PROVA DE MATEMÁTICA

01) **(ITA-94)** Sejam x e y números reais, com $x \neq 0$, satisfazendo
$(x + iy)^2 = (x + y)i$, então:
a) x e y são números irracionais.
b) $x > 0$ e $y < 0$.
c) x é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$
d) $x < 0$ e $y = z$.
e) $x^2 + xy + y^2 = 1/2$

Resolução
$(x + yi)^2 = (x + y)i$
$x^2 + 2xyi + y^2 . i^2 = (x + y)i$
$x^2 – y^2 + 2xyi = 0 + (x + y)i$
Como x e y são números reais, temos o sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = x + y \end{cases}$$

Resulta desse sistema:
(x = 0 e y = 0) ou (x = 1 e y = 1)
Pelo enunciado da questão, tem-se que $x \neq 0$, e, portanto, x = 1 e y = 1.
Como $1^3 + 3.1^2 + 2.1 – 6 = 0$, conclui-se que o número x(x = 1) é uma raiz da equação $t^3 + 3t^2 + 2t – 6 = 0$

Comentário:
Com o uso de variáveis diferentes, evita-se a frase, no mínimo confusa, "x é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x – 6 = 0$".

02) **(ITA-94)** Considere as afirmações:
I- $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^{10} = \cos(10\theta) + \operatorname{sen}(10\theta)$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
II- $(5i)/(2 + i) = 1 + 2i$
III- $(1 - i)^4 = - 4$
IV- Se $z^2 = (\bar{z})^2$ então z é real ou imaginário puro.
V- O polinômio $x^4 + x^3 - x - 1$ possui apenas raízes reais.
Podemos concluir:
a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas quatro são verdadeiras.
c) Apenas três são verdadeiras.
d) Apenas duas são verdadeiras.
e) Apenas uma é verdadeira.

Resolução
1. Usando Moivre:
$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^{10} = \cos(10\theta) + i\operatorname{sen}(10\theta)$***, para todo*** $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $\dfrac{5i}{2+i} \cdot \dfrac{2-i}{2-i} = \dfrac{5i(2-i)}{5} = 1 + 2i$
3. $(1 – i)^4 = [(1 – i)^2]^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$
4. $z^2 = (\bar{z})^2$
Fazendo z = a + bi, $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, temos:
$(a + bi)^2 = (a - bi)^2$
$a^2 – b^2 + 2abi = a^2 – b^2 – 2abi \Leftrightarrow 2ab = -2ab$
$ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ***ou*** $b = 0$
Assim, z é real ou imaginário puro.

5. $x^4 + x^3 – x – 1 = 0$
$x^3. (x + 1) – 1(x + 1) = 0$
$(x + 1)(x^3 – 1) = 0$
$(x + 1) (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
x = -1 ou x = 1 ou $x^2 + x + 1 = 0$ (não tem raízes reais, pois $\Delta < 0$.
São verdadeiras as afirmações 1, 2, 3 e 4.
Portanto, apenas quatro são verdadeiras.

03) **(ITA-94)** Dadas as funções reais de variável real $f(x) = mx + 1$ e $g(x) = x + m$, onde m é uma constante real com $0 < m < 1$, considere as afirmações:
I- $(fog)(x) = (gof)(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
II- $f(m) = g(m)$
III- Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(fog)(a) = f(a)$.
IV- Existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $(fog)(b) = mb$.
V- $0 < (gog)(m) < 3$
Podemos concluir
a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas quatro são verdadeiras.
c) Apenas três são verdadeiras.
d) Apenas duas são verdadeiras.
e) Apenas uma é verdadeira.

Resolução
$f(x) = mx + 1 \Rightarrow f(g(x)) = m.g(x) + 1$
Como $g(x) = x + m$, segue que $f(g(x)) = m(x + m) + 1$, ou , ainda, $fog(x) = mx + m^2 + 1$.
1. $g(x) = x + m \Rightarrow g(f(x)) = f(x) = mx + 1 + m$.
como $f(x) = mx + 1$, segue que $g(f(x)) = mx + 1 + m$.
Com $0 < m < 1$, pode-se concluir que, para todo x, $mx + m^2 + 1 \neq m + 1$ e, portanto, NÃO existe x, $x \in \mathbb{R}$ tal que $fog(x) = gof(x)$.
2. ***$f(m) = m^2 + 1$ e $g(m) = 2m$. Com $0 < m < 1$, pode-se afirmar que $f(m) \neq g(m)$.***
3. ***$fog(a) = m.a + m^2 + 1$ e $f(a) = a.m + 1$***
Com $0 < m < 1$, NÃO existe a, tal que $fog(a) = f(a)$.
4. ***$gof(b) = m.b + m + 1$. Com $0 < m < 1$, NÃO existe b, tal que $gof(b) = mb$.***
5. ***$g(g(x)) = g(x) + m$, isto é, $g(g(x)) = x + 2m$***
$g(g(m)) = m + 2m = 3m$.
Como $0 < m < 1$, resulta-se que $0 < 3m < 3$, ou seja, $0 < gog(m) < 3$.
Há, portanto, apenas uma afirmação verdadeira!

