

Função Afim

INTRODUÇÃO

Chamamos de função polinomial do primeiro grau, ou função afim, toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $f(x) = ax + b$, sendo **a** e **b** números reais e $a \neq 0$. O gráfico de uma função afim é uma reta.

Na função $f(x) = ax + b$, temos:

- i) O número **a** é chamado **coeficiente angular**, **inclinação** ou **declividade**.
- ii) O número **b** é chamado **coeficiente linear**.

Exemplos:

1º) $y = 3x + 5$

3º) $y = -8x$

2º) $f(x) = -4x + 17$

4º) $f(x) = x - 5$

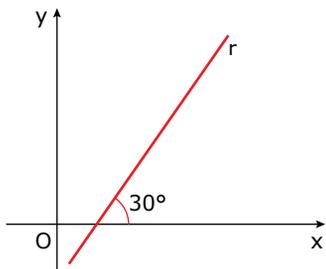
CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR

O coeficiente angular **a** é definido como a tangente do ângulo formado pela reta e pelo eixo x, tomado no sentido anti-horário. Esse ângulo é chamado de ângulo de inclinação.

Exemplos:

Calcular o coeficiente angular da reta **r** em cada caso.

1º)

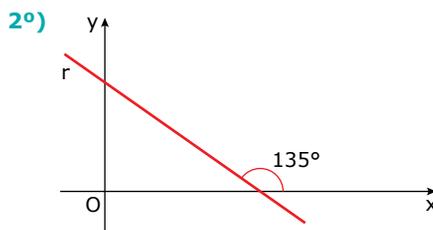


O coeficiente angular é dado por $a = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

OBSERVAÇÃO

Quando o ângulo de inclinação é agudo, sua tangente é positiva.

Assim, para $a > 0$, a função é **crescente**.



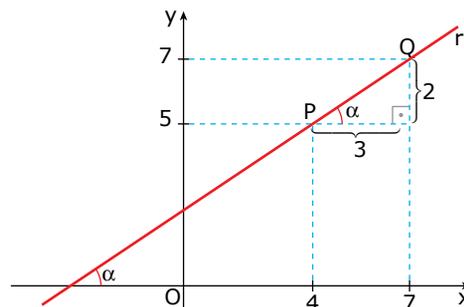
O coeficiente angular é dado por $a = \text{tg } 135^\circ = -1$.

OBSERVAÇÃO

Quando o ângulo de inclinação é obtuso, sua tangente é negativa.

Assim, para $a < 0$, a função é **decrescente**.

3º) **r** contém os pontos $P = (4, 5)$ e $Q = (7, 7)$.



O ângulo de inclinação é indicado na figura por α . Assim, temos $a = \text{tg } \alpha$.

Logo, a tangente do ângulo α pode ser calculada no triângulo retângulo indicado.

Daí, $\text{tg } \alpha = \frac{2}{3}$, ou seja, $a = \frac{2}{3}$.

OBSERVAÇÃO

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ dois pontos que pertencem ao gráfico de uma função afim. O coeficiente angular **a** é dado por:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ ou, então, } a = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ em que } \begin{cases} \Delta y \rightarrow \text{variação em } y \\ \Delta x \rightarrow \text{variação em } x \end{cases}$$

ESBOÇO DO GRÁFICO

Para esboçarmos o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $y = ax + b$, é conveniente conhecermos os pontos de interseção desse gráfico com os eixos coordenados.

i) Interseção da reta com o eixo Oy

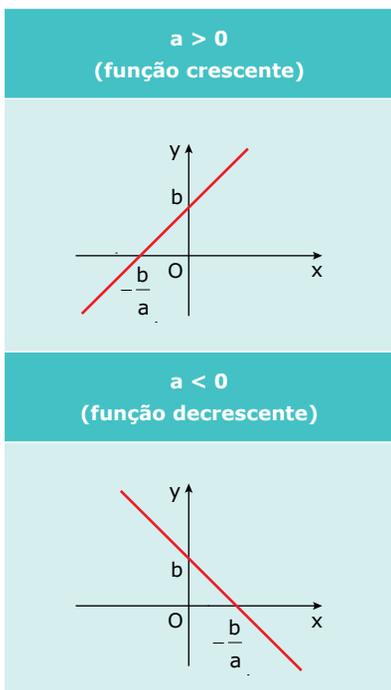
Fazendo $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 + b = b$. Logo, o ponto de interseção da reta com o eixo Oy é dado pelo ponto $(0, b)$.

ii) Interseção da reta com o eixo Ox

Fazendo $y = 0$, temos $0 = ax + b$, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$.

