distância d do cofre à origem, João escreveu a seguinte observação no canto do mapa:

$x_1 + iy_1 = (1 + i)^9$.

a) Calcule as coordenadas (x_1, y_1). $(16, 16)$

b) Calcule o valor de d. $16\sqrt{2}$

79. (Mack-SP) As representações gráficas dos complexos z tais que $z^3 = -8$ são os vértices de um triângulo:

a) inscrito numa circunferência de raio 1.

b) que tem somente dois lados iguais.

c) equilátero de lado 2.

d) equilátero de altura $2\sqrt{3}$.

X e) de área $3\sqrt{3}$.

80. (PUC-SP) Sejam os números complexos $u = 2\sqrt{2}(\cos 315° + i \, \text{sen } 315°)$ e $w = u^2$. Se P e Q são respectivamente imagens de u e w, no plano complexo, então a equação da reta perpendicular a $\overline{PQ}$ traçada pelo seu ponto médio, é

a) $3x + y + 2 = 0$

b) $3x - y + 2 = 0$

X c) $x + 3y + 14 = 0$

d) $x - 3y + 14 = 0$

Explorando a tecnologia

Raízes complexas

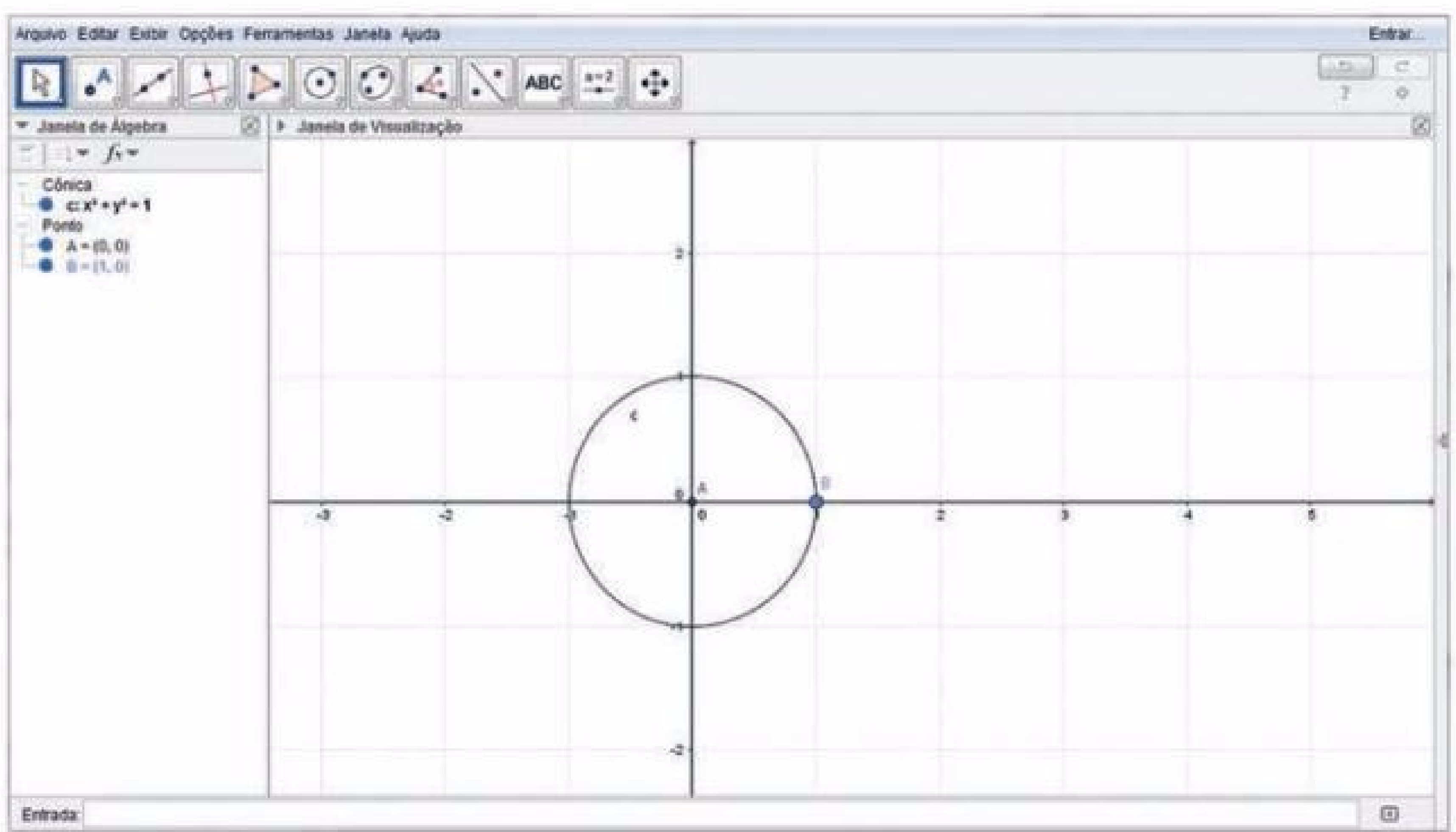
De acordo com a 2ª fórmula de Moivre, as raízes de um número complexo são vértices de um polígono regular, que pode ser inscrito em uma circunferência cujo centro é a origem, o raio é o módulo da raiz e o número de lados corresponde ao índice da raiz a ser extraída.

Utilizando essas informações, podemos elaborar um arquivo no GeoGebra no qual é possível visualizar esses polígonos e, consequentemente, estimar o valor de cada uma de suas raízes. Para isso, acompanhe os passos a seguir:

1. Digite no **Campo de Entrada** o ponto A = (0, 0).

2. Digite, em seguida, o ponto B = (1, 0).

3. Utilizando a ferramenta **Círculo dado centro e um de seus pontos** , marque primeiro o ponto *A* e, depois, o ponto *B*. O programa fornecerá uma circunferência de raio 1 cujo centro é o ponto *A* e *B*, um de seus pontos.

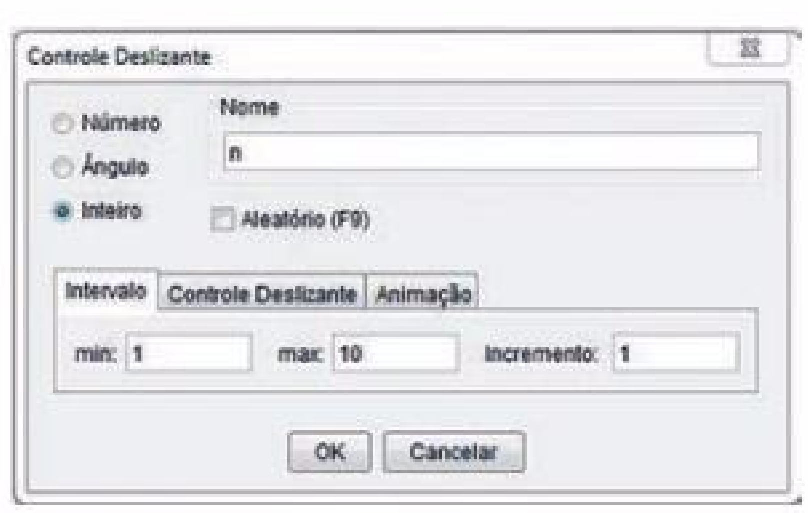


Crédito das imagens: Geogebra

Tela do passo 3.

4. Utilizando a ferramenta **Ampliar** , clique sobre a circunferência até ela se ajustar no espaço disponível.

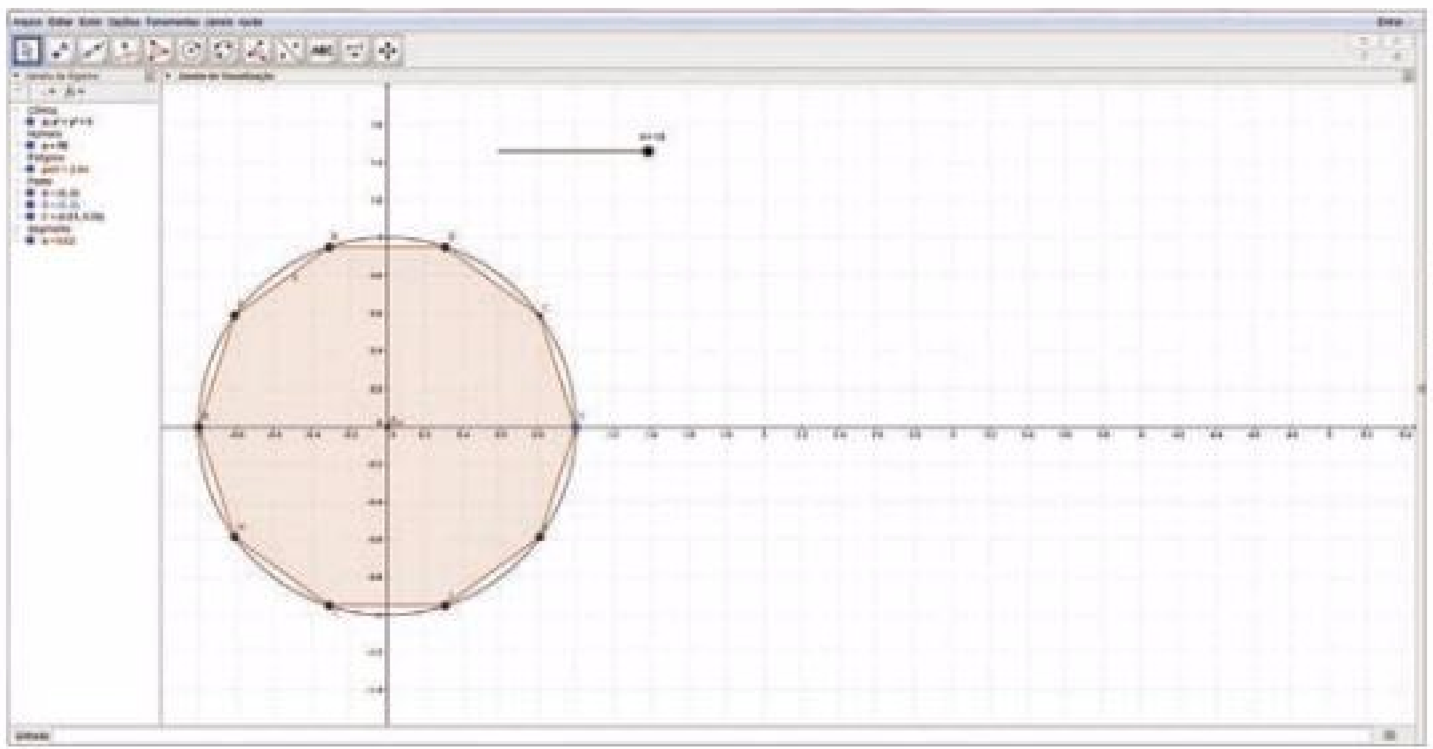
5. Crie um controle deslizante de número inteiro e, caso necessário, nomeie como *n*. Nesse caso o intervalo apresentado será de 3 até 10, modifique para o intervalo de 1 até 10. Para esse controle não será necessário configurar o incremento.



Tela do passo 5.

6. Para evitar que o polígono fique muito grande na medida em que aumentamos o valor de *n*, vamos construir o seu lado em função do raio da circunferência e o número de lados. Para isso, vamos criar o ponto *C*, assim, no **Campo de Entrada**, digite $C = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$.

7. Utilizando a ferramenta **Polígono Regular** , clique primeiro sobre o ponto *B* e, depois, em *C*. Para o número de lados digite *n*. Assim, o controle deslizante é que vai controlar o número de lados do polígono.

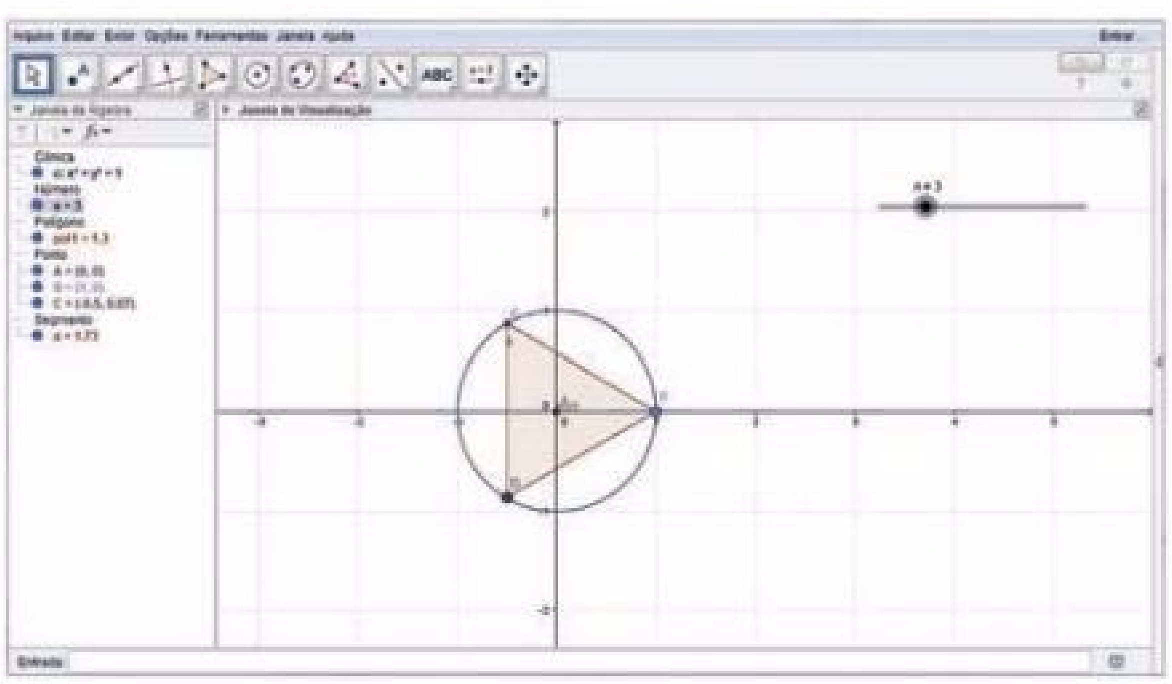


Crédito das imagens: Geogebra

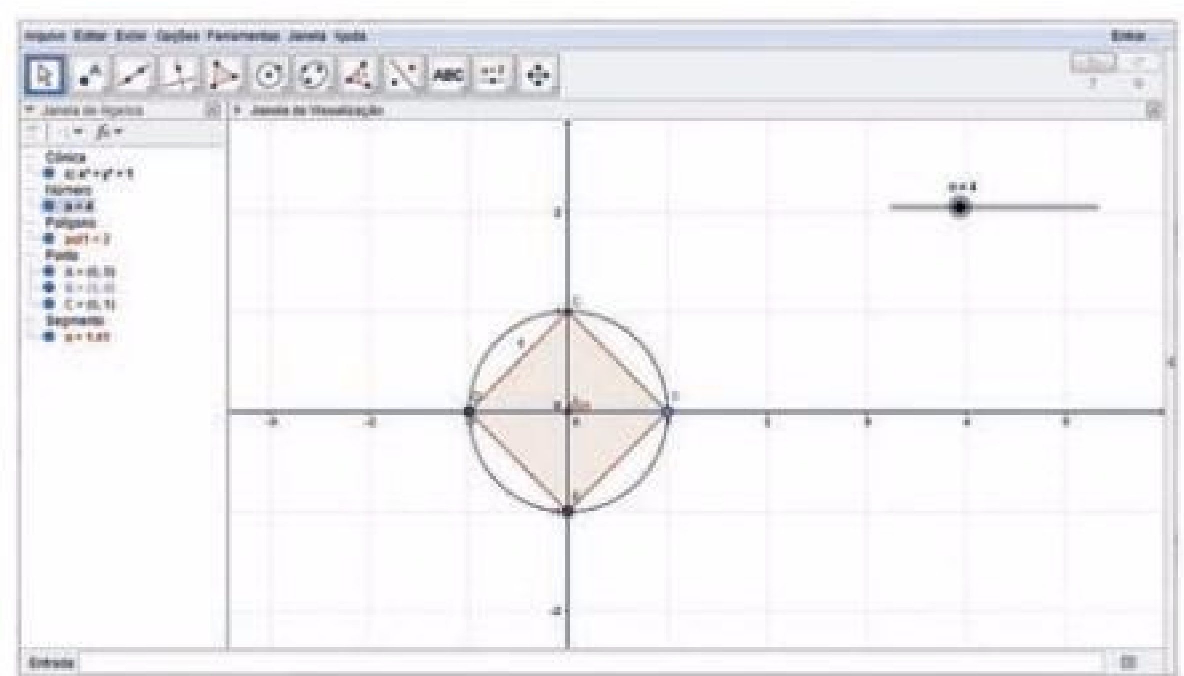
Tela do passo 7 (n = 10).

Esse procedimento pode ser considerado como uma espécie de calculadora para a equação $z^n = 1$, em que *z* é um número complexo, *n* um número natural entre 3 e 10, e o gráfico é a representação geométrica de todas as raízes da equação.

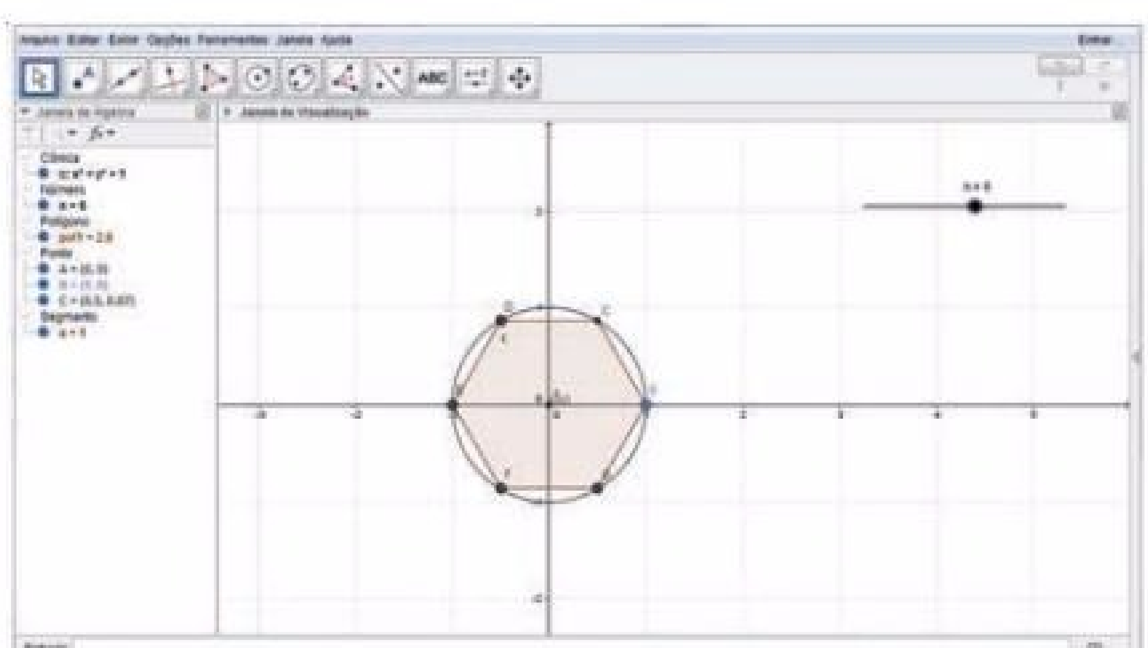
Observe alguns polígonos que podemos formar:



n = 3



n = 4



n = 6

Atividades

Escreva no caderno

1. Durante a construção, definimos o intervalo do Controle Deslizante de 1 a 10. Explique o que acontece quando $n = 1$ e $n = 2$. Como os polígonos são definidos para $n \geqslant 3$, ao colocar $n = 1$ ou $n = 2$ aparentemente não aparece nada que nos dê uma falsa impressão de que não existe solução. Porém, quando $n = 1$, temos o ponto *B* como solução da equação $z = 1$; quando $n = 2$, temos o ponto *B* e o ponto $C(-1, 0)$.

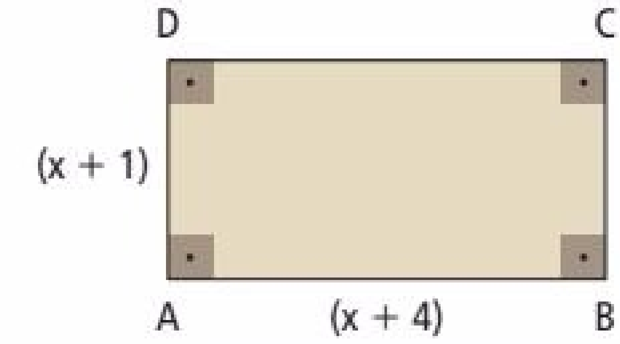
2. O ponto *C* possui uma coordenada baseada em cálculos trigonométricos. O que representa a abscissa e a ordenada do ponto $C = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$? A abscissa representa a parte real, e a ordenada, a parte imaginária de um número complexo quando escrito na forma algébrica para $\theta = 0$ e $k = 1$.

3. Ao definir $n = 8$, o programa fornecerá as soluções da equação $z^8 = 1$. Qual é o nome do polígono formado e quais são as soluções dessa equação? Veja o Manual do Professor.

CAPÍTULO 8

Polinômios

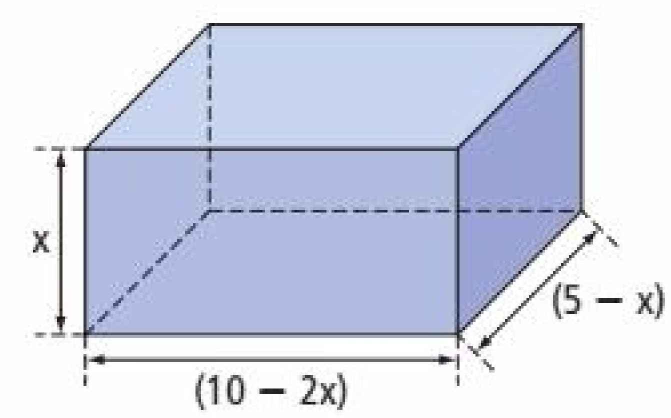
Nos anos anteriores você provavelmente estudou algumas situações que podem ser modeladas por funções polinomiais de domínio real. Vamos relembrá-las com alguns exemplos:



Ilustrações: Editoria de arte

a) Qual é o perímetro *P* do retângulo ABCD representado ao lado em função de *x*?
$P(x) = 2(x + 4) + 2(x + 1) \Rightarrow P(x) = 4x + 10$
A função P(x) é uma função polinomial do 1º grau.

b) Qual é a área, em função de *x*, desse mesmo retângulo ABCD?
$A(x) = (x + 4)(x + 1) \Rightarrow A(x) = x^2 + 5x + 4$
A função A(x) é uma função polinomial do 2º grau.



c) Qual é o volume, em função de *x*, do bloco retangular representado ao lado?
$V(x) = x(10 - 2x)(5 - x) \Rightarrow V(x) = 2x^3 - 20x^2 + 50x$
A função V(x) é uma função polinomial do 3º grau, que ainda não foi abordada nesta coleção.

Neste capítulo, vamos estudar as funções polinomiais de um modo geral, ampliando o que já foi visto em funções polinomiais de 1º e 2º graus, estendendo para os demais graus e com domínio no conjunto dos números complexos.

Definição de polinômios

Um polinômio na variável complexa *x* é toda expressão dada por $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, em que $n \in \mathbb{N}$ e $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ e a_0 são números complexos.

Em um polinômio assim definido, temos:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são os **coeficientes** da variável *x*;
- o coeficiente a_0 é denominado **termo independente** da variável *x*;
- o maior expoente de *x*, com coeficiente não nulo, é chamado de **grau** do polinômio. Representando o polinômio por P(x), indicamos o grau por gr(P).

Observe alguns exemplos:

a) $2x^5 - 5x^2 + 4ix + 1$; é um polinômio de grau 5, em que $a_5 = 2$, $a_2 = -5$, $a_1 = 4i$ e $a_0 = 1$

b) $-3x^2 + 5\sqrt{2}x - 2$; é um polinômio de grau 2, em que $a_2 = -3$, $a_1 = 5\sqrt{2}$ e $a_0 = -2$

c) $7{,}5x + 3$; é um polinômio de grau 1, em que $a_1 = 7{,}5$ e $a_0 = 3$

d) 8 é um polinômio de grau 0, em que $a_0 = 8$, pois o polinômio pode ser escrito como $8x^0$.

Um polinômio de grau *n* é escrito na forma **completa** quando todos seus termos, desde o de grau *n* até o de grau zero estão explicitados no polinômio; caso contrário, é dito que está na forma **incompleta**. Assim, os exemplos **b**, **c** e **d** estão na forma completa. Já o exemplo **a** está na forma incompleta. Sua forma completa é $2x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 4ix + 1$.

Se o polinômio dado por $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ tem grau *n*, dizemos que a_n é o **coeficiente dominante** desse polinômio.

Função polinomial

Uma função f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ números complexos, é chamada de função polinomial.

As funções polinomiais do 1º e do 2º grau estudadas no volume 1 desta coleção são as mesmas funções polinomiais a que nos referimos aqui. Os estudos feitos naqueles capítulos continuam válidos e os teoremas e as propriedades que serão estudados neste capítulo também valem para essas funções.

Em outras palavras, uma função polinomial f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é aquela que a cada $x \in \mathbb{C}$ associa o polinômio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$.

Exemplos de funções polinomiais:

a) $f(x) = 4x^6 - 3\sqrt{2}x^5 + x^3 - 7x^2$

b) $g(x) = -x^3 + 2ix + 9$

Cada função polinomial está associada a um único polinômio e vice-versa. Por isso, a partir daqui, vamos utilizar indistintamente os termos função polinomial ou polinômio.

Polinômio nulo

Um polinômio P(x) é chamado **polinômio nulo** ou **polinômio identicamente nulo** quando todos os seus coeficientes são iguais a zero. Indicamos por $P(x) \equiv 0$.

De maneira geral:

$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ é um polinômio nulo se, e somente se, $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.

Como todos os coeficientes do polinômio nulo são iguais a zero, não definimos grau do polinômio nulo.

Valor numérico e raízes de um polinômio

O valor numérico de um polinômio P(x), para $x = \alpha$, é o número obtido quando substituímos *x* por α e efetuamos todas as operações indicadas pela expressão que define o polinômio. Por exemplo:

Se $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$, o valor numérico de P(x), para $x = 2$, é:

$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 1 \Rightarrow P(2) = 8 + 8 - 2 - 1 \Rightarrow P(2) = 13$

Portanto, 13 é o valor numérico de P(x) para $x = 2$.

Quando o valor numérico de um polinômio P(x) é igual a zero, ou seja, para $x = \alpha$, temos $P(\alpha) = 0$, dizemos que α é uma raiz do polinômio. Assim:

α é uma raiz de $P(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$

Acompanhe outros exemplos:

a) -1 é uma raiz do polinômio $P(x) = x^2 - 2x - 3$, pois:

$P(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$

b) -4 é uma raiz do polinômio $Q(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$, pois:

$Q(-4) = (-4)^3 + 4 \cdot (-4)^2 - (-4) - 4 = -64 + 64 + 4 - 4 = 0$

Observações:

Em um polinômio P(x):

- se $\alpha = 1$, $P(\alpha)$ é igual à soma dos coeficientes de P(x). De fato:
  $P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 1^1 + a_0 = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$
- se $\alpha = 0$, $P(\alpha)$ é igual ao coeficiente independente de P(x). De fato:
  $P(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 0^1 + a_0 = a_0$

Igualdade de polinômios

Dados dois polinômios P(x) e Q(x), dizemos que P(x) é igual a Q(x) se, e somente se, o valor numérico de P(x) for igual ao valor numérico de Q(x), para todo $x \in \mathbb{C}$. Indicamos por $P(x) = Q(x)$ ou $P(x) \equiv Q(x)$. Em símbolos, escrevemos:

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = Q(\alpha), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{C}$$

É possível demonstrar que dois polinômios são iguais se, e somente se, seus coeficientes forem ordenadamente iguais, isto é, os coeficientes de termos de mesmo expoente forem iguais. Esse fato será bastante útil na resolução dos exercícios.

Exercícios resolvidos

1 Dado $p(x) = (m - 5)x^5 + (3m)x^3 - 8x - 7$, discuta, em função de *m*, o grau desse polinômio.

Resolução

Discutir o grau de um polinômio em função de uma incógnita (no caso *m*) é analisar para quais valores da incógnita o grau do polinômio assume diferentes valores. Devemos considerar todas as possibilidades. Assim:

- o polinômio p(x) terá grau 5 se $m - 5 \neq 0$, isto é, $m \neq 5$;
- p(x) terá grau 3 se $m - 5 = 0 \Rightarrow m = 5$ e $3m \neq 0 \Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow m = 5$.

Note que p(x) nunca terá grau 1, pois não há valor de *m* que anule simultaneamente o coeficiente de x^5 e o de x^3.

2 Calcule os valores de *a*, *b* e *c* para os quais o polinômio $p(x) = (2a + b)x^2 + (-a + 2)x + (a + b - c)$ é identicamente nulo.

Resolução

Um polinômio é identicamente nulo quando todos os seus coeficientes são nulos. Assim:

$$p(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 & \text{(I)} \\ -a + 2 = 0 \quad \Rightarrow a = 2 & \text{(II)} \\ a + b - c = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo *a* por 2 em (I), temos: $b = -4$.

Substituindo *a* por 2 e *b* por -4 em (III), obtemos o valor de *c*: $c = -2$.

Portanto, $a = 2$, $b = -4$ e $c = -2$.

3 Sendo $P(x) = x^3 + 4x^2 + ix - 1$, calcule:

a) P(3)　　b) P(i)

Resolução

a) O valor numérico do polinômio P(x) para $x = 3$ é:

$P(3) = 3^3 + 4 \cdot 3^2 + i \cdot 3 - 1$

$P(3) = 27 + 36 + 3i - 1 \Rightarrow P(3) = 3i + 62$

b) Para $x = i$, o valor numérico de P(x) é:

$P(i) = i^3 + 4i^2 + i \cdot i - 1$

$P(i) = -i - 4 - 1 - 1 \Rightarrow P(i) = -6 - i$

4 Determine o valor de *n* sabendo que 2 é uma raiz do polinômio $p(x) = x^6 - (n + 4)x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 8$.

Resolução

Se 2 é uma raiz do polinômio p(x), então $p(2) = 0$. Substituindo na expressão, determinamos o valor de *n*:

$p(2) = 2^6 - (n + 4) \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 8 = 0$

$64 - (n + 4) \cdot 16 + 16 - 24 - 8 = 0$

$16(n + 4) = 48 \Rightarrow$

$n = 3 - 4 \Rightarrow n = -1$

5 Dados os polinômios $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ e $Q(x) = (a + 1)x^3 + 2x^2 + 2bx + 1$, determine os valores de *a* e *b* para que $P(x) = Q(x)$.

Resolução

Para que $P(x) = Q(x)$, os coeficientes de cada polinômio devem ser ordenadamentre iguais. Então:

$a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$ e $2b = -4 \Rightarrow b = -2$

Portanto, $a = 1$ e $b = -2$.

6 Considere o polinômio $P(x + 1) = 3x^2 - x + 5$. Determine P(x).

Resolução

Fazendo $x + 1 = a$, temos: $x = a - 1$

$P(x + 1) = 3x^2 - x + 5$

$P(a) = 3(a - 1)^2 - (a - 1) + 5$

$P(a) = 3a^2 - 6a + 3 - a + 1 + 5$

$P(a) = 3a^2 - 7a + 9$

Substituindo *a* por *x*:

$P(x) = 3x^2 - 7x + 9$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Quais das seguintes funções são polinômios? Justifique. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $p(x) = 2\sqrt{3}x^7 + 1$

b) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + x^{-1} + 2$

c) $g(x) = x^2 + 0{,}7x - 2i$

d) $h(x) = 5x^3 - 2x^{\frac{1}{4}} + 1$

e) $u(x) = x^2 - 6\sqrt{x} - 8$

2. Discuta, em função de *m*, o grau do polinômio dado por $p(x) = (m^2 - 4)x^4 + (m + 2)x - 25$. $gr(p) = 4$ se $m \neq 2$ e $m \neq -2$

3. (Mack-SP) Determine $m \in \mathbb{R}$, para que o polinômio $P(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ seja de grau 2. $\nexists\ m \in \mathbb{R} \mid gr(P) = 2$

4. Determine *a*, *b* e *c* de modo que o polinômio $P(x) = (a + 1)x^2 + (3a - 2b)x + c$ seja identicamente nulo. $a = -1$; $b = -\frac{3}{2}$; $c = 0$

5. Sendo $P(x) = x^2 - 2x + 1$, calcule:

a) $P(i)$ $-2i$

b) $P(1 + i)$ -1

c) $P(2 - i)$ $-2i$

6. Sabendo que $P(x) = x^3 + (a - 2)x^2 + (b - 4)x - 3$ admite 1 e -1 como raízes, calcule os valores de *a* e *b*. $a = 5$ e $b = 3$

7. Seja o polinômio $P(a + 2) = 2a^2 - 3a + 1$.

a) Calcule $P(-1)$ e $P(4)$. $P(-1) = 28$; $P(4) = 3$

b) Determine $P(a)$. $P(a) = 2a^2 - 11a + 15$

8. O polinômio $C(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}5x^2 + 2x + 180$ representa a estimativa do custo de produção de determinado produto de uma empresa, em que *x* corresponde ao número de produtos e *C* ao custo estimado, em real. Calcule a despesa da empresa quando:

a) não produz nenhum produto; $C(0) =$ R\$ 180,00

b) produz 30 produtos. $C(30) =$ R\$ 1 140,00

9. (Ufop-MG) Sejam os polinômios $p(x) = (a + b)x^4 - 5$ e $q(x) = -2x^4 + (a + c)x^2 + b + c$, em que *a*, *b* e *c* são números reais. Suponha que $p(x)$ e $q(x)$ sejam iguais para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, $a + b + c$ vale:

a) -7

b) $-\frac{5}{2}$

c) -2

x d) $-\frac{7}{2}$

10. Dado o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + mx + n$, de grau 3, e sabendo que $P(-1) = 0$ e $P(1) = 0$, calcule $P(2)$. 9

11. Seja $P(x) = 5x^3 - 8x^2 - (n^2 + 4)x - 15$, determine os possíveis valores de $n \in \mathbb{C}$ para que se tenha $P(1) = 3$. $n = -5i$ ou $n = 5i$

Adição, subtração e multiplicação de polinômios

A adição, a subtração e a multiplicação de polinômios geralmente são estudadas no Ensino Fundamental e são utilizadas em diversas situações na Matemática. Vamos retomar essas operações por meio de exemplos.

a) **Adição de polinômios**

Sendo $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3$ e $Q(x) = x^2 + 4x - 4$, temos:

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3 + x^2 + 4x - 4$

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 6x^2 + 4x - 1$

b) **Subtração de polinômios**

Sendo $P(x) = -2x^4 + 3x^2 + 2x$ e $Q(x) = -x^5 + 2x^4 + 4x^2 - 5$, temos:

$P(x) - Q(x) = -2x^4 + 3x^2 + 2x - (-x^5 + 2x^4 + 4x^2 - 5)$

$P(x) - Q(x) = -2x^4 + 3x^2 + 2x + x^5 - 2x^4 - 4x^2 + 5$

$P(x) - Q(x) = x^5 - 4x^4 - x^2 + 2x + 5$

c) **Multiplicação de polinômios**

Se $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$ e $Q(x) = 2x - 3$, temos:

$P(x) \cdot Q(x) = (3x^2 - 4x + 1) \cdot (2x - 3)$

$P(x) \cdot Q(x) = 6x^3 - 9x^2 - 8x^2 + 12x + 2x - 3$

$P(x) \cdot Q(x) = 6x^3 - 17x^2 + 14x - 3$

d) **Multiplicação de constante por polinômios**

Sendo $P(x) = x^5 - 3x^4 + 8x^3 + 5x^2 - 2$ e $k = -3$, temos:

$k \cdot P(x) = (-3) \cdot (x^5 - 3x^4 + 8x^3 + 5x^2 - 2)$

$k \cdot P(x) = (-3) \cdot x^5 + (-3) \cdot (-3x^4) + (-3) \cdot 8x^3 + (-3) \cdot 5x^2 + (-3) \cdot (-2)$

$k \cdot P(x) = -3x^5 + 9x^4 - 24x^3 - 15x^2 + 6$

Assim, para adicionar ou subtrair polinômios fazemos a redução de termos semelhantes. Já no caso da multiplicação de polinômios, primeiro aplicamos a propriedade distributiva para em seguida adicionar os produtos obtidos. Finalmente, para a multiplicação de um polinômio por um número real, devemos multiplicar cada termo do polinômio por esse número real.

Em relação aos graus dos polinômios resultantes dessas operações, temos que, dados os polinômios P(x) e Q(x) e o número real *k*:

- $gr(P \pm Q) \leq$ maior valor entre gr(P) e gr(Q)
- $gr(P \cdot Q) = gr(P) + gr(Q)$

Exercícios resolvidos

7 Considere as funções polinomiais $A(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ e $B(x) = x^2 + x + 1$. Calcule:

a) $A(x) + B(x)$

b) $A(x) - B(x)$ e $B(x) - A(x)$

c) $A(x) \cdot B(x)$

Resolução

a) Calculamos a soma adicionando os coeficientes dos termos semelhantes:

$A(x) + B(x) = (x^3 + 2x^2 - 3) + (x^2 + x + 1)$

$A(x) + B(x) = x^3 + 2x^2 - 3 + x^2 + x + 1$

$A(x) + B(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2$

b) Calculamos a diferença subtraindo os coeficientes dos termos semelhantes:

$A(x) - B(x) = (x^3 + 2x^2 - 3) - (x^2 + x + 1)$

$A(x) - B(x) = x^3 + 2x^2 - 3 - x^2 - x - 1$

$A(x) - B(x) = x^3 + x^2 - x - 4$

$B(x) - A(x) = (x^2 + x + 1) - (x^3 + 2x^2 - 3)$

$B(x) - A(x) = x^2 + x + 1 - x^3 - 2x^2 + 3$

$B(x) - A(x) = -x^3 - x^2 + x + 4$

c) Calculamos o produto aplicando a propriedade distributiva da multiplicação:

$A(x) \cdot B(x) = (x^3 + 2x^2 - 3)\,(x^2 + x + 1) =$

$= x^5 + x^4 + x^3 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 3x - 3$

$A(x) \cdot B(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x - 3$

8 Calcular *a*, *b*, *c*, sabendo-se que $x^2 - 2x + 1 \equiv a(x^2 + x + 1) + (bx + c)\,(x + 1)$.

Resolução

Eliminando os parênteses e adicionando os termos semelhantes no 2º membro, temos:

$x^2 - 2x + 1 \equiv ax^2 + ax + a + bx^2 + bx + cx + c$

$1x^2 - 2x + 1 \equiv (a + b)x^2 + (a + b + c)x + (a + c)$

Igualando-se os coeficientes correspondentes:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a + b + c = -2 \\ a + c = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$a = 4$, $b = -3$ e $c = -3$.