04) **(ITA-94)** A identidade: $\dfrac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ é válida para todo real $x \neq -1$. Então a + b + c é igual a:
a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

Resolução
$$\frac{x^3+4}{x^3+1} \equiv \frac{1(x+1)(x^2-x+1) + a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)}{x^3+1}$$

$x^3 + 4 \equiv x^3 + 1 + ax^2 - ax + a + bx^2 + bx + cx + c$
$x^3 + 4 \equiv x^3 + (a+b)x^2 + (-a + b + c)x + a + c + 1$
Dessa identidade resulta o sistema

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ a + c = 3 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos:
$a = 1$, $b = -1$ e $c = 2$
Portanto, $a + b + c = 2$.

---

05) **(ITA-94)** As raízes da equação de coeficientes reais $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a:

a) 190 b) 191 c) 192 d) 193 e) 194

Resolução
Sejam $x_1 = r - 1$, $x_2 = r$ e $x_3 = r + 1$, com $r \in Z$ e $r > 1$, as raízes da equação.
Do enunciado, temos que $(r-1)^2 + r^2 + (r+1)^2 = 14$
$r^2 - 2r + 1 + r^2 + r^2 + 2r + 1 = 14$
$3r^2 = 12 \therefore r^2 = 4 \therefore r = 2$ (lembrar que $r > 1$)
Logo, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$
$x_1 + x_2 + x_3 = -a \Rightarrow a = -6$
$x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3 = b \Rightarrow b = 11$
$x_1 . x_2 . x_3 = -c \Rightarrow c = -6$
Portanto, $a^2 + b^2 + c^2 = 193$.

---

06) **(ITA-94)** Seja P(x) um polinômio de grau 5, com coeficientes reais, admitindo 2 e i como raízes. Se P(1)P(-1) < 0, então o número de raízes reais de P(x) pertencentes ao intervalo]-1, 1[é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Resolução
Como i é raiz e os coeficientes de P são reais, conclui-se que –i é raiz (conjugado de i). Como P é contínua em R e P(1).P(-1) < 0, existe um número ímpar de raízes reais no intervalo aberto]-1,1[.
Como P é de grau 5 e i e –i são raízes, esse número ímpar é 1 ou 3.
Como 2 é raiz e 2 $\notin$]-1,1[, conclui-se que NÃO pode haver 3 raízes no intervalo]-1,1[, pois, caso contrário, a equação P(x) = 0 teria 6 raízes, o que é absurdo.
Portanto, P possui apenas uma raiz no intervalo]-1,1[.

---

07) **(ITA-94)** Quantas anagramas com 6 caracteres distintos podemos formar usando as letras da palavra QUEIMADO, anagramas estes que contenham duas consoantes e que, entre as consoantes, haja pelo menos uma vogal?

a) 7200 b) 7000 c) 4800
d) 3600 e) 2400

Resolução
Podemos escolher as duas consoantes e quatro vogais de $C_{3,2}.C_{5,4}$ modos.
Para cada escolha do parágrafo anterior, calculamos todos os anagramas possíveis e subtraímos aqueles que possuem duas consoantes juntas: $P_6 - 2.P_5$.
Pelo Princípio Fundamental de Contagem, temos:
$C_{3,2}.C_{5,4}.(6! - 2.5!) = 3.5.(720 - 240) = 7200$

---

08) **(ITA-94)** No desenvolvimento de $A = \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2m}{3}\right)^{10}$, a razão entre a parcela contendo o fator $a^{16}m^2$ e a parcela contendo o fator $a^{14}m^3$ é igual a 9/16. Se a e m são números reais positivos tais que $A = (m^2 + 4)^5$ então:

a) a .m = 2/3 b) a .m = 1/3
c) a + m = 5/2 d) a + m = 5
e) a - m = 5/2

Resolução
Uma parcela qualquer do desenvolvimento é da forma

$$T = \binom{10}{p}\left(\frac{3a^2}{2}\right)^p \cdot \left(\frac{2m}{3}\right)^{10-p}$$