Esse valor é chamado **raiz** ou **zero** da função. Portanto, o ponto de interseção da reta com o eixo Ox é dado por $(-\frac{b}{a}, 0)$.

Marcando esses pontos no sistema de coordenadas cartesianas, temos:



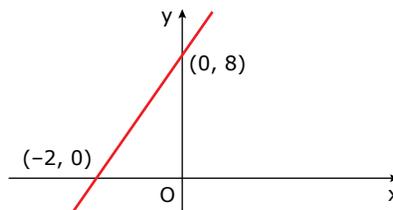
Exemplo:

Construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $f(x) = 4x + 8$.
Temos $a = 4$ e $b = 8$.

O número **b** indica a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy. Logo, esse ponto é igual a $(0, 8)$.

O número $-\frac{b}{a}$ indica a abscissa do ponto de interseção da reta com o eixo Ox. Temos: $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{4} = -2$. Logo, esse ponto é igual a $(-2, 0)$.

Marcando esses pontos em um sistema de coordenadas cartesianas, basta uni-los para obter o esboço da reta.

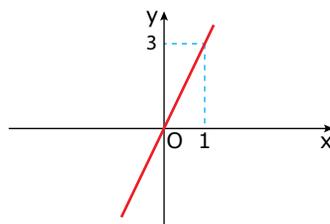


OBSERVAÇÃO

Considere uma função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$. Se $b = 0$, a função é chamada **função linear**, e seu gráfico é uma reta passando pela origem do sistema de coordenadas.

Exemplo:

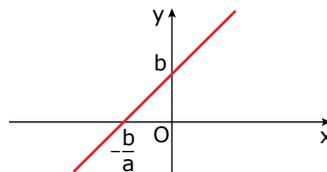
Esboçar o gráfico da função linear $y = 3x$.



ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

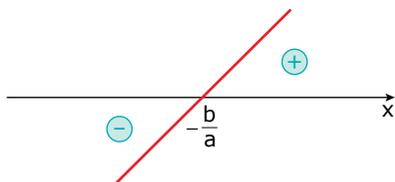
Estudar o sinal de uma função $f(x)$ significa descobrir os valores de **x** para os quais $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$ ou $f(x) > 0$.

Como exemplo, tomemos o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em que $y = ax + b$, com $a > 0$.



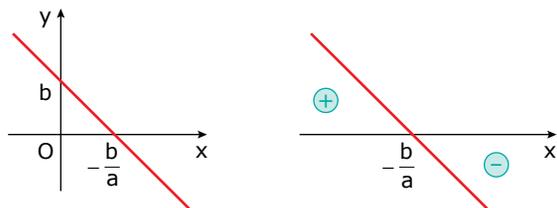
Observe que $-\frac{b}{a}$ é o ponto no qual a função é nula, ou seja, é uma raiz. Para valores de **x** menores do que a raiz, os valores correspondentes de **y** são negativos.

Já para valores de x maiores do que a raiz, os valores correspondentes de y são positivos. Indicamos esses resultados no esquema a seguir:



Os sinais $-$ e $+$ representam os sinais de y para o intervalo de x considerado.