9 Sabendo que $\dfrac{A}{x+4} + \dfrac{B}{x-1} = \dfrac{5x + 10}{x^2 + 3x - 4}$, calcule *A* e *B*.

Resolução

$$\frac{A(x - 1) + B(x + 4)}{(x + 4)(x - 1)} = \frac{5x + 10}{x^2 + 3x - 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Ax - A + Bx + 4B}{(x + 4)(x - 1)} = \frac{5x + 10}{x^2 + 3x - 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(A + B)x + (-A + 4B)}{(x + 4)(x - 1)} = \frac{5x + 10}{x^2 + 3x - 4}$$

Observe que $(x + 4)(x - 1) = x^2 + 3x - 4$.

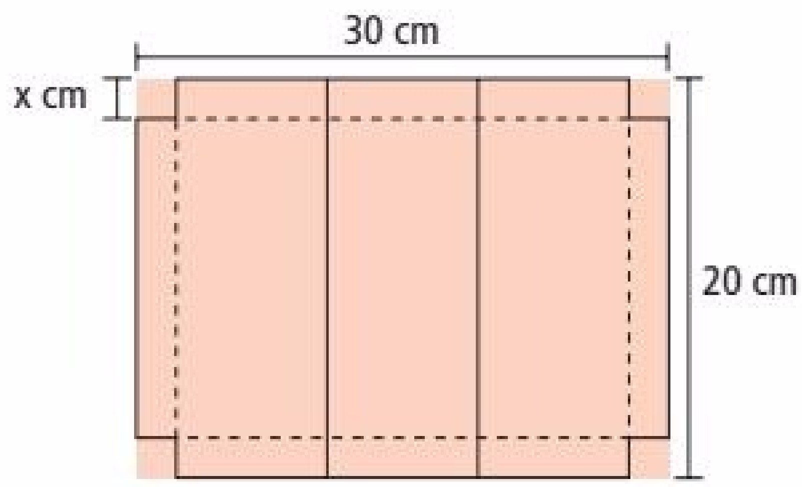
Como os denominadores são iguais, temos:

$(A + B)x + (-A + 4B) = 5x + 10$

Igualando os coeficientes: $\begin{cases} A + B = 5 \\ -A + 4B = 10 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos: $A = 2$ e $B = 3$.

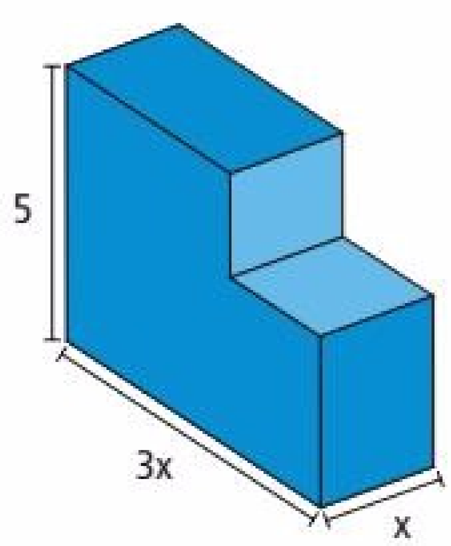
12. Considere um pedaço de cartolina retangular de lado menor 20 cm e lado maior 30 cm. Retirando-se 4 quadrados iguais de lados x cm (um quadrado de cada canto) e dobrando-se na linha pontilhada, obtemos uma pequena caixa retangular sem tampa conforme o esquema a seguir.



Ilustrações: Editoria de arte

Determine o polinômio na variável x, que representa o volume, em centímetro cúbico, dessa caixa. $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

13. A figura a seguir representa uma peça formada a partir de um bloco retangular de cuja extremidade superior direita foi retirado um cubo de aresta x.



Determine:

a) o polinômio que representa o volume da peça; $V(x) = -x^3 + 15x^2$

b) o volume da peça se $x = 2$ cm. $V = 52\ cm^3$

14. Qual é a soma dos coeficientes do polinômio $P(x) = (2x^2 - 1)^5$? 1

15. Considere os polinômios:

$A(x) = x^2 - 3x + 1$, $B(x) = (x + 4)(2 - 5x)$ e $C(x) = mx^2 + (n + 4)x - 2p$. Determine m, n e p de modo que $A(x) + B(x) \equiv C(x)$. $m = -4$; $n = -25$; $p = -\frac{9}{2}$

16. Determine o polinômio que ao ter o polinômio $A(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$ subtraído resulta no polinômio $B(x) = x^2 + 3x - 1$. $2x^3 - x + 4$

17. Efetue e ordene segundo as potências decrescentes de x cada um dos seguintes polinômios:

a) $P_1(x) = 5x + 1 - \left[(x + 1)^2 - x(3 - x)^2\right]$
$P_1(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$

b) $P_2(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - x\right) - 2(2 - x)^2$
$P_2(x) = -6x^2 + 11x - \frac{17}{2}$

18. Dados os polinômios $P_1(x) = x^3 + 1$, $P_2(x) = x + 1$ e $P_3(x) = ax^2 + bx + c$, determine a, b e c para que $P_1(x) = P_2(x) \cdot P_3(x)$. $a = 1$, $b = -1$ e $c = 1$.

19. Determine m, n e p, de modo que $(mx^2 + nx + p)(x + 1) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$. $m = 2$; $n = 1$; $p = -3$

20. Determine A, B e C, sabendo que: $A = \frac{5}{6}$; $B = \frac{1}{2}$; $C = -\frac{4}{3}$

$$\frac{5 - 3x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}.$$

21. Dados os polinômios $P(x) = 5x^2 - 3i$ e $Q(x) = ix^2 + 4$ e sendo i a unidade imaginária, determine:

a) $P(x) + Q(x)$ $(5 + i)x^2 + 4 - 3i$

b) $Q(x) - P(x)$ $(i - 5)x^2 + 4 + 3i$

c) $P(x) \cdot Q(x)$ $5ix^4 + 23x^2 - 12i$

d) $2 \cdot P(x) + 3 \cdot Q(x)$ $(10 + 3i)x^2 + 12 - 6i$

22. (UECE) Se a expressão algébrica $x^2 + 9$ se escreve identicamente como $a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$ onde a, b e c são números reais, então o valor de $a - b + c$ é:

a) 9
b) 10
c) 12
X d) 13

23. (FEI-SP) A soma de dois polinômios, $P(x) + Q(x)$, é um polinômio de grau 6 e a diferença $P(x) - Q(x)$ é um polinômio de grau 4. É válido afirmar-se que:

a) A diferença $Q(x) - P(x)$ tem grau 6.
X b) $P(x)$ e $Q(x)$ têm o mesmo grau.
c) $P(x)$ tem grau 5.
d) $Q(x)$ tem grau 4.
e) $P(x)$ tem grau 4.

24. (Uniderp-MS) Se $P(x) = \det\begin{pmatrix} x(x + 1) & -1 \\ -x - 3 & x + 1 \end{pmatrix}$ é um polinômio, então $P(2)$ é igual a:

a) 10
X b) 13
c) 16
d) 18
e) 20

25. (UFPel-RS) Sejam as constantes reais k, m e n, tal que $\frac{6x^2 - x - 3}{x^3 - x} = \frac{k}{x - 1} + \frac{m}{x + 1} + \frac{n}{x}$, então pode-se afirmar que:

a) $2(k + m + n) = k \cdot m \cdot n$
b) $2(k + m + n) = -k \cdot m \cdot n$
X c) $k + m + n = k \cdot m \cdot n$
d) $k + m + n = -2k \cdot m \cdot n$
e) $k + m + n = 2k \cdot m \cdot n$

Divisão de polinômios

No Ensino Fundamental você provavelmente estudou a divisão de números inteiros e suas propriedades. Por exemplo, ao dividir 7 por 2, obtemos 3 e resto 1. Podemos escrever $7 = 2 \cdot 3 + 1$ e $1 < 2$, ou seja, o resto é menor que o divisor.

A divisão de polinômios segue ideia semelhante. Assim, dados dois polinômios A(x) e B(x), com B(x) não nulo, dividir A(x) por B(x) significa determinar dois polinômios Q(x) e R(x) que satisfaçam às seguintes condições:

- $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$
- $gr(R) < gr(B)$ ou $R(x) = 0$

Nesse caso, A(x) é o dividendo, B(x) é o divisor, Q(x) é o quociente e R(x) é o resto.

Quando $R(x) = 0$, ou seja, a divisão é exata, dizemos que A(x) é **divisível** por B(x), ou que B(x) é divisor de A(x), ou ainda que B(x) divide A(x).

Para realizar a divisão de polinômios podemos utilizar diversos métodos; alguns deles serão estudados a seguir.

Método da chave

O metodo da chave é o mais geral para realizar a divisão de polinômios e é semelhante ao processo de divisão de números inteiros. Por exemplo, vamos dividir 547 por 25:

$$\begin{array}{r|l} 547 & 25 \\ \cline{2-2} & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 547 & 25 \\ \cline{2-2} 50 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 547 & 25 \\ \cline{2-2} -50 & 2 \\ \hline 47 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 547 & 25 \\ \cline{2-2} -50 & 21 \\ \hline 47 & \\ 25 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 547 & 25 \\ \cline{2-2} -50 & 21 \\ \hline 47 & \\ -25 & \\ \hline 22 & \end{array}$$

Logo, ao efetuar a divisão 547 : 25, obtemos quociente 21 e resto 22. Observe que: $547 = 25 \cdot 21 + 22$ e $22 < 25$.

Com polinômios, a ideia é a mesma. Acompanhe a sequência de passos a seguir para obter o quociente Q(x) e o resto R(x) da divisão do polinômio $A(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x - 6$ por $B(x) = x^2 - x$.

Sequência de passos	Exemplo
1º) Escreva os polinômios (dividendo e divisor) em ordem decrescente de seus expoentes e complete-os, quando necessário, com termos de coeficiente zero.	$\overbrace{2x^3 + 4x^2 + 3x - 6}^{\text{dividendo}} \; \begin{array}{\|l} \overbrace{x^2 - x}^{\text{divisor}} \\ \hline \end{array}$
2º) Divida o termo de maior grau do dividendo pelo de maior grau do divisor (o resultado será um termo do quociente).	$\begin{array}{r\|l} 2x^3 + 4x^2 + 3x - 6 & x^2 - x \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$
3º) Multiplique o termo obtido no 2º passo pelo divisor e subtraia esse produto do dividendo.	$\begin{array}{r\|l} 2x^3 + 4x^2 + 3x - 6 & x^2 - x \\ \cline{2-2} -2x^3 + 2x^2 & 2x \\ \cline{1-1} 6x^2 + 3x - 6 & \end{array}$
4º) Se o grau da diferença for menor do que o grau do divisor, a diferença será o resto da divisão, e a divisão terminará aqui. Caso contrário, repita o 2º passo, considerando a diferença como um novo dividendo, até que o grau da diferença seja menor do que o grau do divisor ou até que a diferença seja igual a zero (polinômio nulo).	$\begin{array}{r\|l} 2x^3 + 4x^2 + 3x - 6 & x^2 - x \\ \cline{2-2} -2x^3 + 2x^2 & \underbrace{2x + 6}_{\text{quociente}} \\ \cline{1-1} 6x^2 + 3x - 6 & \\ -6x^2 + 6x & \\ \cline{1-1} \underbrace{9x - 6}_{\text{resto}} & \end{array}$

Portanto, no exemplo dado, $A(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x - 6$, $B(x) = x^2 - x$, $Q(x) = 2x + 6$ e $R(x) = 9x - 6$. Além disso, $2x^3 + 4x^2 + 3x - 6 = (x^2 - x) \cdot (2x + 6) + (9x - 6)$ e o grau do resto é 1, menor do que o grau do divisor, que é 2.

Método dos coeficientes a determinar

Esse método, também conhecido como método de Descartes, consiste em encontrar os coeficientes dos polinômios quociente e resto utilizando a identidade $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, considerando que:

- o resto é nulo ou seu grau é menor que o grau do divisor;
- o grau do quociente é igual à diferença entre o grau do dividendo e o grau do divisor.

Por exemplo: Qual é o polinômio quociente e o polinômio resto da divisão de $A(x) = 2x^3 - 9x^2 + 5x$ por $B(x) = x^2 - 4x$?

O grau do quociente é igual a $gr(A) - gr(B) = 3 - 2 = 1$. Logo, $Q(x) = ax + b$.

O grau do resto é, no máximo, igual a 1, pois $gr(R) < gr(B)$, isto é, $gr(R) < 2$. Logo, $R(x) = cx + d$.

Agora, usando a identidade $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, temos:

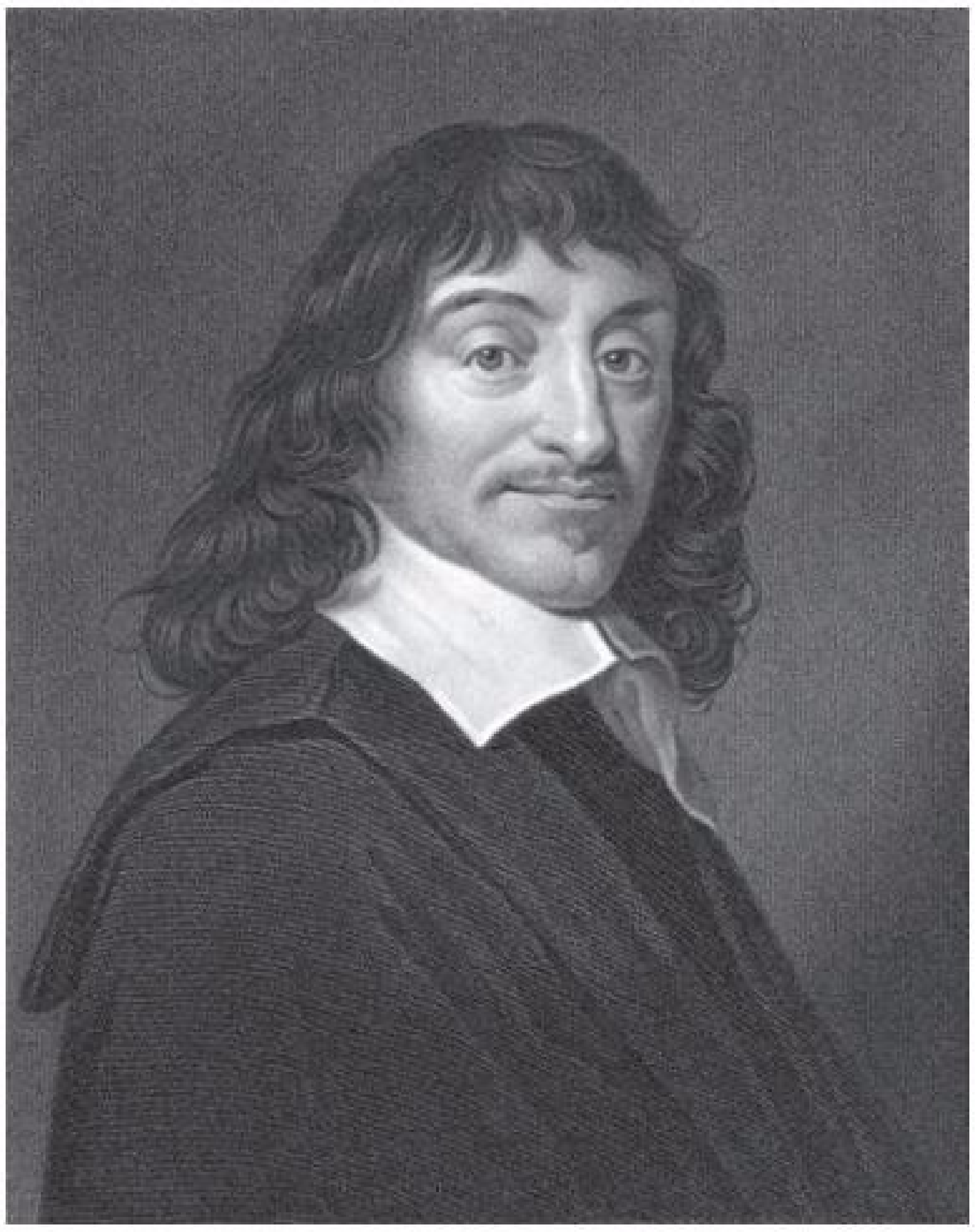
$$2x^3 - 9x^2 + 5x = (x^2 - 4x) \cdot (ax + b) + (cx + d)$$
$$2x^3 - 9x^2 + 5x = ax^3 - 4ax^2 + bx^2 - 4bx + cx + d$$
$$2x^3 - 9x^2 + 5x = ax^3 + (-4a + b)x^2 + (-4b + c)x + d$$

Por igualdade de polinômios, temos o sistema:

$$\begin{cases} a = 2 \\ -4a + b = -9 \\ -4b + c = 5 \\ d = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = 0$.

Portanto, $Q(x) = 2x - 1$ e $R(x) = x$.


Georgios Kollidas/Shutterstock.com

René Descartes, 1596-1650, matemático e filósofo francês.

Exercícios resolvidos

10 Determinar o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $A(x) = x^4 - 7x^2 + 9x - 1$ por $B(x) = x^2 + 3x - 2$, utilizando o método da chave.

Resolução

O polinômio $A(x)$ é incompleto, pois não tem o termo x^3. Para utilizar o método da chave, precisamos completá-lo, incluindo o termo x^3 com coeficiente 0. Assim:

$A(x) = x^4 + 0x^3 - 7x^2 + 9x - 1$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +0x^3 & -7x^2 & +9x & -1 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2 - 3x + 4 \\ \hline
 & -3x^3 & -5x^2 & +9x & -1 & \\
 & +3x^3 & +9x^2 & -6x & & \\ \cline{2-5}
 & & 4x^2 & +3x & -1 & \\
 & & -4x^2 & -12x & +8 & \\ \cline{3-5}
 & & & -9x & +7 &
\end{array}$$

Portanto, $Q(x) = x^2 - 3x + 4$ e $R(x) = -9x + 7$.

11 Determine m ($m \neq 1$) de modo que o polinômio $A(x) = (m - 1)x^3 - mx + 2m + 1$ seja divisível por $B(x) = x + 1$.

Resolução

Para que $A(x)$ seja divisível por $B(x)$, o resto deve ser nulo, isto é, $R(x) = 0$.

Como $A(x)$ é de grau 3 e $B(x)$ é de grau 1, o quociente será da forma $Q(x) = ax^2 + bx + c$ e podemos escrever:

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$$
$$(m - 1)x^3 - mx + 2m + 1 = (ax^2 + bx + c)(x + 1)$$
$$(m - 1)x^3 - mx + 2m + 1 =$$
$$= ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c$$

Igualando os coeficientes e fazendo II − III e I − IV, respectivamente:

$$\begin{cases} a = m - 1 & \text{(I)} \\ a + b = 0 & \text{(II)} \\ b + c = -m & \text{(III)} \\ c = 2m + 1 & \text{(IV)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c = m & \text{(V)} \\ a - c = -m - 2 & \text{(VI)} \end{cases}$$

Igualando-se as equações V e VI:

$m = -m - 2 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1$

Portanto, $m = -1$.

12 Determinar o quociente e o resto da divisão de $A(x) = 5x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6$ por $B(x) = x^2 - x + 3$, utilizando o método dos coeficientes a determinar.

Resolução

O grau do quociente é dado por:

$gr(Q) = gr(A) - gr(B) \Rightarrow gr(Q) = 4 - 2 = 2$

$Q(x) = ax^2 + bx + c.$

Então Q(x) é da forma $gr(R) < gr(B)$; logo, o resto tem grau máximo igual a 1 e é da forma:

$$R(x) = dx + e$$

Aplicando a definição de divisão:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$5x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6 = (x^2 - x + 3)(ax^2 + bx + c) + (dx + e)$

$5x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6 = ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx + 3ax^2 + 3bx + 3c + dx + e$

$5x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6 = ax^4 + (b - a)x^3 + (3a - b + c)x^2 + (3b - c + d)x + (3c + e)$

Igualando-se os coeficientes, temos:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b - a = 2 \Rightarrow b = 7 \\ 3a - b + c = -4 \Rightarrow 3 \cdot 5 - 7 + c = -4 \Rightarrow c = -12 \\ 3b - c + d = 0 \Rightarrow 3 \cdot 7 - (-12) + d = 0 \Rightarrow d = -33 \\ 3c + e = 6 \Rightarrow 3 \cdot (-12) + e = 6 \Rightarrow e = 42 \end{cases}$$

Portanto, $Q(x) = 5x^2 + 7x - 12$ e $R(x) = -33x + 42$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

26. Utilizando o método da chave, determine o quociente e o resto das divisões de polinômios a seguir.

a) $(3x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 30x - 20) : (x - 2)$

b) $(4x^3 + 6x^2 - 2x + 4) : (2x - 1)$

c) $(3x^5 + x^3 - 10) : (x + 2)$

d) $(8x^3 + 1) : (2x + 1)$

27. Verifique se o polinômio $A(x) = 3x^4 + 5x^2 + 8x - 2$ é divisível pelo polinômio $B(x) = x^2 + x$. Justifique sua resposta. Não, A(x) não é divisível por B(x), pois o resto da divisão de A(x) por B(x) é igual a −2, ou seja, diferente de zero.

28. Utilizando o método dos coeficientes a determinar, calcule o quociente e o resto das divisões de polinômios a seguir.

a) $(3x^3 + 13x^2 + 5x - 2) : (x^2 + 4x)$ $Q(x) = 3x + 1$ e $R(x) = x - 2$

b) $(x^3 - 6x^2 - 2x + 40) : (x + 3)$ $Q(x) = x^2 - 9x + 25$ e $R(x) = -35$

c) $(2x^3 + 9x^2 + 5x - 4) : (2x + 3)$ $Q(x) = x^2 + 3x - 2$ e $R(x) = 2$

29. Mostre que $x^5 + a^5$ é divisível por $x + a$.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

30. Efetue as seguintes divisões pelo método da chave.

a) $4a^3 - 2a^2 + 5a - 6$ por $a - 1$; $Q(x) = 4a^2 + 2a + 7$ e $R(x) = 1$

b) $x^5 + 3x^2 - 6x + 8$ por $x + 2$; $Q(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 4$ e $R(x) = 0$

31. Efetue a divisão do polinômio $a^2 - 3a^4 - 2a + 5$ pelo polinômio $a^2 - 1 + 3a$. $Q(a) = -3a^2 + 9a - 29$ $R(a) = 94a - 24$

32. Dados os polinômios $A(x) = 2x^2 - 6x + 1$, $B(x) = x^2 + 2$ e $C(x) = x - 1$, calcule o quociente e o resto da divisão $(A + B) : C$. $Q(x) = 3x - 3$ e $R(x) = 0$

33. Dividindo um polinômio A(x) por $B(x) = x^2 - 3x + 1$, obtemos quociente $Q(x) = x + 1$ e resto $R(x) = 2x + 1$. Determine o polinômio A(x). $A(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

34. Determine *p* e *q*, de modo que o resto da divisão de $A(x) = x^4 + px^3 - x^2 + qx + 1$ por $B(x) = x^2 + x + 1$ seja igual a $x + 2$. $p = 0$ e $q = -2$

35. (UFRN) Se *A*, *B* e *C* são números reais e $P(x) = x^5 - 7x^2 + 2x + 4$ dividido por $Q(x) = x^3 - 8$ deixa o resto $R(x) = Ax^2 + Bx + C$, pode-se afirmar que $4A + 2B + C$ é igual a:

a) 8

b) 16

X c) 12

d) 20

26. a) $Q(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 10x + 10$ e $R(x) = 0$
b) $Q(x) = 2x^2 + 4x + 1$ e $R(x) = 5$
c) $Q(x) = 3x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 26x + 52$ e $R(x) = -114$
d) $Q(x) = 4x^2 - 2x + 1$ e $R(x) = 0$

Divisão de polinômios por binômios na forma $x - \alpha$

Neste tópico, nosso objetivo é explorar algoritmos e propriedades relacionadas ao quociente e ao resto da divisão de um polinômio P(x) por binômios na forma $x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{C}$.

Estudar as divisões de polinômios para o caso particular quando o divisor é um binômio de grau 1 com coeficiente dominante igual a 1 é útil nos estudos subsequentes de polinômios e equações polinomiais, assunto do próximo capítulo.

Na divisão de um polinômio P(x) de grau *n* por um binômio do tipo $x - \alpha$, temos:

- o grau do quociente Q(x) deve ser $n - 1$, pois: $gr(Q) = gr(P) - gr(x - \alpha) \Rightarrow gr(Q) = n - 1$
- $R(x) = k$, $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$ ou $R(x) = 0$ (polinômio nulo), pois o grau do resto deve ser menor do que o grau do divisor, que é 1.

Teorema do resto

Inicialmente vamos enunciar e demonstrar o **teorema do resto**, fato que irá auxiliar nos cálculos das divisões de polinômios.

O resto da divisão de um polinômio P(x) por $x - \alpha$ é igual a $P(\alpha)$.

Em outras palavras, o teorema do resto diz que o resto da divisão de P(x) por $x - \alpha$ é igual ao valor numérico desse polinômio para $x = \alpha$.

Demonstração

Como o resto da divisão é independente de *x*, ou seja, é igual a uma constante, chamaremos R(x) de *r*.

Sabemos que $P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) + r$.

Se *x* for igual à raiz do divisor, isto é, $x = \alpha$, temos o seguinte valor numérico para P(x):

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot Q(\alpha) + r \Rightarrow P(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) + r \Rightarrow \boxed{P(\alpha) = r}$$

Por exemplo, vamos calcular o resto da divisão de $P(x) = x^2 + 4x + 5$ pelo binômio do 1º grau $B(x) = x - 1$.

Utilizando o método da chave, temos:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 4x + 5 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x + 5 \\ \cline{1-1} 5x + 5 & \\ -5x + 5 & \\ \cline{1-1} 10 & \end{array}$$

Logo, $R(x) = 10$.

A raiz do divisor $B(x) = x - 1$ é $x = 1$.

E o valor de P(x) para $x = 1$ é:

$P(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 + 5 \Rightarrow P(1) = 10$.

Uma consequência do teorema do resto é o chamado **teorema de D'Alembert**:

Um polinômio P(x) é divisível por $(x - \alpha)$ se, e somente se, α é uma raiz de P(x).

Demonstração

Temos duas implicações para provar:

- se P(x) é divisível por $x - \alpha$, então $r = 0$. Mas, pelo teorema do resto, $r = P(\alpha)$, logo, $P(\alpha) = 0$. Portanto, α é uma raiz de P(x).
- se α é uma raiz de P(x), temos que $P(\alpha) = 0$. Mas, pelo teorema do resto, $r = P(\alpha)$, logo, $r = 0$. Portanto, P(x) é divisível por $x - \alpha$.

Georgios Kollidas/Shutterstock.com

Jean Le Rond D'Alembert, 1717-1783, matemático francês.

Dispositivo de Briot-Ruffini

O quociente e o resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio na forma $x - \alpha$ podem ser obtidos por meio de um método prático, chamado de **dispositivo de Briot-Ruffini**, que consiste em efetuar a divisão fazendo cálculos com os coeficientes.

Observe, como exemplo, a divisão de $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 6$ por $x - 3$.

Sequência de passos	Exemplo
1º) Colocamos a raiz do divisor seguida dos coeficientes do dividendo, em ordem decrescente dos expoentes de *x* do polinômio na sua forma completa.	$\begin{array}{c\|cccc} \overbrace{3}^{\text{zero do divisor}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{2 \quad\quad -7 \quad\quad 4 \quad\quad -6}^{\text{coeficientes do dividendo}}} \\ \hline & & & & \end{array}$
2º) Repetimos, abaixo da linha, o primeiro coeficiente do dividendo.	$\begin{array}{c\|cccc} 3 & 2 & -7 & 4 & -6 \\ \hline & \downarrow & & & \\ & 2 & & & \end{array}$
3º) Multiplicamos o coeficiente repetido pela raiz do divisor e adicionamos o produto com o segundo coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo.	$\begin{array}{c\|cccc} 3 & 2 & -7 & 4 & -6 \\ \hline & 2 & -1 & & \end{array}$ $2 \cdot 3 + (-7) = -1$
4º) Multiplicamos o número colocado abaixo do segundo coeficiente pela raiz do divisor e adicionamos o produto com o terceiro coeficiente, colocando o resultado abaixo e, assim, sucessivamente.	$\begin{array}{c\|cccc} 3 & 2 & -7 & 4 & -6 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -3 \end{array}$ $(-1) \cdot 3 + 4 = 1$ $1 \cdot 3 + (-6) = -3$
5º) Separamos o último número formado, sendo esse o resto da divisão; os números que ficam à esquerda são os coeficientes do quociente. Portanto: $Q(x) = 2x^2 - x + 1$ e $R(x) = -3$.	$\begin{array}{c\|ccc:c} 3 & 2 & -7 & 4 & -6 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -3 \end{array}$ $\underbrace{2 \quad -1 \quad 1}_{\text{coeficientes do quociente}} \quad \underbrace{-3}_{\text{resto}}$

Exercícios resolvidos

13 Determine o valor de *a* para que o resto da divisão de $P(x) = x^2 + ax - 3$ por $x - 2$ seja 8.

Resolução

A raiz do divisor é: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Usando o teorema do resto, temos:

$P(2) = (2)^2 + a \cdot 2 - 3 = 8 \Rightarrow 4 + 2a - 3 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{2}$

14 Determine os números reais *a* e *b* de modo que o polinômio $P(x) = 3x^3 - 4ax^2 + x + b$ seja divisível por $(x - 1)$ e que dividindo por $(x + 2)$ dê resto -42.

Resolução

Como $P(x)$ deve ser divisível por $x - 1$, temos que $P(1) = 0$. Então:

$P(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^3 - 4a \cdot 1^2 + 1 + b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4a + b = -4$ (I)

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ deve ser igual a -42, pelo teorema do resto, $P(-2) = -42$. Então:

$P(-2) = -42 \Rightarrow 3 \cdot (-2)^3 - 4a \cdot (-2)^2 + (-2) +$

$+ b = -42 \Rightarrow -16a + b = -16$ (II)

As equações (I) e (II) formam o sistema a seguir:

$$\begin{cases} -4a + b = -4 \\ -16a + b = -16 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos: $a = 1$ e $b = 0$.

15 Determine, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, o quociente e o resto da divisão de

$P(x) = 5x^2 - 4x + 2$ por $(3x - 1)$.

Resolução

Sejam $Q(x)$ e r_0 o quociente e o resto da divisão. Então:

$P(x) = (3x - 1) \cdot Q(x) + r_0$

$P(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot 3Q(x) + r_0$

Como o binômio original não tem a forma $(x - a)$, dividimos $P(x)$ por $\left(x - \frac{1}{3}\right)$ e, no final, dividimos por 3 os coeficientes para obter o quociente $Q(x)$ da divisão.

$\frac{1}{3}$	5	-4	2
	5	$-\frac{7}{3}$	$\frac{11}{9}$

$\left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{11}{9}$

$5 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -\frac{7}{3}$

Quociente: $Q(x) = \frac{5}{3}x - \frac{7}{9}$

Resto: $R(x) = \frac{11}{9}$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

36. Sabendo que o polinômio $A(x)$ é divisível por $B(x) = x + 3$ e o quociente é $Q(x) = 4x - 1$, calcule $A(x)$. $A(x) = 4x^2 + 11x - 3$

37. Considere o polinômio de coeficientes reais $P(x) = 2x^4 + Ax^3 - 5x^2 + Bx + 16$. Sabendo que $P(1) = 15$ e $P(-2) = 0$, calcule o quociente de $P(x)$ pelo binômio $D(x) = x + 2$. $Q(x) = 2x^3 - 5x + 8$

38. Dê o resto da divisão de $P(x) = x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ por:

a) $x - 3$ $r = 85$
b) $x + 3$ $r = 43$
c) $2x + 5$ $r = \frac{273}{8}$

39. Determine *k*, de modo que o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + kx - 1$ dividido por:

a) $x - 1$ dê resto 4; 5
b) $2x - 3$ dê resto -1. $-\frac{3}{4}$

40. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que o resto da divisão de $P(x) = x^3 - x^2 + mx + 1$ por $x - 2$ seja positivo. $S = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m > -\frac{5}{2}\right\}$

41. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, calcule o quociente e o resto da divisão de: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ por $(x - 2)$
b) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 1$ por $(x - 1)$
c) $P(x) = 4x^5 - 5x^4 + 1$ por $(x - 1)$
d) $P(x) = x^2 - 2x + 1$ por $(2x - 3)$

42. (UEL-PR) Se o resto da divisão do polinômio $p = x^4 - 4x^3 - kx - 75$ por $(x - 5)$ é 10, o valor de *k* é:

a) -5 b) -4 c) 5 d) 6 X e) 8

43. Qual o resto da divisão do polinômio

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}$$ por $x - b$? $R = 0$

44. Mostre que $x - 5$ é um fator de $P(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ e calcule o quociente de $P(x)$ por $(x - 5)$. $Q(x) = x^2 - 5x + 6$

Divisão de polinômios pelo produto $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$

Até agora estudamos alguns teoremas e métodos para realizar divisões de polinômios por binômios da forma $(x - \alpha)$. Agora vamos estudar como esses teoremas podem auxiliar na divisão de polinômios por um produto de binômios da forma $(x - \alpha)(x - \beta)$. Para isso, vamos relembrar os teoremas abordados até aqui:

- O teorema do resto diz: o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ pelo binômio $(x - \alpha)$ é igual a $P(\alpha)$.
- O teorema de D'Alembert diz: um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$ se, e somente se, α é uma raiz de $P(x)$, ou seja, $P(\alpha) = 0$.

A partir destes teoremas podemos enunciar o seguinte teorema:

Se um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$ e por $(x - \beta)$, com $\alpha \neq \beta$, então $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$.

Demonstração

Sendo $P(x)$ divisível por $(x - \alpha)$ e por $(x - \beta)$, temos $P(\alpha) = 0$ e $P(\beta) = 0$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$ é da forma $R(x) = mx + n$, pois o divisor $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$ é do 2º grau. Logo, sendo $Q(x)$ o quociente dessa divisão, temos:

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \beta) \cdot Q(x) + \underbrace{mx + n}_{R(x)}$$

Substituindo *x* por α e por β, obtemos:

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot (\alpha - \beta) \cdot Q(\alpha) + m\alpha + n = m\alpha + n$$
$$P(\beta) = (\beta - \alpha) \cdot (\beta - \beta) \cdot Q(\beta) + m\beta + n = m\beta + n$$

E, sendo $P(\alpha) = P(\beta) = 0$, temos o sistema:

$$\begin{cases} m\alpha + n = 0 \\ m\beta + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ a solução é } m = n = 0$$

Portanto, $R(x) = 0$ e o polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$.

Observações:

- A recíproca desse teorema é verdadeira, ou seja:
  "Se $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha) \cdot (x - \beta)$, então $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$ e é divisível por $(x - \beta)$."
- O teorema pode ser generalizado para um número finito de fatores
  $$(x - \alpha_1), (x - \alpha_2), (x - \alpha_3), \dots, (x - \alpha_n)$$
  com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ distintos dois a dois.

Exercícios resolvidos

16 Determine *a* e *b*, de modo que $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ seja divisível por $(x - 1) \cdot (x - 2)$.

Resolução

Pela recíproca do teorema, se $P(x)$ é divisível por $(x - 1) \cdot (x - 2)$, então é divisível por $(x - 1)$ e por $(x - 2)$.

$P(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 10 = 0 \Rightarrow a + b = -11$

$P(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 10 = 0 \Rightarrow 2a + b = -9$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = -11 \\ 2a + b = -9 \end{cases}$, obtemos: $a = 2$ e $b = -13$.

17 Sabendo que -1 é uma raiz do polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, fatore $P(x)$ e determine, se existirem, as outras raízes.

Resolução

Como -1 é uma raiz de $P(x)$, então $P(-1) = 0$ e $P(x)$ é divisível por $(x + 1)$.

Vamos dividir $P(x)$ por $(x + 1)$, usando o dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc:c} -1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ \hline & \underbrace{1 \quad -4 \quad 3}_{\text{coeficiente de } Q(x)} & & & \underbrace{0}_{\text{resto}} \end{array}$$

O quociente é $Q(x) = x^2 - 4x + 3$ e o resto é $R = 0$.

Logo, $P(x) = (x + 1) \cdot (x^2 - 4x + 3)$.

Para encontrarmos as outras raízes, fazemos $P(x) = 0$:

$P(x) = 0 \Rightarrow (x + 1) \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ ou $x^2 - 4x + 3 = 0$

A equação $x + 1 = 0$ tem raiz -1 (conhecida do enunciado) e a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ tem raízes 1 e 3.

Portanto, as raízes de $P(x)$ são -1, 1 e 3 e sua fatoração é: $P(x) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$

Observação:

- Se x' e x'' são as raízes do trinômio do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, então sua fatoração é: $y = a(x - x') \cdot (x - x'')$.

18 Um polinômio $P(x)$ deixa resto 4 quando dividido por $x - 1$ e resto 12 quando dividido por $x - 2$. Determine o resto da divisão de $P(x)$ pelo produto $(x - 1) \cdot (x - 2)$.

Resolução

Pelo teorema do resto, temos $P(1) = 4$ e $P(2) = 12$.

Como o produto $(x - 1) \cdot (x - 2)$ tem grau 2, o resto da divisão de $P(x)$ por ele tem, no máximo, grau 1. Então, $R(x) = ax + b$.

Sendo $Q(x)$ o quociente da divisão de $P(x)$ por $(x - 1) \cdot (x - 2)$ e $R(x)$ o resto, temos:

$$P(x) = [(x - 1) \cdot (x - 2)] \cdot Q(x) + \overbrace{ax + b}^{R(x)}$$

Fazendo $P(1) = 4$ e $P(2) = 12$, temos:

$P(1) = [(1 - 1) \cdot (1 - 2)] \cdot Q(1) + a \cdot 1 + b = 4$

$P(2) = [(1 - 2) \cdot (2 - 2)] \cdot Q(2) + a \cdot 2 + b = 12$

Das equações acima, temos o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 2a + b = 12 \end{cases} \Rightarrow a = 8 \text{ e } b = -4$$

Portanto, o resto da divisão é $R(x) = 8x - 4$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

45. Decomponha em fatores do 1º grau os polinômios a seguir.

a) $4x^2 - 11x - 3$ $4\left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot (x - 3)$

b) $3x^2 - 7x + 2$ $3\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot (x - 2)$

c) $x^2 - 25$ $(x - 5) \cdot (x + 5)$

d) $x^2 - 10x + 25$ $(x - 5)^2$

e) $x^2 + 1 = 0$ $(x + i) \cdot (x - i)$

f) $2x^2 + 18 = 0$ $(x + 3i) \cdot (x - 3i)$

46. O polinômio $P(x) = x^3 - 4x - 3$ é divisível por $(x + 1)$. Expresse $P(x)$ como um produto de dois fatores, sendo um deles o binômio $(x + 1)$. $P(x) = (x + 1) \cdot (x^2 - x - 3)$

47. (UFMS) Sabe-se que o polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + mx + n$ é divisível por $(x + 1) \cdot (x - 2)$. Determinar o produto $m \cdot n$. 30

48. Um polinômio $P(x)$ quando dividido por $(x - 1)$ deixa resto 2 e, ao ser dividido por $(x - 2)$, deixa resto 1. Qual o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 2) \cdot (x - 1)$? $-x + 3$

49. Determine *m* e *n* para que o polinômio $P(x) = 2x^4 - x^3 + mx^2 + 2n$ seja divisível por $x^2 - x - 2$. Sugestão: faça $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. $m = -7$ e $n = 2$

50. Um polinômio $P(x)$ dividido por $(x - 1)$ dá resto 2, por $(x - 2)$ dá resto 1 e por $(x - 3)$ dá resto -4. Calcular o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. $-2x^2 + 5x - 1$

51. (Uespi-PI) Qual o resto da divisão do polinômio $x^{25} + x^{16} + x^9 + x^4 + x$ pelo polinômio $x^3 - x$?

a) $x^2 + 3x$

X b) $2x^2 + 3x$

c) $3x^2 + 2x$

d) $x^2 + 2x$

e) $2x^2 + x$

52. Calcule *a* e *b* para que o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 + (a + 5b)x + (a + 2b)$ seja divisível por $x^2 - x$. $a = 2$ e $b = -1$

53. (Unioeste-PR) O capital livre para investimentos, ou o capital de giro, de uma empresa (*C*) em função dos anos (*t*) de sua existência no mercado pode ser descrito pela função $C(t) = t^3 - 14t^2 + 56t - 64$. Sabe-se que no 4º ano a empresa apresentou um capital de giro igual a zero. Os demais anos, nos quais a empresa apresentou um capital de giro também igual a zero, somam

a) 8.

b) 5.