A parcela contendo o fator $a^{16}m^2$ é obtida para p = 8 e a parcela contendo o fator $a^{14}m^3$, para p = 7.
Do enunciado, tem-se:

$$\frac{\binom{10}{8}\frac{3^8 a^{16}}{2^8}.\frac{2^2 m^2}{3^2}}{\binom{10}{7}\frac{3^7 a^{14}}{2^7}.\frac{2^3 m^3}{3^3}} = \frac{9}{16}$$

Desta equação, segue-se que $a^2 = \frac{2m}{3}$ (I).

Por outro lado, sendo $A = (m^2 + 4)^5$, podemos escrever:

$$(m^2 + 4)^5 = \left(\frac{3}{2}.\frac{2m}{3} + \frac{2m}{3}\right)^{10}$$

$$(m^2 + 4)^5 = \left(\frac{5m}{3}\right)^{10}$$

$$m^2 + 4 = \left(\frac{5m}{3}\right)^2$$

$16m^2 = 36$
$m = 3/2$
ou
$m = -3/2$ (não convém)

e, substituindo o valor de m em (I), vem:

$$a^2 = \frac{2}{3}.\frac{3}{2}$$

$\therefore a^2 = 1$
$a = 1$
ou
$a = -1$ (não convém)
Logo, $a + m = 5/2$.

---

09) **(ITA-94)** Seja (a_1, a_2, ... , a_n) uma progressão geométrica com um número ímpar de termos e razão q > 0. O produto de seus termos é igual a 2^{25} e o termo do meio é 2^5. Se a soma

dos (n - 1) primeiros termos é igual a $2(1 + q)(1 + q^2)$, então:

a) $a_1 + q = 16$ b) $a_1 + q = 12$ c) $a_1 + q = 10$
d) $a_1 + q + n = 20$ e) $a_1 + q + n = 11$

Resolução

Do enunciado $a_{\frac{n+1}{2}} = 2^5$ ***e*** $P_n = 2^{25}$

$$P_n = \left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)^n \quad \backslash\ 2^{25} = (2^5)^n \quad \backslash\ n = 5$$

Ainda do enunciado e sabendo que n é igual a 5, temos:

$$\begin{cases} S_4 = 2(1+q)(1+q^2) \\ a_1 = \dfrac{a^3}{q^2} = \dfrac{32}{q^2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{a_1.(q^4 - 1)}{q - 1} = 2(1+q)(1+q^2)$$

$$\frac{32\,(q+1)(q-1)(q^2+1)}{q^2.(q-1)} = 2\,(1+q)(1+q^2)$$

$$q^2 = 16 \begin{cases} q = 4 \\ \text{ou} \\ q = -4 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{32}{4^2} = 2$$

Assim: $a_1 + q + n = 2 + 4 + 5 = 11$

---

10) **(ITA-94)** Sejam A e I matrizes reais quadradas de ordem 2, sendo I a matriz identidade. Por T denotamos o traço de A, ou seja T é a soma dos elementos da diagonal principal de A. Se $T \neq 0$ e λ_1, λ_2 são raízes da equação:

$$\det(A - \lambda I) = \det(A) - \det(\lambda I), \quad \text{então:}$$

a) λ_1 e λ_2 independem de T. b) $\lambda_1 . \lambda_2 = T$ c) $\lambda_1 . \lambda_2 = 1$
d) $\lambda_1 + \lambda_2 = T/2$ e) $\lambda_1 + \lambda_2 = T$

Resolução

Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ***e*** $T = a + d$ ¹ 0

Temos: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ ***e*** $\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Por outro lado, da equação
det (A - lI) = det(A) – det(lI)
decorre que:
(a - l)(d - l) – bc = ad – bc – l^2
ad – a l – d l + l^2 ***– bc = ad – bc –*** l^2
a l + d l - 2 l^2 ***= 0***

$$l(a + d - 2\,l) = 0 \begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = \dfrac{a+d}{2} = \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

Logo, $l_1 + l_2 = T/2$.

---

11) **(ITA-94)** Sejam A e P matrizes reais quadradas de ordem n tais que A é simétrica(isto é, $A = A^t$) e P é ortogonal(isto é, $PP^t = I = P^tP$), P diferente da matriz identidade. Se $B = P^tAP$ então:

a) AB é simétrica. b) BA é simétrica. c) det A = det B
d) BA = AB e) B é orgonal.