Analogamente, com $a < 0$, observamos que, para valores de x menores do que a raiz, os valores correspondentes de y são positivos. Já para valores de x maiores do que a raiz, os valores correspondentes de y são negativos. Indicamos esses resultados no esquema a seguir:



RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

Exemplos:

Resolver cada inequação a seguir:

1º) $3x - 7 > 0$

$$3x > 7 \Rightarrow x > \frac{7}{3}$$

Conjunto solução (S): $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{7}{3} \right\}$

2º) $\frac{x-4}{3} \leq 2x - 5$

$$x - 4 \leq 6x - 15 \Rightarrow -5x \leq -11$$

Multiplicando os dois membros por -1 , temos:

$$5x \geq 11 \Rightarrow x \geq \frac{11}{5}$$

$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{11}{5} \right\}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

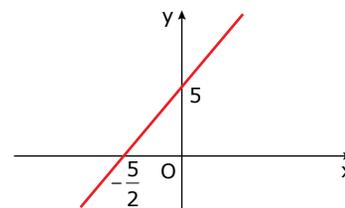
01. Encontrar a expressão matemática e fazer um esboço do gráfico da função afim que contém os pontos $A = (1, 7)$ e $B = (-3, -1)$.

Resolução:

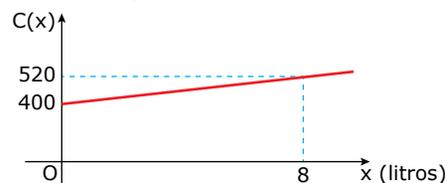
A expressão geral da função afim é dada por $y = ax + b$. Substituindo as coordenadas dos pontos **A** e **B**, temos o sistema linear: $\begin{cases} a + b = 7 \\ -3a + b = -1 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 2$ e $b = 5$. Portanto, a expressão da função é $y = 2x + 5$. Para esboçarmos o seu gráfico, é necessário encontrar as suas interseções com os eixos coordenados. Fazendo $x = 0$, temos que $y = 5$. Fazendo $y = 0$, temos que $x = -\frac{5}{2}$ (raiz). Portanto, os pontos $(0, 5)$ e $(-\frac{5}{2}, 0)$ indicam as interseções com os eixos Oy e Ox , respectivamente.

Esboço do gráfico:



02. O custo C de produção de x litros de certa substância é dado por uma função afim, com $x \geq 0$, cujo gráfico está representado a seguir:



Nessas condições, quantos litros devem ser produzidos de modo que o custo de produção seja igual a R\$ 580,00?

Resolução:

Uma função afim é da forma $C(x) = ax + b$. Do gráfico, temos que $C(0) = 400$. Mas $C(0) = b$. Logo, $b = 400$.

Sabemos que $C(8) = a \cdot 8 + b = 520$. Substituindo o valor de **b**, temos $8a + 400 = 520 \Rightarrow 8a = 120 \Rightarrow a = 15$.

Portanto, o custo de produção é dado por $C(x) = 15x + 400$. Fazendo $C(x) = 580$, temos:

$$15x + 400 = 580 \Rightarrow 15x = 180 \Rightarrow x = 12$$

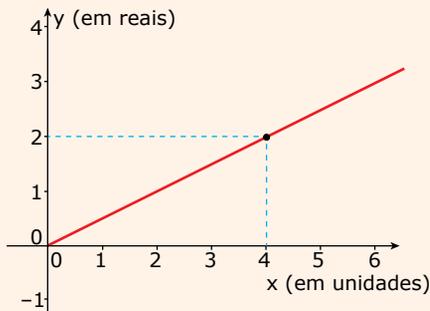
Portanto, devem ser produzidos 12 litros.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM



- 01.** (FGV-SP) Uma função polinomial f do 1º grau é tal que $f(3) = 6$ e $f(4) = 8$. Portanto, o valor de $f(10)$ é
- A) 16. C) 18. E) 20.
 B) 17. D) 19.

- 02.** (IFSP) O gráfico a seguir apresenta informações sobre a relação entre a quantidade comprada x e o valor total pago y para um determinado produto que é comercializado para revendedores.



Um comerciante que pretende comprar 2 350 unidades desse produto para revender pagará, nessa compra, o valor total de

- A) R\$ 4 700,00. D) R\$ 8 000,00.
 B) R\$ 2 700,00. E) R\$ 1 175,00.
 C) R\$ 3 175,00.

- 03.** (PUC Minas) A função linear $R(t) = at + b$ expressa o rendimento R , em milhares de reais, de certa aplicação. O tempo t é contado em meses, $R(1) = -1$ e $R(2) = 1$. Nessas condições, o rendimento obtido nessa aplicação, em quatro meses, é

- A) R\$ 3 500,00. C) R\$ 5 000,00.
 B) R\$ 4 000,00. D) R\$ 5 500,00.