X c) 10.

d) 7.

e) 11.

54. O mosquito *Aedes aegypti* é conhecido como o transmissor do vírus da dengue. No entanto, a partir de 2014, outros vírus transmitidos pelo mosquito foram descobertos no Brasil. Um deles é o Zika Vírus, que, de acordo com alguns estudos, pode estar associado com o aumento dos casos de microcefalia no país. Algumas epidemias podem ser modeladas quantitativamente por funções polinomiais, auxiliando na análise de sua evolução. Leia o texto a seguir a respeito do Zika Vírus e faça o que se pede em cada item.

Palê Zuppani/Pulsar

Pneus abandonados ao ar livre costumam armazenar água parada em seu interior, tornando-se criadouros do mosquito *Aedes aegypti*.

Zika Vírus

19 de dezembro de 2015

Transmitido por um mosquito já bem conhecido dos brasileiros, o *Aedes aegypti*, o vírus Zika começou a circular no Brasil em 2014, mas só teve os primeiros registros feitos pelo Ministério da Saúde em maio de 2015. O que se sabia sobre a doença, até o segundo semestre deste ano, era que sua evolução é benigna e que os sintomas são mais leves do que os da dengue e da febre chikungunya, também transmitidas pelo mesmo mosquito.

Porém, no dia 28 de novembro o Ministério da Saúde confirmou que quando gestantes são infectadas por este vírus podem gerar crianças com microcefalia, uma malformação irreversível do cérebro, que pode vir associada a danos mentais, visuais e auditivos.

A chegada do vírus ao Brasil elevou o número de nascimentos de crianças com microcefalia de 147, no ano passado, para mais de duas mil crianças este ano. Por enquanto, na maioria destes casos, a relação com o Zika ainda está sendo investigada. Os casos de microcefalia relacionados a gestantes infectadas pelo vírus foram confirmados em 134 crianças que nasceram com a malformação. O Nordeste do país concentra o maior número de registros. [...]

Prevenção

Não existe vacina contra o Zika e o desenvolvimento deste produto pode levar mais de dez anos. Até lá, a única forma de prevenir é evitando o mosquito, destruindo os criadouros, as larvas e usando repelentes. [...]

Sintomas

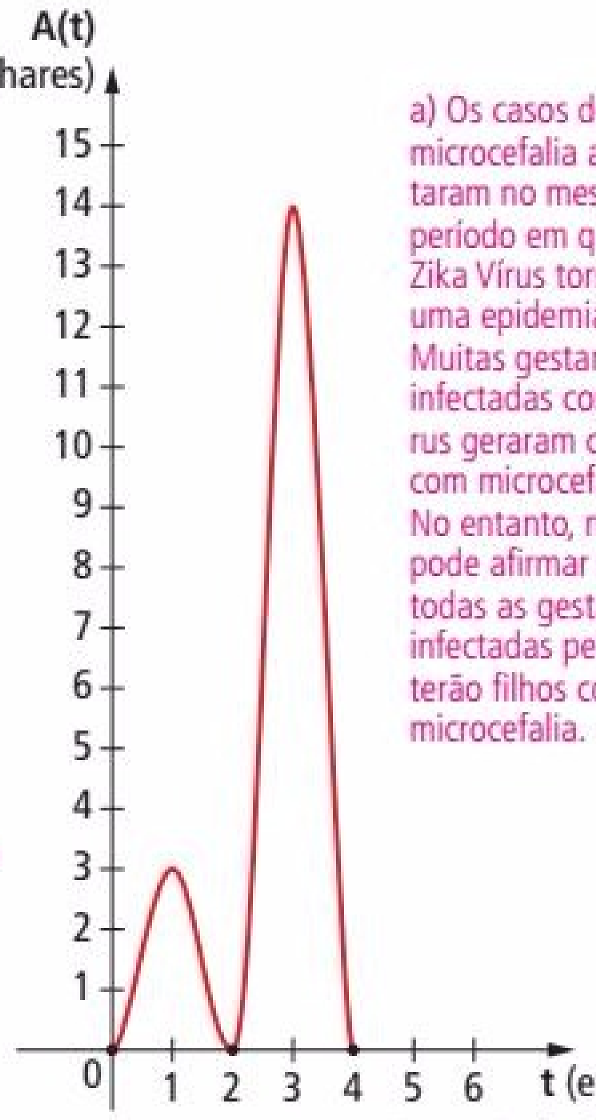
Segundo o Ministério da Saúde, 80% dos infectados pelo Zika não apresentam sinais da doença. Enquanto isso, os outros 20% podem ter febre baixa, dores leves nas articulações, coceira no corpo, olhos vermelhos e quase sempre têm manchas vermelhas na pele. Os sintomas costumam durar de três a sete dias. [...]

Fonte: CRISTINA, Lana. Ministério da Saúde explica tudo que sabe sobre o Zika vírus. **EXAME.COM**, 19 dez. 2015. Disponível em: <http://exame.abril.com.br/tecnologia/noticias/ministerio-da-saude-explica-tudo-que-sabe-sobre-o-zika-virus>. Acesso em: 7 jan. 2016.

a) De acordo com o texto, de que maneira o Zika Vírus e a microcefalia estão relacionados?

a) Os casos de microcefalia aumentaram no mesmo período em que o Zika Vírus tornou-se uma epidemia. Muitas gestantes infectadas com o vírus geraram crianças com microcefalia. No entanto, não se pode afirmar que todas as gestantes infectadas pelo vírus terão filhos com microcefalia.

b) Em uma pequena cidade do interior começaram a ocorrer alguns casos de um novo vírus *A*. Para estudar a nova patologia, os cientistas fizeram algumas observações durante determinado tempo e perceberam que o comportamento do vírus pode ser modelado pela função polinomial dada por $A(t) = -x^5 + 8x^4 - 20x^3 + 16x^2$, em que t corresponde ao período avaliado, em dias, e A(t) é a quantidade de infectados (em milhares) com esse vírus. O gráfico dessa função para $0 \leqslant t \leqslant 4$, está representado ao lado.



Editoria de arte

Fonte: Dados fictícios.

De posse dessas informações, responda:

i) Qual é o grau do polinômio que modela a evolução do vírus *A*? O polinômio A(t) é de grau 5.

ii) Quantos foram os infectados no terceiro dia de observação? ii) No terceiro dia de observação foram infectados 14 mil pacientes.

iii) Em quais dias da observação não houve infectados? No início da observação (dia 0), no segundo e no quarto dia.

c) Converse com os colegas a respeito das formas de prevenção das doenças transmitidas pelo mosquito *Aedes aegypti*. Crie uma listagem contendo as dicas elaboradas e verifique se todas elas estão sendo observadas em sua casa e na sua comunidade. Em caso negativo, discuta com seus familiares sobre as ações que devem ser tomadas regularmente para evitar a contaminação das doenças transmitidas pelo mosquito. Resposta pessoal.

Explorando a tecnologia

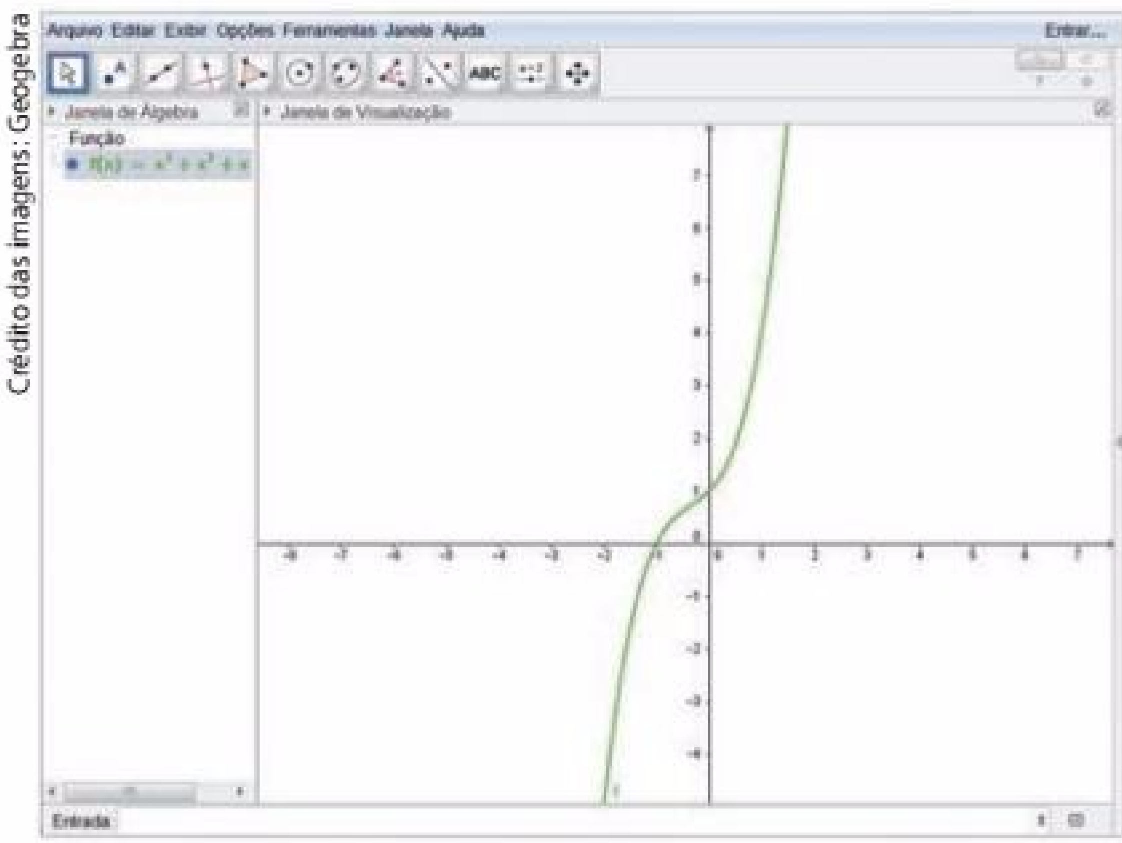
Gráficos de funções polinomiais usando o Geogebra

No volume 1 desta coleção estudamos as funções polinomiais do 1º e do 2º grau, inclusive seus gráficos. No caso das funções polinomiais de grau maior que 2, também é possível traçar o gráfico da função associada. No entanto, a curva não tem um traçado padrão, como nos casos da reta e da parábola já estudados. Por isso, vamos usar o *software* GeoGebra para conhecer o gráfico de algumas funções polinomiais de grau maior que 2.

1. No **Campo de Entrada**, digite 'x^3+x^2+x+1'. Com isso, estamos criando o gráfico da função polinomial do 3º grau dada por $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

A tela do GeoGebra ficará semelhante à figura abaixo.

Crédito das imagens: Geogebra

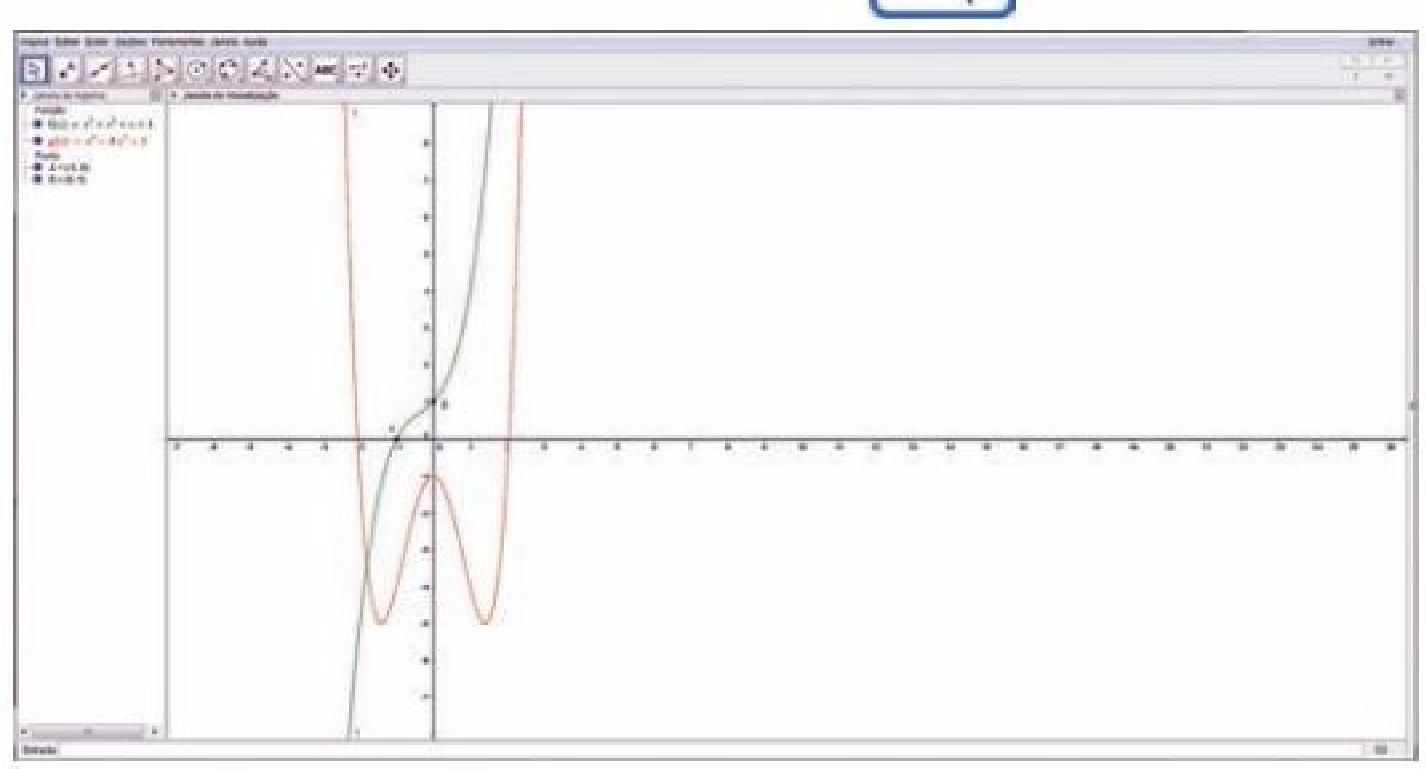


Observe que o gráfico da função f(x) intersecta os eixos coordenados em dois pontos.

2. Para determinar esses pontos use a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, .

Clique no gráfico da função f(x), na **Janela de Visualização**, e em seguida clique no eixo das abscissas, o ponto A (−1, 0) aparecerá no gráfico. Repita o processo clicando no eixo das ordenadas e o ponto B (0, 1) também será exibido no gráfico.

Observe que ao gráfico de f(x) intersecta o eixo *x* uma vez, ou seja, a função $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ possui uma raiz real: −1 (abscissa do ponto A).



3. Agora digite 'x^4−4x^2−1' no **Campo de Entrada**. O gráfico da função polinomial do 4º grau dada por $g(x) = x^4 - 4x^2 - 1$ será criado. A tela do GeoGebra ficará semelhante à figura acima:

Neste caso, o gráfico da função g(x) intersecta o eixo *x* duas vezes, ou seja, a função g(x) possui duas raízes reais: −2 e 2 (abscissas dos pontos).

Atividades

Escreva no caderno

1. Assim como fizemos para as funções polinomiais do 1º e do 2º grau, é possível observar a influência dos coeficientes de cada termo do polinômio no gráfico da respectiva função. Para isso, digite 'ax ^ 3' no **Campo de Entrada** e crie o **Controle Deslizante** para o coeficiente *a*. Movimente o **Controle Deslizante** e veja o que acontece com o gráfico da função do 3º grau. Qual é o ponto que permanece sem se mover, ou seja, faz parte do gráfico da função dada por ax^3, para todo $a \in \mathbb{R}$? A origem do sistema cartesiano, o ponto (0,0).

2. Construa o gráfico de uma função polinomial do 4º grau (diferente de $g(x) = x^4 - 4x^2 - 1$) e determine os pontos que intersectam os eixos coordenados. O gráfico obtido tem a forma parecida com o gráfico de g(x)? Converse com seus colegas e observem o gráfico que cada um construiu. Há gráficos parecidos?

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos concluam que os gráficos das funções polinomiais do 4º grau são muito diferentes entre si. É possível também que tentem achar semelhanças entre os gráficos dos colegas, observando os coeficientes que cada um escolheu.

CAPÍTULO 9

Equações polinomiais

No volume 1 desta coleção abordamos as equações do 1º e do 2º grau e maneiras de resolvê-las. As equações de grau maior que 3 também podem ser resolvidas, no entanto não há fórmulas específicas para todos os graus. Assim, neste capítulo, estudaremos alguns métodos, teoremas e propriedades para a resolução de equações de qualquer grau, utilizando os conhecimentos a respeito de polinômios e números complexos. Vale lembrar que os tópicos estudados aqui também valem para as equações do 1º e do 2º grau.

Definição de equação polinomial

Denominamos equação polinomial ou equação algébrica de grau *n*, na variável $x \in \mathbb{C}$, toda equação que pode ser escrita na forma $P(x) = 0$, em que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \text{ com } a_n \neq 0$$

é um polinômio de grau *n*, $n \in \mathbb{N}^*$ e coeficientes complexos.

Observe alguns exemplos de equações polinomiais a seguir.

a) $3x - 4 = 0$ é uma equação polinomial do 1º grau.

b) $2x^2 - 5x + 8 = 0$ é uma equação polinomial do 2º grau.

c) $4x^3 + 5x^2 - \sqrt{3}x - 7 = 0$ é uma equação polinomial do 3º grau.

d) $x^5 + \frac{2}{3}x^4 + 9x - 6 = 0$ é uma equação polinomial do 5º grau.

e) $3ix^7 + 4x - \sqrt{5}i + 1 = 0$ é uma equação polinomial do 7º grau.

Raiz de uma equação polinomial

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ um polinômio de grau *n*. Denominamos raiz da equação polinomial $P(x) = 0$ o valor $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, que satisfaz à igualdade, ou seja, $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$. Assim:

α é uma raiz da equação $P(x) = 0 \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$

Desse modo, a raiz de uma equação polinomial $P(x) = 0$ coincide com a raiz do polinômio $P(x)$, ou seja, α é uma raiz da equação polinomial $P(x) = 0$ se, e somente se, α também for raiz do polinômio $P(x)$.

Por exemplo, dada a equação polinomial $x^3 - 4x^2 + 14x - 20 = 0$, temos:

- 2 é uma raiz da equação, pois $2^3 - 4 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 - 20 = 0$.
- $1 + 3i$ é uma raiz da equação, pois $(1 + 3i)^3 - 4(1 + 3i)^2 + 14(1 + 3i) - 20 = 0$.
- 3 não é uma raiz da equação, pois $3^3 - 4 \cdot 3^2 + 14 \cdot 3 - 20 = 13 \neq 0$.
- $2i$ não é uma raiz da equação, pois $(2i)^3 - 4(2i)^2 + 14(2i) - 20 = 20i - 4 \neq 0$.

Conjunto solução

O **conjunto solução *S*** de uma equação polinomial é o conjunto de todas as raízes dessa equação.

Por exemplo:

a) $3x + 9 = 0 \Rightarrow S = \{-3\}$

b) $x^2 - 4x + 29 \Rightarrow S = \{2 + 5i, 2 - 5i\}$

c) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12 \Rightarrow S = \{-3, 1, -2i, 2i\}$

Para determinar as raízes de equações do 1º e do 2º grau, dispomos de fórmulas que envolvem cálculos elementares. Observe:

- A raiz da equação do 1º grau $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, é dada por:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

- As raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, são dadas por:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Equações polinomiais de graus 3 e 4 foram estudadas por alguns matemáticos do século XVI, que desenvolveram fórmulas para encontrar suas raízes, mas os cálculos envolvidos são bastante complexos e não são estudados no Ensino Médio.

Então, para determinar as raízes de equações polinomiais de grau maior que 2 vamos manipulá-las algebricamente usando artifícios como a fatoração e a substituição de variável. Acompanhe os exercícios resolvidos a seguir.

Niels Henrik Abel (1802-1829), matemático norueguês, demonstrou que, exceto em casos particulares, equações de grau maior ou igual a 5 não podem ser resolvidas apenas por meio de radicais, ou seja, apenas com as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Exercícios resolvidos

1 Resolva a equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$.

Resolução

Na equação dada, a incógnita *x* é um fator comum, então podemos colocá-la em evidência:

$x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0$

Lembre-se de que se um produto é nulo, pelo menos um dos fatores é nulo, isto é:

$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$

Logo,

$x = 0 \text{ ou } x^2 - 5x + 6 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$x = 2 \text{ ou } x = 3$

Portanto, $S = \{0, 2, 3\}$.

2 Resolva a equação $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

Resolução

Na equação dada, observamos que é possível realizar a fatoração por agrupamento, juntando os dois primeiros termos e os dois últimos. Assim:

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 (x + 1) - 4(x + 1) = 0$

$(x + 1)(x^2 - 4) = 0$

Como o produto é nulo, devemos ter:

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$

Portanto, $S = \{-2, -1, 2\}$.

3 Resolva a equação $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

Resolução

Observamos que a equação é do 4° grau, mas tem apenas os termos x^4 e x^2 além do coeficiente independente, ou seja, é uma equação biquadrada. Para resolvê-la, fazemos a substituição de variável $x^2 = y$. Assim:

$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y - 36 = 0$

Resolvendo a equação do 2° grau em *y*, temos:

$y = 9 \text{ ou } y = -4$.

Substituindo os valores de *y* em $x^2 = y$, temos:

$y = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$

$y = -4 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = 2i \text{ ou } x = -2i$

Portanto, $S = \{-3, 3, -2i, 2i\}$.

Teorema fundamental da Álgebra

O estudo das equações polinomiais envolve diversos teoremas. Um deles é o teorema fundamental da Álgebra, enunciado e demonstrado pelo matemático alemão Carl F. Gauss (1777-1855) como parte de sua tese de doutorado.

Este teorema, que admitiremos sem reproduzir a demonstração, diz que:

Toda equação polinomial de grau *n*, com $n \geqslant 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.

Esse teorema garante que toda equação polinomial de grau não nulo tem solução. No entanto, não nos diz como determinar essa solução. As equações do 1º e do 2º grau têm fórmulas consagradas e, desde o século XVI, são conhecidas fórmulas para as equações do 3º e do 4º grau.

Vamos nos concentrar nas propriedades e técnicas para a resolução de alguns casos particulares de equações polinomiais de grau maior que 2.

Teorema da decomposição em fatores

A partir do teorema fundamental da Álgebra e do teorema de D'Alembert, estudado no capítulo anterior, enunciamos o teorema da decomposição em fatores:

Todo polinômio de grau *n*, com $n \geqslant 1$, definido por $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ pode ser decomposto na forma $P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$, em que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são as raízes de P(x).

Observação:

É possível provar que a decomposição de um polinômio em fatores de 1º grau é única, a não ser pela ordem dos fatores.

Demonstração

Considere o polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \text{ com } n \geqslant 1.$$

Pelo teorema fundamental da Álgebra, P(x) admite pelo menos uma raiz complexa α_1. Então, pelo teorema de D'Alembert, P(x) é divisível por $(x - \alpha_1)$. Logo:

$$P(x) = (x - \alpha_1) \cdot Q_1(x), \text{ sendo } Q_1(x) \text{ de grau } n - 1.$$

Se $n-1 \geqslant 1$, então, pelo teorema fundamental da Álgebra, $Q_1(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa α_2 e, pelo teorema de D'Alembert, $Q_1(x)$ é divisível por $(x - \alpha_2)$. Assim:

$$Q_1(x) = (x - \alpha_2) \cdot Q_2(x), \text{ sendo } Q_2(x) \text{ de grau } n - 2.$$

Desse modo:

$$P(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot Q_2(x)$$

Repetindo esse procedimento *n* vezes, temos:

$$P(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q_n(x)$$

em que $Q_n(x)$ é um polinômio de grau zero, dado por $Q_n(x) = a_n$ (sendo a_n o coeficiente de x^n). Portanto:

$$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$$

Como consequência imediata do teorema da decomposição de fatores, temos:

Toda equação polinomial de grau *n* tem exatamente *n* raízes complexas.

Veja, por exemplo, alguns polinômios, suas raízes e a respectiva forma fatorada:

a) $p(x) = 4x - 12$

raiz: 3

forma fatorada: $p(x) = 4(x - 3)$

b) $q(x) = 3x^2 + 2x - 1$

raízes: -1 e $\frac{1}{3}$

forma fatorada: $q(x) = 3 \cdot (x + 1) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$

c) $r(x) = x^2 - 6x + 10$

raízes: $3 - i$ e $3 + i$

forma fatorada: $r(x) = (x - 3 + i) \cdot (x - 3 - i)$

d) $s(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

raízes: -2, -1 e 2

forma fatorada: $s(x) = (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

Multiplicidade de uma raiz

As raízes de uma equação algébrica podem ou não ser todas distintas. Caso a equação tenha duas raízes iguais, dizemos que essa raiz tem multiplicidade 2 ou que é uma raiz dupla; se tiver três raízes iguais, dizemos que é uma raiz de multiplicidade 3 ou que é raiz tripla; e assim por diante.

Quando um número é raiz de uma equação algébrica apenas uma vez, dizemos que esse número é uma raiz simples.

Observe os exemplos a seguir.

a) Na equação $x^3 + 6x^2 + 9x = 0$, que pode ser escrita na forma $x(x + 3)^2 = 0$, 0 é raiz simples e -3 é raiz dupla ou de multiplicidade 2.

Escrevendo $x(x + 3)^2 = 0$ na forma $x(x + 3)(x + 3) = 0$, percebemos mais claramente a multiplicidade da raiz -3.

b) A equação $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0$ pode ser escrita na forma:

$(x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) = 0$ ou $(x - 2)^2 \cdot (x + 1)^3 = 0$.

Nesse caso, dizemos que 2 é uma raiz dupla ou de multiplicidade 2 e que -1 é uma raiz tripla ou de multiplicidade 3.

Exercícios resolvidos

4 Sabendo que 2 é uma raiz da equação $x^3 + 2x^2 - 5x + c = 0$, determinar o seu conjunto solução.

Resolução

Se 2 é uma raiz da equação dada, temos:

$2^3 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + c = 0$

$8 + 8 - 10 + c = 0 \Rightarrow c = -6$

Logo, a equação é $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

Como 2 é raiz da equação, $(x - 2)$ é um dos seus fatores. Então, podemos escrever $(x - 2) \cdot Q(x) = 0$, em que $Q(x)$ é o quociente da divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + c$ por $(x - 2)$.

Portanto, $x - 2 = 0$ ou $Q(x) = 0$.

Para o cálculo de $Q(x)$, que é do 2º grau, utilizaremos o dispositivo de Briot-Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 4 \quad 3}_{\text{coeficientes de } Q(x)} & & & 0 \end{array}$$

Logo, $Q(x) = x^2 + 4x + 3$.

Fazendo $Q(x) = 0$, determinamos as outras raízes da equação:

$Q(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$

$x = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = -3 \\ x'' = -1 \end{cases}$

Portanto, $S = \{-3, -1, 2\}$.

5 Suponha que o polinômio do 3º grau $P(x) = x^3 + x^2 + mx + n$, em que m e n são números reais, seja divisível por $x - 1$.

a) Determine n em função de m.

b) Determine m para que P(x) admita raiz dupla diferente de 1.

c) Que condições m deve satisfazer para que P(x) admita três raízes reais e distintas?

Resolução

a) Se P(x) é divisível por $x - 1$, então, pelo teorema do resto, $P(1) = 0$.

$1^3 + 1^2 + m \cdot 1 + n = 0$

$n = -m - 2$

b) Dividindo P(x) por $x - 1$, pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

1	1	1	m	n
	1	2	2 + m	2 + m + n

Daí podemos escrever:

$$P(x) = (x - 1) \cdot \underbrace{(x^2 + 2x + 2 + m)}_{Q(x)}$$

Então, P(x) admite raiz dupla diferente de 1 se, e somente se, Q(x) tiver $\Delta = 0$ e $Q(1) \neq 0$, logo:

$\Delta = 0$	$Q(1) \neq 0$
$4 - 4(2 + m) = 0$	$1^2 + 2 \cdot 1 + 2 + m \neq 0$
$-4 - 4m = 0$	$5 + m \neq 0$
$m = -1$	$m \neq -5$

Portanto, $m = -1$.

c) Sendo $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 2 + m)$, conclui-se que P(x) admite três raízes reais distintas se, e somente se, Q(x) tiver $\Delta > 0$ e $Q(1) \neq 0$. Então:

$\Delta > 0$

$4 - 4(2 + m) > 0$

$-4m > 4$

$m < -1$

Do item **b**, $Q(1) \neq 0 \Rightarrow m \neq -5$.

Portanto, $m < -1$ e $m \neq -5$.

6 Calcular a e b de modo que 2 seja raiz dupla da equação $x^3 + ax^2 - 8x + b = 0$.

Resolução

Como 2 deve ser raiz da equação dada, então o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 - 8x + b$ deve ser divisível por $(x - 2)$. Como é uma raiz dupla, então o quociente Q(x) dessa divisão também deve ser divisível por $(x - 2)$.

Assim, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

2	1	a	−8	b
2	1	a + 2	2a − 4	4a + b − 8
	1	a + 4	4a + 4	

Fazendo os restos iguais a zero, temos:

$$\begin{cases} 4a + 4 = 0 & \text{I} \\ 4a + b - 8 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

De I, obtemos o valor de a:

$4a + 4 = 0$

$a = -1$

Substituindo $a = -1$ em II, temos:

$-4 + b - 8 = 0 \Rightarrow b = 12$

Portanto, $a = -1$ e $b = 12$.

7 (Vunesp-SP) A altura h de um balão em relação ao solo foi observada durante certo tempo e modelada pela função:

$$h(t) = t^3 - 30t^2 + 243t + 24$$

com h(t) em metros e t em minutos.

No instante $t = 3$ min, o balão estava a 510 metros de altura. Determine em que outros instantes t a altura foi também de 510 m.

Resolução

Fazendo $h(t) = 510$, obtemos a equação:

$t^3 - 30t^2 + 243t + 24 = 510$

$t^3 - 30t^2 + 243t - 486 = 0$

Essa equação admite o número 3 como raiz; logo, $(t - 3)$ é um de seus fatores.

Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini para fatorar a equação, temos:

3	1	−30	243	−486
	1	−27	162	0

Assim, a equação pode ser escrita na forma fatorada:

$(t - 3)(t^2 - 27t + 162) = 0$

De $t^2 - 27t + 162 = 0$, temos:

$t = 9$ ou $t = 18$

Portanto, os outros instantes em que a altura também foi 510 m são 9 min e 18 min.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Utilizando a fatoração, determine o conjunto solução das equações algébricas.

a) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ $S = \{-3, -1, 1\}$

b) $x^3 + 2x^2 + 25x + 50 = 0$ $S = \{-2, -5i, 5i\}$

c) $x^3 + x = 0$ $S = \{0, -i, i\}$

d) $x^3 + x^2 - 100x - 100 = 0$ $S = \{-10, -1, 10\}$

2. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações algébricas a seguir.

a) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$ $S = \{-1, 1, -3i, 3i\}$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $S = \{-2, -1, 1, 2\}$

3. Resolva a equação:

$(x - 3)^3 - (x - 3)^2 = 0$ $\{3, 4\}$

4. (UEPB) Uma fábrica utiliza dois tanques para armazenar óleo diesel. Os níveis, N_1 e N_2, dos tanques são dados pelas expressões:

$$N_1(t) = 20t^3 - 10t + 20 \text{ e } N_2(t) = 12t^3 + 8t + 20$$

sendo *t* o tempo em hora.

O nível de óleo de um tanque é igual ao do outro no instante inicial $t = 0$ e também no instante:

a) $t = 0{,}5$ h

b) $t = 1{,}0$ h

c) $t = 2{,}5$ h

d) $t = 2{,}0$ h

X e) $t = 1{,}5$ h

5. (Vunesp-SP) Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$$

O determinante de *A* é um polinômio $p(x)$.

a) Verifique se 2 é uma raiz de $p(x)$. 2 é raiz.

b) Determine todas as raízes de $p(x)$. 2, 1 e -1

6. (UEMT) O polinômio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ possui:

a) 2 raízes reais e 2 raízes complexas.

b) 3 raízes reais.

X c) 1 raiz real e 2 raízes complexas.

d) 3 raízes complexas.

7. (UFGD-MS) Dado o polinômio

$p(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 29x - 30$, se 2 e -3 são raízes, podemos dizer que as outras duas raízes são:

X a) complexas.

b) iguais.

c) positivas.

d) negativas.

e) uma positiva e outra negativa.

8. Determine a função polinomial do 3º grau, com coeficiente dominante unitário, cujas raízes são:

a) 0, 1 e 2 $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

b) 1 (raiz simples) e 2 (raiz dupla) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

9. Um professor de matemática escreveu um polinômio $P(x)$ na lousa e falou que suas raízes, todas reais, eram iguais às idades de suas três filhas. Sabendo que as idades são iguais a 7, 8 e 10 anos, determine o polinômio escrito na lousa. $P(x) = x^3 - 25x^2 + 206x - 560$

10. Decomponha os polinômios a seguir em fatores.

a) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, em que uma das raízes é 1.
$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

b) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, em que uma das raízes é 2.
$P(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 1)$

11. Calcule os valores de *m* e *n* para que a equação $2x^3 + mx^2 + (m - 2n)x + (2m - 8) = 0$ possua uma só raiz nula. $m = 4$; $n \neq 2$

12. (Fuvest-SP) As três raízes de $9x^3 - 31x - 10 = 0$ são *p*, *q* e 2. O valor de $p^2 + q^2$ é:

a) $\dfrac{5}{9}$

b) $\dfrac{10}{9}$

c) $\dfrac{20}{9}$

X d) $\dfrac{26}{9}$

e) $\dfrac{31}{9}$

13. Sabendo que 1 e 3 são raízes da equação

$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 15 = 0$, determine o seu conjunto solução. $S = \{1, 3, 2 - i, 2 + i\}$

14. Resolva a equação polinomial

$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$, sabendo que 3 é raiz dupla da equação. $S = \{-1, 2, 3\}$

15. Resolva a equação $x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 7x - 3 = 0$, sabendo que -1 é uma raiz tripla dessa equação.
$S = \{-3, -1, 1\}$

16. Escreva na forma fatorada cada uma das equações algébricas a seguir.

a) $x^3 - 9x = 0$
$x(x - 3)(x + 3) = 0$

b) $x^3 + 6x^2 = 0$
$x^2 \cdot (x + 6) = 0$

17. (Unicamp-SP) Considere o polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + ax - a$, onde *a* é um número real. Se $x = 1$ é a única raiz real de $p(x)$, então podemos afirmar que

a) $a < 0$.

b) $a < 1$.

X c) $a > 0$.

d) $a > 1$.

18. (Unesp-SP) Sabe-se que 1 é uma raiz de multiplicidade 3 da equação $x^5 - 3 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1 = 0$. As outras raízes dessa equação, no Conjunto Numérico dos Complexos, são

a) $(-1 - i)$ e $(1 + i)$.

b) $(1 - i)^2$.

X c) $(-i)$ e $(+i)$.

d) (-1) e $(+1)$.

e) $(1 - i)$ e $(1 + i)$.

Relações de Girard

No século XVII, o matemático francês Albert Girard (1595-1632) apresentou um teorema que relacionava as raízes com os coeficientes de uma equação polinomial. Essas relações são ferramentas muito úteis na determinação de raízes de equações polinomiais de grau de valor elevado. Vamos estudar essas relações para as equações polinomiais de 2º, 3º e 4º graus e, em seguida, generalizar para uma equação de grau *n*.

Equação do 2º grau

Consideremos a equação polinomial do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são α_1 e α_2.

Decompondo o primeiro membro da equação em fatores do 1º grau, temos:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)$$

Dividindo ambos os membros por *a* ($a \neq 0$):

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)$$

Desenvolvendo o produto:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot x + \alpha_1 \cdot \alpha_2$$

Pela igualdade de polimônios, obtemos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{c}{a}$$

Portanto:

As raízes α_1 e α_2 de uma equação polinomial do 2º grau dada por $ax^2 + bx + c = 0$ são tais que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{c}{a}$$

Observação:

Esse resultado é equivalente às fórmulas de soma e produto (nesta coleção esse conteúdo foi retomado no capítulo 5 do volume 1), pois, para equações polinomiais do 2º grau, as relações de Girard são a soma e o produto das duas raízes.

Equação do 3º grau

Consideremos a equação polinomial do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, cujas raízes são α_1, α_2 e α_3.

Decompondo o primeiro membro em fatores do 1º grau, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3)$$

Dividindo ambos os membros por *a* ($a \neq 0$):

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3)$$

Desenvolvendo o produto e agrupando os termos semelhantes:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)\,x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

Para igualdade de polinômios, obtemos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a}; \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a}; \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}$$

Portanto:

As raízes α_1, α_2 e α_3 de uma equação polinomial do 3º grau dada por $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ são tais que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a}; \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a}; \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}$$

Equação do 4º grau

Consideremos agora a equação polinomial do 4º grau $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, cujas raízes são α_1, α_2, α_3 e α_4. Decompondo o primeiro membro em fatores do 1º grau, temos:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot (x - \alpha_4)$$

Dividindo ambos os membros por *a* ($a \neq 0$):

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot (x - \alpha_4)$$

Desenvolvendo o produto e agrupando os termos semelhantes, temos:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = x^4 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x^3 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4)x^2 - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)x + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

Pela igualdade de polinômios, obtemos as relações de Girard para equações do 4º grau. Portanto:

As raízes α_1, α_2, α_3 e α_4 de uma equação polinomial do 4º grau dada por $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ são tais que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 = -\frac{c}{a}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{d}{a}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{e}{a}$$

Equação de grau *n*

Utilizando raciocínio análogo ao feito nos casos anteriores, podemos generalizar as relações de Girard para a equação:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, de grau *n*, cujas raízes são α_1, α_2, α_3, ..., α_n, obtendo as seguintes relações:

- soma das *n* raízes:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_{n-1} + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

- soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas:

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

- soma dos produtos das raízes tomadas três a três:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_5 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

- soma dos produtos das raízes tomadas quatro a quatro:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_6 + ... + \alpha_{n-3}\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-4}}{a_n}$$

$$\vdots$$

- produto das *n* raízes:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 ... \alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$$

Para resolver uma equação polinomial utilizando as relações de Girard, precisamos de alguns dados auxiliares a respeito das raízes da equação, como uma relação entre essas raízes, por exemplo. Isso é necessário porque, apesar de as relações nos fornecerem *n* equações a *n* incógnitas, o sistema formado por essas equações recai na equação de grau *n*, dada inicialmente.