Resolução

Sendo P uma matriz ortogonal, do enunciado temos:
$PP^t = I$ ***e*** P^t ***é inversível (det*** P^t ¹ ***0).***
Por outro lado multiplicando-se por P^t ***à direita ambos os membros da igualdade***
$B = P^t A P$ ***vem:*** $BP^t = (P^t A P)P^t$,
e pela propriedade associativa: $BP^t = P^t A$
$\det(BP^t) = \det(P^tA)$
$(\det B)(\det P^t) = (\det P^t)(\det A)$
$\det B = \det A$

---

12) **(ITA-94)** Seja a uma matriz real quadrada de ordem n e B = I - A, onde I denota a matriz identidade de ordem n. supondo que A é inversível e idempotente(isto é, $A^2 = A$) considere as afirmações:

I- B é idempotente.
II- AB = BA
III- B é inversível.
IV- $A^2 + B^2 = I$
V- AB é simétrica.

Com respeito a estas afirmações temos:

a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas uma é verdadeira.
c) Apenas duas são verdadeiras.
d) Apenas três são verdadeiras.
e) Apenas quatro são verdadeiras.

Resolução

Do enunciado temos: $B = I - A$***, A é inversível e*** $A^2 = A$.
Então:
(I) $B^2 = (I - A)(I - A)$
$= I^2 - IA - AI + A^2$
$= I - 2A + A^2$
$= I - 2A + A$
$= I - A$
$= B$***, ou seja, B é idempotente.***
(II) $AB = A(I - A) = AI - A^2 = A - A = 0$
$BA = (I - A)A = IA - A^2 = A - A = 0$
Ou seja, AB = BA.
(III) De (I), tem-se $B^2 = B$
Então:
$\det B^2 = \det B$

$$(\det B)^2 - (\det B) = 0 \begin{cases} \det B = 0 \\ \text{ou} \\ \det B = 1 \end{cases}$$

Logo, não se pode afirmar que B é inversível.
(IV) De (I), $A^2 + B^2 = A + B = A + (I - A) = I$
(V) De (II), $(AB)^t = 0^t = 0 = AB$
Ou seja, AB é simétrica.

Portanto pode-se concluir que apenas quatro afirmações (1, 2, 4 e 5) são verdadeiras.

---

13) **(ITA-94)** Sejam x e y números reais, positivos e ambos diferentes de 1, satisfazendo o sistema:

$$\begin{cases} x^y = \dfrac{1}{y^2} \\ \log x + \log y = \log \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

. Então o conjunto (x, y) está contido no intervalo:

a) [2, 5] b)]0, 4[c) [-1, 2]
d) [4, 8[e) [5, ∞ [

Resolução

log x + log y = log $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\Rightarrow$ *log(xy) = log* $\left(\dfrac{1}{x^{1/2}}\right)$

$$xy = \frac{1}{x^{1/2}} \Rightarrow y = \frac{1}{x^{3/2}}$$

Substituindo esse resultado em $x^y = \dfrac{1}{y^2}$***, resulta que:***

$$\frac{1}{x^{x^{1/2}}} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)^2} \Rightarrow x^{\left(x^{3/2}\right)^{-1}} = \left(x^{3/2}\right)^2 \Rightarrow x^{x^{-3/2}} = x^3$$

Como $x > 0$ ***e*** $x \neq 1$***, segue-se que*** $x^{-3/2} = 3$***.***
$x = 3^{-2/3}$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

Lembrando que $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$***, temos que x < 1/2 (I)***

$y = x^{-3/2} \Rightarrow y = \left(3^{-2/3}\right)^{-3/2} \Rightarrow y = 3$ ***(II)***

De (I) e (II), resulta que $\{x, y\} \subset\ ]0,4[$***.***

---

14) **(ITA-94)** A expressão trigonométrica

$$\frac{1}{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)} - \frac{4\text{tg}^2 x}{(1 - \text{tg}^2 x)^2}$$

Para x ∈]0, π/2[, x ≠ π/4, é igual a:

a) sen(2x) b) cos(2x) c) 1 d) 0 e) sec(2x)

Resolução

$$\frac{1}{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)^2} - \frac{4\text{tg}^2 x}{(1 - \text{tg}^2 x)^2} = \frac{1}{(\cos 2x)^2} - \left(\frac{2\text{tg}x}{1 - \text{tg}x}\right)^2 =$$

$$= \sec^2 2x - \text{tg}^2 2x = 1 + \text{tg}^2 2x - \text{tg}^2 2x = 1.$$

---

15) **(ITA-94)** Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e A, B e C os ângulos internos opostos, respectivamente, a cada um destes lados. Sabe-se que a, b, c, neta ordem, formam uma progressão aritmética. Se o perímetro do triângulo mede 15 cm e