- 04.** (UECE-2019) Carlos é vendedor em uma pequena empresa comercial. Seu salário mensal é a soma de uma parte fixa com uma parte variável. A parte variável corresponde a 2% do valor alcançado pelas vendas no mês. No mês de abril, as vendas de Carlos totalizaram R\$ 9 450,00, o que lhe rendeu um salário de R\$ 1 179,00. Se o salário de Carlos em maio foi de R\$ 1 215,00, então o total de suas vendas neste mês ficou entre
- A) R\$ 11 300,00 e R\$ 11 340,00.
 B) R\$ 11 220,00 e R\$ 11 260,00.
 C) R\$ 11 260,00 e R\$ 11 300,00.
 D) R\$ 11 180,00 e R\$ 11 220,00.

- 05.** (UFG-GO) Para uma certa espécie de grilo, o número N , que representa os cricrilados por minuto, depende da temperatura ambiente T . Uma boa aproximação para essa relação é dada pela lei de Dolbear, expressa na fórmula $N = 7T - 30$, com T em graus Celsius. Um desses grilos fez sua morada no quarto de um vestibulando às vésperas de suas provas.

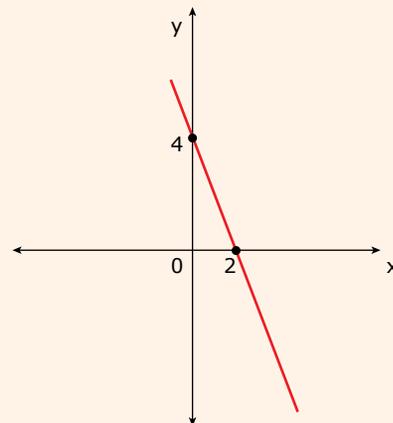
Com o intuito de diminuir o incômodo causado pelo barulho do inseto, o vestibulando ligou o condicionador de ar, baixando a temperatura do quarto para 15 °C, o que reduziu pela metade o número de cricrilados por minuto. Assim, a temperatura, em graus Celsius, no momento em que o condicionador de ar foi ligado era, aproximadamente, de

A) 75. C) 30. E) 20.
 B) 36. D) 26.

- 06.** (UCS-RS) O salário mensal de um vendedor é de R\$ 750,00 fixos mais 2,5% sobre o valor total, em reais, das vendas que ele efetuar durante o mês. Em um mês em que suas vendas totalizarem x reais, o salário do vendedor será dado pela expressão:
- A) $750 + 2,5x$ D) $750(0,25x)$
 B) $750 + 0,25x$ E) $750 + 0,025x$
 C) $750,25x$

- 07.** (Unesp) A unidade usual de medida para a energia contida nos alimentos é kcal (quilocaloria). Uma fórmula aproximada para o consumo diário de energia (em kcal) para meninos entre 15 e 18 anos é dada pela função $f(h) = 17 \cdot h$, em que h indica a altura em cm e, para meninas nessa mesma faixa de idade, pela função $g(h) = (15,3)h$. Paulo, usando a fórmula para meninos, calculou seu consumo diário de energia e obteve 2 975 kcal. Sabendo-se que Paulo é 5 cm mais alto que sua namorada Carla (e que ambos têm idade entre 15 e 18 anos), o consumo diário de energia para Carla, de acordo com a fórmula, em kcal, é
- A) 2 501. C) 2 770. E) 2 970.
 B) 2 601. D) 2 875.

- 08.** (CEFET-MG-2020) Considere o gráfico da função real $f(x) = -2x + 4$, representado no plano cartesiano a seguir



A função afim, $g(x)$, cujo gráfico é simétrico ao dessa função $f(x)$ em relação ao eixo y , é dada por:

- A) $g(x) = 2x + 4$
 B) $g(x) = 2x - 4$
 C) $g(x) = -2x - 4$
 D) $g(x) = -4x + 2$

07. (FGV-SP) Uma fábrica de paletós trabalha com um custo fixo mensal de R\$ 10 000,00 e um custo variável de R\$ 100,00 por paletó. O máximo que a empresa consegue produzir, com a atual estrutura, é 500 paletós por mês. O custo médio na produção de x paletós é igual ao quociente do custo total por x .