Exercícios resolvidos

8 Escreva as relações de Girard para a equação:

$2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 10x + 4 = 0$

Resolução

Indicando as raízes da equação dada por *a*, *b*, *c* e *d*, temos:

- $a + b + c + d = \frac{-6}{2} = -3$ (soma das quatro raízes)
- $ab + ac + ad + bc + bd + cd = -\frac{5}{2}$ (soma dos produtos das raízes duas a duas)
- $abc + abd + acd + bcd = \frac{-(-10)}{2} = 5$ (soma dos produtos das raízes três a três)
- $abcd = \frac{4}{2} = 2$ (produto das quatro raízes)

9 Sejam *a*, *b* e *c* as raízes da equação polinomial $2x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0$. Calcule:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

b) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$

c) $a^2 + b^2 + c^2$

Resolução

Utilizando as relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{-(-6)}{2}=3 \\ ab+ac+bc=-\frac{4}{2}=-2 \\ abc=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo:

a) $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ba}{abc}=\frac{(-2)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=(-2)\cdot\left(\frac{-2}{1}\right)=4$$

b) $$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{c+b+a}{abc}=\frac{3}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=3\cdot\left(-\frac{2}{1}\right)=-6$$

c) Elevando ao quadrado a expressão $(a + b + c)$, temos:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

$3^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(-2)$

$9 = a^2 + b^2 + c^2 - 4$

$a^2 + b^2 + c^2 = 13$

10 Resolva a equação $x^3 - 7x + 6 = 0$, sabendo que a soma de duas raízes é 3.

Resolução

A equação pode ser escrita na forma:

$1x^3 + 0x^2 - 7x + 6 = 0$

Indicando as raízes por *a*, *b* e *c*, e utilizando as relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \text{I} \\ ab+ac+bc=-\frac{7}{1}=-7 & \text{II} \\ abc=-\frac{6}{1}=-6 & \text{III} \end{cases}$$

Pelo enunciado, temos: $a + b = 3$. IV

Substituindo IV em I, temos:

$a + b + c = 0 \Rightarrow 3 + c = 0 \Rightarrow c = -3$

Como -3 é raiz da equação, vamos aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini para escrever a equação na forma $A(x) \cdot Q(x) = 0$. Assim:

−3	1	0	−7	6
	1	−3	2	0

coeficientes de Q(x)

$(x + 3) \cdot Q(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0$

As outras raízes são determinadas fazendo $Q(x) = 0$.

Resolvendo a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, encontramos as raízes $x' = 1$ e $x'' = 2$.

Portanto, o conjunto solução é $S = \{-3, 1, 2\}$.

11 Determinar *m* de modo que a equação $x^3 - 9x^2 + (m + 8)x - m = 0$ tenha as raízes em progressão aritmética.

Resolução

Se as raízes da equação estão em progressão aritmética (PA), podemos escrevê-las como $a - r$, a e $a + r$, em que *a* é uma das raízes e *r* é a razão da PA.

Pelas relações de Girard, temos:

$a - r + a + a + r = \frac{-(-9)}{1}$

$3a = 9$

$a = 3$

Se 3 é uma raiz da equação, temos:

$3^3 - 9 \cdot 3^2 + (m + 8) \cdot 3 - m = 0$

$27 - 81 + 3m + 24 - m = 0$

$2m = 30$

$m = 15$

Portanto, $m = 15$.

19. Sendo a e b as raízes da equação

$4x^2 - x + \sqrt{3} = 0$, calcule:

a) $a + b$ $\frac{1}{4}$

b) ab $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $a^2 + b^2$ $\frac{1 - 8\sqrt{3}}{16}$

20. (UFPR) Calcule o valor de $\log_{10}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)$, sendo a, b, c as raízes da equação $2x^3 - 30x^2 + 15x - 3 = 0$. 1

21. (Iesp-PB) Sabendo-se que a diferença entre as raízes da equação $x^2 - 10x + m = 0$ é 6, podemos concluir que o valor de m é:

a) 21 x b) 16 c) 9 d) 24 e) 25

22. Resolva a equação $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a 5.
$S = \{-2, 1, 4\}$

23. A equação $x^3 + 2x^2 - x + a = 0$ admite duas raízes opostas.

a) Determine o valor de a. $a = -2$

b) Resolva a equação. $S = \{-2, -1, 1\}$

24. Qual é o produto das raízes da equação $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$?
$-\frac{1}{2}$

25. (UEL-PR) Se -2 é uma das raízes da equação $x^3 + 4x^2 + x + k = 0$, onde $k \in \mathbb{R}$, o produto das outras duas raízes dessa equação é:

x a) -3 b) -2 c) 2 d) 3 e) 6

26. (UFPE) Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$. Determine o polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ que tem raízes x_1x_2, x_1x_3 e x_2x_3 e indique o valor do produto abc.
$P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$; $abc = 18$

27. (FGV-SP) Se a soma dos inversos das raízes reais da equação polinomial $x^2 - 2^kx + 36 = 0$, em que k é uma constante real, é igual a $\frac{4}{9}$, então a maior das raízes dessa equação é igual a

a) $4 + 3\sqrt{7}$

x b) $8 + 2\sqrt{7}$

c) 14

d) $6 + 4\sqrt{6}$

e) $8 + 4\sqrt{6}$

28. (OBM) A soma das raízes da equação

$\frac{1}{1 + x} + \frac{2}{2 + x} + \frac{3}{3 + x} = 1$ é:

x a) 0

b) 6

c) 14

d) 11

e) 9

29. (UEG-GO) João gosta de brincar com números e fazer operações com eles. Em determinado momento, ele pensou em três números naturais e, em relação a esses números, observou o seguinte:

- a soma desses números é 7;
- o produto deles é 8;
- a soma das três parcelas resultantes dos produtos desses números tomados dois a dois é 14.

Assim, os três números pensados por João são raízes da equação

x a) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

b) $x^3 + 7x^2 - 14x + 8 = 0$.

c) $x^3 - 7x^2 - 14x - 8 = 0$.

d) $x^3 + 7x^2 - 14x - 8 = 0$.

30. (Unesp-SP) Sabe-se que, na equação $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$, uma das raízes é igual à soma das outras duas. O conjunto solução (S) desta equação é

a) $S = \{-3, -2, -1\}$

x b) $S = \{-3, -2, +1\}$

c) $S = \{+1, +2, +3\}$

d) $S = \{-1, +2, +3\}$

e) $S = \{-2, +1, +3\}$

31. (Unicamp-SP) O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ tem três raízes: r, $-r$ e s.

a) Determine os valores de r e s. $r = \pm 3$; $s = 2$

b) Calcule $p(z)$ para $z = 1 + i$, onde i é a unidade imaginária. $7 - 11i$

32. (IBMEC) As raízes do polinômio $p(x) = x^3 - (6 + a)x^2 + (6a + 8)x - 8a$ constituem uma progressão geométrica crescente de inteiros positivos cujo primeiro termo é a. Denotando por $b < c$ as outras duas raízes, o valor de $c^b - b^a - a^c$ é:

x a) um número primo.

b) um múltiplo de 4.

c) um múltiplo de 6.

d) um quadrado perfeito.

e) um número negativo.

33. (ITA-SP) O valor da soma $a + b$ para que as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$ estejam em progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ é:

a) 36

x b) 41

c) 26

d) -27

e) -20

Raízes complexas

Ao resolver a equação polinomial do 2º grau $x^2 - 4x + 5 = 0$ obtemos as raízes $2 - i$ e $2 + i$. Observe que as raízes são números complexos conjugados. Esse fato não é um acaso e está relacionado à quantidade de raízes complexas não reais de uma equação polinomial com coeficientes reais.

Se um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, é raiz da equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, de coeficientes reais, então seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Para demonstrar o teorema acima, vamos utilizar três das propriedades do conjugado de um número complexo estudadas e demonstradas no capítulo 7 deste volume da coleção. Para isso, vamos relembrá-las. Assim, dados dois números complexos z_1 e z_2, temos:

- O conjugado de um número real é igual ao próprio número, ou seja, $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- O conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos conjugados desses números complexos, ou seja, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.
- O conjugado do produto de dois números complexos é igual ao produto dos conjugados desses números complexos, ou seja, $\overline{z_1 \cdot z_2} = = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

É possível demonstrar que as duas últimas propriedades são válidas para um número finito de complexos z_n. Agora, vamos à demonstração.

Demonstração

Considere a equação polinomial de grau $n > 1$, com coeficientes reais:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$$

Seja $z = a + bi$, com $b \neq 0$, uma raiz complexa não real dessa equação. Então:

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = 0$$

Tomando os conjugados de ambos os membros, temos:

$$\overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0} = \overline{0}$$

Como o conjugado da soma é igual à soma dos conjugados e $\overline{0} = 0$, obtemos:

$$\overline{a_nz^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + ... + \overline{a_1z} + \overline{a_0} = 0$$

Mas o conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados:

$$\overline{a_n} \cdot \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z^{n-1}} + ... + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0} = 0$$

Como o conjugado de um número real é igual ao próprio número e o conjugado de uma potência é igual à potência do conjugado, temos:

$$a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + ... + a_1 \cdot \overline{z} + a_0 = 0$$

Da igualdade acima, concluímos que $\overline{z}$ é uma raiz da equação polinomial:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$$

Como consequências desse teorema, temos:

- Em uma equação polinomial de coeficientes reais, se o número complexo *z* é raiz de multiplicidade *k*, então seu conjugado também é raiz de multiplicidade *k*.
- Uma equação polinomial de coeficientes reais possui um número par de raízes complexas não reais. Caso o grau da equação seja ímpar, ela possui necessariamente uma raiz real ou um número ímpar de raízes reais.

Raízes racionais

De acordo com o que estudamos até aqui, observamos que a resolução de equações polinomiais de grau $n > 2$ consiste basicamente em determinar uma ou mais raízes e, com base nelas, encontrar todas as raízes da equação.

Enunciamos mais um teorema que nos auxiliará a calcular raízes de equações algébricas com **coeficientes inteiros**.

Se o número racional $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ e *p* e *q* primos entre si, for raiz da equação algébrica de coeficientes inteiros $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com $a_0 \neq 0$, então *p* é divisor de a_0 e *q* é divisor de a_n.

Demonstração

Como $\frac{p}{q}$ é raiz da equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, temos:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \quad \text{(I)}$$

Multiplicando todos os membros por q^n, obtemos:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \quad \text{(II)}$$

Isolando a_np^n e dividindo ambos os membros de (II) por *q*, obtemos:

$$\frac{a_np^n}{q} = -\left(\underbrace{a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}}_{\text{número inteiro}}\right) \quad \text{(III)}$$

Como o segundo membro dessa igualdade é um número inteiro, pois $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, *p* e *q* são inteiros, então *q* tem de ser divisor de a_n, pois *p* e *q* são primos entre si.

Agora, isolando a_0q^n e dividindo a igualdade (II) por *p*, obtemos:

$$\frac{a_0q^n}{p} = -\left(\underbrace{a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1q^{n-1}}_{\text{número inteiro}}\right) \quad \text{(IV)}$$

Do mesmo modo feito em (III), como o segundo membro dessa igualdade é um número inteiro, então *p* tem de ser divisor de a_0, pois *p* e *q* são primos entre si.

Observações:

- Esse teorema não garante a existência de raízes racionais, mas, no caso de elas existirem, mostra como obtê-las.
- O teorema possibilita a formação de um conjunto de possíveis raízes racionais obtidas dos divisores de a_n e a_0. Se nenhum elemento desse conjunto for raiz da equação, esta não admitirá raízes racionais.
- Se $a_n = \pm 1$ e os demais coeficientes são inteiros, a equação não admite raízes fracionárias, podendo, entretanto, admitir raízes inteiras que são divisores de a_0.

Veja, agora, uma propriedade que contribui na determinação das raízes de uma equação polinomial:

Se a soma dos coeficientes de uma equação polinomial é igual a zero, então 1 é uma raiz da equação.

Demonstração

Consideremos a equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$.

Substituindo *x* por 1 no primeiro termo da equação temos:

$a_n1^n + a_{n-1}1^{n-1} + a_{n-2}1^{n-2} + \ldots + a_21^2 + a_11 + a_0 = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$

Mas $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 = 0$, pois a soma dos coeficientes é igual a zero.

Portanto, $x = 1$ é uma raiz da equação.

A recíproca desse teorema também é válida e pode ser demonstrada, ou seja, se 1 é raiz de uma equação polinomial, então a soma dos coeficientes dessa equação é igual a zero.

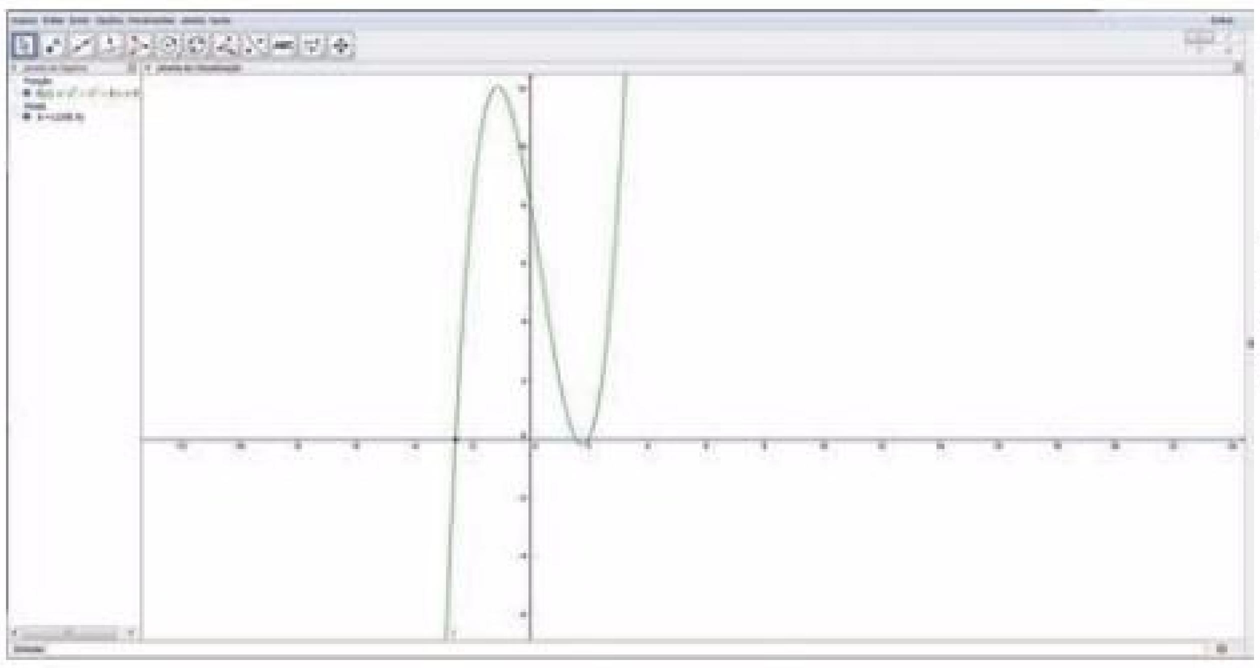
Explorando a tecnologia

Determinação das raízes de uma equação polinomial

Ao longo deste capítulo estudamos alguns teoremas, métodos e propriedades que nos permitiram determinar as raízes de equações polinomiais com grau maior que 2. No entanto, pode haver equações para as quais esses métodos não sejam suficientes para determinar suas raízes. Uma maneira de determinar as raízes reais aproximadas de uma equação polinomial $P(x) = 0$ é analisando o gráfico da função polinomial dada por $P(x)$, uma vez que as raízes do polinômio e da respectiva equação polinomial são iguais. Nesta seção, usaremos o *software* GeoGebra para obter esses gráficos.

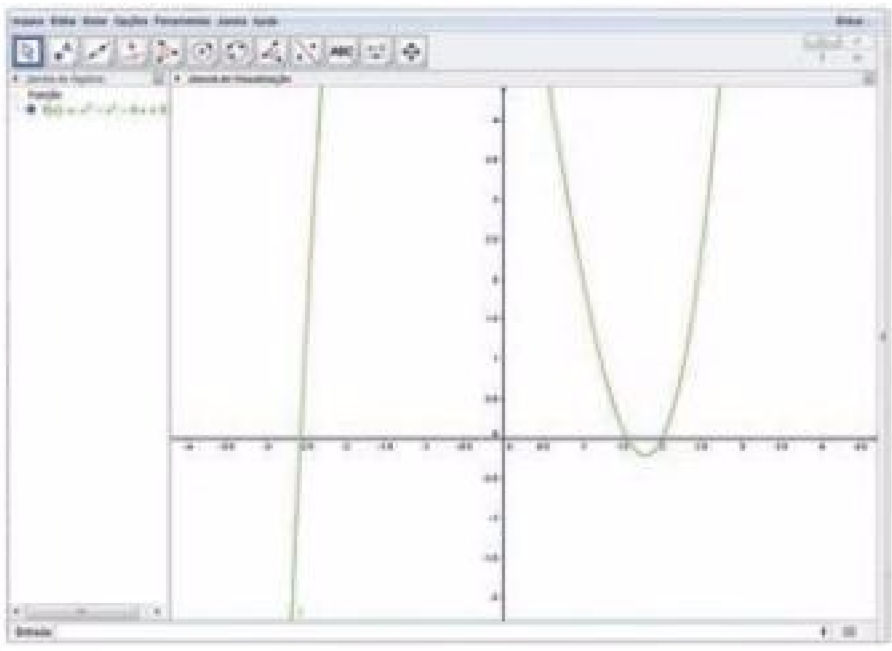
Acompanhe a seguir:

1. Para isso, digite 'x^3−x^2−6x+8' no **Campo de Entrada**. Com isso, estamos criando o gráfico da função polinomial do 3º grau dada por $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 8$. A tela do GeoGebra ficará semelhante à da figura ao lado.



Crédito das imagens: Geogebra

Se necessário, é possível dar *zoom* na tela do GeoGebra para mudar a escala e obter valores mais precisos. Para isso basta movimentar o botão *scroll* do *mouse* para cima. Fazendo isso com a função f(x) construída anteriormente, obtemos uma tela semelhante à da figura abaixo.



2. A partir da imagem, podemos concluir que as raízes são valores próximos de −2,5, 1,5 e 2.

Para obter os valores no GeoGebra digite 'Raízes' no **Campo de Entrada** e selecione a função 'Raízes[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>] como mostra a figura abaixo.

Entrada: **Raízes[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]**

Em seguida, preencha os campos necessários com 'f' para a função, '−10' para o valor de *x* inicial e '10' para o valor de *x* final. O programa vai marcar os pontos *A*, *B*, *C*, cujas abscissas correspondem às raízes da função *f*, ou seja, $x_1 = -2{,}56$, $x_2 = 1{,}56$ e $x_3 = 2$.

O GeoGebra usa aproximações para números irracionais, portanto os valores de x_1 e x_2 são aproximados.

Atividades

Escreva no caderno

1. Com base no passo a passo apresentado construa o gráfico da função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 11x - 15$ e responda:

a) Quantas raízes reais tem a equação $f(x) = 0$? Uma

b) Qual é o valor aproximado dessa(s) raiz(ízes)? 3

2. Construa o gráfico da função $g(x) = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 36x + 45$ no GeoGebra e responda:

a) Quantas raízes reais tem a equação $g(x) = 0$? Nenhuma

b) Quantas raízes complexas não reais tem essa equação? Quatro

c) Quais são os valores das raízes complexas da equação? $-3i$, $3i$, $2 - i$, $2 + i$

DICA: para determinar as raízes complexas utilize a função 'RaízesComplexas[<Polinômio>]' no **Campo de Entrada**.

Exercícios resolvidos

12 Uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raízes os números 4, -3, $2 + 3i$ e $-3 + i$. Qual é o menor grau que essa equação deverá ter?

Resolução

A equação tem coeficientes reais. Assim:

- se $2 + 3i$ é raiz, então $2 - 3i$ também é raiz;
- se $-3 + i$ é raiz, então $-3 - i$ também é raiz.

Portanto, a equação tem no mínimo as raízes -3, 4, $2 + 3i$, $2 - 3i$, $-3 + i$ e $-3 - i$, ou seja, o grau da equação é no mínimo 6.

13 Resolver a equação $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$, sabendo que i é uma de suas raízes.

Resolução

Sendo os coeficientes 1, -3, 3, -3 e 2 números reais e sendo i uma raiz da equação, então $-i$ também é raiz da equação.

Logo, a equação pode ser escrita como:

$(x - i) \cdot (x + i) \cdot Q(x) = 0$

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini 2 vezes, temos:

i	1	-3	3	-3	2
$-i$	1	$-3 + i$	$2 - 3i$	$2i$	0
	1	-3	2	0	

$\underbrace{1 \quad -3 \quad 2}_{\text{coeficientes de } Q(x)}$

Como $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, obtemos:

$(x - i)(x + i)(x^2 - 3x + 2) = 0$

As outras raízes são determinadas fazendo $Q(x) = 0$:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

Portanto, $S = \{-i, i, 1, 2\}$.

14 Seja a equação $x^3 + x^2 + kx + t = 0$, em que k e t são coeficientes reais. Sabendo que o complexo $1 - 2i$ é uma das raízes dessa equação, determinar:

a) o seu conjunto solução;

b) os valores de k e t.

Resolução

a) Se a equação tem coeficientes reais e $1 - 2i$ é raiz, $1 + 2i$ também o será. Supondo que as raízes sejam $a = 1 + 2i$, $b = 1 - 2i$, obtemos a terceira raiz pelas relações de Girard:

$a + b + c = -1$

$1 + 2i + 1 - 2i + c = -1$

$c = -3$

Portanto, $S = \{-3, 1 - 2i, 1 + 2i\}$.

b) Utilizando as demais relações de Girard, determinamos os valores de P e t.

$ab + ac + bc = k$

$(1 + 2i)(1 - 2i) + (1 + 2i)(-3) + (1 - 2i)(-3) = k$

$(1 + 4) + (-3 - 6i) + (-3 + 6i) = k$

$k = -1$

$abc = -t \Rightarrow (1 + 2i)(1 - 2i)(-3) = -t$

$(1 + 4)(-3) = -t$

$t = 15$

Portanto, $k = -1$ e $t = 15$.

15 Determinar o conjunto solução da equação:

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$.

Resolução

Observando que a equação algébrica dada tem todos os coeficientes inteiros, temos:

- p é divisor de -2; logo: $p = \pm 1$ ou $p = \pm 2$;
- q é divisor de 2; logo: $q = \pm 1$ ou $q = \pm 2$.

Os possíveis valores das raízes racionais são dados pela razão $\frac{p}{q}$, logo:

$$\frac{p}{q} \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$$

Fazendo a verificação de quais valores tornam a equação verdadeira, encontramos as raízes $\frac{1}{2}$, 1 e 2.

Por comodidade, podemos também iniciar a verificação com os valores inteiros positivos obtendo as raízes 1 e 2 e, a seguir, determinar a outra raiz utilizando a seguinte relação de Girard:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{7}{2}$$

$$1 + 2 + \alpha_3 = \frac{7}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}$$

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

16 Verificar se a equação $x^4 - x^2 - 2 = 0$ tem raízes racionais.

Resolução

Como a equação tem todos os coeficientes inteiros, temos:

- *p* é divisor de -2, logo: $p = \pm 1$ ou $p = \pm 2$;
- *q* é divisor de 1, logo: $q = \pm 1$.

Os possíveis valores das raízes racionais são dados pela razão $\frac{p}{q}$, logo:

$$\frac{p}{q} \in \{-2, -1, 1, 2\}$$

Fazendo a verificação de quais desses valores tornam a equação verdadeira, notamos que nenhum dos quatro valores é raiz da equação.

Portanto, a equação não tem raízes racionais.

17 Resolver a equação $x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x = 0$.

Resolução

Colocando *x* em evidência:

$x(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3) = 0$

Então, uma raiz é 0 e as outras raízes são soluções da equação $1x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$.

Os coeficientes são todos inteiros, logo:

- *p* é divisor de $-3 \Rightarrow p = \pm 1$ ou $p = \pm 3$;
- *q* é divisor de $1 \Rightarrow q = \pm 1$.

Logo, $\frac{p}{q} \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Fazendo a verificação, encontramos as raízes -3 e 1.

Portanto, a equação pode ser escrita na forma: $x \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot Q(x) = 0$.

Aplicando-se Briot-Ruffini na equação do 4º grau, temos:

-3	1	2	-2	2	-3
1	1	-1	1	-1	0
	1	0	1	0	

Fazendo $Q(x) = x^2 + 1 = 0$, temos:

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$.

Portanto, $S = \{-3, 0, 1, -i, i\}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

34. Sabendo que $(2 + i)$ é uma das raízes da equação $3x^3 - 14x^2 + mx - 10 = 0$, determine:

a) o valor de *m*; $m = 23$

b) o valor da sua raiz real. $x = \frac{2}{3}$

35. Determine os valores de *a*, *b*, *c*, $d \in \mathbb{R}$ sabendo que a equação $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ admite o número 3 como raiz dupla e o número *i* como raiz simples.
$a = 6, b = 10, c = 6, d = 9$

36. (Unitau-SP) A equação algébrica $x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 4x - 13 = 0$ tem a raiz complexa $x_1 = 2 + 3i$, onde *i* é a unidade imaginária. Determinar as outras três raízes.
As outras três raízes são $+1$, -1 e $2 - 3i$.

37. (Unimontes-MG) Considere a, $b \in \mathbb{R}$ e *i* a parte imaginária. Se *i* é a raiz da equação $x^3 + (2a - b)x^2 + (a - 3b)x - 3 = 0$, então os valores de *a* e *b* são, respectivamente:

x a) -2 e -1
b) 2 e 1
c) 3 e 5
d) -3 e -5

38. (UFC-CE) O polinômio $p(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$, em que *a* e *b* são números reais, possui o número complexo *i* como uma de suas raízes. Então o produto $a \cdot b$ é igual a:

x a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

39. (UFF-RJ) Considere o polinômio:
$p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ a) O número *i* é raiz de p(x). b) $\{i, -i, -1 + i, -1 - i\}$

a) Verifique se o número complexo *i* é raiz de p(x).

b) Calcule todas as raízes complexas de p(x).

40. Resolva as equações:

a) $4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ $S = \left\{-1, 1, \frac{1}{2}\right\}$

b) $x(x - 4)^2 + 10x(x - 2) - 8 = 0$ $S = \{-2, 2\}$

c) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x = 0$ $S = \{0, 1, 1 + i, 1 - i\}$

41. Determine o conjunto solução das equações:

a) $x^3 - 7x + 6x = 0$ $S = \{-3, 1, 2\}$

b) $x^3 - 4x^2 - 2x + 20 = 0$ $S = \{-2, 3 - i, 3 + i\}$

c) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ $S = \{-3, -1, 1, 2\}$

42. (FEI-SP) Resolver a equação $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
$S = \{-1, -i, i\}$

43. Resolver a equação:
$10x^3 - 39x^2 + 39x - 10 = 0$ $S = \left\{\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}\right\}$

44. (Cefet-BA) Sabendo-se que -1 e 3 são raízes de $x^4 - 5x^2 - 10x - 6 = 0$, as demais raízes são:

a) $-1 + i, -1 + 2i$
b) $1 - i, -1 + i$
x c) $-1 - i, -1 + i$
d) $1 - i, 1 + i$
e) $-1, i$

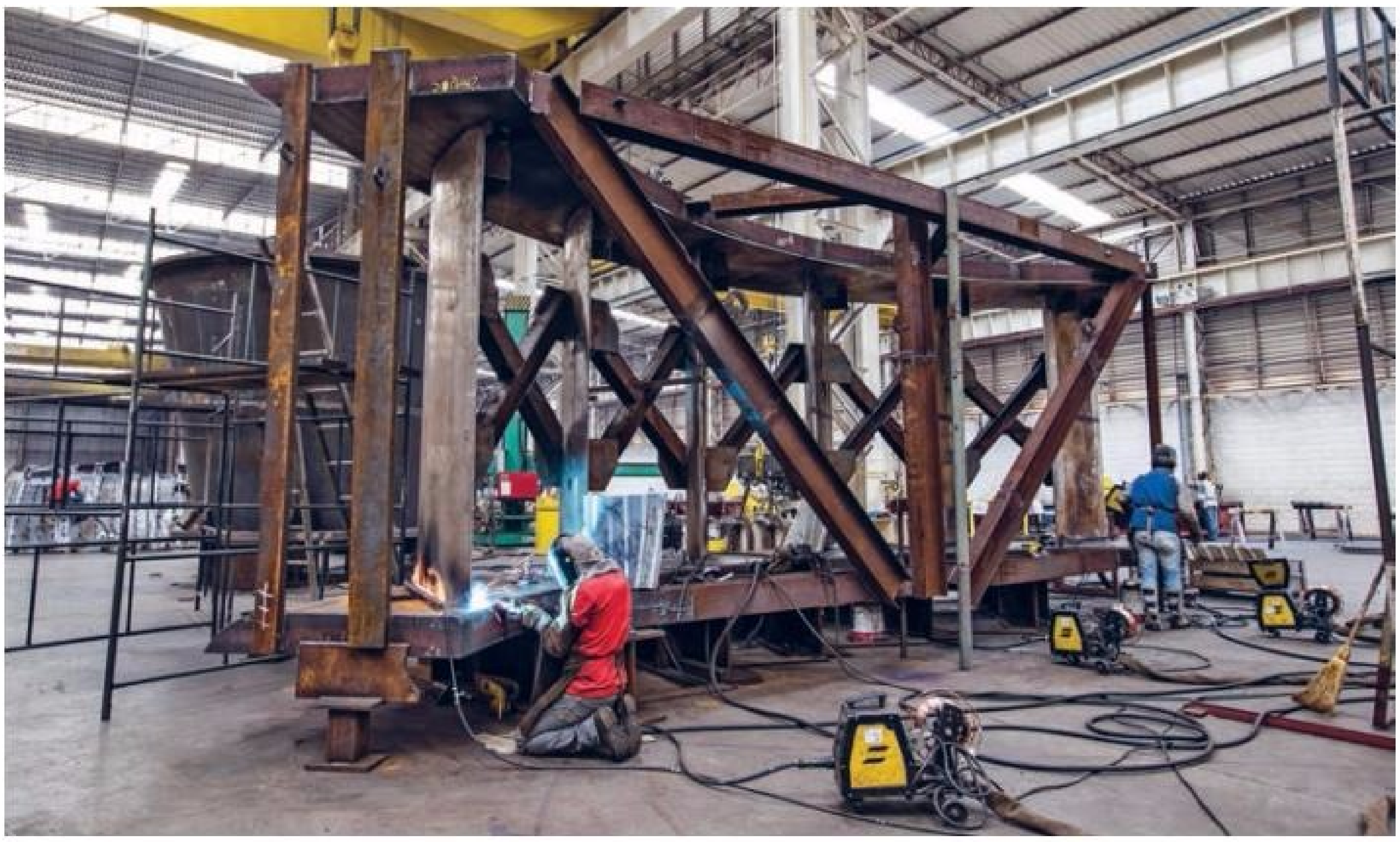
45. Calcule a soma das raízes da equação:
$2^{3x} - 7 \cdot 2^{2x} + 14 \cdot 2^x - 8 = 0$ 3

Conexões — Produto Interno Bruto

46. A análise de dados é um conhecimento cada vez mais necessário no mundo em que vivemos. Indicadores econômicos comumente são baseados em inúmeras informações, direcionando as tomadas de decisões governamentais e empresariais. O Produto Interno Bruto (PIB) é um desses indicadores, reconhecido e adotado mundialmente. Leia o texto a seguir a respeito do PIB e faça o que se pede em cada item.

PIB: entenda quais são os fatores que influenciam o crescimento da economia

Expansão da economia depende, basicamente, de quatro fatores: consumo, investimento, gastos públicos e balança comercial.



Ernesto Reghran/Pulsar

Trabalhadores em indústria metalúrgica, Assaí, Paraná. Foto de 2015.

[...] O PIB (Produto Interno Bruto) nada mais é do que o conjunto de todos os bens e serviços finais produzidos em um país durante certo período de tempo. Ou seja, desde o "pãozinho" até um luxuoso apartamento construído neste ano, tudo isso entra no cálculo do Produto Interno Bruto do país.

E um ponto muito importante é o fato de que o PIB só computa os bens e serviços finais, para não calcular o mesmo item duas vezes. Ou seja, voltando ao exemplo anterior, o pãozinho vendido na padaria entra no cálculo do PIB, mas a farinha de trigo comprada para a fabricação do mesmo, não.

Outro aspecto importante: a venda de um carro ano 2005, por exemplo, não será computada no PIB de 2006, já que o valor do bem já foi incluído no cálculo do Produto Interno Bruto daquele ano. Daí, tira-se uma importante conclusão: só devem entrar no cálculo do PIB os bens e serviços finais produzidos no país no ano corrente.

Agora que você já sabe o que é o PIB, entenda quais fatores influenciam a sua expansão.

Consumo privado

O primeiro fator que influencia diretamente a variação do PIB diz respeito ao consumo privado, ou seja, aos gastos das famílias para a aquisição de bens ou serviços. Portanto, quanto mais as pessoas consomem, mais o PIB tende a crescer. [...]

Ronaldo Silva/Futurapress

A Rua 25 de Março, em São Paulo, é uma das ruas de comércio mais movimentadas do país. Foto de 2016.

Investimentos privados

Além do consumo das famílias, outro fator que tem forte influência sobre a variação do PIB são os investimentos privados, ou seja, aqueles feitos por empresas. [...]

O nível de investimentos em uma dada economia depende, basicamente, da taxa de juros e do quanto a atividade econômica está aquecida. [...]

Gastos públicos

Suponha, por exemplo, que o Governo dê início à construção de uma estrada: para que esta estrada saia do papel, é necessário contratar operários, adquirir material de construção etc, que são atividades que movimentam recursos.

Como estas atividades tendem a aumentar a renda da economia como um todo (pense nos empregos gerados, nas compras feitas pelo Governo...), maiores gastos tendem a impactar positivamente sobre o crescimento da economia. Isso não quer dizer, porém, que os governos devam sair por aí gastando dinheiro com irresponsabilidade a fim de elevar o PIB, uma vez que gastos sistematicamente elevados podem comprometer a saúde fiscal de uma economia.

Balança comercial

Outro aspecto muito importante para o crescimento do PIB de um país diz respeito às suas transações comerciais com o exterior, ou seja, a famosa balança comercial. [...]

Não é difícil concluir que, quanto maiores as exportações, mais dinheiro entra no país, e, portanto, maior o PIB.

Contudo, quanto maiores forem as importações, mais dinheiro sai do país, e, portanto, menor o PIB. [...]

Balança comercial

Exportação > Importação → Superávit

Exportação < Importação → Déficit

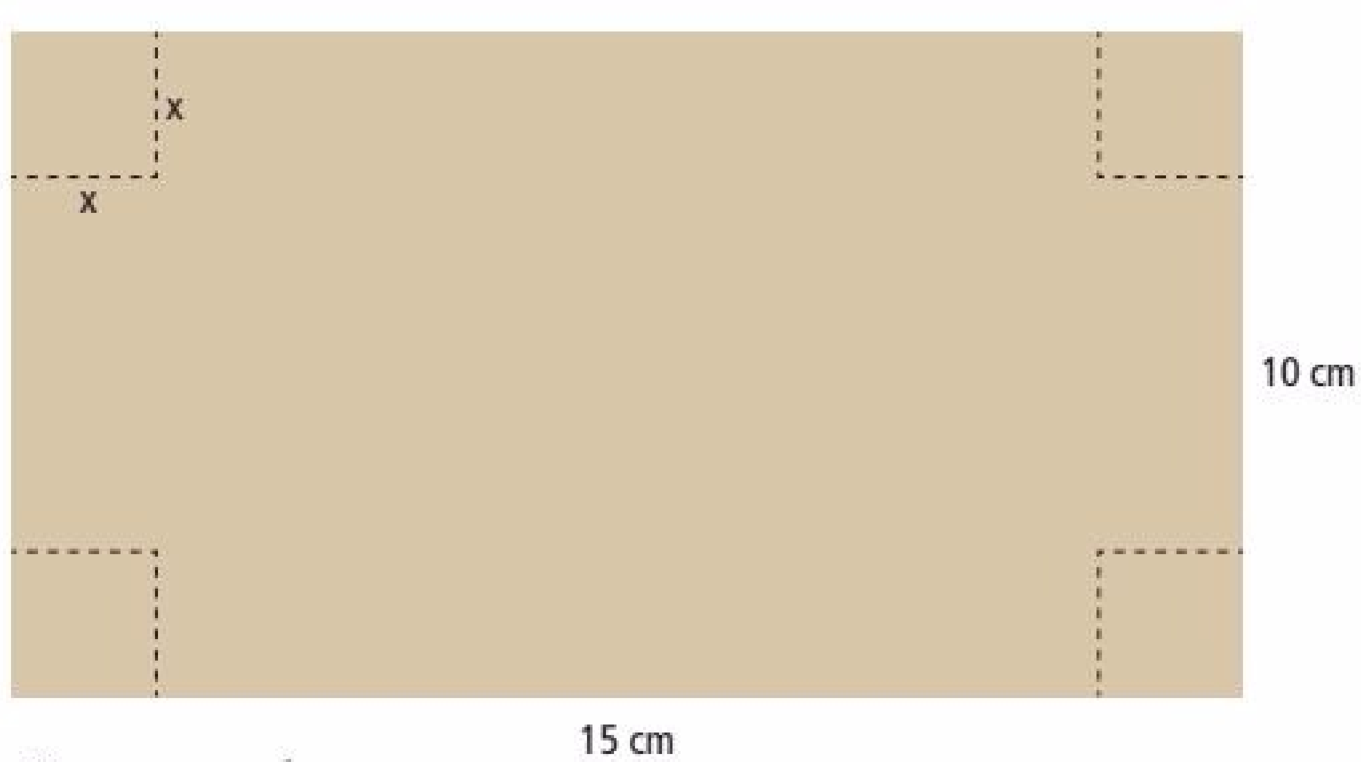
Fonte: PIB: entenda quais são os fatores que influenciam o crescimento da economia. **InfoMoney**, 2006. Disponível em: <http://www.infomoney.com.br/educacao/guias/noticia/257984/pib-entenda-quais-sao-fatores-que-influenciam-crescimento-economia>. Acesso em: 5 jan. 2016.

b) Não, pois a definição de PIB, conforme consta no texto, é: "conjunto de todos os bens e serviços finais produzidos em um país durante certo período de tempo". Como o bem em questão não foi produzido no Brasil, essa venda não é computada no cálculo do PIB brasileiro.

a) De acordo com o texto, quais são os fatores que influenciam a expansão do PIB?
Consumo privado, investimento privado, gastos públicos e balança comercial.

b) De acordo com a definição de PIB apresentada, podemos afirmar que a venda, no Brasil, de um veículo importado dos Estados Unidos em determinado ano compõe o cálculo do PIB brasileiro naquele ano?

c) Os bens e serviços produzidos por uma empresa estabelecida no país também contribuem diretamente para o PIB nacional. Determinada empresa fabrica um produto que deve ser embalado em caixas retangulares, a partir do recorte em folhas de papelão, conforme mostra o esquema abaixo.