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{77}{240}$$

Então sua área, em cm², mede:

a) $(15\sqrt{7})/4$ b) $(4\sqrt{5})/3$ c) $(4\sqrt{5})/5$
d) $(4\sqrt{7})/7$ e) $(3\sqrt{5})/4$

Resolução
Do enunciado:

$$\frac{bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C}{abc} = \frac{77}{240} \quad \textit{(I)}$$

Usando o teorema dos co-senos:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos A \end{aligned}\right\} +$$

Somando membro a membro, temos:

bccos A + accos B + abcos C = $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ ***(II)***

(a, b, c) é P.A. de soma 15 $\therefore$ $\begin{cases} a = 5 - r \\ b = 5 \\ c = 5 + r \end{cases}$ ***(III)***

De (I), (II) e (III):

$$\frac{(5-r)^2 + 5^2 + (5+r)^2}{2.5.(25 - r^2)} = \frac{77}{240} \therefore \frac{2r^2 + 75}{25 - r^2} = \frac{77}{24}$$

$\therefore$ $48r^2 + 1800 = 1925 - 77r^2$ $\therefore$ $r^2 = 1$ ⟨ $r = 1 \rightarrow$ *PA(4,5,6)* ***ou*** $r = -1 \rightarrow$ *PA(6,5,4)*

A área é: A = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$A = \sqrt{\frac{15}{2}\cdot\left(\frac{15}{2} - 4\right)\left(\frac{15}{2} - 5\right)\left(\frac{15}{2} - 6\right)} = \frac{15.\sqrt{7}}{4}$$

---

16) **(ITA-94)** Seja (a, b, c, d, e) uma progressão geométrica de razão a, com a ≠ 0 e a ≠ 1. Se a soma de seus termos é igual a (13a + 12) e x é um número real positivo diferente de 1 tal que:

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x} + \frac{1}{\log_d x} + \frac{1}{\log_e x} = \frac{5}{2}$$

então x é igual a:

a) 3^3 b) 2^3 c) $(5/2)^2$ d) $(5/2)^{3/2}$ e) $(2/5)^2$

Resolução
Do enunciado temos:

(I) $\log_x a + \log_x b + \log_x c + \log_x d + \log_x e = 5/2$

$\therefore$ $\log_x(abcde) = 5/2$ $\therefore$ $a.a^2.a^3.a^4.a^5 = x^{5/2}$ $\therefore$ $x^{5/2} = a^{15}$

$x = a^6$.

(II) $\dfrac{a(a^5 - 1)}{a - 1} = 13a + 12$

$$\frac{a(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)}{a-1} = 13a+12$$

$$a^5+a^4+a^3+a^2-12a-12=0$$

$$a^4(a+1)+a^2(a+1)-12(a+1)=0$$

$(a+1)(a^4+a^2-12)=0$

- ***$a = -1$ (não convém)***
- ***ou***
- ***$a^2 = -4$ (não convém)***
- ***ou***
- ***$a^2 = 3$***

De (I) e (II):
$x = (a^2)^3 = 3^3$

17) **(ITA-94)** O sistema indicado abaixo, nas incógnitas x, y e z,

$3^a x - 9^a y + 3z = 2^a$
$3^{a+1} x - 5^a y + 9z = 2^{a+1}$
$x + 3^{a-1} y - 3^{a+1} z = 1$

É possível e determinado quando o número a é diferente de:

a) $\log_3 2$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 5)$.

b) $\log_2 3$ e $\frac{1}{2}(\log_2 5)$.

c) $\log_2 1$ e $\frac{1}{2}(\log_2 3)$.

d) $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 1)$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_2 3)$.

e) $\log_3 1$ e $\frac{1}{2}(-1 + \log_3 5)$.