- O menor custo médio possível é igual a
- A) R\$ 100,00.
 - B) R\$ 105,00.
 - C) R\$ 110,00.
 - D) R\$ 115,00.
 - E) R\$ 120,00.

08. (CEFET-MG) Um motorista de táxi cobra, para cada corrida, uma taxa fixa de R\$ 5,00 e mais R\$ 2,00 por quilômetro rodado. O valor total arrecadado (**R**) num dia é função da quantidade total (**x**) de quilômetros percorridos e calculado por meio da função $R(x) = ax + b$, em que **a** é o preço cobrado por quilômetro e **b** a soma de todas as taxas fixas recebidas no dia. Se, em um dia, o taxista realizou 10 corridas e arrecadou R\$ 410,00 então a média de quilômetros rodados por corrida, foi de:



- A) 14
- B) 16
- C) 18
- D) 20

09. (PUC-SP) O prefeito de certa cidade solicitou a uma equipe de trabalho que obtivesse uma fórmula que lhe permitisse estudar a rentabilidade mensal de cada um dos ônibus de uma determinada linha. Para tal, os membros da equipe consideraram que havia dois tipos de gastos – uma quantia mensal fixa (de manutenção) e o custo do combustível – e que os rendimentos seriam calculados multiplicando-se 2 reais por quilômetro rodado. A tabela a seguir apresenta esses valores para um único ônibus de tal linha, relativamente ao mês de outubro de 2008.

	Outubro
Quantia fixa (reais)	1 150
Consumo de combustível (litros/100 km)	40
Custo de 1 litro de combustível (reais)	4
Rendimentos/km (reais)	2
Distância percorrida (km)	x

Considerando constantes os gastos e o rendimento, a menor quantidade de quilômetros que o ônibus deverá percorrer no mês para que os gastos não superem o rendimento é

- A) 2 775.
- B) 2 850.
- C) 2 875.
- D) 2 900.
- E) 2 925.

10. (UFJF-MG-2020) Um tanque é abastecido por uma torneira e o volume de água, em milhares de litros, em seu interior, é dado por $V_1(t) = 3t + 13$, com t contado em horas a partir do instante $t = 0$ em que a torneira é aberta.

No instante t_1 , em que o volume de água atinge a capacidade máxima do tanque, a torneira é automaticamente fechada e, imediatamente, um registro é aberto permitindo que a água acumulada nesse tanque abasteça caixas-d'água menores. A partir do momento em que esse registro é aberto, o volume d'água no tanque passa a ser descrito pela função $V_2(t) = -2t + 58$, para $t \geq t_1$, até que o tanque esteja completamente vazio.

- A) Calcule a capacidade máxima do tanque.
- B) Em quanto tempo o tanque estará vazio depois de fechada a torneira e aberto o registro?

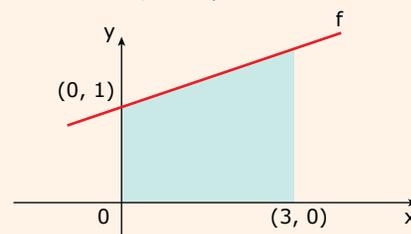
11. (UFJF-MG) Para desencorajar o consumo excessivo de água, o Departamento de Água de certo município aumentou o preço desse líquido. O valor mensal pago em reais por uma residência, em função da quantidade de metros cúbicos consumida, é uma função cujo gráfico é a poligonal representada a seguir:



De acordo com o gráfico, quanto ao pagamento relativo ao consumo mensal de água de uma residência, é correto afirmar que, se o consumo

- A) for nulo, a residência estará isenta do pagamento.
- B) for igual a 5 m^3 , o valor pago será menor do que se o consumo for igual a 10 m^3 .
- C) for igual a 20 m^3 , o valor pago será o dobro do que se o consumo for igual a 10 m^3 .
- D) exceder 25 m^3 , o valor pago será R\$ 16,70 acrescido de R\$ 3,60 por m^3 excedente.
- E) for igual a 22 m^3 , o valor pago será R\$ 15,00.