Editoria de arte

De posse dessas informações, responda:

i) Qual é a lei da função polinomial que representa o volume da caixa fabricada, em função dos recortes quadrados de lado medindo x cm? $V(x) = 4x^3 - 50x^2 + 150x$

ii) As caixas a serem obtidas necessitam ter volume de 132 cm³ para acomodar a quantidade necessária de produto a ser vendido. Obtenha a equação polinomial que corresponde ao volume da caixa em função da medida x.
$4x^3 - 50x^2 + 150x - 132 = 0$

iii) A empresa sabe que recortes quadrados com lado medindo 2 cm satisfazem sua necessidade. A partir disso, obtenha a fatoração da expressão obtida no item **b**.
$(x - 2) \cdot (4x^2 - 42x + 66)$

iv) Verifique se existe outro recorte possível nos cantos da folha de papelão para manter o mesmo volume.
Matematicamente possível se $x \simeq 1{,}92$.

1. Resolva a equação abaixo, no conjunto dos números complexos.

$$\begin{vmatrix} y+1 & y & y-1 \\ y & y & y \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = y^2 + 2y + 5 \quad S = \{-1-2i, -1+2i\}$$

2. (Unifesp-SP) Quatro números complexos representam, no plano complexo, vértices de um paralelogramo. Três dos números são $z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 1$ e $z_3 = -1 + \frac{5}{2}i$. O quarto número tem as partes real e imaginária positivas. Esse número é

a) $2 + 3i$

x b) $3 + \frac{11}{2}i$

c) $3 + 5i$

d) $2 + \frac{11}{2}i$

e) $4 + 5i$

3. (Unirio/Ence-RJ) Seja z um número complexo da forma $a + bi$, onde a e b são escolhidos dentre os elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Quantos números complexos podem ser assim formados? 36

b) Dentre os números formados, quais satisfazem a equação $z + \overline{z} = 2$? $1, 1 + i, 1 + 2i, 1 + 3i, 1 + 4i$ e $1 + 5i$

4. (Cefet-MG) Os pontos A, B e C são, respectivamente, os afixos dos números complexos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -4 + i$ e $z_3 = bi$, com $b < 0$, no plano de Argand-Gauss. Se a área do triângulo ABC é 12, então b vale:

a) -2

b) $-\frac{5}{2}$

x c) -3

d) $-\frac{7}{2}$

e) -4

5. (UEPB) O produto dos números complexos $(3 - i)(x + 2yi)$ é um número real quando o ponto $P(x, y)$ está sobre a reta de equação:

a) $x + 6y = 0$

b) $6x - y = 0$

x c) $6y - x = 0$

d) $6x + y = 0$

e) $3y - x = 0$

6. (UFPB) Um percurso feito por um atleta, em uma região plana, pode ser representado no plano cartesiano por um segmento de reta AB. Sabendo-se que os pontos A e B são as representações geométricas dos números complexos $z_1 = \frac{2 + 4i^{35}}{3 - i}$ e $z_2 = 4 + 3i$, é correto afirmar que esse percurso, em unidades de comprimento, mede:

a) 6

b) 4,5

c) 5,5

x d) 5

e) 6,5

7. (Unicamp-SP) Sejam x e y números reais tais que $x + yi = \sqrt{3 + 4i}$, onde i é a unidade imaginária. O valor de xy é igual a

a) -2

b) -1

c) 1

x d) 2

8. (UERJ) João desenhou um mapa do quintal de sua casa, onde enterrou um cofre. Para isso, usou um sistema de coordenadas retangulares, colocando a origem O na base de uma mangueira, e os eixos OX e OY com sentidos oeste-leste e sul-norte, respectivamente. Cada ponto (x, y), nesse sistema, é a representação de um número complexo $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

Para indicar a posição (x_1, y_1) e a distância d do cofre à origem, João escreveu a seguinte observação no canto do mapa:

$x_1 + iy_1 = (1 + i)^9$

Calcule:

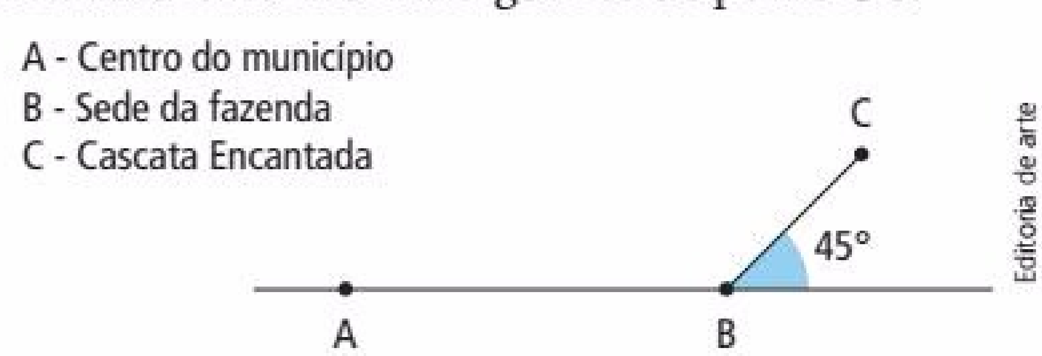
a) as coordenadas de (x_1, y_1); (16, 16)

b) o valor de d. $d = 16\sqrt{2}$

9. (UFSM-RS) Assim como Remy sonha com o espaço fechado da cozinha, outros habitantes da cidade buscam o espaço aberto da natureza.

No plano complexo, estão representados o marco zero (ponto A) de um pequeno município e a sede de um hotel fazenda (ponto B). O marco zero do município representa o ponto de encontro dos eixos real e imaginário, sendo que esse último aponta para o norte. O formato da extensão de terra pertencente à fazenda é um círculo cujo centro é sua sede e cujos pontos de fronteira z satisfazem a equação $|z - 5| = 2$.

Partindo da sede da fazenda (B), num ângulo de 45 graus a nordeste, como mostra a figura, encontra-se, na fronteira da fazenda, uma cascata (C) batizada de Cascata Encantada, devido à boa impressão que causa aos visitantes do hotel, principalmente aos oriundos dos grandes centros menos acostumados ao contato direto com a natureza. A forma algébrica do ponto C é:



a) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

b) $(3 + \sqrt{2}) + i\sqrt{2}$

c) $(3 + \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2})i$

x d) $(5 + \sqrt{2}) + i\sqrt{2}$

e) $(5 + \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2})i$

10. (Insper-SP) Seja $z \in \mathbb{C}$ um complexo de módulo $|z|$ e argumento θ, $\theta \in]-\pi, \pi]$. Defina $w \in \mathbb{C}$ da seguinte forma:

$w = \log_3 |z| + i \cdot \theta$

Se $w = 2 + i \cdot \frac{\pi}{2}$, o valor de z^{10} é

a) 9^{10} c) $9^{10} \cdot i$ e) 1

x b) -9^{10} d) $-9^{10} \cdot i$

11. Se os polinômios $P(x) = \begin{vmatrix} x & n & m \\ 2 & nx^2 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e $Q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 4$ são idênticos, então o valor de $\frac{m}{n}$ é:

a) 2 x b) 3 c) 4 d) 5

12. (PUC-RS) Tales, um aluno do Curso de Matemática, depois de terminar o semestre com êxito, resolveu viajar para a Europa. A chegada ao Velho Continente foi em Portugal.

Em Bruxelas, Tales conheceu o monumento Atomium, feito em aço revestido de alumínio, com a forma de uma molécula cristalizada de ferro, ampliada 165 bilhões de vezes. Essa escultura é formada por esferas de 18 metros de diâmetro, unidas por 20 tubos, com comprimentos de 18 a 23 metros.

A quantidade de esferas que compõem a escultura é igual ao valor de um dos zeros da função $f(x) = x^3 - 6x^2 - 27x$.

Então, o número de esferas da escultura é

a) 18 x b) 9 c) 6 d) 3 e) 2

13. (ESPM-SP) O volume e a altura de um prisma são expressos pelos polinômios $V(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 6$ e $A(x) = x + 1$, respectivamente, sendo *x* um real estritamente positivo. O menor valor que a área da base desse prisma pode assumir é igual a:

a) 1 b) 1,5 x c) 2 d) 2,5 e) 3

14. (UFPR) Considere o polinômio $p(x) = \begin{bmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

Calcule as raízes p(x). Justifique sua resposta, deixando claro se utilizou propriedades de determinantes ou algum método para obter as raízes do polinômio. As raízes são −3, 3 e 4.

15. Calcule o módulo do número complexo $z = \frac{-1 + i\,tg\,x}{2}$, com $x \neq 0$ e $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. $|z| = \frac{1}{2} \sec x$

16. (UFBA) Determine o polinômio $p(x) = bx^4 + cx^3 + dx$, sabendo que

- o coeficiente *b* é igual à soma dos termos da progressão geométrica infinita $\left(6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, ...\right)$;
- o coeficiente *d* é igual ao termo a_{50} da progressão aritmética decrescente $(a_1, a_2, a_3, ...)$, cujos termos a_5, a_9, a_{10} e a_{14} são as abscissas dos pontos de interseção das curvas de equações $x^2 + y^2 = 82$ e $y = \frac{9}{x}$;
- o resto da divisão de p(x) pelo binômio x + 1 é igual a 40. $p(x) = 9x^4 + 50x^3 - 81x$

17. (ITA-SP) Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ quando (a_1, a_2, a_3) é igual a

a) $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{4}\right)$ d) $\left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$

b) $\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\right)$ e) $\left(\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{4}\right)$

x c) $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right)$

18. (ITA-SP) Seja *S* o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de *S*. 10

b) Determine o subconjunto de *S* formado pelos polinômios que têm −1 como uma de suas raízes.

Os polinômios são: $P_1(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$; $P_2(x) = 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ e $P_3(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$.

19. (UFPR) Considere o número complexo $\alpha = \frac{1-i}{1+i}$.

a) Escreva a forma trigonométrica de α. $\alpha = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,sen\,\frac{3\pi}{2}$

b) Resolva a equação $4x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x - 3 = 0$, sabendo que α é uma das suas raízes. $S = \left\{-i, i, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

20. (Unicamp-SP) Considere o polinômio $p(x) = x^2 - 11x + k + 2$, em que *x* é variável real e *k* um parâmetro fixo, também real.

a) Para qual valor do parâmetro *k* o resto do quociente de p(x) por x − 1 é igual a 3? k = 11

b) Supondo, agora, k = 4, e sabendo que *a* e *b* são raízes de p(x), calcule o valor de $sen\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right)$. $-\frac{1}{2}$

21. (UFC-CE) Sendo a, b, c, d, e as raízes da equação $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 14x - 12 = 0$, determine o valor de:

$$\frac{1}{bcde} + \frac{1}{acde} + \frac{1}{abde} + \frac{1}{abce} + \frac{1}{abcd}$$ $\frac{1}{4}$

22. (UnB-DF) Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + k$, $k \neq 0$. Quais das afirmativas abaixo são verdadeiras?

a) A soma dos quadrados das raízes de $p(x)$ é 82.

b) Se as raízes de $p(x)$ são a, b e c, então o polinômio $q(y) = ky^3 + 9y^2 - 8y + 1$ tem por raízes os números $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ e $\frac{1}{c}$.

c) As raízes do polinômio $r(x) = x^3 - 16x^2 + 36x + 8k$ valem o dobro das raízes de $p(x)$. Alternativas **b** e **c**.

23. (UFSCar-SP) Considere a equação algébrica $-x^4 + kx^3 - kx^2 + kx - 4 = 0$, na variável x, com $k \in \mathbb{C}$.

a) Determine $k = a + bi$, com a e b reais, para que o número complexo $2i$ seja uma das raízes da equação.

b) Determine todas as raízes da equação quando $k = 5$.

a) $k = \frac{20 + 30i}{13}$

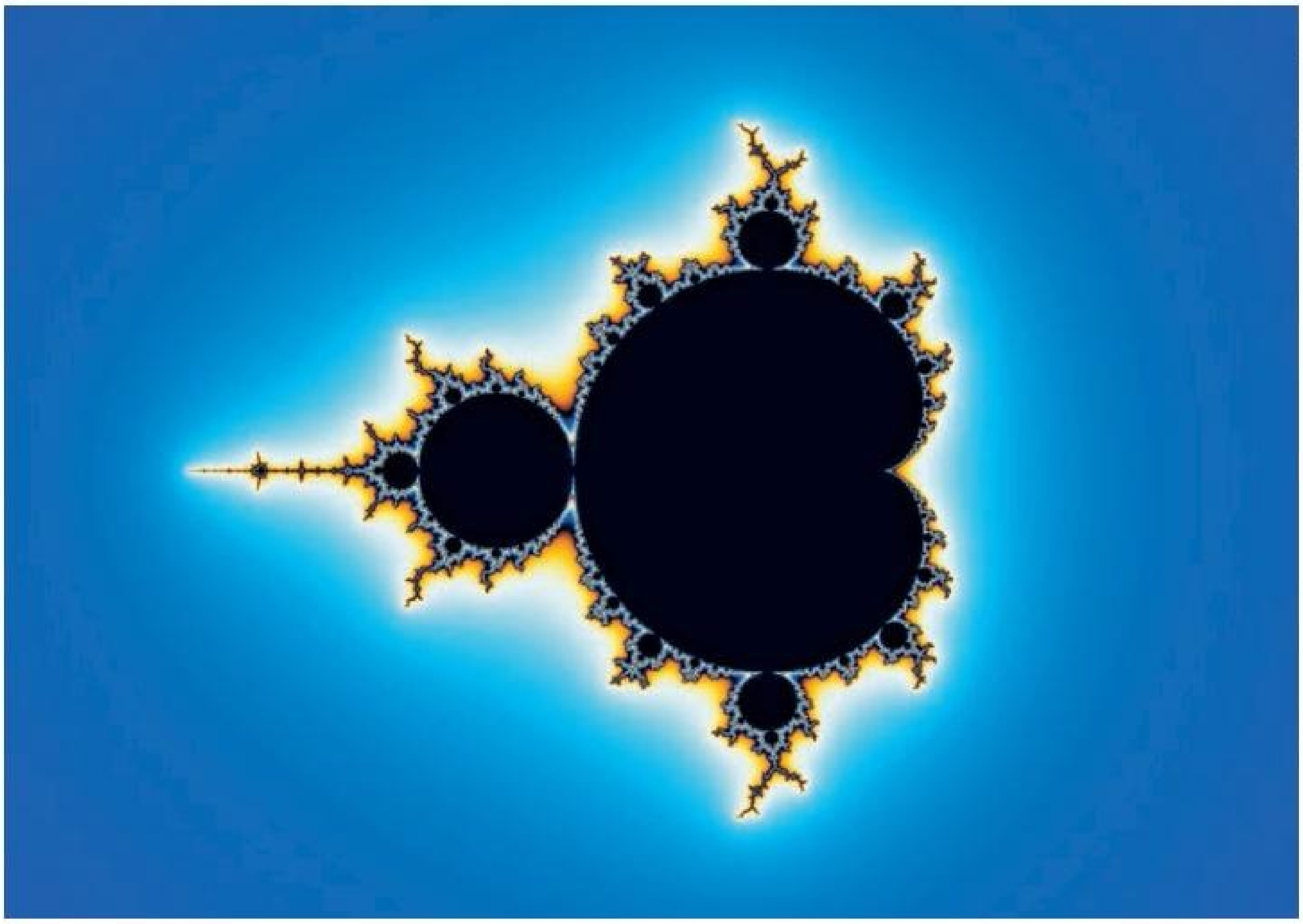
b) $S = \{-i, i, 1, 4\}$

Retomando e pesquisando

Escreva no caderno

Na abertura desta unidade você viu um pouco sobre os fractais. Um fractal pode ser gerado a partir de uma fórmula matemática que, se aplicada recorrentemente, pode produzir resultados impressionantes.

Existem várias imagens de conjuntos fractais, como o conjunto de Mandelbrot. Esse conjunto é criado a partir da iteração de números complexos da forma $z = a + bi$. Cada iteração é feita com a fórmula $z_{n+1} = z_n^2 + c$, em que z e c são números complexos.



Vit Smolek/Shutterstock.com

Imagem de um fractal do conjunto de Mandelbrot.

Utilize essas informações e seus conhecimentos a respeito dos conteúdos desta unidade para realizar as atividades a seguir. Resposta pessoal. É possível que os alunos citem que os fractais são objetos gerados com a repetição de um processo infinitas vezes ou que um fractal é composto por partes semelhantes a si mesmo.

1. Na abertura da unidade, você viu que a palavra fractal deriva do latim e significa quebrado, irregular. Explique o que você acha do uso desse nome para algo que apresenta padrões.

2. De acordo com as operações com números complexos que você estudou, escreva as duas primeiras iterações de um fractal em que $c = 2 + i$ e $z = 0$. $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 5 + 3i$

3. Escreva o resultado da questão anterior na forma trigonométrica. $z_2 = \sqrt{34}\,(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)$

Infográfico: Contexto histórico

Para muitas pessoas, a Matemática não passa de uma disciplina escolar excessivamente teórica e, portanto, "descolada" da realidade. Essa visão difundida promove alguns questionamentos do tipo "qual é a utilidade dessa matéria?", "por que esse assunto é importante?" ou então "o que esse conteúdo pode nos oferecer?".

Ao contrário do que esse ponto de vista sustenta, a Matemática é uma área intrinsecamente ligada à vivência humana. Desde os afazeres mais triviais, como a compra em um supermercado ou o rateio dos gastos de uma viagem, até empreendimentos de alta complexidade – a exemplo do lançamento de um satélite artificial –, usamos o saber proveniente do universo matemático.

Sem o raciocínio matemático e o extenso conhecimento ligado a essa capacidade, as sociedades humanas não teriam condições de superar os obstáculos que atravancavam sua existência. O que constatamos é que a "mais abstrata das disciplinas" é uma ferramenta imprescindível ao desenvolvimento de nossa espécie.

Por essa razão, não seria exagero parafrasear o filósofo alemão Friedrich Nietzsche (1844-1900) ao afirmar que o campo matemático é "humano, demasiado humano". O que constatamos é que, desde os primórdios, a história dos seres humanos e a evolução da Matemática sofrem uma influência mútua, constante e enriquecedora.

Assim como todos os povos, as produções humanas contam com uma história, ou seja, foram elaboradas e desenvolvidas a partir de contextos históricos específicos. Como consequência, não é raro encontrar publicações que apresentam a história do vestuário, da arquitetura ou da gastronomia.

Sendo uma antiquíssima criação humana, a Matemática também ostenta uma rica historicidade. Ao contrário do que muitas pessoas acreditam, os saberes matemáticos não "caíram do céu", mas foram forjados e aprimorados em vários períodos da nossa história. Egípcios, gregos, árabes, renascentistas ou pensadores iluministas contribuíram, cada um à sua forma, para enriquecer o milenar campo do conhecimento matemático.

A partir dessa constatação, procuramos tornar a aprendizagem da Matemática mais instigante por meio da elaboração de um infográfico que apresenta uma linha do tempo sobre a história da Matemática de alguns conteúdos abordados nesta coleção.

A utilização de um infográfico se deve ao seu potencial de valorizar visualmente informações. Diversos veículos de comunicação, peças publicitárias e campanhas públicas utilizam esse recurso, constituído por quadros informativos que misturam textos e imagens com um chamativo apelo visual.

O infográfico que construímos está organizado de acordo com as diferentes fases da humanidade. Em cada período da história, procuramos apresentar pensadores ou estudos que proporcionaram grande desenvolvimento ao campo matemático. Também temos uma legenda que indica o volume desta coleção que aborda os conteúdos citados. Os períodos em que o infográfico foi organizado são os seguintes:

Pré-história (cerca de 2,5 milhões de anos atrás – 4.000 a.C.)	**Antiguidade** (4.000 a. C. – 476 d.C.)	**Idade Média** (476 – 1453/1492)	**Idade Moderna** (1453/1492 – 1789)	**Era Contemporânea** (1789 – dias atuais)

Caso haja alguma dúvida, não deixe de consultar seus professores de Matemática e de História.

CONTEXTO HISTÓRICO
Principais conteúdos matemáticos abordados nesta coleção

Legenda

X Número correspondente ao volume em que o conteúdo é apresentado.

Sítio Arqueológico gruta do Pitoco, Alcinópolis. MS. Bufinha/SEMUDES

Milhares de anos

Estilo geométrico produzido por povos ancestrais do Brasil, Gruta do Pitoco (MS).

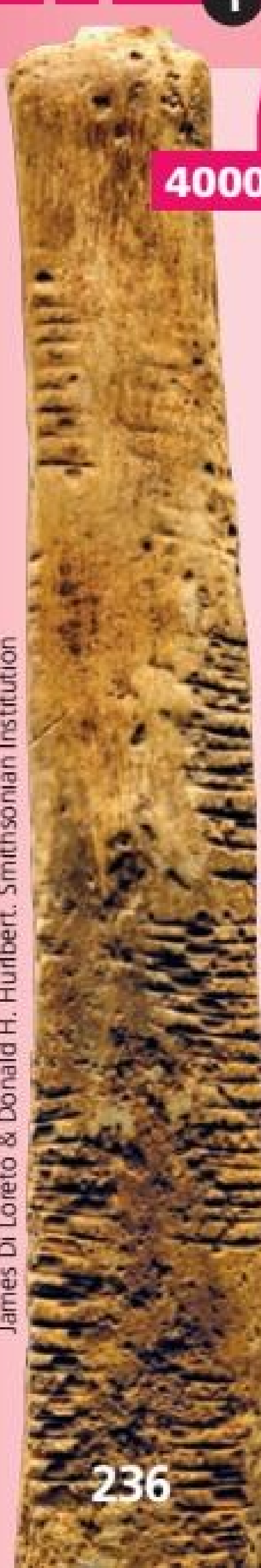
Números

Durante o período Paleolítico, a maioria das comunidades humanas usava apenas três números: um, dois e "muitos". Mesmo com um conhecimento numérico rudimentar, tais povos vivenciavam a Matemática de uma forma empírica, ao entrar em contato com elementos geométricos da natureza.

PRÉ-HISTÓRIA

1 1

(cerca de 2,5 milhões de anos atrás-4000 a.C.)



James Di Loreto & Donald H. Hurlbert. Smithsonian Institution

4000 a.C.

Registro numérico

A partir do período Neolítico, diversas comunidades humanas sedentarizaram-se e passaram a estocar o alimento excedente. Gradualmente, surgem os primeiros centros urbanos, as relações comerciais, a divisão social e o conceito de propriedade privada. A necessidade de contar motivou a associação entre uma quantidade de objetos e a mesma quantidade de pequenos seixos. Surgem registros de números, como marcas em ossos, pedaços de madeira e pedra.

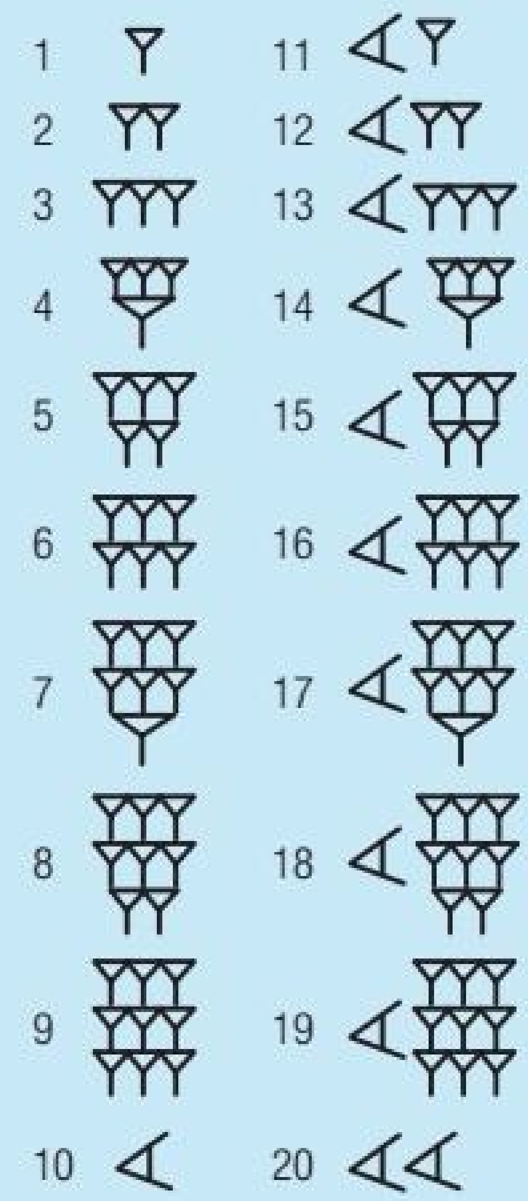
Fragmento de osso marcado por comunidades da Pré-História.

3000 a.C.

Números naturais

Durante a Antiguidade, egípcios, mesopotâmicos e outras civilizações promoveram um notável desenvolvimento da Matemática, impulsionado, sobretudo, por demandas do cotidiano. A construção de monumentos fúnebres, a contagem do tempo e a construção de canais de irrigação são alguns dos problemas superados com o auxílio do saber matemático.

Mesopotâmicos e egípcios criaram símbolos para representar os números naturais. Egípcios usavam base 10, mas notação não posicional. Já os sumérios, um dos povos da Mesopotâmia, usavam base 60 com notação posicional. Os matemáticos da antiga Suméria precisavam de 59 símbolos diferentes para representar seus números. Não existia representação do zero. Quando nada havia, deixava-se um espaço em branco.



Editoria de Arte

Sistema numérico arcaico desenvolvido na Suméria (atual Iraque).

1 1

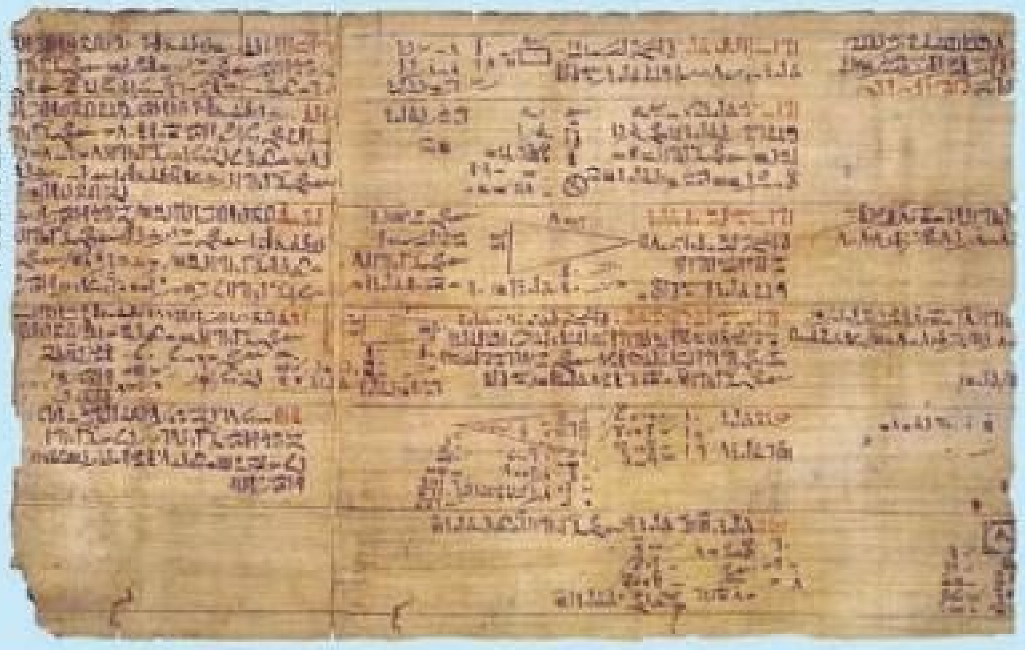
2000 a.C.

Frações

Por volta do segundo milênio antes de Cristo, povos antigos já contavam com muitas invenções consagradas, a exemplo da roda, da escrita, da Astronomia e do calendário. Em tal contexto, mesopotâmicos e egípcios criaram símbolos para representar as frações. Os egípcios usavam apenas frações de numerador 1. Assim, no Egito antigo, a fração $\frac{3}{5}$ era representada como $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$.

Fonte de pesquisa do infográfico:
BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 3 ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2012.
EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Unicamp, 2007.
KINDER, Hermann; HILGEMANN, Werner; HERGT, Manfred. **Atlas histórico mundial**: De los orígenes a nuestros días. Madrid: Akal, 2007.

A linha do tempo não está representada em escala.



Album/Latinstock

Trecho do papiro restaurado de Ahmes.

1800 a.C.

Progressões

No Egito antigo, os escribas, grupo profissional que detinha o domínio da leitura e da escrita, produziram uma vasta quantidade de documentos sobre diversos assuntos concernentes a essa civilização. Atualmente, tais documentos são uma preciosa fonte de estudo para se compreender aspectos relevantes dessa civilização. Em um papiro elaborado pelo escriba Ahmes, por exemplo, aparecem problemas envolvendo sequências aritméticas e geométricas.

Werner Forman/ Werner Forman/Corbis/Latinstock

Imagem de agrimensores egípcios trabalhando em uma plantação às margens do rio Nilo.

Século XVI a.C.

Conceito de área

As áreas de figuras próximas do retângulo eram calculadas no antigo Egito pelo produto das médias dos lados opostos do quadrilátero. Não era um método exato, mas resultava em uma boa aproximação para a área. Tal conhecimento foi imprescindível para o surgimento da agrimensura, atividade que tem como função medir e dividir lotes de terra. Em muitas imagens produzidas por essa sociedade, podemos observar o árduo trabalho dos agrimensores às margens do rio Nilo, sua principal fonte de água.

ANTIGUIDADE

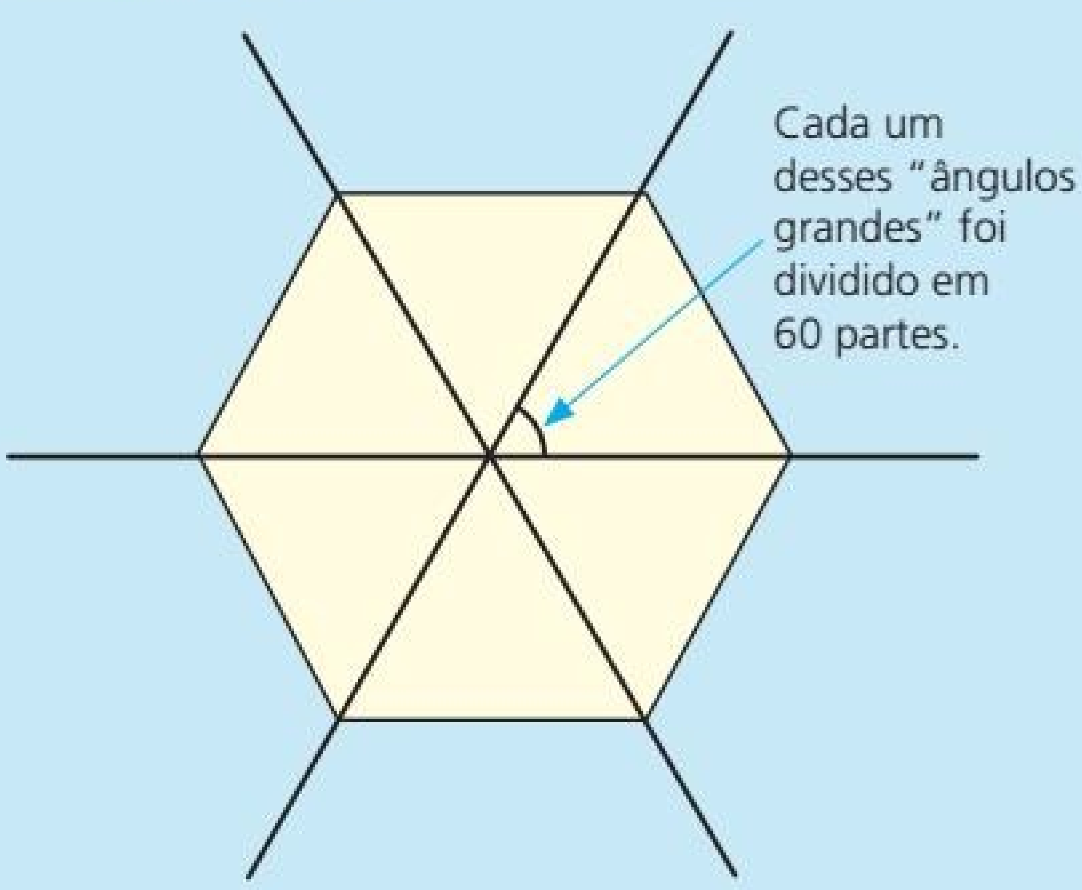
(4000 a.C.-476 d.C.)

1 2 1

Século XVI a.C.

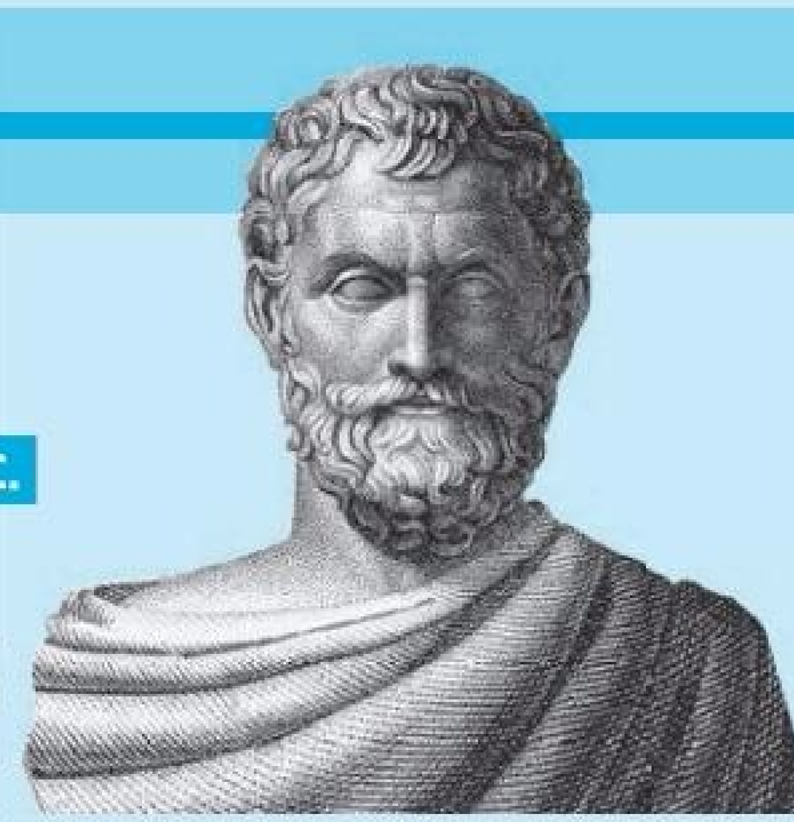
Medida de ângulos

Os mesopotâmicos conheciam o hexágono regular. Como seu sistema de numeração era em base 60, optaram por dividir cada "ângulo grande" em 60 partes.



Editoria de Arte

Século VI a.C.



Corbis/Latinstock

Busto de Tales de Mileto, considerado o primeiro filósofo da História ocidental.

Semelhança

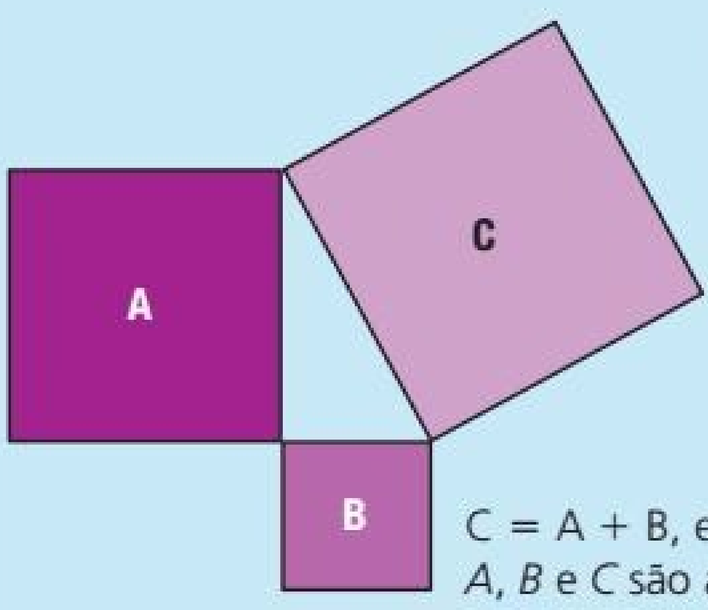
Nas colônias gregas da Ásia Menor (atual Turquia), um grupo de pensadores desprendeu-se gradualmente das explicações mitológicas usadas para a compreensão do mundo. Esse lento processo promoveu o surgimento do racionalismo, da Filosofia e do pensamento científico. Seu precursor foi Tales de Mileto (c. 623 a.C.-c. 546 a.C.), um hábil astrônomo que sustentava a ideia de que todos os elementos do Universo foram criados a partir da água. Na Matemática, Tales de Mileto demonstrou diversas propriedades de figuras geométricas e desenvolveu o conceito de semelhança mostrando diversas aplicações.

Professor, comente com os alunos que é muito comum em História da Matemática escrever "c." (cerca de) quando não se tem certeza da data.

500 a.C.

Teorema de Pitágoras

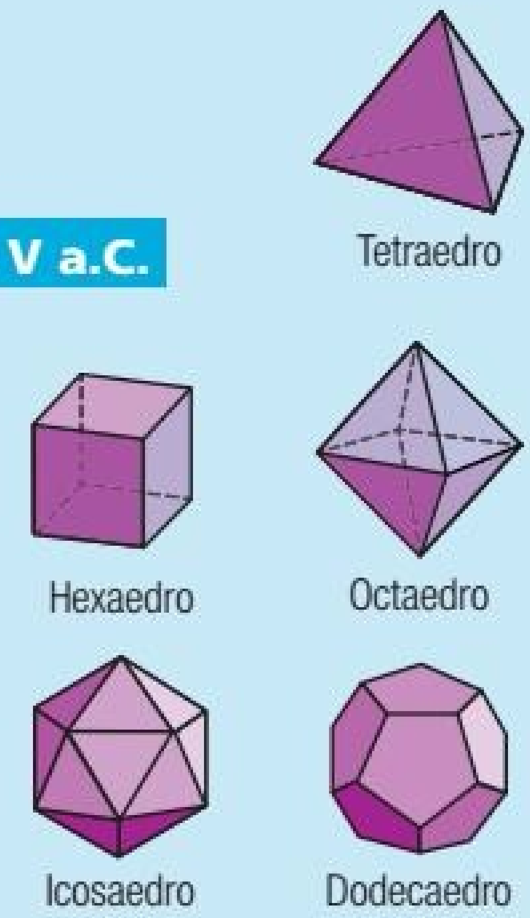
Nos primórdios da Filosofia grega, Pitágoras de Samos (570 a.C.-495 a.C.) afirmava que a essência das coisas são os números. Estudioso profícuo da Música e da Matemática, sua mais famosa contribuição é a confirmação de um antigo enunciado matemático: “Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.