Resolução
Fazendo $3^a = m$, temos:

$$\begin{cases} mx - m^2 y + 3z = 2^a \\ 3mx - 5y + 9z = 2^{a+1} \\ x + \frac{m}{3} y + 3mz = 1 \end{cases}$$

Esse sistema é possível e determinado se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} m & -m^2 & 3 \\ 3m & -5 & 9 \\ 1 & \frac{m}{3} & 3m \end{vmatrix} \neq 0$$

Logo, $9m^4 - 24m^2 + 15 \neq 0$

Como m é positivo, devemos Ter $m \neq 1$ e $m \neq \sqrt{\frac{5}{3}}$, ou seja:

$$\begin{cases} 3^a \neq 1 \\ \text{e} \\ 3^a \neq \sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases} \therefore \begin{cases} a \neq 0 \\ \text{e} \\ a \neq \log_3 \sqrt{\frac{5}{3}} \end{cases}$$

Portanto,

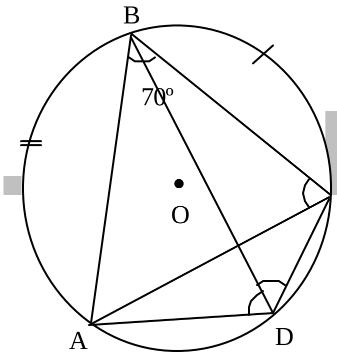
$$\begin{cases} a \neq \log_3 1 \\ \text{e} \\ a \neq \frac{1}{2}(-1+\log_3 5) \end{cases}$$

18) **(ITA-94)** Numa circunferência inscreve-se um quadrilátero convexo ABCD tal que $A\hat{B}C = 70^o$. Se $x = A\hat{C}B + B\hat{D}C$, então:

a) $x = 120^o$ b) $x = 110^o$ c) $x = 100^o$
d) $x = 90^o$ e) $x = 80^o$

Resolução
Sejam a circunferência de centro 0 e o quadrilátero convexo ABCD nela inscrito. Sendo o quadrilátero convexo ABCD inscrito numa circunferência, os ângulos opostos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são suplementares; logo: $A\hat{D}C = 110^o$.
Assim,

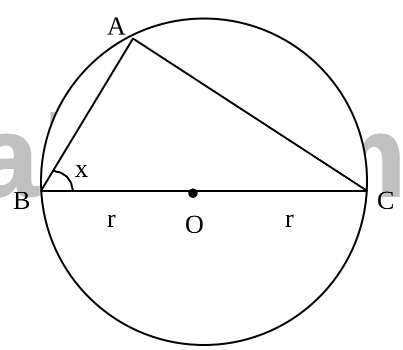
$x = A\hat{C}B + B\hat{D}C$
$x = A\hat{D}B + B\hat{D}C$
$x = A\hat{D}C$
$x = 110^o$



19) **(ITA-94)** Um triângulo ABC, retângulo em A, possui área S. Se $x = A\hat{B}C$ e r é o raio da circunferência circunscrita a este triângulo, então:

a) $S = r^2\cos(2x)$ b) $S = r^2\text{sen}(2x)$
c) $S = \frac{1}{2}r^2\text{sen}(2x)$ d) $S = \frac{1}{2}r^2\cos^2 x$
e) $S = \frac{1}{2}r^2\text{sen}^2 x$

Resolução



Como o triângulo ABC é retângulo em A, tem-se que o diâmetro de sua circunferência circunscrita é a hipotenusa $\overline{BC}$ **.**

Assim, temos:

cosx = $\frac{AB}{2r} \Rightarrow$ ***AB = 2r cos x (I)***

A área de S do triângulo ABC é:

S = 1/2 . AB . 2r sen x (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:

S = 1/2 . 2r cos x . 2r sen x $\therefore$ ***S =*** r^2 ***sen 2x***

---

20) **(ITA-94)** Duas retas r e s são dadas, respectivamente, pelas equações 3x - 4y = 3 e 2x + y = 2. Um ponto P pertencente à reta s tem abcissa positiva e dista 22 unidades de medida da reta r. Se ax + by + c = 0 é a equação da reta que contém P e é paralela a r, então a + b + c é igual a :

a) –132 b) –126 c) –118 d) –114 e) -112

Resolução

Como P pertence à sua reta s, podemos escrever: P(α ***, 2 - 2*** α ***).***

Sendo a distância de P até a reta r igual a 22 e a um número positivo, segue-se que:

$$\frac{|3\alpha - 8 + 8\alpha - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 22$$

$$|\alpha - 1| = 10 \begin{cases} \alpha = 11 \\ \text{ou} \\ \alpha = -9 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Chamando de t a reta paralela à r por P, temos:

$$(t)\begin{cases} P(11,-20) \\ m_t = m_r = \frac{3}{4} \end{cases} \quad (t)\ y + 20 = \frac{3}{4}(x - 11)$$

Logo, uma equação geral para a reta t é:

3x – 4y – 113 = 0

Por outro lado, sendo ax + by + c = 0 uma equação de t, resulta que:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{-4} = \frac{c}{-113} = p, \text{ com } p \in R^*$$

Logo,

a + b + c = -114p (p $\in$ ***R*)***

Assim, podemos concluir que a + b + c tem valor indeterminado e alguns desses valores se encontram no quadro a seguir.

p	*a + b + c*	*alternativa*
132/114	***-132***	***A***
126/114	***-126***	***B***
118/114	***-118***	***C***
1	***-114***	***D***
112/114	***-112***	***E***

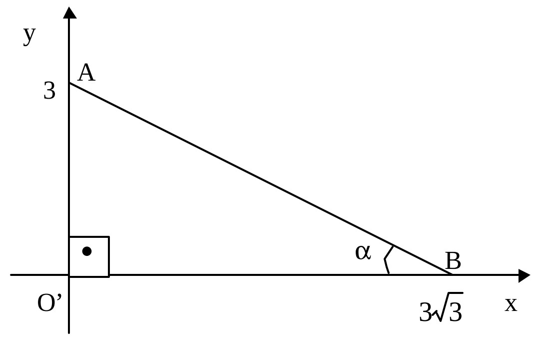
Portanto, não podemos apresentar uma única alternativa correta.

---

21) **(ITA-94)** Um triângulo equilátero é tal que A: (0, 3), B: ($3\sqrt{3}$,0) e a abcissa do ponto C é maior que 2. A circunferência circunscrita a este triângulo tem raio r e centro em O: (a, b). Então $a^2 + b^2 + r^2$ é igual a:

a) 31 b) 32 c) 33 d) 34 e) 35

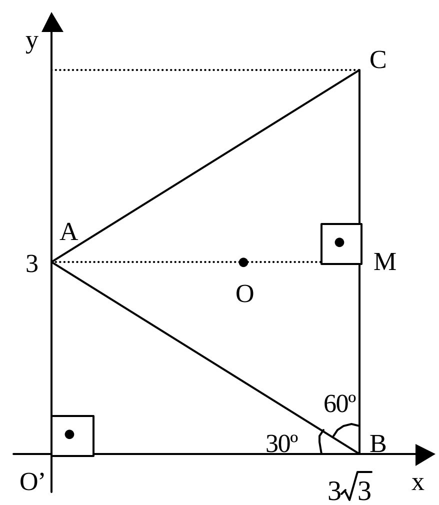
Resolução



No triângulo AO’B, tg $\alpha = \frac{3}{3\sqrt{3}}$ $\therefore$ $\alpha = 30^o$

sen 30º = $\frac{3}{AB}$ $\therefore$ ***AB = 6***

Como o triângulo ABC é equilátero e a abscissa do ponto C é maior que 2, então o ponto C pertence ao primeiro quadrante e $\overline{CB}$ ***é perpendicular ao eixo O’x:***



Assim, a abscissa de C é $3\sqrt{3}$ ***e a ordenada de C é 6.***

Num triângulo equilátero o circuncentro coincide com o baricentro. Logo as coordenadas a e b do ponto O são:

$$a = \frac{0 + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$b = \frac{3 + 0 + 6}{3} = 3$$

O raio r da circunferência circunscrita é:

r = 2/3.AM = 2/3 $3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

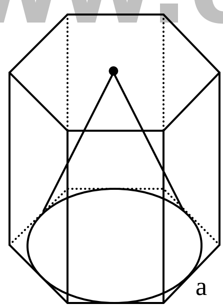
Portanto, $a^2 + b^2 + r^2 = 33$.

---

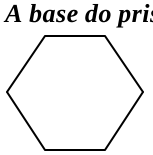
22)**(ITA-94)** Um prisma regular tem como altura o dobro da aresta da base. A razão entre o volume deste prisma e o volume do cone reto, nele inscrito, é igual a:

a) $(6\sqrt{2})/\pi$ b) $(9\sqrt{2})/\pi$ c) $(3\sqrt{6})/\pi$
d) $(6\sqrt{3})/\pi$ e) $(9\sqrt{3})/\pi$

Resolução



A base do prisma é um hexágono regular de lado a:



A área B desse polígono é:

$$B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Assim, o volume V_p do prisma é:

$$V_p = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.2a = 3a^3\sqrt{3}$$

O raio r da base do cone é a apótema da base do prisma, ou seja:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Assim, o volume V_c do cone é:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.2a = \frac{\pi a^3}{2}$$

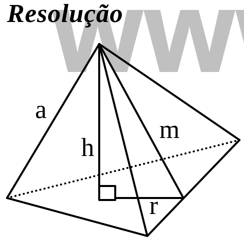
Temos então:

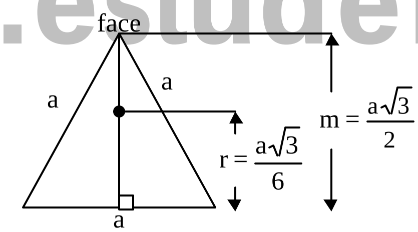
$$\frac{V_p}{V_c} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{\frac{\pi a^3}{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$$

23) **(ITA-94)** Um tetraedro regular tem área total igual a $6\sqrt{3}$ cm^2. Então sua altura, em cm, é igual a:

a) 2 b) 3 c) $2\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

Resolução





Sendo a a medida de uma aresta do tetraedro regular, temos que sua área total (A_t) é igual a quatro vezes a área de um triângulo equilátero de lado a:

$$A_t = 4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = a^2\sqrt{3}$$

Assim, temos que: $a^2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \therefore a = \sqrt{6}$cm

O apótema m do tetraedro é: $m = \frac{3\sqrt{2}}{2}$cm

O apótema r da base do tetraedro é: $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$cm

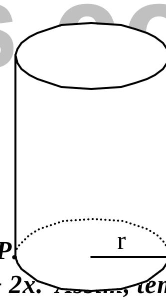
Sendo h a altura do tetraedro, temos pelo teorema de Pitágoras:

$$h^2 + r^2 = m^2 \Rightarrow h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = 2cm.$$

24) **(ITA-94)** Num cilindro circular reto sabe-se que a altura h e o raio da base r são tais que os números π, h, r formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de soma 6π. O valor da área total deste cilindro é:

a) π^3 b) $2\pi^3$ c) $15\pi^3$ d) $20\pi^3$ e) $30\pi^3$

Resolução



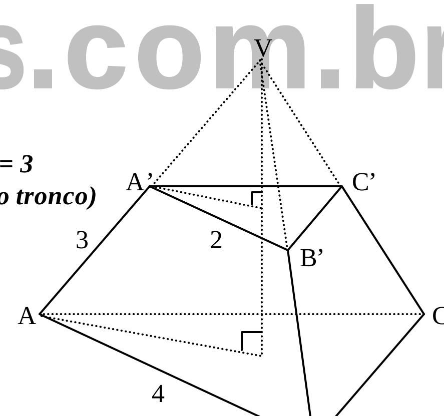
Seja x a razão da PA, ou seja:
$h = \pi + x$ e $r = \pi + 2x$. Assim, temos que:
$\pi + \pi + x + \pi + 2x = 6\pi \Rightarrow x = \pi$
Logo, $h = 2\pi$ e $r = 3\pi$.
A área total (A_t) do cilindro é:
$A_t = 2\pi r(h+r) \therefore A_t = 2\pi.3\pi(2\pi+3\pi) \therefore A_t = 30\pi^3$

25) **(ITA-94)** Um tronco de pirâmide regular tem como bases triângulos equiláteros, cujos lados medem, respectivamente, 2 cm e 4 cm. Se a aresta lateral do tronco mede 3 cm, então o valor de sua altura h, em cm, é tal que:

a) $\sqrt{7} < h < \sqrt{8}$ b) $\sqrt{6} < h < \sqrt{7}$ c) $2\sqrt{3} < h < 3\sqrt{3}$
d) $1 < h < \sqrt{2}$ e) $2\sqrt{2} < h < 3\sqrt{2}$

Resolução

A'B' = 2
AB = 4
AA' = BB' = CC' = 3
h = OO' (altura do tronco)



Temos: ***A'O' =*** $\frac{2}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

AO = $\frac{2}{3}.\frac{4\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Os triângulos VA'B' e VAB são semelhantes. Então,

$$\frac{VA'}{VA'+3}=\frac{2}{4}\therefore VA'=3$$

No triângulo retângulo VA'O':

$$(VO')^2=3^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\therefore VO'=\sqrt{\frac{23}{3}}$$

Os triângulos VA'O' e VAO são semelhantes. Então:

$$\frac{VO'}{VO}=\frac{VA'}{VA}\Rightarrow\frac{VO'}{VO}=\frac{3}{6}\therefore VO=2.VO'$$

Logo, a altura h do tronco é:

h = OO'= 2VO' – VO' = VO' = $\sqrt{\frac{23}{3}}\approx\sqrt{7,6}$

Portanto, $\sqrt{7}<h<\sqrt{8}$