12. (Ibmec-RJ) Considere a figura seguinte, na qual um dos lados do trapézio retângulo se encontra apoiado sobre o gráfico de uma função **f**. Sabendo-se que a área da região sombreada é 12 cm^2 , a lei que define **f** é:



- A) $y = 2x - 1$
- B) $y = -2x + 1$
- C) $y = \left(\frac{2x}{3}\right) + 1$
- D) $y = \left(\frac{5x}{2}\right) + 1$
- E) $y = 2x + 1$

13. (UESC-BA) O monitoramento do número de batimentos cardíacos por minuto, relacionando-o com a idade do indivíduo, não só pode evitar enfartes fulminantes como também auxiliar na determinação dos limites a serem respeitados na prática de atividades físicas. A fórmula clássica utilizada na determinação do número máximo de batimentos cardíacos por minuto (bpm), $F_{\text{Máx.}} = 220 - i$, em que i é a idade, é bastante controversa, pois pode errar de duas maneiras – os mais jovens podem extrapolar seus limites e os mais velhos ficarem aquém dos que poderiam atingir.



Estudos mostraram que se utilizando a fórmula $F = 60 + k(F_{\text{Máx.}} - 60)$, em que $55\% \leq k \leq 70\%$, se pode determinar uma faixa de batimentos cardíacos por minuto dentro da qual é possível conseguir benefícios através dos exercícios, evitando sobrecargas.

Nessas condições, um indivíduo com 50 anos de idade pode fazer exercícios físicos, com segurança, dentro da faixa de batimentos por minuto, entre

- A) 108 e 125.
- B) 121 e 136.
- C) 130 e 142.
- D) 138 e 153.
- E) 150 e 166.



14. (UPE) Um dos reservatórios d'água de um condomínio empresarial apresentou um vazamento a uma taxa constante, às 12 h do dia 1º de outubro. Às 12 h dos dias 11 e 19 do mesmo mês, os volumes d'água no reservatório eram, respectivamente, 315 mil litros e 279 mil litros. Dentre as alternativas seguintes, qual delas indica o dia em que o reservatório esvaziou totalmente?

- A) 16 de dezembro.
- B) 17 de dezembro.
- C) 18 de dezembro.
- D) 19 de dezembro.
- E) 20 de dezembro.

SEÇÃO ENEM

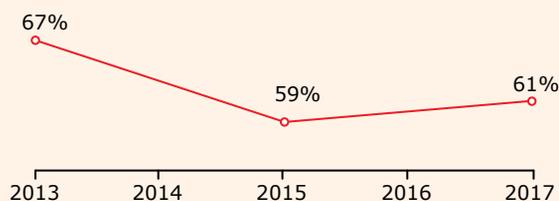


01. (Enem-2019) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de **X** a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia **Y**, em reais, que essa empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por:

- A) $Y = 80X + 920$
- B) $Y = 80X + 1\ 000$
- C) $Y = 80X + 1\ 080$
- D) $Y = 160X + 840$
- E) $Y = 160X + 1\ 000$

02. (Enem-2018) A raiva é uma doença viral e infecciosa, transmitida por mamíferos. A campanha nacional de vacinação antirrábica tem o objetivo de controlar a circulação do vírus da raiva canina e felina, prevenindo a raiva humana. O gráfico mostra a cobertura (porcentagem de vacinados) da campanha, em cães, nos anos de 2013, 2015 e 2017, no município de Belo Horizonte, em Minas Gerais. Os valores das coberturas dos anos de 2014 e 2016 não estão informados no gráfico e deseja-se estimá-los. Para tal, levou-se em consideração que a variação na cobertura de vacinação da campanha antirrábica, nos períodos de 2013 a 2015 e de 2015 a 2017, deu-se de forma linear.