Editoria de Arte

$C = A + B$, em que A, B e C são as áreas dos respectivos quadrados.

Século V a.C.



Editoria de Arte

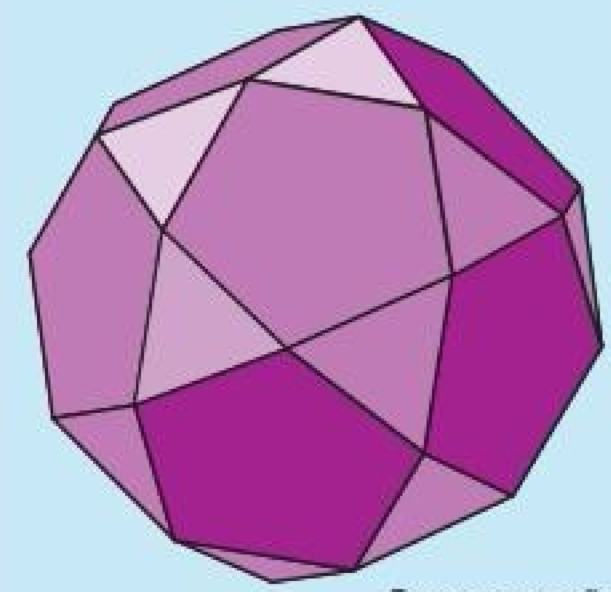
Poliedros

No auge da civilização grega, Atenas havia se convertido na *pólis* (cidade--estado) modelar, adornada com templos e monumentos custeados pelo comércio marítimo. Sócrates (469 a.C.-399 a.C.), Platão (c. 428 a.C.-348 a.C.) e outros filósofos de renome promoviam debates, envolvendo, por exemplo, os conceitos de moral, beleza e verdade. No campo da Matemática, por sua vez, estudiosos já dominavam o conhecimento sobre os cinco poliedros regulares, representados acima.

Século III a.C.

Poliedros

Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.) é considerado o maior matemático da Antiguidade. Filho de um astrônomo, estudou em Alexandria e desenvolveu célebres contribuições ao universo das ciências exatas – entre as quais as leis físicas do empuxo e da alavanca. Arquimedes também descobriu os 13 poliedros semirregulares. Um deles está representado na figura. O icosidodecaedro é formado por 12 pentágonos e 20 triângulos. No total, tal figura apresenta 32 faces, 30 vértices e 60 arestas.



Editoria de Arte

Representação de um icosidodecaedro.

ANTIGUIDADE

(4000 a.C.-476 d.C.)

400 a.C.

Matemática financeira

A princípio, as relações comerciais entre as primeiras comunidades humanas ocorriam com base na noção de escambo: os produtos eram trocados de forma amonetária, isto é, sem a utilização de moedas. Entretanto, o aprimoramento do comércio e a introdução de moedas exigiram a elaboração de novos saberes matemáticos. A primeira operação de Matemática financeira foi o câmbio, sendo necessário estabelecer as relações de equivalência entre o sistema monetário de diversas regiões.

Século III a.C.

Corpos redondos

No século III a.C., Arquimedes já sabia calcular os volumes dos sólidos redondos: cilindro, cone e esfera. Em 212 a.C., morreu tragicamente, aos 75 anos, pela espada de um soldado romano durante as Guerras Púnicas – um conjunto de conflitos travados entre Roma e Cartago. Sua tumba foi adornada com a relação entre os volumes da esfera e do cilindro de acordo com seu desejo.

Século III a.C.

Números irracionais e Geometria espacial de posição

Para promover seu poder, o conquistador Alexandre, o Grande (356 a.C.-323 a.C.) fundou diversas cidades com o nome de Alexandria – entre as quais se destaca o centro urbano do norte do Egito. Após sua morte, tal cidade converteu-se em um cobiçado polo de pesquisa, atraindo inúmeros sábios do mundo antigo a sua prestigiosa biblioteca, dotada de uma grande coleção de obras de caráter científico.

Em Alexandria, Euclides (330 a.C.-?) escreveu a obra **Os Elementos**, a qual reunia grande parte do conhecimento matemático da época. Nessa coleção de 13 volumes, aparece a demonstração da existência de segmentos de retas que não podem ser medidos em nenhuma unidade. O 11º volume de tal publicação apresenta a Geometria espacial de posição, a qual se propõe a analisar as relações entre pontos, retas e planos.

Egypt Exploration Fund/University of Pennsylvania Museum of Archaeology and Antropology

Fragmento da obra **Os Elementos**, de Euclides de Alexandria.

A linha do tempo não está representada em escala.

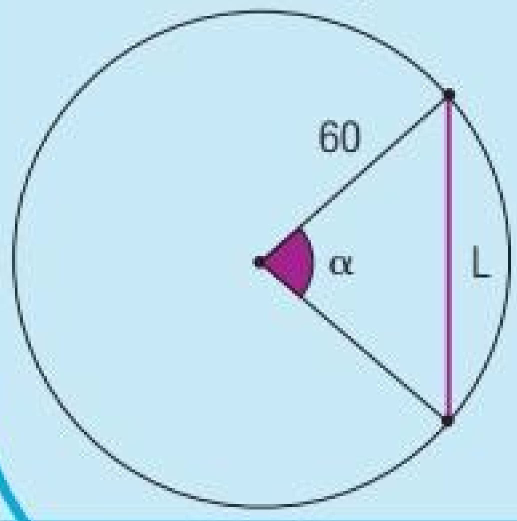
150

Trigonometria

Claudio Ptolomeu (90-168) foi outro grande intelectual a habitar a cidade de Alexandria. Além da Matemática e da Astronomia, tal pensador apresentou grande contribuição no campo da Geografia. Suas produções cartográficas e a teoria geocêntrica que elaborou influenciaram os pensadores europeus até o fim da Idade Média.

Além disso, Ptolomeu construiu a primeira tabela de cordas. Em uma circunferência de raio 60, para cada ângulo α (de meio em meio grau) está associado o comprimento L da corda correspondente.

Por exemplo, para $\alpha = 80°$ tem-se $L = 77{,}13$. A metade da corda dividida por 60 é o seno da metade do ângulo.



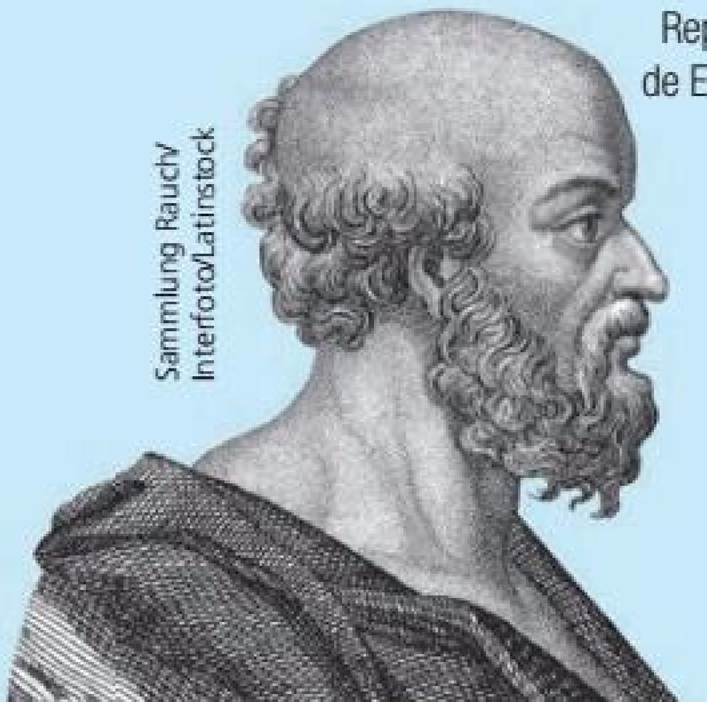
Editoria de Arte

Século III a.C.

Comprimento da circunferência

Eratóstenes de Cirene (276 a.C.-194 a.C.) mediu a circunferência da Terra. Ele calculou a medida de 5 000 estádios para a distância entre Siena (Assuã) e Alexandria e descobriu que entre essas cidades o ângulo central é de 7,5°. Como o estádio era uma unidade aproximadamente igual a 185 m, Eratóstenes estimou a circunferência terrestre em cerca de 46 000 km.

O resultado apresenta uma pequena margem de erro diante das medições atuais, que estipulam o valor em 40 075 km.



Representação moderna de Eratóstenes de Cirene.

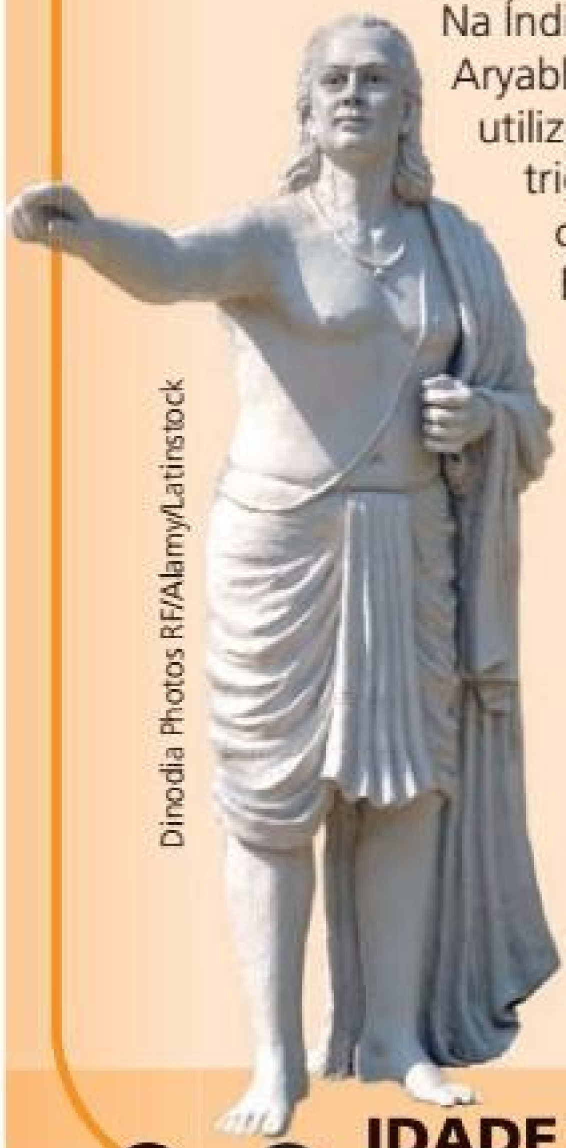
Sammlung Rauch/Interfoto/Latinstock

500

Trigonometria

Durante a Idade Média, uma força religiosa arrebatadora espalhou-se pela Europa: o Cristianismo. O conhecimento produzido na época submeteu-se aos ditames da Igreja, conferindo uma autonomia relativa ao desenvolvimento da Ciência. Paralelamente a esse fenômeno, civilizações de destaque foram forjadas na África e no Oriente, a exemplo dos bizantinos, indianos e árabes muçulmanos.

Na Índia, o astrônomo Aryabhata (476-550) utilizou as razões trigonométricas como fazemos hoje em dia.



Estátua do estudioso indiano Aryabhata na Universidade de Pune, em Maharashtra, Índia. Fotografia de 2008.

Dinodia Photos RF/Alamy/Latinstock

Século X

Relações entre funções trigonométricas e Trigonometria

A partir do século VII, o Islamismo foi difundido a diversas regiões do Oriente Médio, norte da África, Ásia Central e Península Ibérica. No antigo território da Pérsia (atual Irã), o matemático muçulmano Abu al-Wafa al-Buzjani (940-998) mostrou as relações entre as funções trigonométricas e utilizou, pela primeira vez, a circunferência de raio 1. Ele também deduziu as seguintes fórmulas:

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
- $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$

IDADE MÉDIA

(476-1453/1492)

Séculos VII ao XV

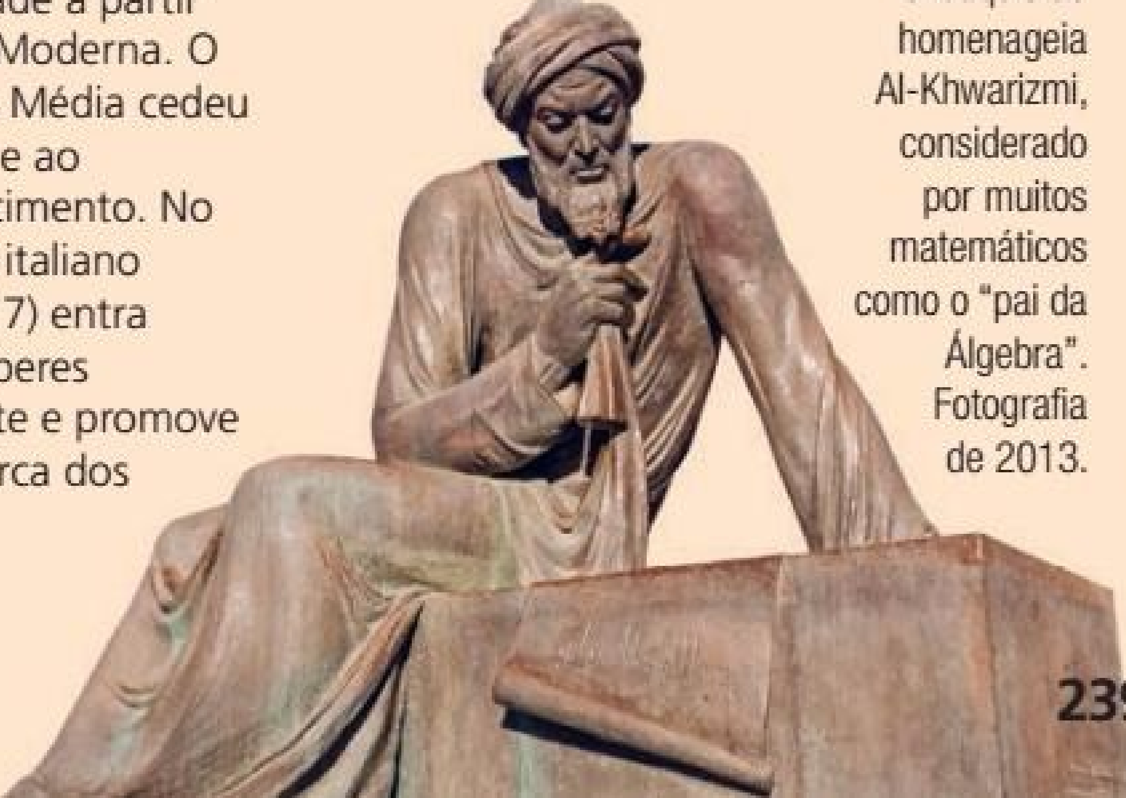
Números negativos

Na Idade Média, o surgimento de números negativos em civilizações do Oriente comprovava sua sofisticação intelectual. Os primeiros registros datam do século VII, na Índia, em uma época de esplendor do império Brahmagupta. Duzentos anos depois, o muçulmano persa Al-Khwarizmi (780-c.-850) aprimora os estudos sobre os números negativos. Tempos depois, Abu al-Wafa também aprofundou o conhecimento matemático em tal área.

A Europa, por sua vez, sofreu uma mudança de mentalidade a partir do alvorecer da Idade Moderna. O Teocentrismo da Idade Média cedeu lugar ao Racionalismo e ao Humanismo do Renascimento. No auge de tal período, o italiano Luca Pacioli (1445-1517) entra em contato com os saberes matemáticos do Oriente e promove relevantes estudos acerca dos números negativos.

Luca Pacioli.

Akg-Images/Latinstock



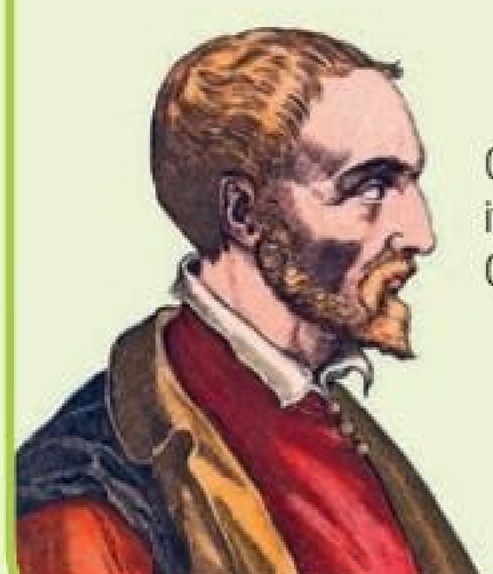
Estátua no Uzbequistão homenageia Al-Khwarizmi, considerado por muitos matemáticos como o "pai da Álgebra". Fotografia de 2013.

Melvyn Longhurst/Alamy/Latinstock

1526

Probabilidade

Durante a Renascença, o norte da Península Itálica presenciou o enriquecimento de cidades de tradição comercial, em especial Florença, Veneza e Gênova. As riquezas acumuladas foram utilizadas para o patrocínio de artistas geniais. Filippo Brunelleschi (1377-1446), Sandro Botticelli (1445-1510), Leonardo da Vinci (1452-1519) e Michelangelo Buonarroti (1475-1564) são alguns dos nomes consagrados em tal contexto.
Já no final do Renascimento, Girolamo Cardano (1501-1576), um cientista e matemático italiano, escreveu o livro **Liber de ludo aleae** (Livro dos jogos de azar). Esse livro marcou o início do estudo da probabilidade em jogos, sendo publicado apenas em 1663.



Akg-Images/Latinstock

Gravura do cientista italiano Girolamo Cardano.

1614

Logaritmos

A revolução científica contou com figuras do quilate de Nicolau Copérnico (1473-1543), Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630). Tal fenômeno, que engloba grande parte da Idade Moderna, passou a questionar as antigas verdades por meio da atenta observação do objeto do conhecimento e da experimentação de hipóteses produzidas.
Durante essa profunda transformação do paradigma da Ciência, o escocês John Napier (1550-1617) publicou seu trabalho sobre logaritmos, cujo título em latim é **Mirifici logaritmorum canonis descriptio**.

1624

Equações polinomiais

Em meados do século XVII, a revolução científica chegou à França da Idade Moderna, momento de esplendor da corte dos Bourbon, caso do extravagante Luís XIV. Durante a época de Luís XIII, pai do "rei Sol", Albert Girard (1595-1632) lançou o livro **Invention nouvelle en l'algebre** contendo as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial.

Meados do século XVII

Probabilidade

Cartas entre Pierre de Fermat e o filósofo e teólogo Blaise Pascal (1623-1662) auxiliaram no desenvolvimento do raciocínio de probabilidade em jogos. Christian Huygens (1629-1695), matemático holandês, escreveu um livro sobre probabilidades, cujo título é **De Ratiociniis in ludo aleae** (Sobre o raciocínio em jogos de azar).

2 3 **IDADE MODERNA** 1 3 3 3 2

(1453/1492-1789)

1542

Números complexos

Girolamo Cardano elaborou a solução da equação $x^3 + px + q = 0$, que tinha sido descoberta por Scipione del Ferro (1465-1526) e Niccoló Tartaglia (1499-1557).
Na solução de uma dessas equações aparece a igualdade $\sqrt[3]{2+\sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-4}} = -2$, a qual contém um número negativo dentro de uma raiz quadrada; apesar disso, o resultado é um número real.
Esse fato marcou o nascimento dos números complexos, compreendidos apenas séculos depois.

1635

Cálculo

A Idade Moderna vivenciou também a Reforma religiosa, uma ruptura da cristandade europeia motivada, entre outros fatores, pela ascensão de uma mentalidade questionadora e irreverente. Como resposta ao surgimento das correntes protestantes, o católico Ignácio de Loyola fundou a Companhia de Jesus em 1534, cujos membros são conhecidos como jesuítas. Entre os seguidores da ordem, o italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) conquistou reconhecimento ao produzir a obra **Geometria indivisibilibus continuorum**. Tal produção contém o famoso princípio que serviu de inspiração ao aparecimento e ao desenvolvimento do Cálculo.

1636

Geometria analítica

O francês Pierre de Fermat (1601-1665) teve a ideia de representar pontos no plano por meio de duas coordenadas. Com elas, ele estudou as cônicas. Tal proposta foi também enunciada pelo filósofo René Descartes (1596-1650), um dos pensadores mais versáteis da Idade Moderna. Sua produção matemática foi tão relevante quanto suas divagações filosóficas, entre as quais a famosa sentença *"cogito, ergo sum"* (penso, logo existo).

A linha do tempo não está representada em escala.

1637

Geometria analítica

René Descartes produziu a obra **Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências**. No apêndice desse livro, aparecem os fundamentos que permitiram o aparecimento da Geometria analítica décadas depois. Descartes foi um dos primeiros matemáticos a ter a ideia de reunir a Geometria e a Álgebra.

Georgios Kollidas/Shutterstock.com

O filósofo francês René Descartes mostrou como poucos o espírito da Ciência moderna no século XVII.

1666

Combinatória

Com apenas 20 anos, Gottfried Leibniz (1646-1716), matemático, cientista e diplomata alemão, lançou o trabalho **Dissertatio de arte combinatoria** com as principais técnicas de contar de forma eficiente.

Nicku/Shutterstock.com

Pensador e diplomata alemão Gottfried Leibniz.

1702

Representação de funções

O século XVIII ficou conhecido como "Era das Luzes", uma vez que contou com o esplendor do Iluminismo. Os membros de tal corrente intelectual defendiam a tese de que a razão e o saber resolveriam os males da humanidade. Suas críticas, por sua vez, voltavam-se ao fanatismo, à ignorância e a outras características da sociedade europeia da Idade Moderna. No início do século, o estudioso suíço Jean Bernoulli (1667-1748) propôs o símbolo φ (x) para representar uma função de *x*. A partir dessa época, as funções elementares tornam-se comuns.

Heritage Images/Getty Images

Jean Bernoulli foi uma figura de grande relevância para o estudo das funções.

1662

Estatística

O britânico John Graunt (1620-1674) elaborou métodos para analisar o censo populacional na Inglaterra, reunindo grande quantidade de dados sobre a população da época. Seu livro **Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality** apresentava tabelas sobre a expectativa de vida da população e marcou o início da Estatística moderna. O aumento exponencial da população europeia converteu-se em um assunto prioritário dos Estados modernos, interessados em utilizar o "capital" humano à disposição para atender a seus interesses políticos e econômicos. Já no século XVIII, o economista britânico Thomas Malthus (1766-1834) criou uma teoria populacional alarmista. De acordo com sua pesquisa, a população mundial cresceria em um ritmo maior que a oferta de alimento. Entretanto, tal previsão não se concretizou ao longo do tempo.

1700

Determinantes

Leibniz inventou uma operação com os elementos de uma matriz quadrada que ele chama de "resultado". É o mesmo número chamado, tempos depois, de "determinante".

Final do século XVII

Sistema cartesiano ortogonal

Sir Isaac Newton (1643-1727), considerado um dos maiores físicos da história, consagrou o processo de Revolução Científica. Ao longo de suas pesquisas, o famoso inglês fundamentou a Mecânica clássica, afirmando que as mesmas leis que governam os corpos celestes também são aplicadas aos objetos. No final do século XVII, Newton utilizou eixos cartesianos ortogonais e desenvolveu o Cálculo diferencial ao estudar diversas funções.

Science Photo Library/Latinstock

Sir Isaac Newton.

1730

Determinantes

Colin Maclaurin (1698-1746), um matemático de origem escocesa, escreveu sua obra **Treatise on Algebra** contendo propriedades dos determinantes. Nessa publicação, Maclaurin havia mostrado a regra para resolver sistemas lineares 2×2 e 3×3. Anos depois, iniciou-se a Primeira Revolução Industrial na Inglaterra, fenômeno que promoveu uma mudança sem precedentes no processo de produção de mercadorias.

Meados do século XVIII

Sistemas lineares

Em 1750, o matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752) elaborou o método geral para a resolução de sistemas lineares com *n* equações e *n* incógnitas usando determinantes. Já em 1764, o estudioso francês Étienne Bézout (1730-1783) descobriu métodos para calcular determinantes grandes.

1772

Determinantes

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), intelectual francês que organizou a chamada Astronomia Matemática, publicou a **Teoria geral dos determinantes**. Por meio desse estudo, Laplace explicou a regra de expansão que permitiu representar um determinante de ordem *n* por meio de uma soma de determinantes de ordem n − 1.

Science Photo Library/Latinstock

Representação artística do matemático francês Laplace.

1 3 2 2 **IDADE MODERNA**

(1453-1789)

1748

Função exponencial e poliedros

O suíço germanófilo Leonhard Euler (1707-1783) descobriu que $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$.

Em 1752, desenvolveu a fórmula dos poliedros convexos: $A + 2 = F + V$, em que *A* é o número de arestas, *F* é o número de faces e *V* é o número de vértices de um poliedro convexo.

© Roger-Viollet/Glow Images

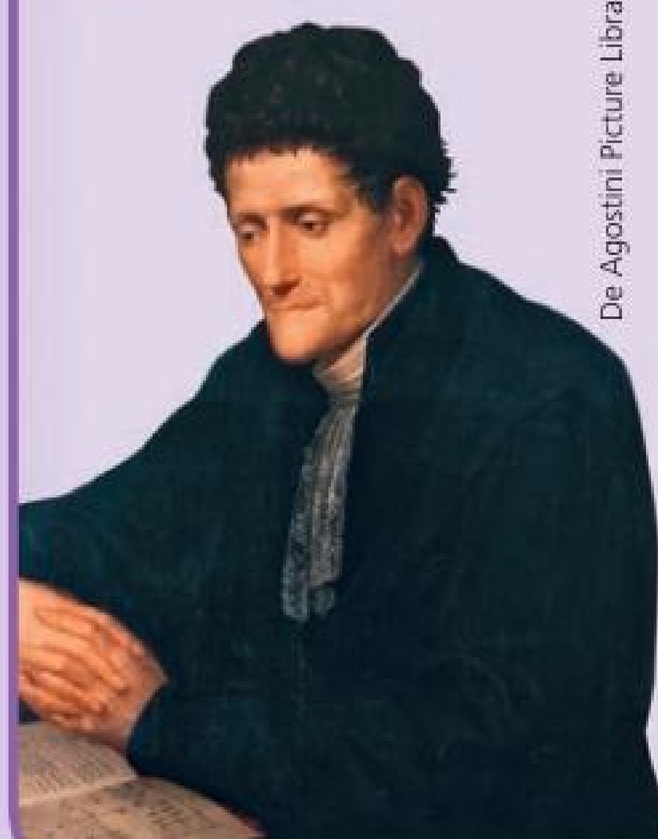
Leonhard Euler consagrou-se na história da Matemática por causa de suas contribuições no campo da Geometria espacial e das funções.

1807

Polinômios

O italiano Paolo Ruffini (1765-1882) produziu um livro de Álgebra elementar contendo o algoritmo da divisão de um polinômio p(x) por (x − a).

Paolo Ruffini foi um matemático de destaque na Álgebra elementar.



De Agostini Picture Library/Glow Images

1812

Matrizes e determinantes

Jacques Binet (1786-1856), matemático de origem francesa, descobriu a regra de multiplicação de matrizes e provou que "o determinante do produto de duas matrizes quadradas é o produto dos seus determinantes".

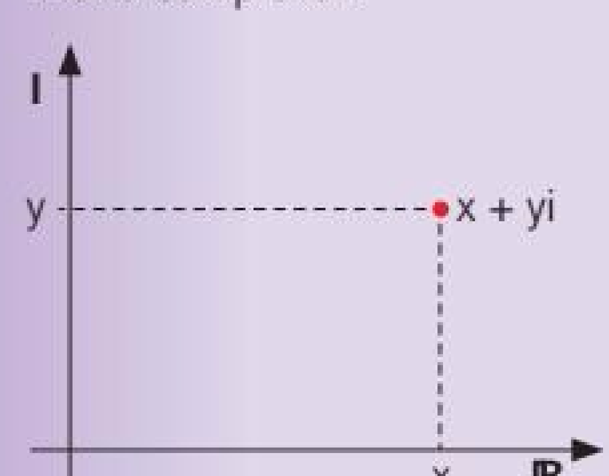
$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

3 3 2 2

1806

Números complexos

No século XIX, os saberes científicos, notadamente as chamadas ciências exatas, galgaram uma importância incomparável na civilização europeia. Em tal contexto, o francês Auguste Comte (1798-1857) fundou o Positivismo, corrente de pensamento que defendia a inquestionabilidade do método científico, único instrumento capaz de promover a "ordem" e o "progresso" aos países evoluídos. No campo da Matemática, o suíço e matemático amador Jean--Robert Argand (1768-1882) teve a ideia de representar geometricamente os números complexos e criou o "Plano complexo".



A linha do tempo não está representada em escala.

1841

Determinantes

O pensador alemão Carl Gustav Jacobi (1804-1851) lançou o livro **De determinantibus functionalibus** contendo diversas propriedades dos determinantes e aplicações em Cálculo diferencial.

Corbis Corporation/Fotoarena

Retrato do alemão Carl Gustav Jacobi.

Meados do século XIX

Matriz

Em 1850, o britânico James Sylvester (1814-1897) inventou a expressão "matriz" para representar um quadro retangular de números. Cinco anos depois, Arthur Cayley (1821-1895), matemático inglês, descobriu métodos para calcular o que chamou de "matriz inversa" de uma determinada matriz.

1842

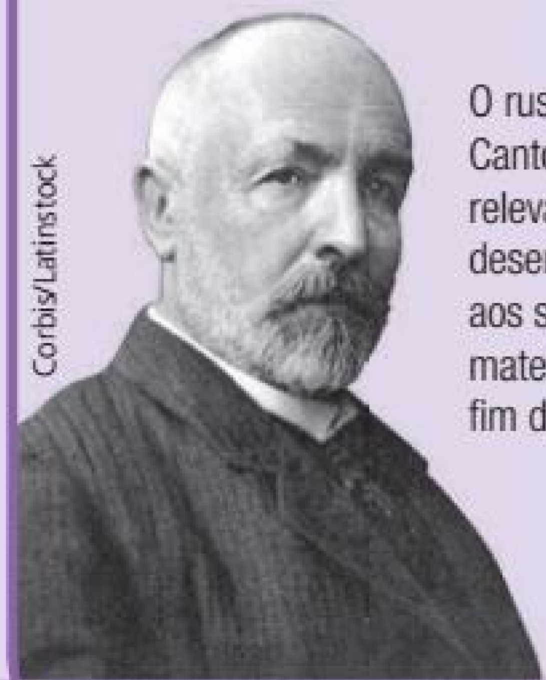
Determinantes

O matemático francês Pierre Sarrus (1798-1861) divulgou a regra para o cálculo do determinante 3 × 3, a qual foi universalmente adotada pelos estudantes.

1870

Conjuntos

Por volta de 1860, iniciou-se a Segunda Revolução Industrial, nova fase de aprimoramento da produção fabril. Em tal conjuntura, algumas invenções difundidas mundialmente foram criadas, como a locomotiva, o telefone, o telégrafo, o rádio e o cinema. Na segunda metade do século XIX, o russo Georg Cantor (1845-1918) e o estudioso alemão Richard Dedekind (1831-1916) começaram a desenvolver a **Teoria dos Conjuntos**. A grande dúvida era como tratar conjuntos com número infinito de elementos.



Corbis/Latinstock

O russo Georg Cantor promoveu relevante desenvolvimento aos saberes matemáticos no fim do século XIX.

Década de 1930

Nas pesquisas da Química, o alemão Werner Heisenberg (1901-1976) elaborou o princípio da incerteza: não se pode determinar de forma simultânea a posição e a velocidade das partículas atômicas.
Na década de 1930, a Matemática também vivenciou uma quebra de paradigmas. Kurt Gödel (1906-1978), um estudioso austríaco naturalizado estadunidense, demonstrou que o conjunto de preceitos que estruturam a Matemática é incompleto. Por meio do Teorema da Incompletude, assegurou que não se pode demonstrar nem a verdade nem a falsidade de algumas propriedades matemáticas.

Granger/Fotoarena

Kurt Gödel causou uma fissura nas certezas matemáticas ao fundar o Teorema da Incompletude.

ERA CONTEMPORÂNEA

(1789-dias atuais)

Início do século XX

O entusiasmo quanto à suposta onisciência e onipotência da Ciência no século XIX deu lugar a um profundo sentimento de desesperança nas primeiras décadas do século XX, pois o primoroso desenvolvimento científico contribuiu com extermínios em massa nas grandes guerras.
No campo da Física, a Mecânica clássica de Newton é questionada pela Teoria da Relatividade de Albert Einstein (1879-1955). Como consequência, ganhou força o indeterminismo e o probabilismo entre os estudiosos dos fenômenos físicos.

GL Archive/Alamy/Latinstock

Albert Einstein revolucionou o universo da Física ao problematizar a Mecânica clássica de Isaac Newton e inaugurar a Teoria da Relatividade.

Meados do século XX e início do século XXI

O terceiro estágio da Revolução Industrial ocorreu nas últimas décadas do século XX e início do século XXI. Testemunha-se uma evolução em diversas áreas do saber, sobretudo nas telecomunicações, na robótica, na informática e na engenharia genética. Intelectuais e outras figuras ligadas ao conhecimento são conclamados a solucionar demandas criadas pela própria humanidade, caso da degradação ambiental. É crescente o número de pensadores que procuram questionar uma visão tecnicista do mundo, ao passo que valorizam uma postura científica mais humana, inclusiva e plural.

Michael D. Brown/Shutterstock.com

A robótica foi uma das áreas tecnológicas que conheceram grande impulso graças ao advento da Terceira Revolução Industrial.

Respostas

Unidade 1 – Estatística

Capítulo 1 – Noções de Estatística

Exercícios propostos

1. a) População: 100 funcionários de uma empresa; unidade estatística: cada trabalhador da empresa.
b) 20 funcionários escolhidos ao acaso.
c) Massa do trabalhador em quilogramas; variável contínua.
d) 65 kg: 3; 75 kg: 2; 80 kg: 3; 90 kg: 0

2. a) 247 delegados.

b)

x_i	f_i	f_r
Homens	247	55%
Mulheres	202	45%

c) 90%

3. Alternativa **b**.

4.

x_i	f_i	f_{ia}
A	3	3
B	4	$3 + 4 = 7$
C	8	$7 + 8 = 15$
D	4	$15 + 4 = 19$
E	1	$19 + 1 = 20$

5.

x_i	f_i	f_{ia}
680	1	1
720	6	$1 + 6 = 7$
760	4	$7 + 4 = 11$
800	4	$11 + 4 = 15$
840	2	$15 + 2 = 17$
880	2	$17 + 2 = 19$
920	1	$19 + 1 = 20$

6. a)

x_i	f_i	f_{ia}
0	5	5
1	12	17
2	28	45
3	2	47
4	2	49
5	1	50

b) n = 45 alunos.

7.

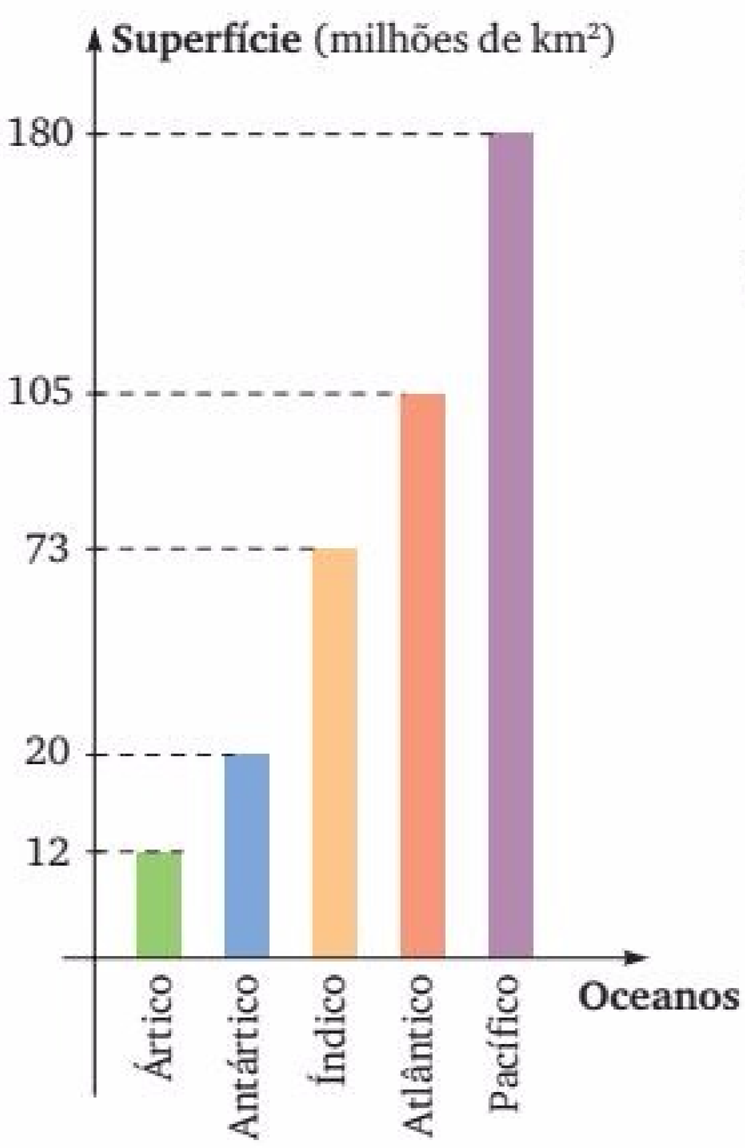
x_i	f_i	f_{ia}	f_r	f_{ra}
1	2	2	$\frac{2}{20} = 10\%$	10%
2	5	$2 + 5 = 7$	$\frac{5}{20} = 25\%$	35%
3	2	$7 + 2 = 9$	$\frac{2}{20} = 10\%$	45%
4	2	$9 + 2 = 11$	$\frac{2}{20} = 10\%$	55%
5	5	$11 + 5 = 16$	$\frac{5}{20} = 25\%$	80%
6	4	$16 + 4 = 20$	$\frac{4}{20} = 20\%$	100%

a) 2 vezes.
b) 11 vezes.
c) 20% das jogadas.
d) 100% − 55% = 45%

8.

Tipo	f_i	f_{ia}	f_r (%)	f_{ra} (%)
Novelas	360	360	0,45 = 45%	0,45 = 45%
Esportes	128	488	0,16 = 16%	0,61 = 61%
Filmes	80	568	0,10 = 10%	0,71 = 71%
Noticiários	32	600	0,04 = 4%	0,75 = 75%
Shows	200	800	0,25 = 25%	1,00 = 100%

9.



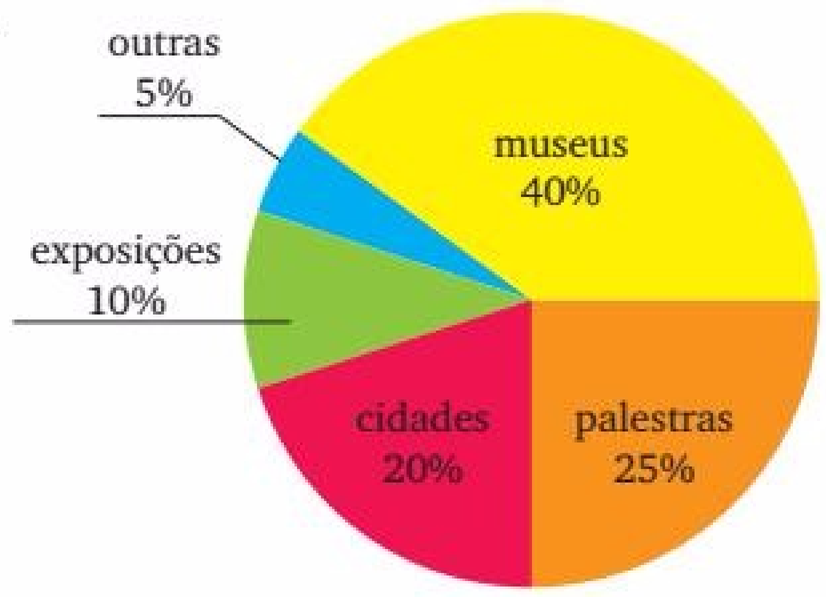
Editoria de arte

10. a) Rio de Janeiro (40%).
b) 30 alunos.

11. Alternativa **c**.

12. Alternativa **e**.

13.



14. Alternativa **e**.

15. a) 8%

b) 35 pessoas

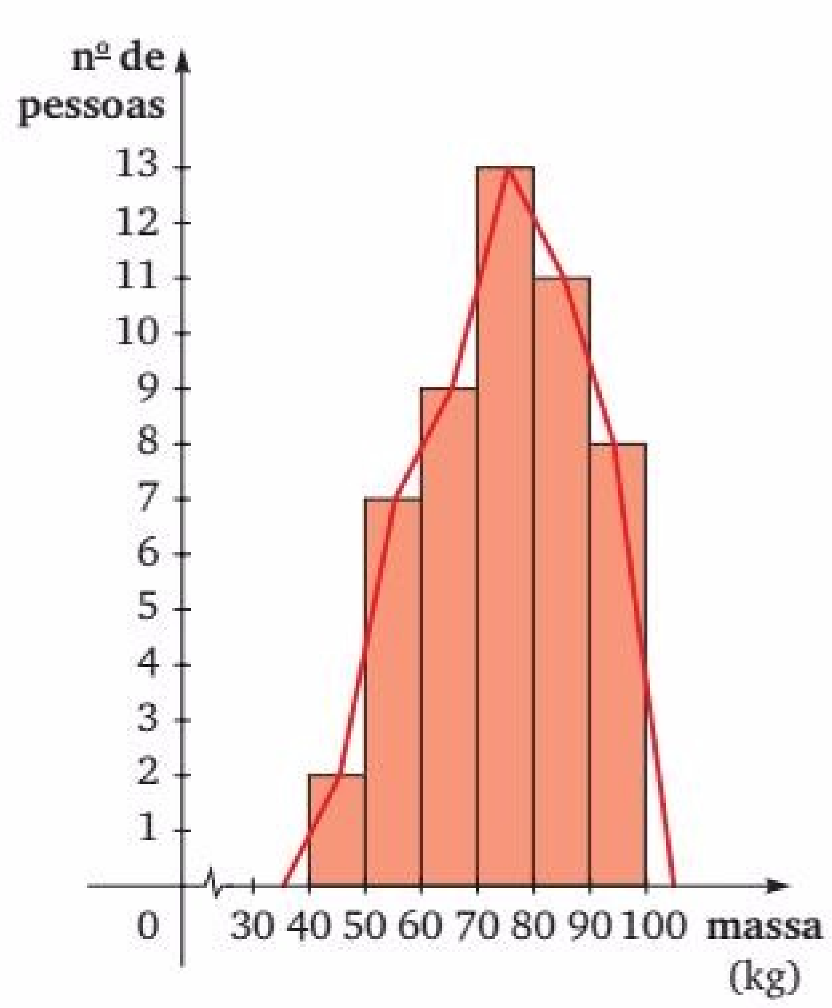
c)

Estatura	Número de pessoas
[145, 150[	7
[150, 155[	8
[155, 160[	11
[160, 175[	15
[165, 170[	24
[170, 175[	14
[175, 180[	10
[180, 185[	6
[185, 190[	5

16. a)

i	Classe	f_i	f_{ia}	f_r	f_{ra}
1	[40; 50[	2	2	4%	4%
2	[50; 60[	7	9	14%	18%
3	[60; 70[	9	18	18%	36%
4	[70; 80[	13	31	26%	62%
5	[80; 90[	11	42	22%	84%
6	[90; 100[	8	50	16%	100%

b)

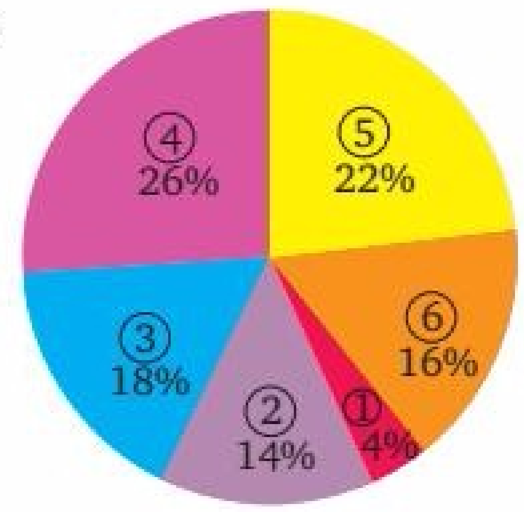


c) $x_1 = \dfrac{30 + 40}{2} = 35$

Portanto, os pontos médios dos intervalos são: 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95 e 105, respectivamente.

A representação do polígono de frequências também consta na figura do item *b*.

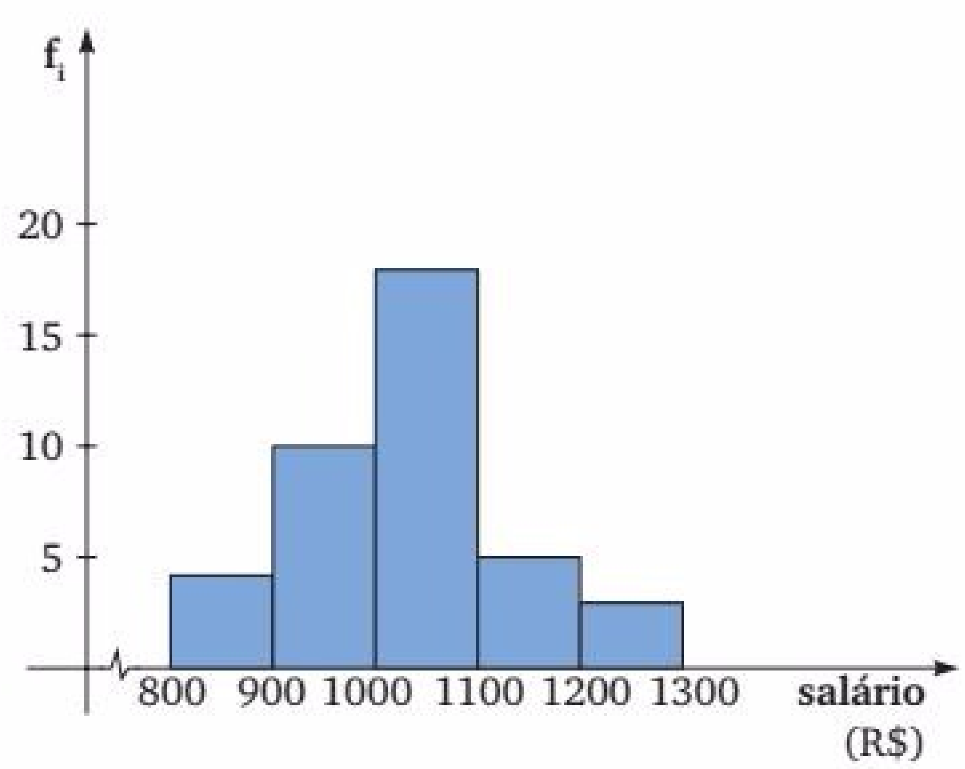
d)



17. a) A = 100

b)

Classes	f_i	f_{ia}	f_r	f_{ra}
[800; 900[	4	4	10%	10%
[900; 1 000[	10	14	25%	35%
[1 000; 1 100[	18	32	45%	80%
[1 100; 1 200[	5	37	12,5%	92,5%
[1 200; 1 300[	3	40	7,5%	100%



c) 14 colaboradores.

d) 65%

e) 37 colaboradores.

18. 1,99 m

19. 4,5

20. Alternativa **c**.

21. 2,5

22. $M_d = 22,5$

23. $M_d = 74,5$ e $M_o = 75$

24. $\bar{x} \simeq 22,9$

25. a) $\bar{x} \simeq 3,14$, $M_d = 3$; $M_o = 1$

b) $\bar{x} \simeq 7,2$, $M_d = 8$; $M_o = 4$ ou $M_o = 8$ ou $M_o = 12$

26. Alternativa **e**.

27. a)

b) $\bar{x} = 11{,}44$ c) $M_d = 11$

28. $\bar{y} = 133$

29. a) $\bar{x} = 98$ kg b) $d_m = 3{,}6$ kg

30. $\bar{x} = 4$; $d_m \simeq 1{,}33$; $V_a = 2$; $S \simeq 1{,}41$

31. a) $\bar{x} = 10$ c) $d_m = 2$

b) $M_d = 10$ d) $V_a = 6$; $s \simeq 2{,}45$

32. a) $\bar{x} = 198$ km/h

b) $V_a = 24$ km²/h²

c) $s \simeq 4{,}9$ km/h

33. a) $\bar{x} = 15{,}08$ c) $V_a \simeq 45{,}27$

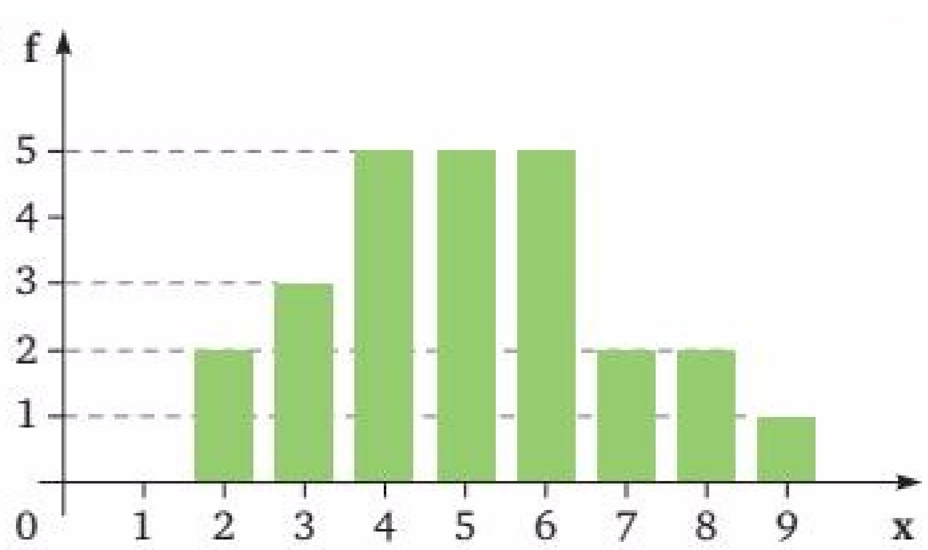
b) $d_m \simeq 5{,}50$ d) $s \simeq 6{,}73$

34. a) $\bar{x} = 2{,}5$ b) $M_0 = 1$; $M_d = 2$ c) $s \simeq 1{,}57$

35. a)

Notas (x_1)	f_i	f_{ia}	f_r
2	2	2	8%
3	3	5	12%
4	5	10	20%
5	5	15	20%
6	5	20	20%
7	2	22	8%
8	2	24	8%
9	1	25	4%

b)



c) $\bar{x} = 5{,}08$

d) $M_d = 5$

e) $d_m = 1{,}456$

f) $s = 1{,}81$

36. a) $\bar{x} = 2{,}4$ c) $V_a \simeq 2{,}79$

b) $d_m \simeq 1{,}49$ d) $s \simeq 1{,}67$

37. a) $\simeq 1703{,}59$ b) $\simeq 29{,}85$

38. a) Identificar alteração na cobertura florestal por corte raso.

b) Mato Grosso, com quase 12 000 km² desmatados em 2004; Total de 121 990 km²/ano; Média de aproximadamente 11 090 km²/ano.

c) Amapá é o Estado que possui menor desvio padrão. Significa que o Amapá é o Estado que teve a menor alteração no índice de desmatamento entre 1990 e 2012.

d) Resposta pessoal.

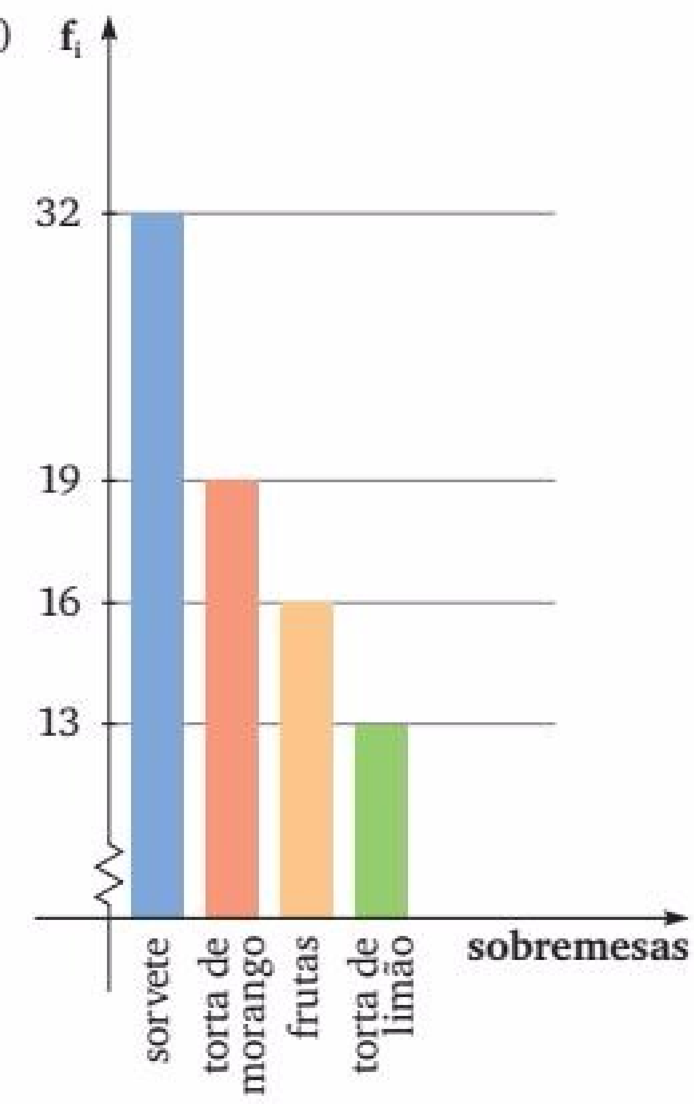
Exercícios complementares

1. a)

Idade	f	f_r (%)
19	5	20
20	7	28
21	8	32
22	3	12
23	2	8
Total	25	100

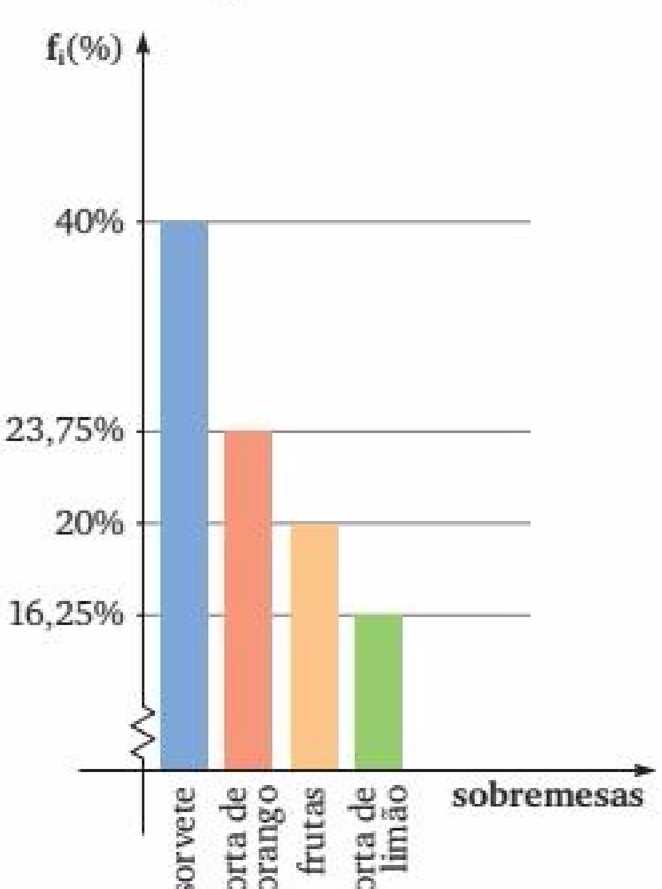
b) Entre 1 050 e 1 190 leitoras.

2. a)

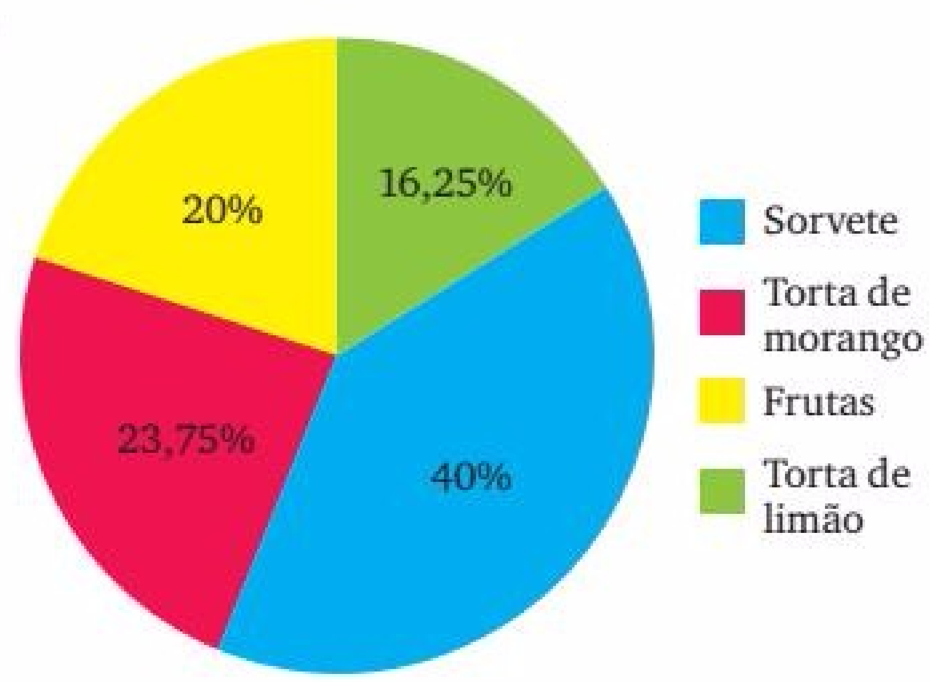


Ilustrações: Editoria de arte

b)



c)



3. Alternativa **a**.

4. a) $x = 23{,}78\%$

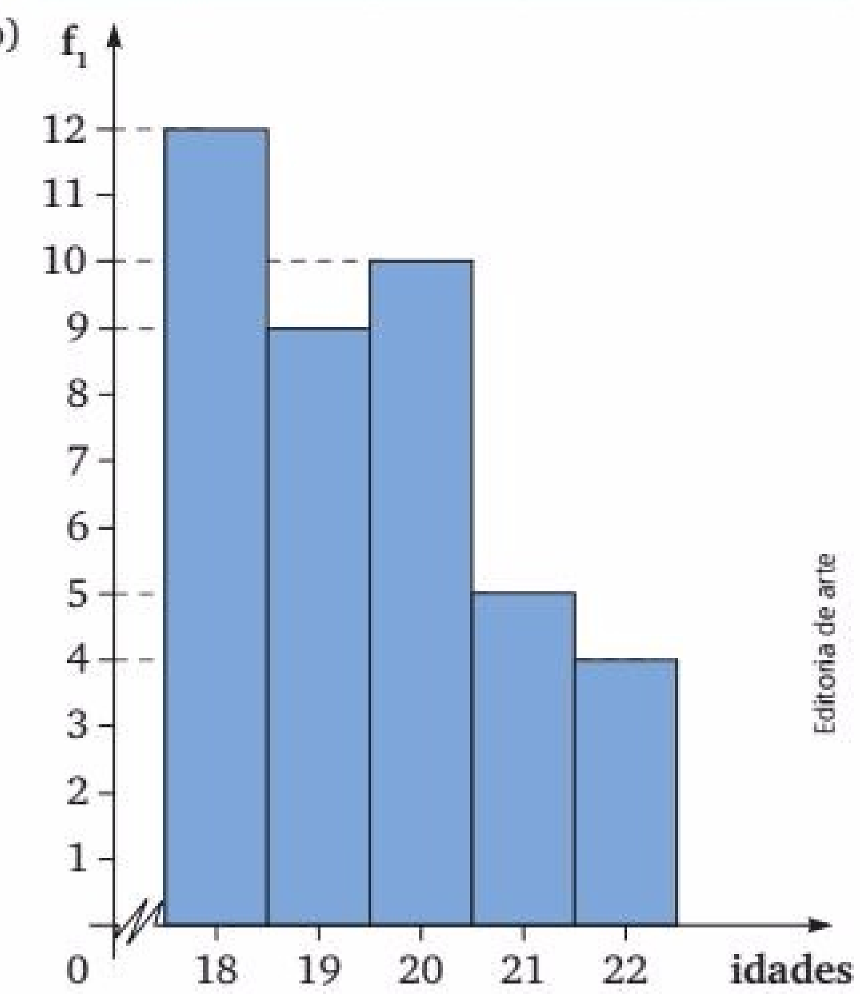
b)

Investidores	(f) Frequência absoluta em bilhões de dólares	(f_r) Frequência relativa (%)
Mercosul	2,8	2,72
Japão	2,5	2,43
Canadá	2	1,94
China	0,037	0,04
Outros	23,11	22,47
Estados Unidos	24,5	23,82
União Europeia	47,9	46,57

5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **d**.
7. Alternativa **c**.
8. Alternativa **d**.
9. $M \simeq 167{,}08$
10. Alternativa **d**.
11. 6 estudantes.
12. a) 40 b) $p = 102$
13. 40 homens e 80 mulheres.
14. Alternativa **c**.
15. a)

Idade (x_i)	f_i	f_{ia}	f_r
18	12	12	30%
19	9	21	22,5%
20	10	31	25%
21	5	36	12,5%
22	4	40	10%

b)



c) 31 pessoas com 20 anos ou menos de 20 anos.
d) $\bar{x} = 19{,}5$
e) $M_d = 19$
f) $s \simeq 1{,}30$
16. a) $\bar{x} = 1{,}2$ b) $d_m = 0{,}56$ c) $V_a = 0{,}46$
17. a) \$ 90,00 b) Va = 900; S = \$ 30,00
18. Alternativa **b**.
19. a) $x = 72{,}2$ b) 3 alunos
20. a) $\bar{x} = 5$ b) $d_m = 1{,}83$
21. a) $\bar{x} = 36{,}75$ b) $d_m = 5{,}675$
22. Alternativa **a**.
23. Alternativa **a**.

Capítulo 2 – Poliedros

Exercícios propostos

1. 9
2. 15 arestas e 10 vértices.
3. 11
4. Alternativa **c**.
5. 10
6. a) Não. b) É válida a relação de Euler.
7. 32
8. Alternativa **b**.
9. Alternativa **b**.
10. 60 átomos e 90 ligações.
11. a) $8\sqrt{3}$ cm b) 384 cm²
12. 3 dm, 4 dm e 12 dm.
13. 7
14. 400 cm²
15. 132 dm²
16. 8 cm e 4 cm
17. 292 cm²
18. 3 folhas.
19. Alternativa **e**.
20. Alternativa **d**.
21. a) 470 cm² b) 280 m²
22. 15 u.m.
23. 4,86 m³ de argila.
24. 4 cm e 32 cm
25. 90 dm³
26. Alternativa **c**.
27. 480 L
28. $y = \frac{x\sqrt{2}}{2}$
29. Alternativa **c**.
30. Alternativa **b**.
31. 83,04 cm³
32. a) 12 000 cm³ b) 90 kg
33. a) 96 m² b) $48\sqrt{3}$ m³
34. Alternativa **c**.
35. $150\sqrt{3}$ cm³
36. Alternativa **c**.
37. a) Reduzir, reciclar e reutilizar. Por serem compostas de misturas de muitos componentes.
b) $S_t = 651{,}5$ cm²; $V = 1\,018{,}87$ cm³ e 1,018 L
c) Resposta pessoal.
38. a) 6 cm c) $2\sqrt{22}$ cm
b) $2\sqrt{13}$ cm d) $48 \cdot (3 + \sqrt{13})$ cm²
39. a) $4\sqrt{3}$ cm c) 10 cm
b) $2\sqrt{21}$ cm d) $48\sqrt{3}(2 + \sqrt{7})$ cm²
40. 260 cm²
41. 180 cm²
42. $225\sqrt{3}$ cm²
43. 4π m²
44. $64\sqrt{2}$ cm²
45. $\frac{16}{3}$
46. Alternativa **b**.
47. 1 000 cm³
48. $\simeq 83$
49. 45

50. a) $V_B = 128$ e $A_B = 16\sqrt{3}$

b) $h = 8\sqrt{3}$

51. $\frac{512\sqrt{2}}{3}$ mm³

52. Alternativa **c**. **53.** 56 cm³

54. 244 dm³ **55.** 2 480 cm³ **56.** 4 cm

57. $\sqrt{10}$ cm b) $\frac{104}{3}$ cm³

58. a) $\frac{4}{3}$ cm³ **59.** $\frac{164\,300}{3}$ cm³

Capítulo 3 – Corpos redondos

Exercícios propostos

1. a) 36π cm² c) 132π cm²

b) 60π cm²

2. 314 cm² **3.** 140π cm²

4. 2 cm **5.** 5 dm²

6. 176π cm²

7. a) 20 cm b) 600π cm²

8. 294π dm² **9.** Alternativa **a**.

10. a) $\frac{9}{4}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$

11. 75π cm³

12. 216π cm²; 432π cm³

13. a = 9 cm e b = 4 cm

14. a) 2510π cm² b) $13\,725\pi$ cm³

15. Alternativa **c**. **16.** Alternativa **d**.

17. a) $V_1 \simeq 350$ cm³ e $V_2 \simeq 500$ cm³

b) Lata (1).

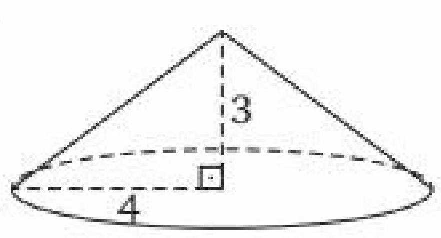
18. Alternativa **c**. **19.** $19\,000\pi$ cm³

20. 47,1 cm²

21. a) $S = 96\pi$ cm²

b) $S = 144\pi$ cm²

22. a)



Editoria de arte

36π cm²

b) r = 1,5 cm

23. Alternativa **b**.

24. a) $5\sqrt{2}\pi$ cm²

b) $(5\sqrt{2} + 1) \cdot \pi$ cm²

25. 100π cm² **26.** 216π

27. $10\sqrt{2}$ cm **28.** $\sqrt{19}$ cm

29. $\frac{4\pi}{5}$ rad **30.** 27 latas.

31. $H = 3\sqrt{7}R$ **32.** 96π m²

33. 12π cm³ **34.** 16π cm³

35. $\frac{2\pi}{3}$ cm³ **36.** 12π cm³

37. 64π cm³ **38.** $\frac{1}{6}$

39. 200 mL **40.** $\frac{V}{8}$

41. $\frac{125\pi}{2}$ dm³

42. a) Resposta pessoal. Exemplos de resposta: banhos demorados, escovar os dentes com a torneira aberta e lavar a calçada com a mangueira.

b) 10 048 litros.

c) Resposta pessoal.

43. $\frac{755\pi}{3}$ cm³ **44.** Alternativa **e**.

45. $\frac{1\,984\pi}{3}$ cm³ **46.** 15 cm

47. $5\sqrt{2}$ cm **48.** 1,875 m

49. a) $16\pi(9 + 2\sqrt{2})$ dm²

b) $\frac{736\pi}{3}$ dm³

50. $\frac{5\,600}{3}$ cm³ **51.** $\sqrt{2}$ cm

52. 256π cm² **53.** 100π cm²

54. a) 491 520 000 km² b) 8,58%

55. 16π cm²

56. $m = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ **57.** $4\,500\pi$ cm³

58. 486π m³ **59.** 3 334,68 mL

60. a) 34,325 L b) 8,95 cm

61. $\frac{2}{3}$ **62.** 60 casquinhas.

63. 4,53 kg **64.** 32π cm²

65. a) 48π cm³ b) 36π cm³

66. 5 cm **67.** 1 rad

68. Alternativa **a**.

Exercícios complementares

1. 12 faces.

2. Alternativa **e**. **3.** Alternativa **b**.

4. 1 192 m² **5.** Alternativa **d**.

6. $S_t = 468$ m²

7. a) $h = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$ b) $\frac{V_C}{V_T} = 3$

8. Alternativa **e**. **9.** Alternativa **d**.

10. Alternativa **b**.

11. Alternativa **e**.

12. $\frac{1}{2}\pi r^2(a + b)$

13. Aproximadamente 19,1 mm.

14. Alternativa **e**.

15. Alternativa **e**.

16. Alternativa **c**.

17. Alternativa **b**.

18. a) $\frac{\pi R^2}{3}$ cm² b) $\frac{4\pi R^2}{3}$ cm²

19. Alternativa **e**.

20. Alternativa **d**.

21. a) $r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ b) 50 cm²

22. Alternativa **d**.

23. Alternativa **c**.

24. Alternativa **b**.

25. Alternativa **a**.

26. 128 dm³

27. Alternativa **e**.

28. a) $V_P = \frac{32}{3}$ cm³; $V_S = \frac{160}{3}$ cm³

b) $A_P = (24 + 8\sqrt{3})$ cm²;

$A_t = (72 + 8\sqrt{3})$ cm²

29. 20,096 L

30. Alternativa **c**.

31. Alternativa **b**.

32. 02 e 04.

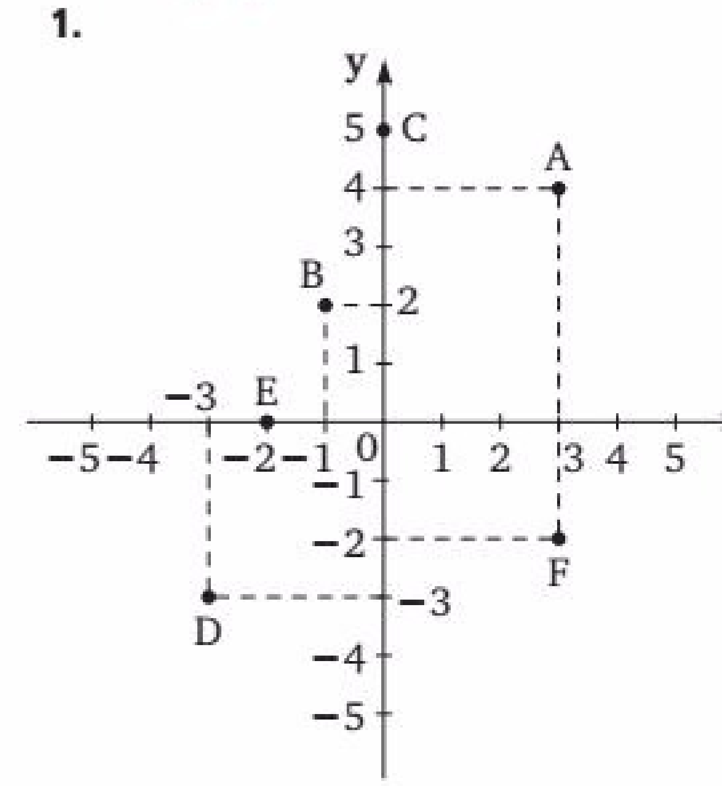
33. Alternativa **e**.

Unidade 3 – Geometria e Álgebra no plano cartesiano

Capítulo 4 – Geometria Analítica: pontos e retas

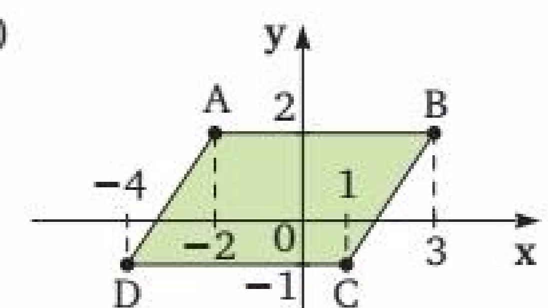
Exercícios propostos

1.



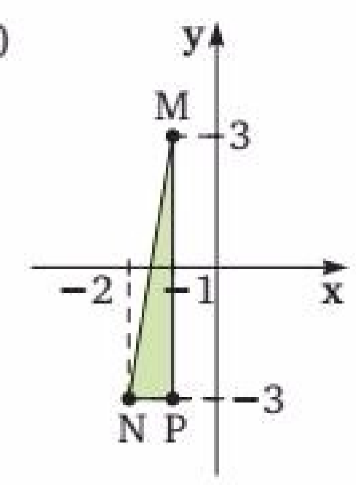
Ilustrações: Editoria de arte

2. a)



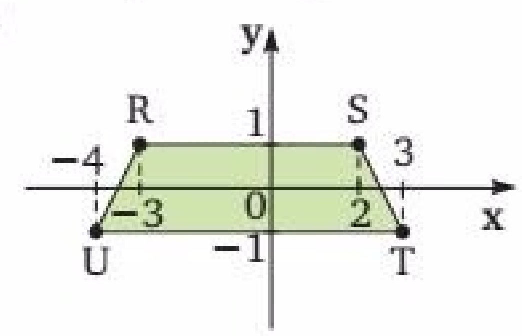
paralelogramo

b)



triângulo retângulo

c)



trapézio isósceles

3. k = 4

4. O ponto A pertence ao 2º quadrante e o ponto B pertence ao 3º quadrante.

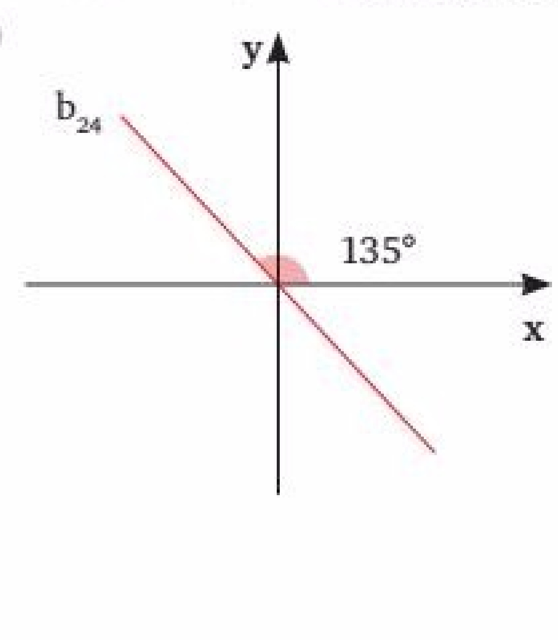
5. a) 1º ou 3º quadrante.

b) 4º ou 2º quadrante.

c) Sobre os eixos coordenados.

d) Sobre a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes. **6.** 1º ou 2º quadrante.

7. a)



Bissetriz do 2º e 4º quadrantes (b_{24}).

b) Os pontos *O*, *R* e *V* pertencem à reta b_{13} e os pontos *O*, *Q* e *T* pertencem à reta b_{24}.

c) $a = 7$ e $b = 10$

8. $A(1, 0)$; $B(0, 1)$; $C(-1, 0)$; $D(0, -1)$

9. a) $d = 10$
b) $d = 3$
c) $d = \frac{2\sqrt{10}}{3}$
d) $d = 4$
e) $d = 2$

10. $P = 4 + 6\sqrt{2}$

11. Alternativa **e**.

12. $P = 24$

13. $S = 4$ u.a

14. $x = -1$

15. Obtusângulo.

16. Alternativa **d**.

17. a) $M(6, 5)$
b) $M(-4, 2)$
c) $M(3, 0)$
d) $M(3\sqrt{5}, \sqrt{2})$

18. $x = -1$; $y = 3$

19. $O(1, 3)$

20. $M(5, 1)$

21. $B(7, 6)$

22. Demonstração.

23. $G\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

24. a) Não estão alinhados.
b) Estão alinhados.
c) Não estão alinhados.
d) Estão alinhados.

25. $m = -1$ ou $m = \frac{7}{10}$

26. $x \neq -1$ **27.** $P\left(0, -\frac{6}{5}\right)$

28. $Q\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ **29.** 33h20min

30. 16 anos **31.** $R(-1, -1)$

32. Respostas possíveis.
a) $x + 3y - 13 = 0$
b) $-3x + 4y - 9 = 0$
c) $-2x - 6 = 0$
d) $-6y + 12 = 0$

33. Sim.

34. Alternativa **b**.

35. $d(A, B) = 2\sqrt{13}$

36. $3x - 2y = 0$ **37.** $k = -3$

38. $m = 1$; $-x + y - 5 = 0$

39. $A \in r$ **40.** $B(-18, -5)$

41. $k = 2$ **42.** $\alpha = 104°$

43. Alternativa **a**.

44. Alternativa **c**.

45. Alternativa **b**.

46. $2x + 3y - 2 = 0$ **47.** Sim.

48. a) $x + 2y - 21 = 0$
b) $x + 2y - 21 = 0$

49. a) $y - 3 = 0$ ou $y = 3$
b) $x + 1 = 0$ ou $x = -1$

50. $k = 6$ **51.** $x + y - 7 = 0$

52. $y = 2x - 3$ **53.** $m = -\frac{3}{4}$

54. a) $m = \frac{5}{6}$; $n = \frac{1}{2}$
b) $m = -3$; $n = 1$
c) $m = 2$; $n = 4$

55. a) $x - 2y + 4 = 0$
b) $-\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$
c) $y = \frac{1}{2}x + 2$

56. Alternativa **a**. **57.** Alternativa **e**.

58. a) *r* paralela a *s*.
b) *r* concorrente com *s*.
c) *r* coincidente com *s*.

59. $x + y - 1 = 0$

60. a) 8 s b) 1 200 m

61. Alternativa **b**.

62. r: $x = 1$; s: $y = -2x + 2$; t: $y = \frac{1}{2}x + 2$

63. $2x - 3y + 8 = 0$ ou $y - 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$

64. Elas não são perpendiculares, pois $m_r \cdot m_s \neq -1$.

65. $3x - 4y + 1 = 0$ (reta suporte de $\overline{AB}$)
$4x + 3y - 6 = 0$ (reta suporte de $\overline{AC}$)

66. $m = -2$

67. a) $x - 3y + 7 = 0$
b) $3x + y - 19 = 0$

68. Demonstração

69. $O\left(\frac{29}{48}, \frac{17}{12}\right)$

70. a) $\theta = 45°$
b) $\theta = 60°$
c) $\theta = 90°$
d) $\theta = 0°$

71. $m_2 = 0$ ou $m_2 = \sqrt{3}$

72. $a = \frac{1}{3}$ ou $a = -3$

73. $3x - y - 2 = 0$ ou $x + 3y - 4 = 0$

74. Alternativa **d**.

75. a) $d(P,r) = \frac{1}{5}$
b) $d(P,r) = \frac{9}{5}$
c) $d(P,r) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
d) $d(P,r) = 2\sqrt{5}$

76. Alternativa **c**.

77. a) 3 b) 2

78. $h = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ **79.** $h = \frac{1}{2}$

80. $4x + 3y + 15 = 0$ e $4x + 3y - 25 = 0$

81. a) $\left(\frac{18}{5}, \frac{41}{5}\right)$ b) $\frac{13\sqrt{5}}{5}$

82. a) $S = 4$ b) $S = \frac{41}{2}$

83. $S = 3$ cm² **84.** Alternativa **b**.

85. $a = \frac{13}{3}$ ou $a = 3$

86. $-\frac{5}{2}$ ou 3 **87.** $y = \frac{5}{2}x - 15$

88. a) Uso racional de insumos agrícolas; minimização dos impactos ambientais; maximização da qualidade, produtividade e do retorno financeiro.
b) Resposta pessoal.
c) 67,5 ha
d) Resposta pessoal.

Capítulo 5 – Geometria analítica: circunferência

Exercícios propostos

1. a) $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$
b) $x^2 + (y + 2)^2 = 16$
c) $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 7$
d) $x^2 + y^2 = 1$
e) $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 16$

2. a) $C(5, -6)$ e $r = 2\sqrt{2}$
b) $C(0, 4)$ e $r = 5$
c) $C(0, 0)$ e $r = 2$

3. $d = 5$ **4.** $k < \frac{13}{3}$

5. $x^2 + (y - 2)^2 = 9$

6. Alternativas **a**, **c**, **d**, **e**.

7. Alternativa **c**.

8. *A* é externo; *B* é interno; *C* pertence à circunferência.

9. *A* pertence à circunferência; *B* é externo; *C* é interno.

10. a) Externo.
b) Externo.
c) Interno.

11. I e IV **12.** $k > -1$

13. $k < -\frac{5}{3}$ ou $k > -\frac{1}{3}$

14. $k < 4$

15. a) 4
b) $x^2 + y^2 - 8y = 0$
c) Interno

16. $3 < a < 5$

17. a) Não. b) $400(8 - \pi)$ km²

18. Alternativa **e**.

19. a) $(3, 1)$ e $(2, 3)$
b) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{5}{4}$
c) Nenhum

20. a) $(4, 2)$; 5
b) Nenhum deles pertence.

21. a) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 18$
b) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
c) São todos externos.
d) São todos internos.

22. a) A reta é tangente à circunferência.
b) A reta é exterior à circunferência.
c) A reta é secante à circunferência.

23. a) $(-1, -1)$ e $(-2, -2)$
b) $(2, 1)$

24. Tangentes.

25. $d(A, B) = 4\sqrt{2}$

26. $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$

27. a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
c) $(1, 0)$ e $(-1, -2)$

28. a) $(2, 4)$ b) $x - 2y + 1 = 0$

29. a) $x + 2y - 8 = 0$
b) $x + 2y + 3 = 0$

30. $2\sqrt{7}$

31. $y = -x + 2$; exterior.

32. a) $A(1, 0)$, $B(4, 0)$ e $C\left(\frac{5}{2}, -2\right)$
b) 3u.a.

33. $y - 3 = 0$ ou $4x - 3y + 9 = 0$

34. $r = 1$

35. $k < -\sqrt{5}$ ou $k > \sqrt{5}$

36. $\text{tg}\,\theta = \frac{3}{4}$

37. $(x - 5)^2 + y^2 = 5^2$

38. $(0, 2)$ e $(1, 1)$

39. Concêntricas.

40. Tangentes no ponto $(1, 1)$; ponto comum: $(1, 1)$; tangentes externas.

41. $x^2 + (y - 8)^2 = 36$

42. $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 29 = 0$

43. λ_2: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 68 = 0$

44. $x^2 + (y - 5)^2 = (2\sqrt{10} - 3)^2$

45. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$

46. a) $A(3, 4)$, $B(1, 2)$

b) $x - y + 1 = 0$

c) $S = 6$

47. a) $x + y - 8 = 0$

b) $8\sqrt{2}$

c) A equação obtida é a reta calculada no item **a**.

48. Alternativa **a**.

49. $(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 4$

50. $r_1 = 3$

51. a) Satélite e receptor.

b) A: $(x + 6)^2 + (y + 1)^2 = 4$;

B: $(x + 6)^2 + (y + 3)^2 = 4$;

C: $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$

Capítulo 6 – Geometria analítica: cônicas

Exercícios propostos

1. $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$

2. a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$

c) $\frac{(x - 4)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{2{,}25} = 1$

d) $\frac{(x - 6)^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$

3. $e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

b) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

5. $\frac{(x - 4)^2}{144} + \frac{(y - 2)^2}{400} = 1$

6. $p = \frac{\sqrt{42}}{3}$; $q = \sqrt{7}$

7. a) $2\sqrt{2}$

b) 2

8. $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

9. a) $2a = 8$ e $2b = 4\sqrt{3}$

b) $e = \frac{1}{2}$

10. Centro: $C(1, 1)$

Focos: $F_1\left(-\sqrt{3} + 1, 1\right)$ e $F_2\left(\sqrt{3} + 1, 1\right)$

Vértices: $A_1(3, 1)$ e $A_2(-1, 1)$, $B_1(1, 0)$ e $B_2(1, 2)$

11. Equação reduzida:

$\frac{(x + 1)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1$;

centro: $C(-1, 3)$;

focos: $F_1(-\sqrt{5} - 1, 3)$ e $F_2(\sqrt{5} - 1, 3)$.

12. Alternativa **c**.

13. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

14. Alternativa **d**.

15. a) Unidade Astronômica (UA) é uma unidade de comprimento que equivale à distância média da Terra ao Sol. Sua finalidade é a de simplificar a representação de grandes distâncias.

b) A distância dos planetas ao longo do período sideral é variável, estando a diferentes distâncias do Sol, ao longo deste período. Isso porque a distância de qualquer ponto de uma elipse a um de seus focos varia dependendo da posição desse ponto na elipse. O que é constante é a soma das distâncias de um ponto da elipse a cada um dos focos.

c) O quão circular ou achatada é sua forma.

d) A órbita de Vênus.

16. a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

b) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

c) $\frac{(x - 12)^2}{25} - \frac{(y - 10)^2}{39} = 1$

d) $\frac{(y - 18)^2}{49} - \frac{(x - 15)^2}{72} = 1$

17. a) $\frac{(y - 4)^2}{100} - \frac{(x + 3)^2}{25} = 1$

b) $\frac{(y - 4)^2}{27} - \frac{(x + 3)^2}{9} = 1$

18. $F_1 = \left(-2\sqrt{5}, 0\right)$; $F_2 = \left(2\sqrt{5}, 0\right)$

19. $\frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

20. $F_1 = \left(-\sqrt{3} - 2, 0\right)$; $F_2 = \left(\sqrt{3} - 2, 0\right)$

21. $F_1 = \left(-\frac{8}{3}, 2\right)$ e $F_2 = \left(\frac{2}{3}, 2\right)$

$A_1 = \left(-\frac{7}{3}, 2\right)$ e $A_2 = \left(\frac{1}{3}, 2\right)$

22. $y^2 - \frac{x^2}{15} = 1$

23. $e = 2$

24. Alternativa **c**.

25. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

26. $\frac{2x^2}{25} - \frac{2y^2}{25} = 1$; $\frac{2y^2}{25} - \frac{2x^2}{25} = 1$

27. a) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{25} = 1$

b) $\frac{y^2}{10} - \frac{x^2}{10} = 1$

28. Sim. **29.** Alternativa **e**.

30. $x^2 - y^2 = 1$

31. a) $F = (7{,}5; 0)$; $x = -7{,}5$

b) $F = (0; -0{,}25)$; $y = 0{,}25$

32. a) $x^2 = 8y$ c) $y^2 = 32x$

b) $x^2 = 20y$ d) $y^2 = -4x$

33. a) $x^2 = 32y$

b) $y^2 = -22x$

34. a) $y^2 - 4x = 0$ b) $x^2 + 6y = 0$

35. $F(0, 2)$; $y + 2 = 0$; eixo das ordenadas; $V(0, 0)$.

36. $\sqrt{10}$ **37.** $y^2 - 12x = 0$

38. a) $F(-2, -3)$; $V(-2, -1)$; $y = 1$

b) $F(4, 3)$; $V(1, 3)$; $x = -2$

c) $F\left(\frac{5}{8}, -5\right)$; $V\left(\frac{1}{2}, -5\right)$; $x = \frac{3}{8}$

39. Parábola; $V(3, -1)$; $F(3, 0)$; diretriz: $y = -2$.

40. a) $y = \frac{1}{8}x^2$ b) 2 m

Exercícios complementares

1. Alternativa **a**. **2.** Alternativa **c**.

3. 10,5 °C **4.** Alternativa **b**.

5. Alternativa **b**.

6. a) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ b) 8

7. 33 **8.** $a = -1$ ou $a = 3$

9. $2x + 5y + 4 = 0$

10. Alternativa **a**. **11.** Alternativa **a**.

12. Alternativa **e**.

13. Alternativa **a**.

14. Alternativa **b**.

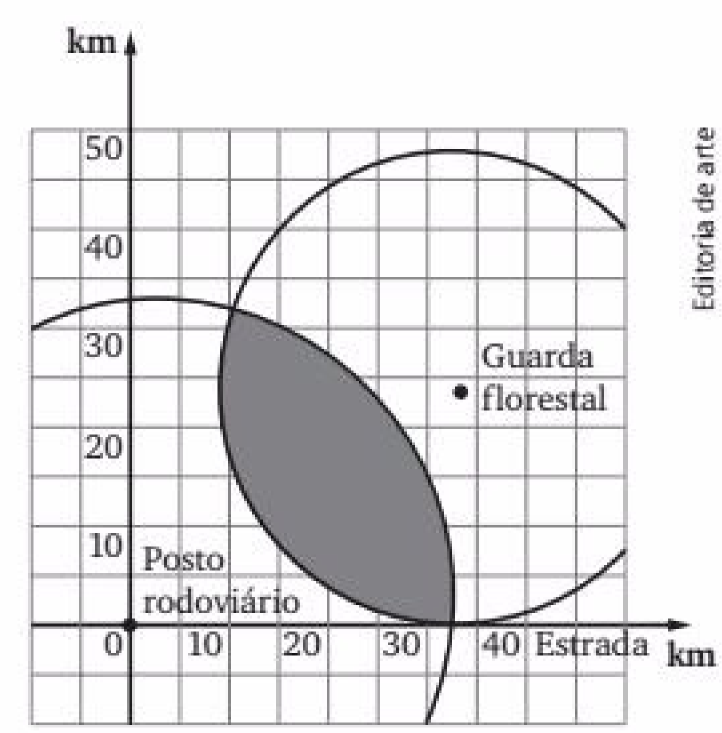
15. a) $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ b) $y = -3x$

16. Alternativa **d**.

17. a) Primeira antena:

$(x - 32)^2 + (y - 24)^2 \leqslant 24^2$

Segunda antena: $x^2 + y^2 \leqslant 32^2$



Editoria de arte

b) Quilômetro 25.

18. Alternativa **01**. **19.** 2 unidades.

20. 60 cm. **21.** Alternativa **b**.

22. Alternativa **d**.

23. $p = -3$ ou $p = 3$

24. Alternativa **c**. **25.** $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ u.a.

26. $y = 1$ **27.** $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

28. Alternativas **a**.

29. Alternativas **e**.

Unidade 4 – Tópicos de Álgebra

Capítulo 7 – Números complexos

Exercícios propostos

1. $z_1 = 2 + 7i$; $z_2 = -8 + 3i$; $z_3 = -5$; $z_4 = -7 - 7i$; $z_5 = -3i$; $z_6 = 2$; $z_7 = 1 - 8i$

2. a) $Re(z) = 5$ e $Im(z) = 7$

b) $Re(z) = -\frac{1}{2}$ e $Im(z) = 1$

c) $Re(z) = \sqrt{3}$ e $Im(z) = -\sqrt{2}$

d) $Re(z) = 0$ e $Im(z) = 4$

e) $Re(z) = 0$ e $Im(z) = 0$

3. $k = -5$ **4.** $m = \pm 9$

5. a) $x \in \mathbb{R}$ e $y = 4$ ou $y = -4$

b) $x = -6$ e $y \neq 4$ ou $x = -6$ e $y \neq -4$

6. $x = 3$ e $y = -7$

7. a) $S = \{2i, -2i\}$

b) $S = \{11i, -11i\}$

c) $S = \{3 + 2i, 3 - 2i\}$

d) $S = \left\{\frac{1}{2} + i, \frac{1}{2} - i\right\}$

8. $8 + i\sqrt{6}$ e $8 - i\sqrt{6}$

9. a) $x = 1$ ou $x = 2$

b) $]1, 2[$

c) $]-\infty, 1[\cup]2, \infty[$

10. $S = \{-5, -\sqrt{2}i, \sqrt{2}i\}$

11. a) $\bar{z} = 7 - 3i$

b) $\bar{z} = -5 + 2i$

c) $\bar{z} = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

d) $\bar{z} = -5i$

e) $\bar{z} = 1$

f) $\bar{z} = -4 - i$

12. $x = -9$ e $y = 5$ **13.** Alternativa **d**.

14. $x = 3$ e $y = 1$ ou $x = -3$ e $y = 1$

15. 20 **16.** Alternativa **b**.

17. a) Demonstração.

b) Demonstração.

18. Alternativa **c**. **19.** Alternativa **d**.

20. a) $8 + 4i$ c) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

b) $5 + 4i$

21. a) $11 - 3i$ c) $\frac{5}{4}$

b) $-5 + 5i$ d) $2 + 3i$

22. a) $-2 + 6i$ c) $-2 - 6i$

b) $\frac{29}{2} - \frac{15}{2}i$ d) $31 + 13i$

23. a) $7 + 9i$ c) $14 - 8i$

b) $6 - 6i$

24. $a = 5$ e $b = 2$

25. a) $1 - 5i$ b) $-5 - 7i$

26. $z = -1 - i$ **27.** $x = 5$

28. $z = -1 + 19i$

29. $z = 3 + 4i$ ou $z = 3 - 4i$

30. $z_1 = 3 - 2i$ e $z_2 = 2 - 3i$

31. $a = -5$ e $b = 5$

32. a) 1 c) -1

b) i d) i

33. a) $-1 + i$ c) $1 + i$

b) $2i$ d) $1 - i$

34. a) $\frac{7}{34} + \frac{11}{34}i$ c) $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

b) $1 - 5i$ d) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

35. a) $-2i$ c) $2 + 11i$

b) $-7 + 24i$ d) -4

36. $2 - i$ **37.** $2 - 2i$ **38.** Zero.

39. $\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$ **40.** $z = -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}$

41. $29 + 30i$

42. a) $3 - 2i$ e $-3 + 2i$

b) $1 + 2i$ ou $-1 - 2i$

43. $z_1 = 5 + 2i$ e $z_2 = -5 - 2i$

44. $\bar{z} = \frac{24}{5} - \frac{32}{5}i$

45. Alternativa **e**.

46. Alternativa **b**.

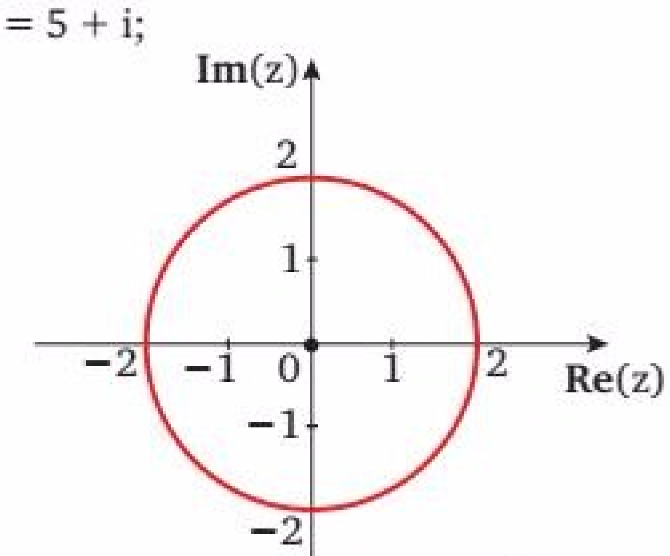
47. Alternativa **d**.

48. a) Com o auxílio da computação.

b) Meteorologia, animação digital, artes e música.

c) $z_1 = (z_0)^2 + 1 + i = 0 + 1 + i = 1 + i$

$z_2 = (z_1)^2 + 1 + i = (1 + i)^2 + 1 + i =$
$= 5 + i$;



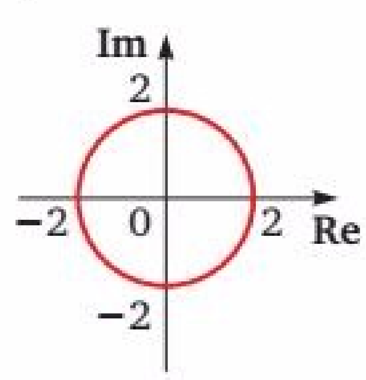
Ilustrações: Editoria de arte

49. a) $\sqrt{17}$ d) $\frac{\sqrt{13}}{6}$

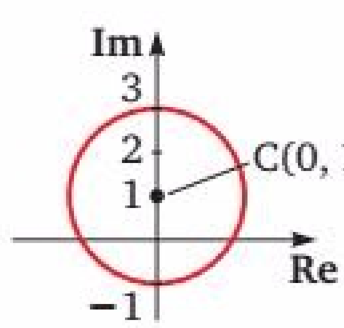
b) 5 e) 8

c) $\sqrt{3}$ d) 0

50. a)



b)



51. a) $\sqrt{17}$ b) $\sqrt{13}$ c) $\sqrt{221}$

52. $x = -1 + \sqrt{2}$

53. Alternativa **c**. **54.** $|z| = 2\sqrt{2}$

55. a) $\theta = \frac{7\pi}{4}$ c) $\theta = \frac{\pi}{2}$

b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ d) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

56. a) $z = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)$

b) $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$

c) $z = 7\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)$

d) $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$

e) $z = 5(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$

f) $z = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$

57. a) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

b) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

c) $z = 1$

d) $z = -4\sqrt{3} - 4i$

58. a) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$

59. $z = 8\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$

60. $x = 0$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = 0$ e $x = -2\sqrt{3}$

61. $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)$

62. $z^2 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$

63. $z_1 = -2 + 2i$; $z_2 = -2 - 2i$;

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos 135° + i\,\text{sen}\,135°\right)$ e

$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos 225° + i\,\text{sen}\,225°\right)$

64. a) $8(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)$

b) $2(\cos 35° + i\,\text{sen}\,35°)$

c) $4(\cos 25° + i\,\text{sen}\,25°)$

d) $8(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°)$

65. $z = 15\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)$

66. a) $2(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$

b) $\frac{1}{2}\left(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°\right)$

67. a) $10i$ c) $\sqrt{3} + i$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}$

68. i

69. a) $128\sqrt{2}$ e $\frac{3\pi}{4}$

b) $-128 + 128i$;

$128\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$

70. $x = \pm 3$

71. a) $-1; 1; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $-4; 2 + 2i\sqrt{3}; 2 - 2i\sqrt{3}$

72. $S = \{-1, 1, -i, i\}$

73. $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

74. $S = \left\{0, -1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

75. 80 **76.** 56

77. Alternativa **d**.

78. a) (16, 16) b) $16\sqrt{2}$

79. Alternativa **e**. **80.** Alternativa **c**.

Capítulo 8 – Polinômios

Exercícios propostos

1. Alternativas **a** e **c**.

2. $gr(p) = 4$ se $m \neq -2$ e $m \neq 2$.

3. $\nexists\, m \in R \mid gr(P) = 2$

4. $a = -1$, $b = -\frac{3}{2}$ e $c = 0$

5. a) $-2i$ b) -1 c) $-2i$

6. $a = 5$ e $b = 3$

7. a) $P(-1) = 28$; $P(4) = 3$
b) $P(a) = 2a^2 - 11a + 15$

8. a) $C(0) =$ R\$ 180,00
b) $C(30) =$ R\$ 1 140,00

9. Alternativa **d**. **10.** $P(2) = 9$

11. $n = -5i$ ou $n = 5i$

12. $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$

13. a) $V(x) = -x^3 + 15x^2$
b) $V = 52\ cm^3$

14. 1

15. $m = -4$, $n = -25$ e $p = -\frac{9}{2}$

16. $2x^2 - x + 4$

17. a) $x^3 - 7x^2 + 12x$
b) $-6x^2 + 11x - \frac{17}{2}$

18. $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$

19. $m = 2$; $n = 1$; $p = -3$

20. $A = \frac{5}{6}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{4}{3}$

21. a) $(5+i)x^2 + 4 - 3i$
b) $(i - 5)x^2 + 4 + 3i$
c) $5ix^4 + 23x^2 - 12i$
d) $(10+3i)x^2 + 12 - 6i$

22. Alternativa **d**. **23.** Alternativa **b**.

24. Alternativa **b**. **25.** Alternativa **c**.

26. a) $Q(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 10x + 10$ e $R(x) = 0$
b) $Q(x) = 2x^2 + 4x + 1$ e $R(x) = 5$
c) $Q(x) = 3x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 26x + {}+ 52$ e $R(x) = -114$
d) $Q(x) = 4x^2 - 2x + 1$ e $R(x) = 0$

27. Não.

28. a) $Q(x) = 3x + 1$ e $R(x) = x - 2$
b) $Q(x) = x^2 - 9x + 16$ e $R(x) = -8$
c) $Q(x) = x^2 + 3x - 2$ e $R(x) = 2$

29. Demonstração.

30. a) $4a^2 + 2a + 7$ e $R(x) = 1$
b) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 4$ e $R(x) = 0$

31. $Q(a) = -3a^2 + 9a - 29$ e $R(a) = 94a - 24$

32. $Q(x) = 3x - 3$ e $R(x) = 0$

33. $A(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

34. $p = 0$ e $q = -2$ **35.** Alternativa **c**.

36. $A(x) = 4x^2 + 11x - 3$

37. $Q(x) = 2x^3 - 5x + 8$

38. a) 85 b) 43 c) $\frac{273}{8}$

39. a) 5 b) $-\frac{3}{4}$

40. $S = \left\{m \in R \mid m > -\frac{5}{2}\right\}$

41. a) $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 4x - 5$; $R(x) = -11$
b) $Q(x) = 2x^2 + x + 1$; $R(x) = 0$
c) $Q(x) = 4x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$; $R(x) = 0$
d) $Q(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$; $R(x) = \frac{1}{4}$

42. Alternativa **e**. **43.** $R = 0$

44. $Q(x) = x^2 - 5x + 6$

45. a) $4\left(x + \frac{1}{4}\right) \cdot (x - 3)$
b) $3\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot (x - 2)$
c) $(x + 5) \cdot (x - 5)$
d) $(x - 5)^2$
e) $(x + i) \cdot (x - i)$
f) $(x + 3i) \cdot (x - 3i)$

46. $P(x) = (x + 1) \cdot (x^2 - x - 3)$

47. 30 **48.** $-x + 3$

49. $m = -7$ e $n = 2$

50. $-2x^2 + 5x - 1$ **51.** Alternativa **b**.

52. $a = 2$ e $b = -1$

53. Alternativa **c**.

54. a) Os casos de microcefalia aumentaram no mesmo período em que o Zika Vírus tornou-se uma epidemia. Muitas gestantes infectadas com o vírus geraram crianças com microcefalia. No entanto, não se pode afirmar que todas as gestantes infectadas pelo vírus terão filhos com microcefalia.
b) i) Grau 5.
ii) 14 mil pacientes.
iii) No início da observação, no segundo e no quarto dia.
c) Resposta pessoal.

Capítulo 9 – Equações polinomiais

Exercícios propostos

1. a) $S = \{-3, -1, 1\}$
b) $S = \{-2, -5i, 5i\}$
c) $S = \{0, -i, i\}$
d) $S = \{-1, 10, -10\}$

2. a) $\{-1, 1, -3i, 3i\}$
b) $\{-2, -1, 1, 2\}$

3. $\{3, 4\}$ **4.** Alternativa **e**.

5. a) 2 é raiz. b) 2, 1 e -1

6. Alternativa **c**. **7.** Alternativa **a**.

8. a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
b) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

9. $P(x) = x^3 - 25x^2 + 206x - 560$

10. a) $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$
b) $P(x) = (x - 2)^2(x + 1)$

11. $m = 4$ e $n \neq 2$ **12.** Alternativa **d**.

13. $S = \{1, 3, 2 - i, 2 + i\}$

14. $S = \{-1, 2, 3\}$

15. $S = \{-3, -1, 1\}$

16. a) $x(x - 3)(x + 3) = 0$
b) $x^2(x + 6) = 0$

17. Alternativa **c**. **18.** Alternativa **c**.

19. a) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{1 - 8\sqrt{3}}{16}$

20. 1 **21.** Alternativa **b**.

22. $S = \{-2, 1, 4\}$

23. a) -2 b) $S = \{-2, -1, 1\}$

24. $-\frac{1}{2}$ **25.** Alternativa **a**.

26. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$; $abc = 18$

27. Alternativa **b**. **28.** Alternativa **a**.

29. Alternativa **a**. **30.** Alternativa **b**.

31. a) $r = \pm 3$; $s = 2$ b) $7 - 11i$

32. Alternativa **a**. **33.** Alternativa **b**.

34. a) $m = 23$ b) $x = \frac{2}{3}$

35. $a = 6$, $b = 10$, $c = 6$, $d = 9$

36. $+1$, -1 e $2 - 3i$

37. Alternativa **a**. **38.** Alternativa **a**.

39. a) O número *i* é raiz de $P(x)$.
b) $\{i, -i, -1 + i, -1 - i\}$

40. a) $S = \left\{-1, 1, \frac{1}{2}\right\}$
b) $S = \{-2, 2\}$
c) $S = \{0, 1, 1 + i, 1 - i\}$

41. a) $S = \{-3, 1, 2\}$
b) $S = \{-2, 3 - i, 3 + i\}$
c) $S = \{-3, -1, 1, 2\}$

42. $S = \{-1, -i, i\}$ **43.** $S = \left\{1, \frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right\}$

44. Alternativa **c**. **45.** $0 + 2 + 1 = 3$

46. a) Consumo privado, investimento privado, gastos públicos e balança comercial.
b) Não.
c) i) $V(x) = 4x^3 - 50x^2 + 150x$
ii) $4x^3 - 50x^2 + 150x - 132 = 0$
iii) $(x - 2) \cdot (4x^2 - 42x + 66)$
iv) Matematicamente possível se $x \simeq 1{,}92$.

Exercícios complementares

1. $S = \{-1 - 2i, -1 + 2i\}$

2. Alternativa **b**.

3. a) 36
b) 1, $1 + i$, $1 + 2i$, $1 + 3i$, $1 + 4i$ e $1 + 5i$

4. Alternativa **c**. **5.** Alternativa **c**.

6. Alternativa **d**. **7.** Alternativa **d**.

8. a) (16, 16)
b) $d = 16\sqrt{2}$

9. Alternativa **d**. **10.** Alternativa **b**.

11. Alternativa **b**. **12.** Alternativa **b**.

13. Alternativa **c**.

14. As raízes são -3, 3 e 4.

15. $|z| = \frac{1}{2}\sec x$

16. $p(x) = 9x^4 + 50x^3 - 81x$

17. Alternativa **c**.

18. a) 10
b) $P_1(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$;
$P_2(x) = 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ e
$P_3(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$

19. a) $\alpha = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}$
b) $S = \left\{-i, i, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

20. a) $k = 11$ b) $-\frac{1}{2}$

21. $\frac{1}{4}$ **22.** Alternativas **b** e **c**.

23. a) $k = \frac{20 + 30i}{13}$ b) $S = \{-i, i, 1, 4\}$

Sugestões para pesquisa e leitura

Sites

Nos *sites* indicados a seguir você encontra leituras e aplicativos para aprofundar seus estudos.

http://tub.im/qceb3p

Publicação do Instituto Ciência Hoje (CH), organização social vinculada à Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC). Traz notícias científicas sobre diversos assuntos. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/twgjmm

Apresenta uma visão panorâmica sobre vários tópicos de Matemática, como Geometria analítica, Trigonometria etc. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/wnii3r

Informações sobre o Cabri-Géomètre, *software* de geometria dinâmica. Acesso em: 16 abr. 2016

http://tub.im/9cqokk

Conteúdo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para pesquisa de dados estatísticos regionais e nacionais do Brasil. Acesso em: 16 abr. 2015.

http://tub.im/topzkx

Laboratório de Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/hw2rnc

Site do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), que traz a história da Matemática, problemas, entre outros. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/dyg67g

Página desenvolvida por professores e alunos do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Entre outros itens, este *site* apresenta vários textos sobre história da Matemática, alguns aplicativos que podem ser usados para estudar a disciplina, além de problemas e desafios. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/99tt4j

Informações sobre o GeoGebra, *software* de geometria dinâmica. No *site*, é possível baixar o programa para diversas plataformas, além de apresentar materiais para estudo em diversas áreas da Matemática usando o GeoGebra. Acesso em: 19 abr. 2016.

http://tub.im/e7pvo5

Revista **Números Lógicos**; traz jogos *on-line* e outros passatempos. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/uzhuk9

Olimpíada Brasileira de Matemática. Traz as questões das provas, *links*, bibliografias, entre outros. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/roe3dx

Informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, como informações sobre inscrições, datas das provas, provas anteriores, banco de questões etc. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/tu3tdg

Questões da Olimpíada Iberoamericana de Matemática. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/8i5htr

Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), com dissertações, teses, jornais, boletins, concursos etc. Acesso em: 16 abr. 2016

http://tub.im/c23hyf

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com publicações, notícias sobre eventos e olimpíadas da disciplina, por exemplo. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/coje77

Apresenta biografias, provas *on-line*, grande acervo de *softwares* matemáticos, artigos, jogos, curiosidades, histórias e muito mais. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/wkrj88

Página da Universidade Federal Fluminense, que disponibiliza vários aplicativos voltados para o estudo de conteúdos matemáticos. Os aplicativos podem ser baixados (*download*) ou acessados pelo *link* indicado na página. Acesso em: 16 abr. 2016.

Sugestões para pesquisa e leitura

Livros e revistas

A Geometria na Antiguidade Clássica, de Francisco C. P. Milies e José Hugo de Oliveira Bussad. São Paulo: FTD, 1999.

A janela de Euclides, de Leonard Mlodinow. Trad. Enézio E. Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2008.

Aplicações da Matemática escolar, de Donald Burshaw e outros. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

Aprenda álgebra brincando, de J. Perelmann. Trad. Milton da Silva Rodrigues. São Paulo: Hemus, 2001.

A vida secreta dos números, 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos, de George G. Szpiro. Trad. J. R. Souza. Rio de Janeiro: Difel, 2008.

Coleção Contando a história da Matemática, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática.
Volume: Equação: o idioma da álgebra, 1999.

Coleção Fundamentos da Matemática elementar, de Gelson Iezzi e Osvaldo Dolce (Coords.). São Paulo: Atual.
Volumes: Geometria plana, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeu (8. ed., 2005).
Conjuntos, funções, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami (8. ed., 2004).

Coleção Imortais da Ciência, de Marcelo Gleiser (Coord.). São Paulo: Odysseus.
Volume: Euclides: a conquista do espaço, de Carlos Tomei, 2003.

Coleção Investigação matemática, São Paulo: Scipione.
Volumes: Atividades e jogos com estimativas, de Smoothey Marion, 1998. Trad. Sérgio Quadros.
Atividades e jogos com círculos, de Smoothey Marion, 1999. Trad. Antônio Carlos Brolezzi.

Coleção Noções de Matemática, de Aref Antar Neto e outros. Fortaleza: VestSeller, 2009.

Coleção Pra que serve a Matemática, de Luiz M. Imenes, José Jakubovic e Marcelo Lellis. São Paulo: Atual, 2009.

Coleção Primeiros passos, São Paulo: Brasiliense (vários anos).
Volume: O que é estatística, de Sônia Vieira e Ronaldo Wada (2. ed., 2010).

Coleção Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula, São Paulo: Atual.
Volumes: Álgebra, de John K. Baumgart, 1992.

Coleção Vivendo a Matemática, de Nilson José Machado (Coord.). São Paulo: Scipione, 2006.

Computação, de Harold T. Davis, 1994.

Descobrindo padrões pitagóricos, de Ruy Madsen Barbosa. São Paulo: Atual, 1993.

Geometria, de Howard Eves, 2005.

Introdução à história da Matemática, de Howard Eves. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Logaritmos, de Elon Lages Lima. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

Matemática e língua materna, de Nilson José Machado. 4. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

O homem que calculava, de Malba Tahan. 79. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.

Os números da natureza: a realidade irreal da imaginação matemática, de Ian Stewart. Trad. Alexandre Tort. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos, de Richard Courant e Herbert Robbins. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

O teorema do papagaio, de Denis Guedj. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

Padrões numéricos e sequências, de Maria Cecília Costa e Silva Carvalho. São Paulo: Moderna, 1998.

Lista de siglas

Acafe-SC: Associação Catarinense das Fundações Educacionais

Cefet-BA: Centro Federal de Educação Tecnológica da Bahia

Cefet-GO: Centro Federal de Educação Tecnológica de Goiás

Cefet-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

CPAEN-RJ: Concurso Público de Admissão à Escola Naval (RJ)

Enem/MEC: Exame Nacional do Ensino Médio

Epcar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar

EsPCEx-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército

Fameca-SP: Faculdade de Medicina de Catanduva

Famema-SP: Faculdade de Medicina de Marília

Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia

FEI-SP: Faculdade de Engenharia Industrial

FGV-RJ: Fundação Getulio Vargas

FGV-SP: Fundação Getulio Vargas

FSA-SP: Centro Universitário Fundação Santo André

FUC-MT: Faculdades Unidas Católicas de Mato Grosso

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular

IFG-GO: Instituto Federal Goiano

IFRN: Instituto Federal de Educação e Tecnologia do Rio Grande do Norte

IFRS: Instituto Federal do Rio Grande do Sul

Insper: Ensino Superior em Negócios, Direito e Engenharia

ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Mack-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie

PUC-GO: Pontifícia Universidade Católica de Goiás

PUC-RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Senac-SP: Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial – Administração Regional no Estado de São Paulo

UAM-SP: Universidade Anhembi-Morumbi

UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas

UECE: Universidade Estadual do Ceará

UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás

UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina

UEMG: Universidade do Estado de Minas Gerais

UEPA: Universidade do Estado do Pará

UEPB: Universidade Estadual da Paraíba

UEPG-PR: Universidade Estadual de Ponta Grossa

UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Uesb-BA: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Uespi-PI: Universidade Estadual do Piauí

UFAL: Universidade Federal de Alagoas

UFBA: Universidade Federal da Bahia

UFC-CE: Universidade Federal do Ceará

UFCG-PB: Universidade Federal de Campina Grande

Ufersa-RN: Universidade Federal Rural do Semiárido

UFF-RJ: Universidade Federal Fluminense

UFG-GO: Universidade Federal de Goiás

UFGD-MS: Universidade Federal da Grande Dourados

UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora

Ufla-MG: Universidade Federal de Lavras

UFMA: Universidade Federal do Maranhão

UFMS: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

UFMT: Universidade Federal do Mato Grosso

Ufop-MG: Universidade Federal de Ouro Preto

UFPA: Universidade Federal do Pará

UFPB: Universidade Federal da Paraíba

UFPE: Universidade Federal de Pernambuco

UFPel-RS: Universidade Federal de Pelotas

UFPR: Universidade Federal do Paraná

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte

UFSC: Universidade Federal de Santa Catarina

UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria

UFSCar-SP: Universidade Federal de São Carlos

UFTM-MG: Universidade Federal do Triângulo Mineiro

UFVJM-MG: Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

Ulbra-RS: Universidade Luterana do Brasil

UnB-DF: Universidade de Brasília

Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas

UniCeub-DF: Centro Universitário de Brasília

Uniderp-MS: Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal

Unifoa-RJ: Centro Universitário de Volta Redonda

UniFOR-CE: Universidade de Fortaleza

Unimontes-MG: Universidade Estadual de Montes Claros

Unioeste-RR: Universidade Estadual do Oeste de Roraima

USJT-SP: Universidade São Judas Tadeu

Vunesp-SP: Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

Referências bibliográficas

AGUIAR, Alberto Flávio Alves; XAVIER, Airton; RODRIGUES, José Euny. **Cálculo para ciências médicas e biológicas**. São Paulo: Harbra, 2009.

AMOROSO COSTA, M. **As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios**. São Paulo: Edusp, 1971.

ARTIGUES, Christian et al. **Géométrie**. Paris: Hachette Lycées, 1992.

ARTIGUES, Christian et al. **Math**: Analyse et probabilités: **Math**. Paris: Hachette Lycées, 1992.

ARTIGUES, Christian et al. **Math**: term C et E. Algèbre & Géométrie. Paris: Hachette Lycées, 1992.

ARTIGUES, Christian et al. **Mathématiques. 1res S et E**. 2. ed. Paris: Hachette Lycées, 1990.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos fundamentais de Matemática. In: **A educação**. Lisboa: Sá da Costa, 1984.

DINIZ, Maria Ignez de S. V.; SMOLE, Kátia Cristina S. **MC512: discussão sobre a área de Matemática a partir do documento de Ciência e Tecnologia para o Ensino Médio elaborado pelo SEMTC/MEC**. VI Enem, jul. 1998.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

GUZMÁN, Miguel de; COLERA, José. **Matemáticas I e II**. Barcelona: Anaya, 1989.

HERRERO, Fernando A.; GARCÍA, Carmen; VILA, Antonio. **Matemáticas – Factor 3**. Barcelona: Editorial Vicens Vives, 1987.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática elementar**. 5 ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 8.

LAKATOS, Imre. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. (Coleção do professor de Matemática, v. 1, 2 e 3).

LINTZ, Rubens G. **História da Matemática**. Blumenau: Editora da FURB, 1999. v. 1.

LOPES, Maria Laura M. Leite; NASSER, Lílian (Coords.). **Geometria**: na era da imagem e do movimento. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1983 a 2013.

SAMPAIO, Fausto Arnaud. **Matemática**: História, aplicações e jogos matemáticos. 2. ed. Campinas/São Paulo: Papirus, 2005.

SANTOS, Vânia Maria P. dos; REZENDE, Jovana Ferreira de. **Números**: linguagem universal. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1996.

SÃO PAULO (Estado). **Prática pedagógica**: Matemática 2º grau: Geometria I. São Paulo, 1994. v. 2.

SÃO PAULO (Estado). **Prática pedagógica**: Matemática 2º grau. São Paulo, 1992. v. 1.

SÃO PAULO (Estado). **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática**: 2º grau. 3. ed. São Paulo, 1992.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação/Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática**: 2º grau. 3. ed. São Paulo, 1992.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. **Matemática**: curso colegial. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1965. v. 1.

SMOOTHEY, Marion. **Atividades e jogos com estimativas**. São Paulo: Scipione, 1998.

SMOOTHEY, Marion. **Atividades e jogos com círculos**. São Paulo: Scipione, 1998.

ZWIRNER, G. **Complementi di algebra e nozioni di analisi matematica**. Pádua: Cedam, 1991.