FRENTE: MATEMÁTICA IV

PROFESSOR(A): MARCELO MENDES

ASSUNTO: SEQUÊNCIAS RECORRENTES

Resumo Teórico

Sequências recorrentes são aquelas em que o valor de cada termo, a partir de uma determinada posição, recorre a valores de termos de posições prévias. Progressão aritméticas e geométricas são exemplos de sequências recorrentes.

Nesta aula, veremos três tipos:

1. Recorrências simples como, por exemplo, equações de diferença;
2. Recorrências lineares de ordem 2 com raízes iguais na equação característica;
3. Recorrências lineares de ordem 2 com raízes distintas na equação característica.

Exemplo 1:

Considere a sequência $\{a_n\}$, em que $a_1 = 2$ e cujos termos seguintes são dados por $a_{n+1} = a_n + 2(n+1)$, $n \geq 1$ (equação de diferença, pois avalia a diferença entre termos). Determine uma expressão explícita para a_n.

Vamos escrever várias equações:

$$\begin{gathered} a_n = a_{n-1} + 2n \\ a_{n-1} = a_{n-2} + 2_{(n-1)} \\ \ldots \\ a_2 = a_1 + 2(2) \end{gathered}$$

e realizar uma soma telescópica, que gera $a_n = 2 + 2(2) + \ldots 2(n-1) + 2n = n(n+1)$.

Agora, vamos estudar as recorrências lineares de ordem 2 (só depende dos 2 termos imediatamente anteriores). Inicialmente, analisaremos aquelas em que a equação característica possui raiz real dupla. Mas o que é uma equação característica?

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}.$$

A equação característica dessa recorrência é a equação quadrática formada repetindo-se os mesmos coeficientes da recorrência, ou seja, $x^2 = px + q \Leftrightarrow x^2 - px - q = 0$. Mais à frente deduziremos como surge essa equação.

Exemplo 2:

Considere uma recorrência definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ e, para $n \geq 3$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$. A equação característica associada é $x^2 - 2x + 1 = 0$, que possui duas raízes iguais a 1. Entrementes, uma olhadinha mais cuidadosa mostra que a recorrência em questão é de uma P.A., pois

$$an = 2a_{n-1} - a_{n-2} \Leftrightarrow an - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$$

Portanto, acabamos de ver que uma P.A. está associada a uma equação característica com raiz dupla 1.

Exemplo 3:

Considere a recorrência em que $a_1 = 6$, $a_2 = 27$ e, para $n \geq 3$, $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (*). A equação característica associada é $x^2 - 6x + 9 = 0$, cujas raízes são iguais a 3. A saída agora é criar uma nova sequência $\{b_n\}$, dada por $a_n = 3^n b_n$. Substituindo em (*), chegamos a $b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2}$, o que mostra que $\{b_n\}$ é uma P.A.!

Assim, sendo $b_n = A + Bn$ (o termo geral de uma P.A. é uma função polinomial do 1° grau em função de **n** ou uma função constante no caso em que a P.A. é constante), obtemos $a_n = 3^n (A + Bn)$. Para acharmos A e B, fazemos **n** assumir os valores 1 e 2:

$$\begin{cases} 6 = a_1 = 3(A+B) \\ 27 = a_2 = 9(A+2B) \end{cases}$$

cujas soluções são A = B = 1 e, portanto, $a_n = 3^n (n + 1)$.

Exemplo 4:

Seja $\{a_n\}$ a sequência definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, ($n \geq 3$. Podemos reescrever essa equação como $a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$. Observe que obtivemos o mesmo padrão de diferença do lado esquerdo $a_n - a_{n-1}$ e do lado direito $a_{n-1} - a_{n-2}$ (multiplicada por 2). Assim, há proporção $\frac{1}{-1} = \frac{2}{-2}$ entre os coeficientes. Mais geralmente, esse padrão é dado por $ax_n + bx_{n-1} = k(ax_{n-1} + bx_{n-2}) = kax_{n-1} + kbx_{n-2}$, em que a proporção é $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$. Escrevendo várias equações

$$\begin{gathered} a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ a_{n-1} - a_{n-2} = 2(a_{n-2} - a_{n-3}) \\ \ldots \\ a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1) \end{gathered}$$

e multiplicando-as (produto telescópico), chegamos a $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$. Em seguida, somamos (soma telescópica) várias dessas equações de diferenças

$$a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$$
$$a_{n-1} - a_{n-2} = 2^{n-2}$$
$$\dots$$
$$a_2 - a_1 = 2$$

e chegamos a $a_n = 1 + 2 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Exemplo 5:

Seja $\{F_n\}$ a famosa Sequência de Fibonacci, definida por $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Vamos proceder de forma semelhante ao exemplo anterior, ou seja, para algum $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$, escrevemos:

$$F_{n+1} - kF_n = (1 - k)F_n + F_{n-1}.$$

Para repetir mais uma vez o padrão de diferenças entre os coeficientes dos dois lados dessa equação, devemos ter $\frac{1}{-k} = \frac{1-k}{1} \Leftrightarrow k^2 - k - 1 = 0$(*), que é equação característica dessa recorrência com raízes distintas.

(**Obs.:** Mas, geralmente, se a recorrência fosse $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \Leftrightarrow x_{n+1} - kx_n = (a - k)\, x_n + bx_{n-1}$, a proporção entre coeficientes seria $\frac{1}{-k} = \frac{a-k}{b} \Leftrightarrow k^2 - ak - b = 0$, que é sua equação característica).

O resultado dessa proporção é poder reescrever a recorrência como $F_{n+1} - kF_n = (1 - k)(F_n - kF_{n-1})$ (logrado o padrão desejado nos dois lados dessa equação).

As raízes de (*) satisfazem $k_1 + k_2 = 1$, $k_1k_2 = -1$.

i) $k = k_1$:

$$F_{n+1} - k_1F_n = (1 - k_1)(F_n - k_1F_{n-1})$$
$$F_n - k_1 F_{n-1} = (1 - k_1)(F_{n-1} - k_1F_{n-2})$$
$$\dots$$
$$F_3 - k_1F_2 = (1 - k_1)(F_2 - k_1F_1)$$

Após o produto telescópico, o resultado é $F_{n+1} - k_1F_n = (1 - k_1)^{n-1}(F_2 - k_1F_1) = (1 - k_1)^n = k_2^{\,n}$.

ii) $k = k_2$:

Analogamente, obtemos $F_{n+1} - k_2F_n = k_1^{\,n}$. Subtraindo essas duas equações, chegamos a

$$(k_1 - k_2)\, F_n = k_1^{\,n} - k_2^{\,n}.$$

Como $k_1 \neq k_2$, temos $F_n = \frac{k_1^n - k_2^n}{k_1 - k_2}$, ou seja,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Na prática, procedemos assim:

Para $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, com x_1, x_2 dados:

i. montamos a equação característica:

$$k^2 - ak - b = 0.$$

ii. o termo geral é dado por $x_n = A'k_1^n - B'k_2^n$, em que A' e B' são constantes (assim como k_1 e k_2), ou, melhor,

$$x_n = Ak_1^{\,n-1} - Bk_2^{\,n-1},$$

que torna mais simples o resultado quando n = 1, em que A e B também são constantes encontradas a partir do sistema obtido com n = 1 e n = 2.

Exercícios de Fixação

01. Considere a recorrência definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ e, para $n \geq 3$, $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$. Quantos dígitos possui o termo a_8?
A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) mais que 7.

02. (IME) Seja a sequência $\{v_n\}$, n = 0, 1, 2, ..., definida a partir de seus dois primeiros termos v_0 e v_1 e pela fórmula geral $v_n = 6v_{n-1} - 9v_{n-2}$, para $n \geq 2$. Define-se uma nova sequência $\{u_n\}$, n = 0, 1, 2, ..., pela fórmula $v_n = 3^n u_n$.
A) Calcule $u_n - u_{n-1}$ em função de u_0 e u_1.
B) Calcule u_n e v_n em função de **n**, v_1 e v_0.
C) Identifique a natureza das sequências $\{v_n\}$ e $\{u_n\}$ quando $v_1 = 1$ e $v_0 = 1/3$.

03. (OPM) Uma escada tem **n** degraus. Para subi-la, em cada passo, pode-se subir um ou dois degraus de cada vez. De quantos modos diferentes pode-se subir a escada?

04. Seja $\{a_n\}$ uma sequência tal que $a_1 = \frac{21}{16}$ e $2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}$, $n \geq 2$.

Simplifique $a_n + \frac{3}{2^{n+3}}$.

05. (IME) Considere a sequência, cujos primeiros termos são 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Seja a_n seu n-ésimo termo. Mostre que $a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ para todo $n \geq 2$.

Exercícios Propostos

01. Prove que, se **f** é uma função não constante de valores reais tal que, para todo **n** natural, $f(n + 1) + f(n - 1) = f(n)$, então **f** é periódica.

02. Resolva a recorrência $a_1 = 8$, $a_2 = 96$ e, para $n \geq 3$, $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$.

03. A figura a seguir mostra um retângulo $1 \times n$, que deve ser preenchido por 2 tipos de retângulos menores 1×1 e 1×2. De quantas maneiras se pode fazer isso?

04. Um garoto tem **n** reais. Todo dia, ele realiza exatamente uma das seguintes compras: 1 bolo que custa 1 real, um sorvete que custa 2 reais ou um pastel que custa 2 reais. De quantas maneiras o menino pode gastar seu dinheiro?

05. Seja $f(n) = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ Então, $f(n+1) - f(n-1)$, expresso em termos de $f(n)$, é igual a:

A) $\frac{f(n)}{2}$
B) $f(n)$
C) $2f(n) + 1$
D) $(f(n))^2$
E) $\frac{(f(n))^2 - 1}{2}$

06. Quantos anagramas (permitindo repetições) de **n** letras podem ser formados com **a**, **b**, **c** e **d** de tal forma que **a** e **b** não sejam adjacentes?

07. Uma sequência de números $\{a_k\}$ é definida por $a_0 = 0$ e $a_{k+1} = 3a_k + 1$, $k \geq 0$. Prove que a_{155} é divisível por 11.

08. Seja $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ e $a_{n+2} = (n + 3)a_{n+1} - (n + 2)a_n$, para todo inteiro $n \geq 1$. Encontre todos os valores de **n** para os quais $11 | a_n$.

09. Seja α a maior raiz de $x^2 + x - 1 = 0$. O valor de $\alpha^5 - 5\alpha$ é:

A) –1
B) –2
C) –3
D) 1
E) 2

10. Se α e β são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e $S_n = \alpha^n + \beta^n$, $n \in \mathbb{N}$, então mostre que $aS_{n+1} + bS_n + cS_{n-1} = 0$.

Gabarito

Exercícios de Fixação				
01	02	03	04	05
A	*	*	*	*

02. a) $u_1 - u_0$;

b) $u_n = \frac{nv_1}{3} + (1 - n)v_0$ e $v_n = 3^{n-1}nv_1 + 3^n(1 - n)v_0$

c) $u_n = \frac{1}{3}$, sequência constante e $v_n = 3^{n-1}$, progressão geométrica

03. Para o n-ésimo degrau, o número é a_n, em que $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$.

04. $\left(\frac{3}{2}\right)^n$

05. Demonstração

Exercícios Propostos				
01	02	03	04	05
*	*	*	*	B
06	07	08	09	10
*	*	*	C	*

01. Demonstração

02. $4^n(4n - 2)$

03. Para um retângulo $1 \times n$, o número é a_n, em que $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$.

04. Para gastar **n** reais, o número é a_n, em que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $n \geq 3$.

06. Para **n** letras, o número é a_n, em que $a_1 = 4$, $a_2 = 14$, $a_n = 3a_{n-1} + 2_{an-2}$, $n \geq 3$.

07. Demonstração

08. $n = 4, 8, k$, com $k \geq 10$.

10. Demonstração

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: MARCELO MENDES
DIG.: VICENTINA/REJANE – REV.: KATIARY