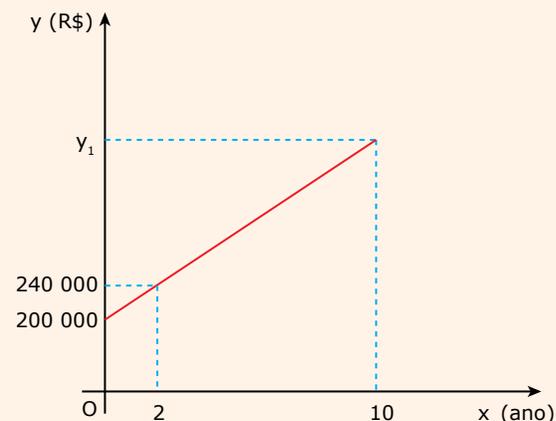


Disponível em: <<http://pni.datasus.gov.br>>. Acesso em: 05 nov. 2017.

Qual teria sido a cobertura dessa campanha no ano de 2014?

- A) 62,3%.
- B) 63,0%.
- C) 63,5%.
- D) 64,0%.
- E) 65,5%.

03. (Enem-2017) Um sítio foi adquirido por R\$ 200 000,00. O proprietário verificou que a valorização do imóvel, após sua aquisição, cresceu em função do tempo conforme o gráfico, e que essa tendência de valorização se manteve nos anos seguintes.



O valor desse sítio, no décimo ano após sua compra, em real, será de

- A) 190 000.
- B) 232 000.
- C) 272 000.
- D) 400 000.
- E) 500 000.

04. CQQN



(Enem) Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

- A) 2 meses e meio.
- B) 3 meses e meio.
- C) 1 mês e meio.
- D) 4 meses.
- E) 1 mês.

05. (Enem) Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

Valor do kWh (com tributos) x consumo (em kWh) + Cosip
 O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo.
 O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R\$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00
Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R\$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

- A) 134,1
- B) 135,0
- C) 137,1
- D) 138,6
- E) 143,1

06. (Enem) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$$Q_o = -20 + 4P$$

$$Q_d = 46 - 2P,$$

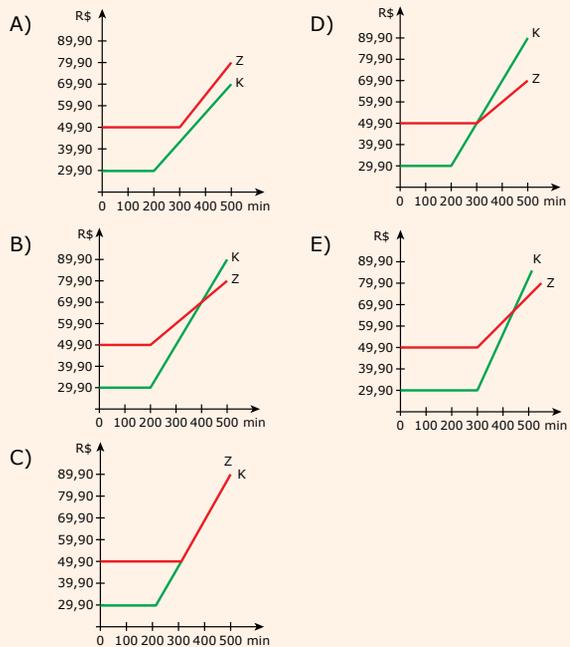
em que Q_o é quantidade de oferta, Q_d é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_o e Q_d se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

- A) 5
- B) 11
- C) 13
- D) 23
- E) 33

07. (Enem) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano **K**, o cliente paga R\$ 29,90 por 200 minutos mensais e R\$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano **Z**, paga R\$ 49,90 por 300 minutos mensais e R\$ 0,10 por cada minuto excedente.

O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:



SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP



GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei _____ Errei _____

- 01. E
- 02. E
- 03. C
- 04. B
- 05. D
- 06. E
- 07. B
- 08. A

Propostos

Acertei _____ Errei _____

- 01. D
- 02. B
- 03. E
- 04. B
- 05. A
- 06. D
- 07. E
- 08. C
- 09. C
- 10.
- A) 40 L
- B) 20 h
- 11. D
- 12. E
- 13. B
- 14. E

Seção Enem

Acertei _____ Errei _____

- 01. D
- 02. B
- 03. D
- 04. A
- 05. C
- 06. B
- 07. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %