Bernoulli
Sistema de Ensino

Bernoulli Resolve

6V | Volume 2 | Matemática

SUMÁRIO

COMENTÁRIO E RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

MÓDULO – A 05

Produtos Notáveis e Fatoração

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra D

Comentário: Desenvolvendo a expressão, temos:

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$

Questão 02 – Letra D

Comentário: Desenvolvendo a expressão, temos:

$\sqrt{68^2 - 32^2} = \sqrt{(68 + 32)(68 - 32)} =$

$\sqrt{100 \,.\, 36} = 10 \,.\, 6 = 60$

Questão 03 – Letra A

Comentário: Os lados paralelos de um retângulo possuem a mesma medida, e o perímetro é dado pela soma dos quatro lados. Assim:

Perímetro = $(ax + by) + (ax + by) + (bx + ay) + (bx + ay) = 2ax + 2by + 2bx + 2ay$

Fatorando e reagrupando, temos:

$2x(a + b) + 2y(a + b) = 2(a + b)(x + y)$

Questão 04 – Letra B

Comentário: Elevando ambos os membros da equação $x + y = 13$ ao quadrado, temos:

$(x + y)^2 = 169 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 169 \Rightarrow x^2 + y^2 = 169 - 2xy$

Agora, substituindo o valor $xy = 1$ nessa equação, temos:

$x^2 + y^2 = 169 - 2 \,.\, 1 = 167$

Questão 05 – Letra C

Comentário:

$(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$

Questão 06 – Letra A

Comentário: Para encontrar o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$, vamos elevar ao quadrado ambos os membros da equação $x - \frac{1}{x} = 13$, dessa forma teremos:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 13^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2.\cancel{x}.\frac{1}{\cancel{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 169 \Rightarrow$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 171$$

Questão 07 – Letra E

Comentário: Primeiramente, elevando ambos os membros da equação $x + y = -16^2$ ao quadrado, temos:

$(x + y)^2 = 256 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 256 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 = 256 - 128 = 128$

Desenvolvendo a expressão $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, temos:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Substituindo agora os valores de $(x^2 + y^2) = 128$ e $xy = 64$, temos:

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{128}{64} = 2$$

Questão 08 – Letra C

Comentário: Substituindo os valores de **A**, **B** e **C** na expressão, temos:

$$\frac{A^2 - B^2}{C} = \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{xy} =$$

$$\frac{\cancel{x^2} + 2xy + \cancel{y^2} - (\cancel{x^2} - 2xy + \cancel{y^2})}{xy} = \frac{4xy}{xy} = 4$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário: Desenvolvendo a expressão numérica referente ao valor de **M**, temos:

$$M = \frac{(3^2 + 5^2)^2 - (3^2 - 5^2)^2}{(3^2 \,.\, 5^2)^2} =$$

$$\frac{\cancel{(3^2)^2} + 2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 + \cancel{(5^2)^2} - \cancel{(3^2)^2} + 2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 - \cancel{(5^2)^2}}{(3^2 \,.\, 5^2)^2} =$$

$$\frac{4 \,.\, \cancel{3^2} \,.\, \cancel{5^2}}{(3^2 \,.\, 5^2)^{\cancel{2}}} = \frac{4}{3^2 \,.\, 5^2} = \frac{4}{225}$$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Para fatorar o denominador, substituiremos 2 009 por **x**, a fim de facilitar os cálculos. Logo:

$2\,009^2 + 2\,009 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2$

Para fatorar essa equação, precisamos encontrar suas raízes. Assim, temos:

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.1.(-2) = 9$

$x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 1$

$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) \Rightarrow (2\,009 + 2)(2\,009 - 1)$

Voltando à expressão inicial, temos:

$$\frac{2\,009^2 - 4}{2\,009^2 + 2\,009 - 2} = \frac{(2\,009 + 2)(2\,009 - 2)}{(2\,009 + 2)(2\,009 - 1)} = \frac{2\,007}{2\,008}$$

Questão 03 – Letra B

Comentário:

$$\left(\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x-1}\right).\frac{1-x^2}{2}=\frac{x(x-1)-x(x+1)}{(x+1)(x-1)}.\frac{-(x^2-1)}{2}=$$

$$\frac{\cancel{x^2}-x-\cancel{x^2}-x}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}.\frac{-\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}{2}=\frac{-(-2x)}{2}=x$$

Questão 04 – Letra B

Comentário: Substituindo os valores de **x**, **y** e **z** na expressão, temos:

$$\sqrt{x+y-z}\Rightarrow$$
$$\sqrt{9\,731^2+3\,907^2-2\sqrt{9\,731^2\,.\,3\,907^2}}\Rightarrow$$
$$\sqrt{9\,731^2+3\,907^2-2\,.\,9\,731\,.\,3\,907}$$

Agora, fazendo a = 9 731 e b = 3 907, temos:

$$\sqrt{a^2+b^2-2.a.b}=\sqrt{a^2-2ab+b^2}\Rightarrow$$
$$\sqrt{(a-b)^2}$$

Como a > b, temos:

$$\sqrt{(a-b)^2}=a-b=$$
$$9\,731-3\,907=5\,824$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Fatorando o termo $x^3 + y^3$, temos:

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Pelo texto, já temos os valores de $(x + y)$ e de $(x^2 + y^2)$, portanto, basta encontrar o valor de xy, que pode ser obtido elevando ao quadrado ambos os membros da equação x + y = 2:

$$(x+y)^2=2^2\Rightarrow x^2+2xy+y^2=4$$

Substituindo o valor de $x^2 + y^2$, temos:

$$3+2xy=4\Rightarrow 2xy=1\Rightarrow xy=\frac{1}{2}$$

Portanto, temos:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)\Rightarrow$$
$$x^3+y^3=2.\left(3-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$
$$x^3+y^3=2.\frac{5}{2}=5$$

Questão 06 – Letra D

Comentário:

$$\left(m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(1+\frac{1}{\sqrt{m}}\right).\left(1-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)=$$

$$\left((\sqrt{m})^2+2.m^{\frac{1}{2}}.m^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2\right)+\left(1^2-\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2\right)=$$

$$m+2+\frac{1}{m}+1-\frac{1}{m}=m+3$$

Questão 07 – Letra A

Comentário: Desenvolvendo a fração algébrica, temos:

$$\frac{x^2-y^2+2x+2y}{x^2-y^2}=\frac{2(x+y)+(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)}$$

Como x + y ≠ 0, podemos cancelar o termo (x + y), logo:

$$\frac{2\cancel{(x+y)}+\cancel{(x+y)}(x-y)}{\cancel{(x+y)}(x-y)}=\frac{2+x-y}{x-y}$$

Agora, substituindo x – y = 4, temos:

$$\frac{2+x-y}{x-y}=\frac{2+4}{4}=\frac{6}{4}=1{,}5$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: Desenvolvendo a expressão, temos:

$$\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-y^2}=\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{(x+y)(x-y)}=$$

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}$$

Como x ≠ y, temos:

$$\frac{(x-y)^{\cancel{2}}}{(x+y)\cancel{(x-y)}}=\frac{x-y}{x+y}$$

Questão 09 – Letra C

Comentário: Vamos agrupar e fatorar os termos da equação:

$a^2 - 2bc - b^2 - c^2 = 40 \Rightarrow a^2 - (b^2 + 2bc + c^2) = 40 \Rightarrow$

$a^2 - (b + c)^2 = 40 \Rightarrow (a - b - c)(a + b + c) = 40$

Por hipótese, a – b – c = 10.

Daí, 10(a + b + c) = 40 ⇒ a + b + c = 4.

Questão 10 – Letra A

Comentário: Desenvolvendo a expressão, temos:

$m^2 - n^2 = 17 \Rightarrow (m + n)(m - n) = 17$

Como 17 é primo, **m** e **n** são naturais e supondo m > n, sem perda de generalidade, devemos ter:

$$\begin{cases} m+n=17 & \text{(I)}\\ m-n=1 & \text{(II)}\end{cases}$$

Fazendo I + II, temos:

2m = 18 ⇒ m = 9 ⇒ n = 8

Dessa forma, m . n = 9 . 8 = 72

Questão 11 – Letra A

Comentário: Desenvolvendo a expressão, temos:

$$\left(\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}\right).\left(\frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}\right)=$$

$$\left(\frac{(x^{-1}-y^{-1})(x^{-1}+y^{-1})}{(x^{-1}+y^{-1})}\right).\left(\frac{xy(x+y)}{(x+y)(x-y)}\right)$$

Como x ≠ y e x ≠ −y, temos:

$$\left(\frac{\left(x^{-1}-y^{-1}\right)\cancel{\left(x^{-1}+y^{-1}\right)}}{\cancel{\left(x^{-1}+y^{-1}\right)}}\right).\left(\frac{xy\cancel{(x+y)}}{\cancel{(x+y)}(x-y)}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right).\left(\frac{xy}{x-y}\right)=\left(\frac{y-x}{\cancel{xy}}\right).\left(\frac{\cancel{xy}}{x-y}\right)=\frac{y-x}{x-y}=$$

$$-\frac{\cancel{x-y}}{\cancel{x-y}}=-1$$

Questão 12 – Letra A

Comentário: Sendo **x** e **y** os números mencionados, temos que (x + y)(x − y) = 21. Como **x** e **y** são naturais, a soma de ambos é maior do que a diferença, e 21 tem 4 divisores naturais, temos que ou a soma é 21 e a diferença 1 ou a soma é 7 e a diferença 3. A solução do primeiro sistema é x = 11 e y = 10, e as somas dos quadrados será 221, o que não convém. Para o segundo sistema, x = 5 e y = 2 e a soma dos quadrados é 29.

Questão 13 – Letra C

Comentário: Simplificando cada expressão separadamente, temos:

$$A=\frac{\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right].x^2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+2\sqrt{xy}}=\frac{\left[1-\frac{y^2}{x^2}\right].x^2}{x+y-\cancel{2\sqrt{xy}}+\cancel{2\sqrt{xy}}}\Rightarrow$$

$$A=\frac{\left[\frac{x^2-y^2}{\cancel{x^2}}\right].\cancel{x^2}}{x+y}=\frac{\cancel{(x+y)}(x-y)}{\cancel{x+y}}=x-y$$

$$B=\frac{x^2-xy}{2x}=\frac{\cancel{x}(x-y)}{2\cancel{x}}\Rightarrow$$

$$B=\frac{x-y}{2}$$

Agora, avaliando as alternativas, temos:

A) $\frac{A}{B}=\frac{\cancel{x-y}}{\frac{\cancel{x-y}}{2}}=2\neq\frac{1}{2}=2^{-1}$

B) $\frac{B}{A}=\frac{\frac{\cancel{x-y}}{2}}{\cancel{x-y}}=\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$

C) $A.B=(x-y).\frac{(x-y)}{2}$

Como y > x > 0, temos que x − y < 0 ⇒ A.B > 0

D) $A+B=x-y+\frac{(x-y)}{2}$

Como y > x > 0 ⇒ x − y < 0 ⇒ A + B < 0

Questão 14 – Letra A

Comentário: Simplificando a expressão, temos:

$$\frac{x^3-1}{x^2-x}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+x}=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x(x-1)}-\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}$$

Como x ≠ 1 e x ≠ −1, temos:

$$\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}{x\cancel{(x-1)}}-\frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x+1)}}=$$

$$\frac{x^2+x+1}{x}-\frac{x+1}{x}=\frac{x^2+\cancel{x}+\cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{1}}{x}=\frac{x^2}{x}$$

Como x ≠ 0, temos:

$$\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=x$$

Questão 15 – Letra C

Comentário:

$$\frac{4x+8}{x^2+3x+2}+\frac{3x-3}{x^2-1}$$

x^2+3x+2 tem raízes x_1 = −1 e x_2 = −2. Assim, fatorando a expressão, temos:

$$\frac{4\cancel{(x+2)}}{(x+1).\cancel{(x+2)}}+\frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}.(x+1)}=\frac{4}{(x+1)}+\frac{3}{(x+1)}=\frac{7}{x+1}$$

Questão 16 – Letra C

Comentário: Lembrando que (a^2 − b^2) = (a + b)(a − b), vamos fatorar o número **N** para encontrar a seguinte representação:

$$N=2^{48}-1=\left(2^{24}\right)^2-1^2\Rightarrow$$

$$N=\left(2^{24}-1\right)\left(2^{24}+1\right)$$

Utilizando o mesmo recurso de fatoração mais algumas vezes, temos:

$$N=\left(2^{12}-1\right)\left(2^{12}+1\right)\left(2^{24}+1\right)\Rightarrow$$

$$N=\left(2^{6}-1\right)\left(2^{6}+1\right)\left(2^{12}+1\right)\left(2^{24}+1\right)\Rightarrow$$

$$N=\left(2^{3}-1\right)\left(2^{3}+1\right)\left(2^{6}+1\right)\left(2^{12}+1\right)\left(2^{24}+1\right)\Rightarrow$$

$$N=7\left(2^{3}+1\right)\left(2^{6}+1\right)\left(2^{12}+1\right)\left(2^{24}+1\right)$$

Portanto, podemos afirmar que o número **N** é um múltiplo de 7.

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: A figura é formada por um quadrado de lado **a**, um quadrado de lado **b** e dois retângulos de dimensões **a** e **b**. Além disso, a soma das áreas dessas figuras é igual à área do quadrado maior, de lado a + b. Temos, então:

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{Área do quadrado maior}}=\underbrace{a^2+2ab+b^2}_{\text{Soma das áreas dos quadrados menores e dos dois retângulos}}$$

Logo, a figura é a representação geométrica do produto notável (a + b)².

MATEMÁTICA

Questão 02 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Fatorando a expressão, obtemos:

$A = 4\ 000(206^2 - 204^2)$

$A = 4\ 000(206 - 204)(206 + 204)$

$A = 4\ 000 . 2 . 410 = 3\ 280\ 000$

MÓDULO – A 06

Potenciação e Radiciação

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário:

$38 . 4^5 . 5^{12} = 38 . (2^2)^5 . 5^{10} . 5^2 = 38 . 2^{10} . 5^{10} . 5^2 = 38 . 10^{10} . 25 = 950 . 10^{10} = 9,5 . 10^{12}$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Desenvolvendo a expressão referente ao valor de **y**, temos:

$$y = \frac{4^{10} . 8^{-3} . 16^{-2}}{32} \Rightarrow y = \frac{\left(2^2\right)^{10} . \left(2^3\right)^{-3} . \left(2^4\right)^{-2}}{2^5} \Rightarrow$$

$$y = \frac{2^{20} . 2^{-9} . 2^{-8}}{2^5} \Rightarrow y = \frac{2^{20-9-8}}{2^5} \Rightarrow y = \frac{2^3}{2^5} \Rightarrow$$

$$y = 2^{3-5} = 2^{-2}$$

Como estamos procurando a metade do valor de **y**, basta dividir o valor encontrado para **y** por 2. Dessa forma, encontramos:

$$\frac{y}{2} = \frac{2^{-2}}{2^1} \Rightarrow \frac{y}{2} = 2^{-2-1} \Rightarrow \frac{y}{2} = 2^{-3}$$

Questão 03 – Letra D

Comentário: Desenvolvendo a expressão numérica, temos:

$$\frac{(1,25)^{-2} + 4 . 5^{-1}}{\left(9 . 9^{-1}\right)^2 - 2\left(-10\right)^{-1}} = \frac{\left(\frac{\cancel{125}}{\cancel{100}}\right)^{-2} + 4.\frac{1}{5}}{\left(\cancel{9}.\frac{1}{\cancel{9}}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{10}\right)} =$$

$$\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} + \frac{4}{5}}{1 + \frac{2}{10}} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}{\frac{12}{10}} = \frac{\frac{16}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{12}{10}} = \frac{\frac{36}{25}}{\frac{12}{10}} = \frac{\cancel{36}}{\cancel{25}}.\frac{\cancel{10}}{\cancel{12}} = \frac{6}{5}$$

Questão 04 – Letra E

Comentário: Desenvolvendo a expressão numérica referente ao valor de **A**, temos:

$$A = \frac{0,001}{1\ 000} + 8^{\frac{2}{3}} + \sqrt{25} \Rightarrow$$

$$A = \frac{10^{-3}}{10^3} + \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} + 5 \Rightarrow$$

$$A = 10^{-3-3} + 2^{\cancel{3}.\frac{2}{\cancel{3}}} + 5 \Rightarrow$$

$$A = 10^{-6} + 4 + 5 = 10^{-6} + 9 \Rightarrow$$

$$A = 0,000001 + 9 = 9,000001$$

Questão 05 – Letra A

Comentário: Analisando as alternativas, temos:

I. Falsa. Se a = –3, então $\sqrt{(-3)^2} = 3$.

II. Falsa. Se a = 2 e b = 3, temos:

$\sqrt{2^2 + 3^2} = 13$ (I)

$2 + 3 = 5$ (II)

Logo, (I) ≠ (II).

III. Verdadeira. Seja $c = \sqrt{a^2} . \sqrt{b^2}$, elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$c^2 = (\sqrt{a^2} . \sqrt{b^2})^2 = (\sqrt{a^2})^2 . (\sqrt{b^2})^2 \Rightarrow$

$c^2 = a^2 . b^2$, logo $c = \sqrt{a^2 . b^2}$

IV. Verdadeira. Raciocínio análogo ao da afirmativa III.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Desenvolvendo a expressão numérica, temos:

$$E = \frac{\left(10^{-2}\right).\left(10^3\right)}{\left(10^{-4}\right)} + \left(8 . 8^{-1}\right) + 10^{-4} \Rightarrow$$

$$E = \frac{10^{-2+3}}{10^{-4}} + 8^{1-1} + 10^{-4} \Rightarrow$$

$$E = 10^{1-(-4)} + 8^0 + 0,0001 \Rightarrow$$

$$E = 10^5 + 1 + 0,0001 \Rightarrow$$

$$E = 100\ 000 + 1 + 0,0001 = 100\ 001,0001$$

Questão 07 – Letra D

Comentário:

$m = \left(2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2}\right) \Rightarrow$

$m = \left(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}\right)\left(6\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{2}\right) \Rightarrow$

$m = \left(3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}\right) \Rightarrow$

$m = 3\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right).2 \Rightarrow$

$m = 6(5 - 2) \Rightarrow m = 18$

Questão 08 – Letra E

Comentário: Racionalizando a expressão dada, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}.\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} =$$

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário:

$$\frac{3^{3-n}+3\,.\,3^{2-n}-9\,.\,3^{1-n}}{9\,.\,3^{2-n}}=\frac{3^3\,.\,3^{-n}+3^3\,.\,3^{-n}-3^3\,.\,3^{-n}}{3^4\,.3^{-n}}=$$

$$\frac{3^{-n}(3^3+3^3-3^3)}{3^4\,.\,3^{-n}}=\frac{3^3}{3^4}=\frac{1}{3}$$

Questão 02

Comentário:

$$\left(\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}.0,66...}+\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^{0}-\frac{1}{1,33...}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{(6^{-1})^{-3}.\frac{6}{9}}+\sqrt{1-\frac{9}{12}}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$\left(\sqrt{\frac{6^4}{9}}+\sqrt{\frac{3}{12}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(12+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{25}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

Questão 03 – Letra E

Comentário:

$$\frac{10^{\frac{n}{2}}(10^{m-1}+10^{m+1})}{10^m\left(10^{\frac{n}{2}}+10^{2+\frac{n}{2}}\right)}=\frac{10^{\frac{n}{2}}\left(\frac{10^m}{10}+10^m\,.\,10\right)}{10^m\left(10^{\frac{n}{2}}+10^2\,.\,10^{\frac{n}{2}}\right)}=$$

$$\frac{10^{\frac{n}{2}}\left(\frac{10^m+10^m\,.\,100}{10}\right)}{10^m\,.\,10^{\frac{n}{2}}(1+100)}=\frac{\frac{10^m\,.\,101}{10}}{10^m\,.\,101}=$$

$$\frac{10^m\,.\,101}{10}.\frac{1}{10^m\,.\,101}=\frac{1}{10}=10^{-1}$$

Questão 04 – Letra E

Comentário: Desenvolvendo a expressão que representa o valor de h^2, temos:

$$h^2=\frac{16}{2-\sqrt{2}}-4\Rightarrow h^2=\frac{16}{2-\sqrt{2}}.\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-4\Rightarrow$$

$$h^2=\frac{16\left(2+\sqrt{2}\right)}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}-4\Rightarrow h^2=\frac{16\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2}-4\Rightarrow$$

$$h^2=\frac{\cancel{16}\left(2+\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}}-4\Rightarrow h^2=16+8\sqrt{2}-4\Rightarrow$$

$$h^2=12+8\sqrt{2}\Rightarrow h^2=4\left(3+2\sqrt{2}\right)\Rightarrow$$

Nesta parte, podemos ver que $4\left(3+2\sqrt{2}\right)$ é positivo, logo:

$$h=\sqrt{4\left(3+2\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)}$$

Questão 05 – Letra D

Comentário: Temos que 1 $km^2 = 10^6\ m^2$, então

$A_Q = 0,4\ km^2 \Rightarrow A_Q = 0,4\ .\ 10^6\ m^2 \Rightarrow A_Q = 4\ .\ 10^5\ m^2 \Rightarrow$

$\ell^2 = 4\ .\ 10^5\ m^2 \Rightarrow \ell = 2.10^2.\sqrt{10}\ m \Rightarrow \ell = 200.\sqrt{10}\ m$

Note que $3 < \sqrt{10} < 3,5$.

Daí, $200\ .\ 3 < \ell < 200\ .\ 3,5$.

Portanto, $600 < \ell < 700$.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Racionalizando cada um dos termos da equação, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}.\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{-1}=\sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}}.\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

O próximo passo é substituir esses valores na equação dada:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-(\sqrt{2}-1)-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}-2(\sqrt{2}-1)-(2-\sqrt{2})}{2}=0$$

Questão 07 – Letra C

Comentário: A expressão dada pode ser representada como a soma de duas expressões **a** e **b**, sendo $a = \left(\sqrt{5}-1\right)^2$ e $b = \frac{20}{5-\sqrt{5}}$. Desenvolvendo estas duas expressões separadamente temos:

$$a=\left(\sqrt{5}-1\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2-2.\sqrt{5}.1+1^2\Rightarrow$$

$$a=5-2\sqrt{5}+1\Rightarrow a=6-2\sqrt{5}$$

$$b=\frac{20}{5-\sqrt{5}}\Rightarrow b=\frac{20}{5-\sqrt{5}}.\frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\Rightarrow$$

$$b=\frac{100+20\sqrt{5}}{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\Rightarrow b=\frac{20\left(5+\sqrt{5}\right)}{25-5}\Rightarrow$$

$$b=\frac{\cancel{20}\left(5+\sqrt{5}\right)}{\cancel{20}}\Rightarrow b=5+\sqrt{5}$$

Dessa forma nossa expressão é dada por:

$$a+b=6-2\sqrt{5}+5+\sqrt{5}=11-\sqrt{5}$$

Questão 08 – Letra E

Comentário: Desenvolvendo a expressão, temos:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{7}}=\frac{4}{\sqrt[3]{7}}.\frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}}=\frac{4\left(\sqrt[3]{49}\right)}{7}$$

Questão 09 – Letra D

Comentário: Desenvolvendo a expressão, encontramos:

$$\left(\sqrt[3]{9}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{24}\right)=$$

$$\frac{\sqrt[3]{27}+1}{\sqrt[3]{3}}\,.\,\left(\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}\right)=\frac{3+1}{\sqrt[3]{3}}\,.\,3\sqrt[3]{3}=\frac{12\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}}=12$$

MATEMÁTICA

Questão 10 – Letra C

Comentário: Se $N = 2^{50} + 4^{20} = 2^{50} + (2^2)^{20} = 2^{50} + 2^{40}$, analisando cada umas das afirmativas, temos:

Alex: Verdadeira. $2^{50} + 2^{40} = 2^3(2^{47} + 2^{37}) = 8(2^{47} + 2^{37})$

Beatriz: Falsa. $\frac{2^{50}+2^{40}}{2} = 2^{49} + 2^{39}$

Camila: Verdadeira. $2^{50} + 2^{40} = 2(2^{49} + 2^{39})$

Portanto, duas das afirmações feitas pelos participantes são verdadeiras.

Questão 11 – Letra B

Comentário: Racionalizando a expressão, temos:

$$\frac{3^{-2}\cdot\sqrt[3]{243}}{\sqrt[6]{81}} = \frac{3^{-2}\cdot\sqrt[3]{3^5}}{\sqrt[6]{3^4}} = \frac{3^{-2}\cdot 3\cancel{\sqrt[3]{3^2}}}{\cancel{\sqrt[3]{3^2}}} =$$

$$3^{-2}\cdot 3 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Questão 12 – Letra B

Comentário: Substituindo a potência de 10 relativa a cada múltiplo e submúltiplo da expressão, temos:

$$\frac{(0{,}13\ \text{Mb})\cdot(0{,}5\ \text{nb})}{2{,}5\ \text{kb}} = \frac{(0{,}13\cdot 10^6\ \text{b})\cdot(0{,}5\cdot 10^{-9}\ \text{b})}{2{,}5\cdot 10^3\ \text{b}} =$$

$$\frac{0{,}065\cdot 10^{6-9}\ \text{b}^{\cancel{2}}}{2{,}5\cdot 10^3\ \cancel{\text{b}}} = \frac{0{,}065\cdot 10^{-3}\ \text{b}}{2{,}5\cdot 10^3} = \frac{0{,}065}{2{,}5}\cdot 10^{-3-3}\ \text{b} =$$

$$0{,}026\cdot 10^{-6}\ \text{b}$$

Agora, pela tabela, sabemos que $10^{-6} = \mu$, portanto, a expressão é dada por $0{,}026\ \mu\text{b}$.

Questão 13 – Letra B

Comentário: $5^{17}\cdot 4^9 = 5^{17}\cdot 2^{18} = (5\cdot 2)^{17}\cdot 2 = 2\cdot 10^{17}$, que tem dezessete algarismos 0 e um algarismo 2, com um total de dezoito algarismos.

Questão 14 – Letra B

Comentário:

$$A.B.C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{1}{6}}} = x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{6}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{6}} \Rightarrow$$

$$A.B.C = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}\cdot y^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = x^{\frac{3-2+1}{6}}\cdot y^{\frac{-3+4-1}{6}} = x^{\frac{1}{3}}\cdot y^0 = \sqrt[3]{x}$$

Questão 15 – Letra A

Comentário: Simplificando a expressão dada, temos:

$$\sqrt[n]{\frac{72}{9^{2-n}-3^{2-2n}}} = \sqrt[n]{\frac{72}{\frac{9^2}{9^n}-\frac{3^2}{3^{2n}}}} = \sqrt[n]{\frac{72}{\frac{81}{9^n}-\frac{9}{9^n}}} =$$

$$\sqrt[n]{\frac{72}{\frac{81-9}{9^n}}} = \sqrt[n]{\frac{\cancel{72}}{\frac{\cancel{72}}{9^n}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{9^n}}} = \sqrt[n]{9^n}$$

Como $\frac{1}{9} < 0$, podemos fazer:

$$\sqrt[n]{9^n} = \sqrt[\cancel{n}]{9^{\cancel{n}}} = 9$$

Questão 16 – Letra E

Comentário: A expressão dada pode ser representada pela diferença de duas expressões **x** e **y**, em que $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ e $y = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$. Desenvolvendo cada uma delas separadamente, temos:

$$x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

$$y = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2-1} = \left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

Sabendo disso, a expressão procurada é dada por:

$$x - y = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \Rightarrow$$

$$x - y = \cancel{\left(\sqrt{2}\right)^2} - 2\sqrt{2}\cancel{+1} - \left(\cancel{\left(\sqrt{2}\right)^2} + 2\sqrt{2}\cancel{+1}\right) \Rightarrow$$

$$x - y = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$$

Questão 17 – Letra A

Comentário: Como $\sqrt[3]{y^2} = 2\,015^4$, temos:

$$(\sqrt[3]{y^2})^3 = (2\,015^4)^3 \Rightarrow$$

$$y^2 = 2\,015^{12} \Rightarrow \sqrt{y} = 2\,015^3$$

Agora, como $z^3 = 2\,015^6$, temos:

$$z^3 = 2\,015^6 \Rightarrow \sqrt[3]{z^3} = \sqrt[3]{(2\,015^2)^3} \Rightarrow$$

$$z = 2\,015^2 \Rightarrow \sqrt{z} = 2\,015$$

Desenvolvendo a expressão numérica, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{x\cdot y\cdot z}} = \frac{1}{\sqrt{x}\ \sqrt{y}\ \sqrt{z}} = \frac{1}{2\,015^3\cdot 2\,015^3\cdot 2\,015} =$$

$$\frac{1}{2\,015^7} = 2\,015^{-7}$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 1

Habilidade: 1

Comentário: Um número em notação científica tem a forma $N\cdot 10^x$, com $1 < N < 10$. Portanto,

$$43{,}18 = \frac{43{,}18}{10}\cdot 10 = 4{,}318\cdot 10^1.$$

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 4

Habilidade: 17

Comentário: Como no período da infância até a maioridade o indivíduo teve sua massa multiplicada por 8, podemos associar os valores da seguinte maneira:

$$A_{Adulto} = k.(8m)^{\frac{2}{3}} = k.(8)^{\frac{2}{3}}(m)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8^2})\ k.(m)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$A_{Adulto} = 4.\underbrace{k.(m)^{\frac{2}{3}}}_{A_{Infância}} \Rightarrow A_{Adulto} = 4.A_{Infância}$$

Portanto, a área corporal do indivíduo foi multiplicada por 4.

Questão 03 – Letra A

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 4

Habilidade: 17

Comentário: De acordo com a tabela, a classe espectral B0 tem uma temperatura em torno de 5 vezes maior que a do Sol. Assim, a luminosidade é $2 . 10^4$, ou seja, 20 000 vezes a luminosidade do Sol.

Questão 04 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 3

Habilidade: 12

Comentário: 10 litros de óleo são suficientes para contaminar 10^7 litros de água potável; isto é, 1 litro de óleo para cada 10^6 litros de água. Então, o total de água contaminada por 1 000 L de óleo será $1\ 000.10^6 = 10^9$ L.

Questão 05 – Letra C

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 4

Habilidade: 17

Comentário: Se cada folha possui 0,1 mm de espessura e há uma pilha de 1 m de altura, temos então 10 000 folhas, pois $\frac{1\ m}{0{,}1\ mm} = \frac{1\ 000\ mm}{0{,}1\ mm} = 10\ 000$. Como, em cada folha, há 10 títulos, temos, no total, 100 000 títulos, o que corresponde a 10^5.

Questão 06 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário:

$$\frac{500\ 000}{200\ .\ 10^9} = \frac{5\ .\ 10^5}{2\ .\ 10^{11}} = 2{,}5\ .\ 10^{-6}$$

MÓDULO – A 07

Equações e Problemas

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra B

Comentário: Dados 3 números consecutivos, tome **x** como o número que está na posição intermediaria, ou seja, os números são: x – 1, x, x + 1.

Como a soma deles vale 36, temos:

$x - 1 + x + x + 1 = 36 \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12$

Logo, os três números são 11, 12 e 13.

Portanto, a soma do dobro do menor número e o quadrado do maior é dada por:

$2\ .\ 11 + 13^2 = 22 + 169 = 191$

Questão 02 – Letra C

Comentário: Seja **m** a quantidade de meninas e **h** a quantidade de meninos, temos:

$m + h = 40 \Rightarrow 2m + 2h = 80 \Rightarrow 2m = 80 - 2h$ (I)

$2m = 3h + 5$ (II)

Substituindo I em II, temos:

$80 - 2h = 3h + 5$

$5h = 75 \Rightarrow h = 15 \Rightarrow m = 40 - 15 = 25$

Portanto, o número de meninas supera o número de meninos em 10 unidades.

Questão 03

Comentário: Se o tanque tem capacidade de **x** litros, ele tinha $\frac{x}{4}$ litros e $\frac{5x}{8}$ litros antes e depois da adição, respectivamente. A diferença entre essas quantidades nos dará justamente a quantidade de combustível colocada, 24 litros. Assim:

$$\frac{5x}{8} - \frac{x}{4} = 24 \Rightarrow \frac{3x}{8} = 24 \Rightarrow x = 64 \text{ litros}$$

Questão 04 – Letra A

Comentário: Seja **M** o total de morangos, temos que a distribuição foi feita da seguinte forma:

1ª Pessoa: $\frac{2}{5}.M + 6$

2ª Pessoa: $\frac{1}{4}.M + 5$

3ª Pessoa: 10

Agora, somando a quantidade de morangos recebida por cada pessoa, devemos obter o total **M** de morangos, ou seja:

$$\frac{2}{5}.M + 6 + \frac{1}{4}.M + 5 + 10 = M \Rightarrow$$
$$\frac{8M + 120 + 5M + 100 + 200}{20} = M \Rightarrow$$
$$8M + 120 + 5M + 300 = 20M \Rightarrow$$
$$7M = 420 \Rightarrow M = 60$$

Questão 05 – Letra A

Comentário: Como no texto é dito que existem 10 cabeças, e que cada animal possui apenas uma cabeça, ao todo temos 10 animais. Seja **x** a quantidade de baratas e **y** a quantidade de aranhas nesse laboratório, temos, de acordo com as informações do texto, o seguinte sistema:

$x + y = 10$ (I)

$6.x + 8.y = 76$ (II)

Fazendo 6.I e reescrevendo II, temos:

$6x + 6y = 60 \quad (I)$

$6x + 6y + 2y = 76 \quad (II)$

Agora, substituindo I em II, temos:

$60 + 2y = 76 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8$

Questão 06 – Letra B

Comentário: Seja P_g a quantidade de potes grandes e P_m a quantidade de potes menores, podemos interpretar as informações do texto através do seguinte sistema:

$$\begin{cases} P_g + P_m = 62 & (I) \\ 3.P_g + 2,5.P_m = 171 & (II) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_g = 62 - P_m & (I) \\ 3.P_g + 2,5.P_m = 171 & (II) \end{cases}$$

Dessa forma, substituindo I em II, temos:

$$3(62 - P_m) + 2,5.P_m = 171 \Rightarrow$$

$$186 - 3.P_m + 2,5.P_m = 171 \Rightarrow$$

$$-0,5.P_m = -15 \Rightarrow$$

$$P_m = 30$$

Logo, foram vendidos 30 potes menores.

Questão 07 – Letra C

Comentário: Seja **x** a quantidade de chocolates e **y** a quantidade de pacotes de pipocas, podemos tirar as informações do texto e formar o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 & (I) \\ 3x + 2y = 13 & (II) \end{cases}$$

Fazendo 3.I – 2.II, temos:

$5y = 7 \Rightarrow y = 1,4$

Logo, um pacote de pipocas custa R$ 1,40.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Sendo $S = -\dfrac{b}{a}$ a soma das raízes da equação

$$\underbrace{(4m + 3n)}_{a}x^2 - \underbrace{5n}_{b}x + \underbrace{(m - 2)}_{c} = 0, \text{temos:}$$

$$\frac{5}{8} = -\frac{\overbrace{-5n}^{b}}{\underbrace{4m + 3n}_{a}} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{5n}{4m + 3n} \Rightarrow$$

$$4m + 3n = 8n \Rightarrow m = \frac{5}{4}n \text{ (I)}$$

Sendo $P = \dfrac{c}{a}$ o produto dessas raízes, temos:

$$\frac{3}{32} = \frac{\overbrace{m - 2}^{c}}{\underbrace{4m + 3n}_{a}} \Rightarrow 3(4m + 3n) = 32(m - 2) \Rightarrow$$

$12m + 9n = 32m - 64 \Rightarrow 20m = 9n + 64$ (II)

Substituindo I em II, temos:

$$20.\underbrace{\frac{5}{4}n}_{m} = 9n + 64 \Rightarrow 25n - 9n = 64 \Rightarrow n = 4$$

Logo, $m = \dfrac{5}{4} . 4 \Rightarrow m = 5$.

Portanto, $m + n = 5 + 4 = 9$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra D

Comentário: Chamando de **n** o número de amigos e de **x** o valor da conta, no primeiro caso, são arrecadados 13n, o que equivale à soma o valor da conta menos 24 reais; no segundo caso, são arrecadados 16n, o que equivale ao valor da conta mais 12 reais. Assim:

$13n = x - 24$ (I)

$16n = x + 12$ (II)

(II) – (I): $3n = 36 \Rightarrow n = 12$

Portanto, são 12 amigos.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Seja **V** o volume total da caixa-d'água, temos que:

$$\frac{V}{3} - 80 = \frac{V}{4} \Rightarrow 4V - 12 . 80 = 3V \Rightarrow$$

$$V = 960$$

Como no instante pedido, a caixa-d'água está com apenas $\dfrac{1}{4}$ do seu volume total, falta preencher $\dfrac{3}{4}$ de seu volume total, ou seja:

$$\frac{3}{4}V = \frac{3}{4}.960 = 720 \text{ litros.}$$

Questão 03 – Letra C

Comentário: Seja **x** o número de lontras, **y** o número de ouriços e **z** o número de lagostas, temos:

$x + y + z = 340\,000$ (I)

$x = 3y$ (II)

$z = x + y + 20\,000$ (III)

A equação III pode ser escrita como $x + y = z - 20\,000$, e, substituindo este valor de $x + y$ em I, temos:

$z - 20\,000 + z = 340\,000 \Rightarrow 2z = 360\,000 \Rightarrow$

$z = 180\,000$

Agora, substituindo este valor em I, temos:

$x + y + 180\,000 = 340\,000 \Rightarrow$

$x + y = 160\,000$ (IV)

Substituindo II me IV, temos:

$3y + y = 160\,000 \Rightarrow 4y = 160\,000 \Rightarrow y = 40\,000$

Logo, o número de ouriços dessa região é de 40 mil.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Seja **T** o total de máscaras distribuídas nesses 4 dias, temos a seguinte distribuição de máscaras por dia:

1º - Foram distribuídas: $\dfrac{1}{8}.T$

2º - Foram distribuídas: $\dfrac{1}{6}.T$

3º - Foram distribuídas: $2\left(\dfrac{1}{8}.T + \dfrac{1}{6}.T\right)$

4º - Foram distribuídas: 105

Agora, se somarmos a quantidade de máscaras distribuídas em cada dia teremos o total de máscaras, ou seja:

$$\frac{1}{8}.T + \frac{1}{6}.T + 2\left(\frac{1}{8}.T + \frac{1}{6}.T\right) + 105 = T \Rightarrow$$
$$\frac{3T + 4T + 6T + 8T + 105 \,.\, 24}{24} = T \Rightarrow$$
$$21T + 2\,520 = 24T \Rightarrow$$
$$3T = 2\,520 \Rightarrow$$
$$T = \frac{2\,520}{3} = 840$$

Questão 05

Comentário:

A) Seja **x** o preço do sanduíche e **y** o preço do suco, podemos utilizar as informações do texto para montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 50x + 75y = 300 \ \ (\text{I}) \\ 65x + 55y = 305 \ \ (\text{II}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 13x + 11y = 61 \end{cases}$$

B) Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \quad (\text{I}) \\ 13x + 11y = 61 \ \ (\text{II}) \end{cases}$$

Fazendo 13.I – 2.II, temos:

$17y = 156 - 122 \Rightarrow 17y = 34 \Rightarrow y = 2$

$2x + 3 \,.\, 2 = 12 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Questão 06 – Letra B

Comentário: Reescrevendo a equação dada na forma $a(x - x')(x - x'')$, em que x' e x'' são as raízes da equação, temos:

$3(x - 4)(x + 3) = 3(x^2 + 3x - 4x - 12) = 0 \Rightarrow$

$3x^2 - 3x - 36 = 3x^2 + ax + d \Rightarrow$

$a = -3$ e $d = -36$

Dessa forma, temos:

$a + d = -3 - 36 = -39$

$a \,.\, d = (-3)(-36) = 108$

Questão 07 – Letra C

Comentário: Sendo **x** o número de homens, 40 – x será o número de mulheres.

O gasto de cada homem será $\frac{2\,400}{x}$ e o gasto de cada mulher será de $\frac{2\,400}{40 - x}$, de acordo com os dados do enunciado.

Sabendo que o gasto de cada mulher foi 64 reais a menos que o gasto de cada homem, temos:

$$\frac{2\,400}{40 - x} = \frac{2\,400}{x} - 64 \Rightarrow$$
$$\frac{2\,400}{40 - x} = \frac{2\,400 - 64x}{x} \Rightarrow$$
$$2\,400x = (40 - x)(2\,400 - 64x)$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: Perceba que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ não está contido, de imediato, em nenhuma relação de soma ou produto entre as raízes. Porém, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2}$, o que acarreta uma razão da soma das raízes sobre o produto das raízes.

Logo: $\dfrac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \dfrac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{-b}{c} = \dfrac{-57}{-228} = \dfrac{1}{4}$

Questão 09 – Letra B

Comentário: Seja **C** a mesada de Carlos e **A** a mesada de Artur, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}C = \frac{3}{5}A + 8 \\ C + A = 810 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10C = 9A + 120 \\ C + A = 810 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 10C = 9A + 120 \ \ (\text{I}) \\ C = 810 - A \quad (\text{II}) \end{cases}$$

Portanto, substituindo II em I, temos:

$10(810 - A) = 9A + 120 \Rightarrow$

$8\,100 - 10A = 9A + 120 \Rightarrow$

$19A = 7\,980 \Rightarrow A = 420 \Rightarrow C = 390$

Portanto, o valor monetário da diferença entre as mesadas é dado por 420 – 390 = R$ 30,00.

Questão 10 – Letra A

Comentário: Seja V_p e V_c os valores dos ingressos de pista e camarote, respectivamente, antes do dia do *show*, temos:

$300.V_p + 200.V_c = 22\,000$ (I)

Como o preço dos ingressos antes do *show* valiam metade do preço destes ingressos no dia do *show*, temos:

$100(2V_p) + 200(2V_c) = 28\,000$ (II)

Portanto, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3\cancel{00}.V_p + 2\cancel{00}.V_c = 22\,0\cancel{00} \quad (\text{I}) \\ 1\cancel{00}\left(\cancel{2}V_p\right) + 2\cancel{00}\left(\cancel{2}V_c\right) = \cancel{28}\,0\,\cancel{00} \ \ (\text{II}) \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 3.V_p + 2.V_c = 220 \ \ (\text{I}) \\ V_p + 2V_c = 140 \quad (\text{II}) \end{cases}$$

Fazendo I – II, temos:

$2V_p = 80 \Rightarrow V_p = 40$

Portanto, o ingresso de pista foi vendido antes do *show* por R$ 40,00.

Questão 11 – Letra B

Comentário: Sejam **a** e **b** os números de tapetes redondos e de tapetes retangulares, respectivamente. Marlene confeccionou 60 tapetes; o tapete redondo custa R$ 10,00, e o tapete retangular custa R$ 12,00. O lucro líquido foi de R$ 500,00, e o custo de produção foi de R$ 160,00, ou seja, o total arrecadado na venda foi R$ 660,00. Assim, montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} a + b = 60 \\ 10a + 12b = 660 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a + 10b = 600 \\ 10a + 12b = 660 \end{cases} \Rightarrow a = 30 \text{ e } b = 30$$

Portanto, Marlene confeccionou nesse mês 30 tapetes redondos e 30 tapetes retangulares.

Questão 12 – Letra A

Comentário: Pelas relações de Girard de soma e multiplicação de raízes em equações de segundo grau, temos que $-p = 2 + 3 \Rightarrow p = -5$, $q = 2 \,.\, 3 = 6$, $r = -1$ e $s = -6$. As soluções de $x^2 - 5x - 6 = 0$ são 6 e –1.

MATEMÁTICA

Questão 13 – Letra C

Comentário: Chamando de **x** o custo por quilômetro do transporte ferroviário, o custo por quilômetro do transporte rodoviário será 2x e o do transporte marítimo, (x – 100). O custo total será a soma dos custos de cada meio de transporte, que são dados pelos produtos entre o custo por quilômetro e a distância percorrida pelo meio de transporte. Assim:

$700\,000 = 2\,000(x - 100) + 200x + 25 \,.\, 2x \Rightarrow$

$900\,000 = 2\,250x \Rightarrow x = 400$

Assim, o custo por quilômetro do transporte marítimo é de 300 reais.

Questão 14 – Letra B

Comentário: Sendo **P** e **n** o preço e a quantidade de perfumes vendidos em dezembro, respectivamente, temos que $P.n = 900 \Rightarrow n = \frac{900}{P}$ (I). Em janeiro, o preço será (P – 10), e a quantidade vendida, (n + 5). Assim, (P – 10)(n + 5) = 1 000 (II). Resolvendo o sistema de duas equações e duas variáveis, substituindo I em II, temos:

$$(P-10)\left(\frac{900}{P}+5\right)=1\,000 \Rightarrow\ 5P-\frac{9\,000}{P}-150=0 \Rightarrow$$

$$5P^2-150P-9\,000=0 \Rightarrow$$

$$P^2-30P-1\,800=0 \Rightarrow \begin{cases} P=60 \\ P=-30 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$P = R\$\ 60,00$$

Questão 15

Comentário: Seja **c** o custo do quilograma de madeira. Logo, o custo do quilograma de aço é $\frac{c}{3}$. Sejam respectivamente $\mathbf{m_a}$ e $\mathbf{m_m}$ as quantidades de quilogramas de aço e de madeira compradas. Os valores gastos na compra do aço e da madeira serão, respectivamente, $\frac{c}{3}.m_a$. Como esses valores devem ser iguais, deve-se ter $\frac{c}{3}.m_a = c.m_m \Rightarrow \frac{m_a}{3} = m_m$. Além disso, $m_a + m_m = 32$ kg. Substituindo $\mathbf{m_m}$ nessa equação, temos: $m_a + \frac{m_a}{3} = 32 \Rightarrow \frac{4m_a}{3} = 32 \Rightarrow m_a = 24$ kg.

Questão 16 – Letra D

Comentário: Sendo **A** e **B** os pesos em mg de um comprimido **A** e de um comprimido **B,** respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 10A = 15B \\ 9A + B + 40 = 14B + A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2A = 3B \Rightarrow\ A = 1,5B \\ 8A + 40 = 8\,.\,1,5B + 40 = 12B + 40 = 13B \end{cases} \Rightarrow$$

$$B = 40 \Rightarrow\ A = 60$$

Portanto, A = B + 20.

Questão 17 – Letra D

Comentário: Seja **m** o número de mulheres presentes nessa festa e **h** o de homens, podemos retirar as seguintes informações do texto:

$h + m = n \quad$ (I)

$\frac{h}{m-31} = \frac{2}{1} \quad$ (II)

$\frac{h-55}{m-31} = \frac{1}{3} \quad$ (III)

Desenvolvendo II e III, temos:

$3(2m - 62) - 165 = m - 31 \Rightarrow 6m - 186 - 165 = m - 31 \Rightarrow$
$5m = 320 \Rightarrow m = 64 \Rightarrow h = 2\,.\,64 - 62 = 66 \Rightarrow$
$n = 66 + 64 = 130$

Questão 18 – Letra E

Comentário: Sejam **A** a quantidade de bolas amarelas e **V** a quantidade de bolas verdes. No primeiro caso, sobrarão (V – 1) bolas verdes e um total de (A + V – 1) bolas; no segundo caso, sobrarão (A – 9) bolas amarelas, e um total de (A + V – 9) bolas. Assim:

$$(V-1) = \frac{A+V-1}{5} \Rightarrow 5V-5 = A+V-1 \Rightarrow 4V - A = 4 \text{ (I)}$$

$$V = \frac{A+V-9}{4} \Rightarrow 4V = A+V-9 \Rightarrow A-3V = 9 \text{ (II)}$$

$$V = 13\ \ (I)+(II)$$

Substituindo o valor de **V** em (I): $4\,.\,13 - A = 4 \Rightarrow A = 48$
Logo, A + v = 61.

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Considere o número de alunos do colégio distribuídos da seguinte maneira:

- Alunos que não foram à festa: 80
- Alunos que compraram 1 bilhete (somente): x
- Alunos que compraram 2 bilhetes (exatamente): 45
- Alunos que compraram exatamente 3 bilhetes: y

Total de alunos: x + y + 125

Conforme o texto, tem-se:

$$x = 20\%\text{ de } \underbrace{(x + 2\,.\,45 + 3y)}_{\text{total de bilhetes vendidos}} = \frac{1}{5}(x+3y+90) \Rightarrow 5x = x+3y+90 \Rightarrow$$

$4x - 3y = 90$ (I)

$$x + 2\,.\,45 + 3y = \underbrace{x + y + 125}_{\text{total de alunos}} + 33 \Rightarrow x + 90\,.\,3y = x + y + 158 \Rightarrow$$

$2y = 68 \Rightarrow y = 34$ (II)

Por (I) e (II):

$4x - 3y = 90 \Rightarrow 40 - 3\,.\,34 = 90 \Rightarrow$

$4x = 90 + 102 = 192 \Rightarrow x = 48$ alunos.

Questão 02 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Pelo enunciado, pode-se obter a equação a seguir:

$$\frac{2}{\cancel{3}} \cdot 18{,}00 + \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 14{,}70 = \frac{2}{\cancel{3}}x + \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 15{,}30 \Rightarrow$$

$$36 + 14{,}70 = 2x + 15{,}30 \Rightarrow$$

$$2x = 35{,}40 \Rightarrow$$

$$x = 17{,}70$$

Portanto, a redução no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de R$ 0,30.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Considerando ℓ e **g** as quantidades de latinhas e garrafas do primeiro grupo, temos que ℓ e 3g serão as quantidades de latinhas e garrafas do segundo grupo. Assim, os cupons recebidos por grupo foram tais que:

$$\begin{cases} \dfrac{\ell}{5} + \dfrac{g}{3} = 10 \\ \dfrac{\ell}{5} + 3.\dfrac{g}{3} = 20 \end{cases} \Rightarrow \frac{2g}{3} = 10 \Rightarrow g = 15 \Rightarrow \ell = 25$$

Portanto, o segundo grupo trocou 3 . 15 = 45 garrafas e 25 latinhas.

Questão 04 – Letra A

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 4

Habilidade: 15

Comentário: Para que a arrecadação seja R$ 300,00, devemos ter:

$(400 - 100p)p = 300$

$-100p^2 + 400p - 300 = 0$

$p^2 - 4p + 3 = 0$,

cujas soluções são p = 1 ou p = 3.

Para que a quantidade vendida seja máxima, **p** deve ser 1.

Logo, R$ 0,50 ≤ p ≤ R$ 1,50.

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 3

Habilidade: 12

Comentário: Pela "Fórmula de Young", tem-se:

1ª dose: $14 = \frac{I}{I+12}.42$, em que **I** é a idade da criança.

$$\frac{\cancel{14}^{1}}{\cancel{42}_{3}} = \frac{I}{I+12} \Rightarrow \begin{matrix} 3I = I + 12 \\ I = 6 \end{matrix}$$

Logo, a idade é 6 anos.

$$\frac{6}{6+12}.60 = \frac{6}{18}.60 = 20 \text{ mg}$$

A dosagem para a criança será de 20 mg.

Questão 06 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Preço unitário: 10,00

Quantidade comprada: n

Quantia levada para gastar nas compras: 10n + 6

Novo valor unitário:

10 + 20% . 10 = 10 + 2 = 12

Quantidade comprada no novo valor:

n – 2

Pelos dados apresentados, temos:

10n + 6 = 12 . (n – 2)

30 = 2n

n = 15

Quantia levada: 10 . 15 + 6 = R$ 156,00

Questão 07 – Letra A

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 6

Habilidade: 22

Comentário: A área **S** pode ser dada por S = N.A, em que **N** é o número de placas e **A** a área de cada uma. Inicialmente, $S = N.y^2$ e, após a alteração, $S = X.(3y)^2 = 9Xy^2$. Igualando as duas expressões, encontramos $X = \frac{N}{9}$.

Questão 08 – Letra B

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 6

Habilidade: 22

Comentário: O tempo total **Y** é a soma dos tempos em luz verde (X), amarela (5 segundos) e vermelha (que chamaremos de V), ou seja, Y = X + V + 5. Pelo enunciado, sabemos que $X = \frac{2V}{3} \Rightarrow V = \frac{3X}{2}$. Assim, $Y = \frac{5X}{2} + 5 \Rightarrow$ 5X – 2Y + 10 = 0.

Questão 09 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Como o ambiente tem 4 m x 5 m = 20 m², para as duas pessoas iniciais a capacidade mínima será de 600.20 = 12 000 BTU/h. Como há duas pessoas adicionais e um aparelho eletrônico no ambiente, a capacidade mínima total será de 12 000 + 2.600 + 600 = 13 800 BTU/h.

Questão 10 – Letra B

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 5

Habilidade: 19

Comentário: Sendo **m** o número de moedas de R$ 1,00 que se consegue produzir com R$ 1 000,00 e **c** o número de cédulas de R$ 1,00 que se conseguiria produzir com os mesmos R$ 1 000,00, com **m** e **c** valores inteiros, temos:

m = $\frac{\text{R\$ 1 000,00}}{\text{R\$ 0,26}}$ = 3 846 moedas e sobram R$ 0,04; e

c = $\frac{\text{R\$ 1 000,00}}{\text{R\$ 0,17}}$ = 5 882 cédulas e sobram R$ 0,06.

A diferença c – m é a quantidade de cédulas a mais que o Banco Central conseguiria produzir com R$ 1 000,00:

c – m = 2 036

Questão 11 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Sabemos que, para a compra dos selos de 500 folhetos do segundo tipo, serão gastos R$ 725,00.

500.(0,65 + 0,60 + 0,20) = 725,00.

O restante do dinheiro será gasto apenas na compra de selos de R$ 0,65.

$$\frac{1\,000{,}00 - 725{,}00}{0{,}65} = \frac{275{,}00}{0{,}65} = 423 \text{ selos e sobram R\$ } 0{,}05$$

Assim, para saber quantos selos de R$ 0,65 foram comprados, temos de somar a quantidade desses selos comprados tanto para o primeiro tipo de folheto (423 selos) quanto para o segundo tipo de folheto (500):

500 + 423 = 923

Portanto, foram comprados 923 selos de R$ 0,65.

Questão 12 – Letra D

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 6

Habilidade: 22

Comentário: Sendo **x** a distância alcançada no primeiro salto, em metros, temos:

Salto	Alcance (m)
1º	x
2º	x – 1,2
3º	(x – 1,2) – 1,5

Para atingir a meta de 17,4 m, temos:

$x + (x - 1{,}2) + (x - 1{,}2 - 1{,}5) = 17{,}4 \Rightarrow 3x - 3{,}9 = 17{,}4 \Rightarrow$
$3x = 21{,}3 \Rightarrow x = 7{,}1$

Portanto, o alcance do primeiro salto precisa ser de 7,1 m.

Questão 13 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Vamos calcular quanto João gastaria em cada pacote:

Pacote 1: 40.7 = 280 reais

Pacote 2: 80 + 10.7 = 150 reais

Pacote 3: 60 + 15(7 – 4) = 105 reais

Agora, vamos calcular o gasto de Maria:

Pacote 1: 40.4 = 160 reais

Pacote 2: 80 + 10.4 = 120 reais

Pacote 3: 60 + 15(4 – 4) = 60 reais

Então, o pacote 3 é melhor para os dois.

MÓDULO – A 08

Função

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário:

A) Falso. Para $x = 2 \in A$, temos $2x = 2.2 = 4 \notin B$.
Portanto, f: $x \to 2x$ não é uma função de **A** em **B**.

B) Falso. Para $x = 2 \in A$, temos $x + 1 = 2 + 1 = 3 \notin B$.
Portanto, f: $x \to x + 1$ não é uma função de **A** em **B**.

C) Verdadeiro, pois cada elemento de **A** tem uma única imagem em **B** (f(1) = f(2) = 0) e, por definição de função, não é necessário que todos os elementos do contradomínio sejam imagem de algum elemento do domínio.

D) Falso. Para $x = 0 \in B$, temos $x^2 - x = 0^2 - 0 = 0 \notin A$.
Portanto, f: $x \to x^2 - x$ não é uma função de **B** em **A**.

E) Falso. Para $x = 0 \in B$, temos $0 - 1 = -1 \notin A$.
Portanto, f: $x \to x - 1$ não é uma função de **B** em **A**.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Substituindo **x** por 5 na expressão, temos:

$$f(5) = \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4+5}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{\cancel{3}}{\cancel{9}}}} \Rightarrow$$

$$f(5) = \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1}{3}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{\cfrac{10}{3}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{6}{10}} \Rightarrow$$

$$f(5) = \cfrac{1}{\cfrac{26}{10}} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

Questão 03 – Letra A

Comentário: O conjunto imagem dessa função é o intervalo de valores de **y** que ela pode assumir. Pelo gráfico, vemos que o menor valor para **y** é 107,1 e o maior 118. Portanto, Im{f} = [107,1; 118]

Questão 04 – Letra A

Comentário: Temos que a norma **G** é diretamente proporcional a **m** e inversamente proporcional ao quadrado de **d**, ou seja, $G = \frac{k.m}{d^2}$, em que k > 0.

Como G = f(d), podemos descrever a função da seguinte maneira: $f(d) = \frac{k.m}{d^2}$.

Dessa forma, $f(2d) = \frac{k.m}{(2d)^2} \Rightarrow f(2d) = \frac{k.m}{4d^2}$.

Então, $f(2d) = \frac{f(d)}{4}$.

Questão 05 – Letra C

Comentário: Para encontrar o conjunto solução da inequação f(x).g(x) < 0, devemos analisar os seguintes intervalos:

- Para −4 ≤ x < −1, temos: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x).g(x) < 0$
- Para −1 < x < 0, temos: $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x).g(x) > 0$
- Para 0 < x < 3, temos: $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x).g(x) < 0$
- Para 3 < x ≤ 5, temos: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x).g(x) > 0$

Dessa forma, S = {x ∈ ℝ | −4 ≤ x < −1 ou 0 < x <3}.

Questão 06 – Letra B

Comentário: Pelo gráfico, podemos tirar as seguintes informações:

f(5) = 2 = g(5), portanto, h(5) = f(5).g(5) = 2 . 2 = 4.

Questão 07

Comentário: A função f(x) = $\sqrt{g(x)}$ está definida para todo **x** tal que g(x) ≥ 0. Do gráfico de **g**, temos que g(x) ≥ 0 quando −2 ≤ x ≤ 2.

Questão 08 – Letra A

Comentário: f(5x) = 5.f(x)

- Fazendo x = 5 ⇒ f(25) = 5.f(5) ⇒ 75 = 5.f(5) ⇒ f(5) = 15
- Fazendo x = 1 ⇒ f(5) = 5.f(1) ⇒ 15 = 5.f(1) ⇒ f(1) = 3

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: Avaliando a variação em cada intervalo, temos:

Nos primeiros 10 dias: 500 – 300 = 200

Entre o dia 10 e o dia 15: 200 – 500 = −300

Entre o dia 15 e o dia 20: 200 – 200 = 0

Entre o dia 20 e o dia 25: 300 – 200 = 100

Nos últimos 5 dias: 100 − 300 = −200

Avaliando o módulo das variações, temos que a maior ocorreu entre o dia 10 e o dia 15.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Com a introdução do peixe carnívoro, houve a redução da população de peixes de pequeno porte. Como estes se alimentam de fitoplâncton, a população de fitoplâncton tende a crescer, o que é representado por **W**.

Questão 03 – Letra C

Comentário: O gráfico de **h** está acima do gráfico de **f** quando x < b. Para x > b, ocorre f(x) > h(x). Por isso, a alternativa C está incorreta.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Analisando as alternativas, temos:

A) Falsa. Quando **x** assume valores cada vez maiores, g(x) assume valores cada vez menores.

B) Verdadeira.

C) Falsa. Quando **x** assume valores cada vez menores, f(x) assume valores cada vez mais próximos de −2.

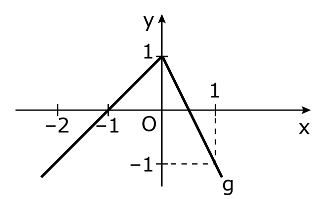
D) Falsa. Quando **x** assume valores cada vez menores, f(x) assume valores cada vez mais próximos de −2.

Questão 05 – Letra A

Comentário: A função descrita no enunciado tem três trechos contínuos e constantes, o que é representado pela alternativa A.

Questão 06 – Letra A

Comentário: Como foi dado o gráfico da função f(x), então o gráfico da função g(x) = f(x − 1) será o gráfico de f(x) deslocado uma unidade para a direita no eixo das abscissas.
Assim, o gráfico da função g(x) = f(x − 1) é:



Questão 07 – Letra B

Comentário: Para que h(x) assuma valores negativos, devemos ter f(x)>0 e g(x)<0 ou f(x)<0 e g(x)>0.

Logo, h(x)<0 nos intervalos]-∞, -3[U]-1, 6[ ]8, +∞[.

Questão 08 – Letra D

Comentário: Analisando cada uma das alternativas, temos:

A) Falsa. No intervalo [a, 0] **f** é crescente e decrescente.

B) Falsa. f(x) ≥ f(e) para todo **x** no intervalo [d, b].

C) Falsa. f(x) > 0 para todo **x** no intervalo [c, 0]

D) Verdadeira. **f** é decrescente no intervalo [c, e].

E) Falsa. $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Questão 09 – Letra E

Comentário: Substituindo **x** por −3 em **f**, temos:

$$f(-3+2) = 3f(-3) + 2^{-3} \Rightarrow$$

$$f(-1) = 3.\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = a \Rightarrow$$

$$a = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow$$

$$a^2 = \frac{49}{64}$$

Questão 10 – Letra E

Comentário: Ao se deslocar uma unidade para cima, f(x) se transforma em f(x) + 1; ao se deslocar para a direita em f(x − 1). Logo, g(x) = 1 + f(x − 1).

Questão 11 – Letra A

Comentário: Se f(3) não existe, então o denominador se anula para x = 3, donde 3a + 3b = 0 ⇒ b = −a. Como f(−1) = 1 e

$f(x) = \dfrac{ax - a - 5}{ax - 3a}$, temos:

$$\frac{a(-1) - a - 5}{a(-1) - 3a} = 1 \Rightarrow -2a - 5 = -4a \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2} \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

Portanto, $a^2 + b^2 = \dfrac{25}{4} + \dfrac{25}{4} = \dfrac{50}{4} = \dfrac{25}{2}$.

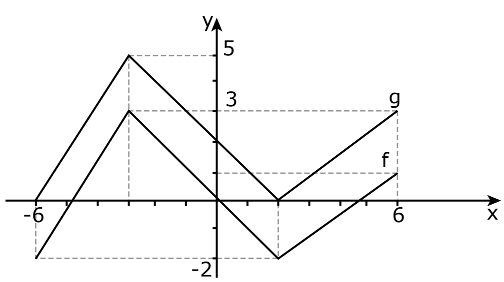
Questão 12

Comentário:

A) g(0) = f(0) + 2 = 0 + 2 = 2

h(0) = f(0 + 2) = f(2) = −2

B) O gráfico g(x) = f(x) + 2 é obtido por meio do gráfico de f(x) quando se adicionam duas unidades a cada imagem de **f**. Assim, o gráfico de **f** "sobe" duas unidades, mantendo-se o domínio −6 ≤ x ≤ 6.

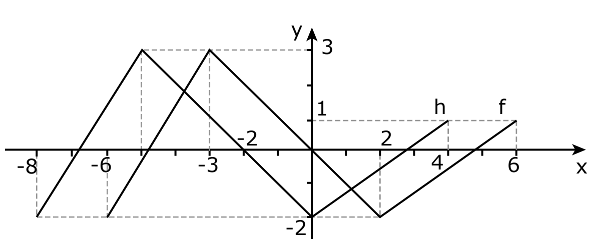


O gráfico de h(x) também é obtido do gráfico de f(x). Tomando-se os extremos do domínio de **f**, temos:

x + 2 = −6 ⇒ x = −8

x + 2 = 6 ⇒ x = 4

h(x) está definida para −8 ≤ x ≤ 4. Então, basta "deslizar" o gráfico de **f** para a esquerda, ao longo do eixo **x**.



C) Pelo item anterior, concluímos que os domínios de **g** e **h** são, respectivamente, −6 ≤ x ≤ 6 e −8 ≤ x ≤ 4.

Questão 13

Comentário:

A) $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} \geq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \\ \dfrac{x - 1}{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x} \geq 0 \\ \dfrac{x - 1}{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Portanto, $D_f = D = [-1, 0[\cup [1, +\infty[$.

B) Seja f(x) = 0, para x ≠ 0, temos:

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \text{ (I)}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da equação (I):

$x - \dfrac{1}{x} = x^2 - 2x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} + 1 - \dfrac{1}{x} \Rightarrow$

$2\sqrt{x^2 - x} = x^2 - x + 1$

Denotando $x^2 - x = r$, temos:

$2\sqrt{r} = r + 1 \Rightarrow 4r = r^2 + 2r + 1 \Rightarrow$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$

Logo,

$x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 5

Habilidade: 20

Comentário: Pela análise do gráfico, o veículo permaneceu imóvel no intervalo de tempo em que a velocidade é zero, ou seja, de 6 a 8 minutos. Portanto, ele permaneceu imóvel durante 2 minutos.

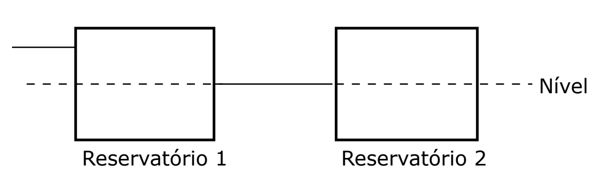
Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 5

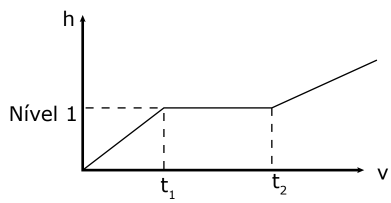
Habilidade: 20

Comentário: Observe a figura:



Com a vazão constante, a altura **h** do nível-d'água subirá no reservatório 1 de forma linear até atingir o nível 1 (no tempo t_1). Nesse instante, toda a água que entra no sistema alimentará o reservatório 2, pelo cano de ligação, até que este atinja o nível 1 (no tempo t_2).

Observe que, entre os instantes t_1 e t_2, o nível **h** permanece estacionado no nível 1. Após t_2, a água que entra no sistema alimenta ambos os reservatórios, de forma que **h** aumenta de maneira constante, mas com uma velocidade inferior à do intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_1$. Logo, tem-se o gráfico:



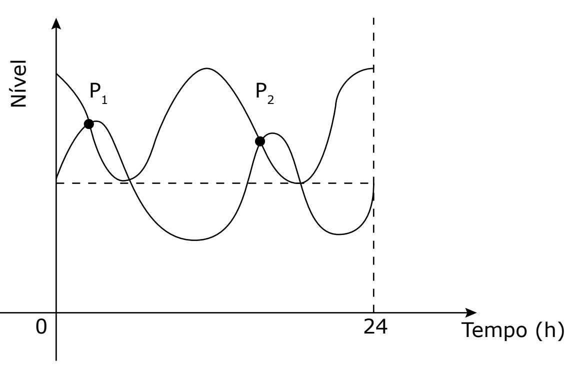
Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 5

Habilidade: 20

Comentário: No gráfico dado, os níveis das substâncias **A** e **B** são iguais (porém maiores que o nível mínimo da substância **A**) nos dois pontos P_1 e P_2:



Logo, o parâmetro diário estabelecido pelo nutricionista vale 2, portanto, o parâmetro semanal será 2 . 7 = 14.

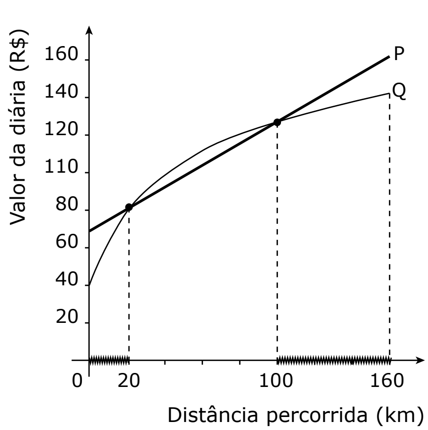
Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Observe o gráfico da questão:



O valor pago na locadora **Q** é menor ou igual àquele pago na locadora **P** nos intervalos em que o gráfico de **Q** está abaixo ou igual ao gráfico de **P**. Logo, tem-se os dois intervalos destacados no gráfico (de 0 a 20 e de 100 a 160). Portanto, alternativa D.

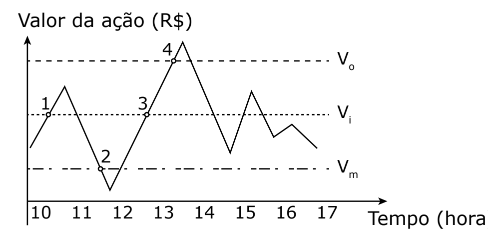
Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: Observe o gráfico da questão:



No instante 1, o valor da ação fica acima de V_i. Logo, o investidor irá vender metade das ações, ficando com $\frac{x}{2}$ ações.

No instante 2, o valor da ação fica abaixo de V_m. Logo, o investidor compra a mesma quantidade de ações que possui, ficando com $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$ ações.

No instante 3, novamente o investidor venderá metade das ações, ficando com $\frac{x}{2}$ ações.

No instante 4, o valor da ação fica acima do valor ótimo. Logo, o investidor vende todas as suas ações e daí em diante não realiza outra operação.

Questão 06 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: A porta poderá ser aberta quando o tempo **t** for tal que T(t) = 39. Usando a lei da função, teremos:

$$39 = -\frac{t^2}{4} + 400 \Rightarrow \; 361 = \frac{t^2}{4} \Rightarrow \; t = 38 \text{ min}$$

Questão 07 – Letra A

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 5

Habilidade: 20

Comentário: Calculando o lucro de cada investidor em cada papel, considerando o preço das ações no momento da compra e da venda:

Investidor 1: 460,00 – 150,00 = 310 reais de lucro

Investidor 2: 200,00 – 150,00 = 50,00 reais de lucro

Investidor 3: 460,00 – 380,00 = 80,00 reais de lucro

Investidor 4: 100,00 – 460,00 = –360,00 = 360 reais de prejuízo

Investidor 5: 200,00 – 100,00 = 100,00 reais de lucro

Assim, o investidor 1 fez o melhor negócio.

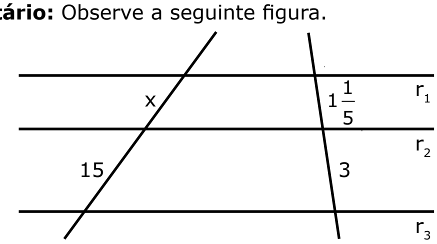
MÓDULO – B 05

Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra E

Comentário: Observe a seguinte figura.



Como as retas r_1, r_2 e r_3 são paralelas e estão sendo interceptadas por duas retas, aplicando o Teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{15} = \frac{1\frac{1}{5}}{3} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{\frac{6}{5}}{3} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 6$$

Questão 02 – Letra C

Comentário: Unindo um segmento que se inicia nos pés de Márcio e vai até a ponta da sombra dele, e dessa ponta de sombra até a cabeça de Márcio, formaremos um triângulo que será semelhante ao triângulo formado pelo ponto que une o térreo do prédio até o fim da sombra do prédio, e deste até o pico do prédio. Por semelhança, teremos:

Comprimento da sombra de Márcio está para o comprimento da sombra do prédio, assim como a altura de Márcio está para a altura do prédio.

Algebricamente, temos:

$$\frac{1}{10} = \frac{1{,}62}{h} \Rightarrow h = 16{,}2 \text{ m}$$

Questão 03 – Letra B

Comentário: O ponto que emite os feixes do projetor e os pontos das extremidades da tela formam um triângulo, e este será semelhante ao da outra projeção com tela mais próxima.

Assim, $\frac{2}{3} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 8 \text{ m}$.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Dado que $\overline{DC}$, paralelo a $\overline{AB}$, pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{x-2}{a} = \frac{x}{b} \Rightarrow b(x - 2) = ax \Rightarrow bx - 2b = ax \Rightarrow$$

$$bx - ax = 2b \Rightarrow x(b - a) = 2b \Rightarrow$$

$$x = \frac{2b}{b-a} \quad \text{(I)}$$

Do enunciado, temos que b = a + 50%.a, ou seja, b = 1,5a. Dado ainda que **a** é o menor primo, temos que a = 2, logo, b = 3.

Substituindo **a** e **b**, em (I):

$$x = \frac{2\,.\,3}{3-2} \Rightarrow x = 6$$

Questão 05 – Letra A

Comentário: Convertendo as unidades do problema para metros, temos:

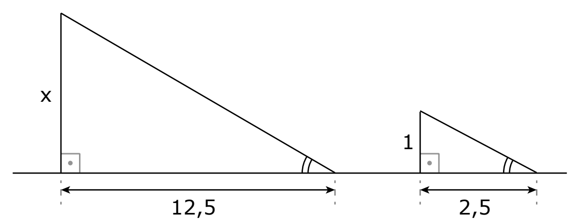
Altura do pau de sebo: **x** metros

Altura do bastão: 1 metro

Sombra do pau de sebo: 125 dm = 12,5 metros

Sombra do bastão: 25 dm = 2,5 metros

Agora, considere a seguinte ilustração para a resolução do problema:



Note que os dois triângulos são semelhantes, dessa forma, temos:

$$\frac{x}{1} = \frac{12{,}5}{2{,}5} \Rightarrow x = 5 \text{ m}$$

Questão 06 – Letra E

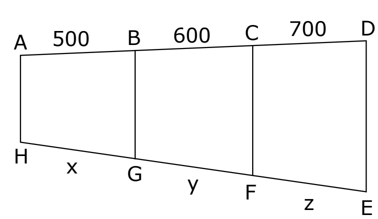
Comentário: Temos que a "trajetória", a "altura" e a "projeção da trajetória na horizontal" formam um triângulo.

Por semelhança de triângulos temos que a altura em que ele se encontra é proporcional à que ele anda. Considerando que falta **x** metros para o turista percorrer, então o que ele andará no total será: 200 + x. Assim:

$$\frac{34}{200} = \frac{170}{200+x} \Rightarrow 34\,.\,(200+x) = 170\,.\,200 \Rightarrow x = 800 \text{ m}$$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir:



x + y + z = 1 980

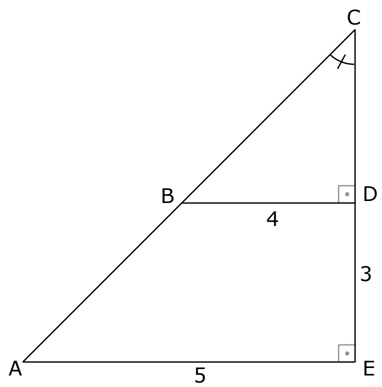
Pelo Teorema de Tales, sabemos que os segmentos BG e CF dividem os segmentos HE e AD em segmentos proporcionais entre si. Logo:

$$\frac{AB}{HG} = \frac{BC}{GF} = \frac{CD}{FE} \Rightarrow$$
$$\frac{500}{x} = \frac{600}{y} = \frac{700}{z} = \frac{500 + 600 + 700}{x + y + z} = \frac{1\,800}{1\,980} = \frac{10}{11} \Rightarrow$$
$$y = 660$$

Questão 08 – Letra E

Comentário: Como AE // BD, temos que o ângulo $B\hat{D}C$ é reto.

Considere a ilustração a seguir para a resolução do problema.



Os triângulos CBD e CAE são semelhantes (caso AAA). Dessa forma, temos:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{BD}{AE} \Rightarrow \frac{CD}{CD + 3} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$
$$5.CD = 4.CD + 12 \Rightarrow$$
$$CD = 12$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AEC, temos:

$$AE^2 + CE^2 = AC^2 \Rightarrow \ 5^2 + 15^2 = AC^2 \Rightarrow$$
$$AC^2 = 25 + 225 = 250 = 25 \, . \, 10 \Rightarrow$$
$$AC = 5\sqrt{10} \, \mu.c.$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário: Observando a figura, temos que os triângulos representados são semelhantes. Assim:

$$\frac{1}{0{,}005} = \frac{x}{15} \Rightarrow$$
$$x = 3\,000 \text{ mm} \Leftrightarrow$$
$$x = 3 \text{ m}$$

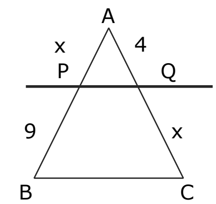
Questão 02 – Letra B

Comentário: Seja **x** o comprimento da barreira. Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{30}{x + 2} = \frac{24}{56 - 24} \Rightarrow 30 \, . \, 32 = 24(x + 2) \Rightarrow$$
$$5(32) = 4(x + 2) \Rightarrow 5 \, . \, 8 = x + 2 \Rightarrow x = 38 \text{ m}.$$

Questão 03 – Letra B

Comentário: Seja a ilustração do problema:

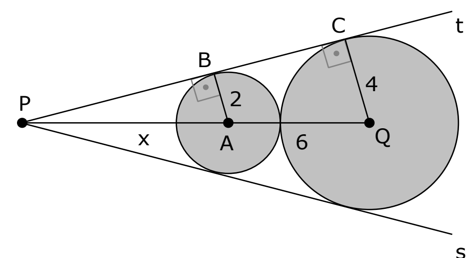


Pelo Teorema de Tales, temos:

$\frac{x}{9} = \frac{4}{x}$, logo x² = 36, então x = 6.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:



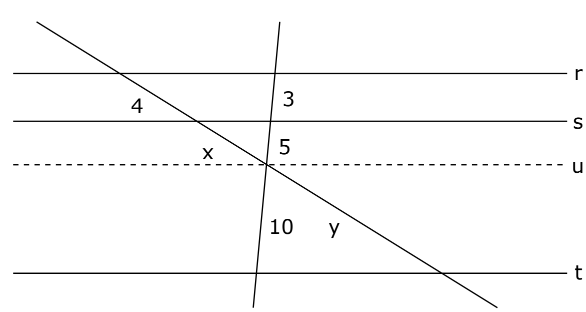
Podemos garantir que os pontos **P**, **A** e **Q** são colineares, pois **P**, **B** e **C** são colineares e BA // CQ. Assim, os triângulos PAB e PQC são semelhantes, já que $C\hat{P}Q$ é comum e $P\hat{B}A = P\hat{C}Q$. Assim, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{QP}} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{x}{x + 6} \Rightarrow x = 6.$$

Logo, $\overline{PQ}$ = 12.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Traçando uma reta **u** paralela a **r**, **s** e **t**, e que passa pelo ponto de intersecção das retas transversais, temos:



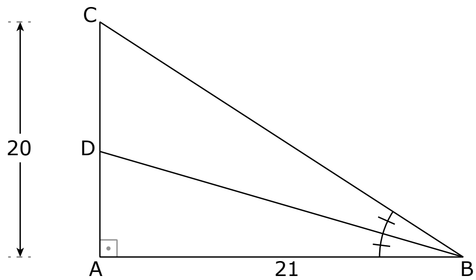
Aplicando, agora, o Teorema de Tales, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{3} = \dfrac{x}{4} \Rightarrow x = \dfrac{5 \, . \, 4}{3} = \dfrac{20}{3} \\[2ex] \dfrac{10}{3} = \dfrac{y}{4} \Rightarrow y = \dfrac{4 \, . \, 10}{3} = \dfrac{40}{3} \end{cases}$$

Portanto, temos que $x = \frac{20}{3}$ e $y = \frac{40}{3}$.

Questão 06 – Letra A

Comentário: Considere a ilustração a seguir para a resolução do problema.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow 20^2 + 21^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{BC}^2 = 400 + 441 \Rightarrow$

$\overline{BC}^2 = 841 \Rightarrow \overline{BC} = 29.$

Agora, aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, temos:

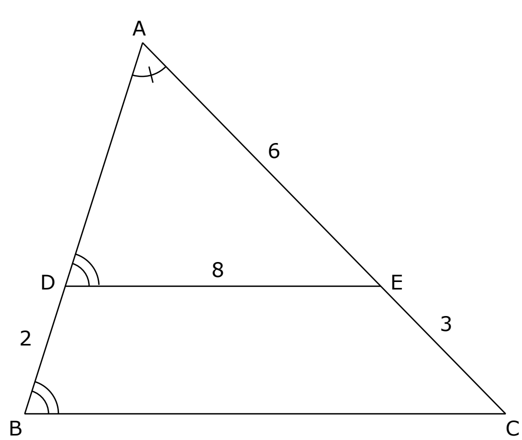
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{29}{20 - \overline{AD}} = \frac{21}{\overline{AD}} \Rightarrow$$

$$29.\overline{AD} = 420 - 21.\overline{AD} \Rightarrow$$

$$5\cancel{0}.\overline{AD} = 42\cancel{0} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{42}{5}$$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Considere a ilustração a seguir para a resolução do problema.



Note que os triângulos ADE e ABC são semelhantes (caso AAA), dessa forma, temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AD} + 2} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{9}} \Rightarrow 3.\overline{AD} = 2.\overline{AD} + 4 \Rightarrow \overline{AD} = 4 \text{ cm}$$

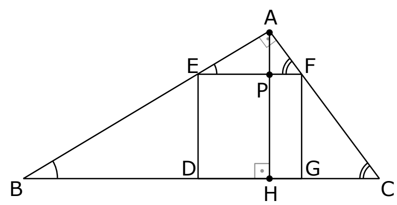
Por outro lado, também temos:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{8}{\overline{BC}} = \frac{6}{9} \Rightarrow \overline{BC} = 12 \text{ cm}$$

Logo, $\overline{AD} + \overline{BC} = 4 + 12 = 16$ cm.

Questão 08 – Letra D

Comentário: Considere a ilustração a seguir para a resolução do problema.



Note que os triângulos AEF e ABC são semelhantes (caso AAA), dessa forma, temos:

$$\frac{AP}{AH} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{AH - PH}{24} = \frac{EF}{40}$$

Como PH = EF, temos:

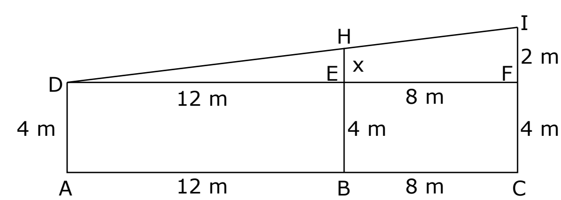
$$\frac{AH - PH}{24} = \frac{EF}{40} \Rightarrow \frac{24 - EF}{\cancel{24}} = \frac{EF}{\cancel{40}} \Rightarrow$$

$$120 - 5.EF = 3.EF \Rightarrow 8.EF = 120 \Rightarrow EF = 15 \text{ cm}$$

15 é um múltiplo de 5.

Questão 09 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:



Construindo DF paralela a AC, temos que os triângulos DEH e DFI são semelhantes. Logo, podemos escrever:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{HE}{IF} \Rightarrow \frac{12}{20} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1{,}2\text{m}$$

Assim, o suporte em **B** mede 5,2 m.

Questão 10 – Letra C

Comentário: Como o perímetro do triângulo vale 120 cm, temos:

$b + c + 40 = 120 \Rightarrow b + c = 80$ (I)

Agora, aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, temos:

$$\frac{c}{18} = \frac{b}{22} \Rightarrow 22c = 18b \quad \text{(II)}$$

Substituindo II em 18.I, temos:

$22c + 18c = 18 . 80 \Rightarrow$

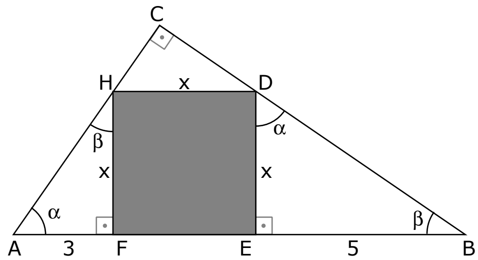
$40c = 18 . 2 . 40 \Rightarrow c = 36 \Rightarrow$

$$\frac{36}{18} = \frac{b}{22} \Rightarrow b = 44$$

Portanto, $\overline{AC}$ é o maior lado com medida igual a 44 cm.

Questão 11 – Letra A

Comentário: Observe a figura a seguir:



É imediato que $C\hat{A}F = E\hat{D}B$ e $A\hat{H}F = E\hat{B}D$, já que $\alpha + \beta = 90°$. Assim, os triângulos EDB e FAH são semelhantes. Chamando de **x** o lado do quadrado, podemos escrever:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{HF}}{\overline{AF}} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{x}{3} \Rightarrow x^2 = 15$$

Logo, a área do quadrado vale 15.

Questão 12 – Letra B

Comentário: Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{TS}} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{\overline{SR}}{3} \Rightarrow \overline{SR} = 6\text{ km.}$$

Os triângulos RPT e RQS são semelhantes, então:

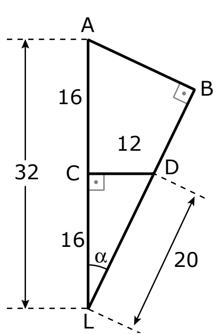
$$\frac{\overline{TP}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{PQ} + \overline{QR}}{\overline{QR}} \Rightarrow \frac{\overline{TP}}{3} = \frac{2+4}{4} \Rightarrow \overline{TP} = 4{,}5\text{ km.}$$

$$\frac{\overline{TP}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{PQ} + \overline{QR}}{\overline{QR}} \Rightarrow \frac{\overline{TP}}{3} = \frac{2+4}{4} \Rightarrow \overline{TP} = 4{,}5\text{ km.}$$

Assim, o perímetro do circuito será:
6 + 4 + 2 + 4,5 + 3 = 19,5 km

Questão 13 – Letra B

Comentário: Como o atacante tem de percorrer uma distância mínima para pegar a bola, esse deslocamento é perpendicular a $\overline{BL}$. Assim, temos a seguinte figura:



C é o ponto médio do segmento AL, então CL = 16 cm.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo LCD, temos LD = 20.

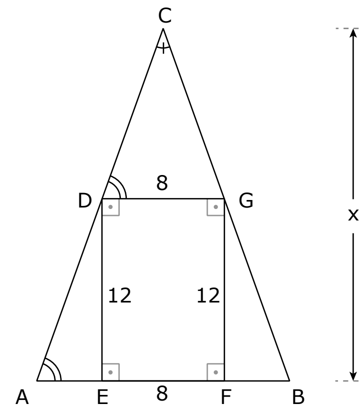
Os triângulos LCD e LBA são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo. Daí:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{LD}{AL} \Rightarrow \frac{12}{AB} = \frac{20}{32} \Rightarrow AB = 19{,}2\text{ m.}$$

Portanto, a distância mínima que o atacante terá de percorrer para pegar a bola é o segmento AB, que vale 19,2 m.

Questão 14 – Letra D

Comentário: Sendo **x** a altura do triângulo ABC, considere a ilustração a seguir para a resolução do problema:



Os triângulos CDG e CAB são semelhantes, dessa forma, temos:

$$\frac{DG}{AB} = \frac{x - 12}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{8}{15} = \frac{x - 12}{x} \Rightarrow$$

$$8x = 15x - 180 \Rightarrow$$

$$7x = 180 \Rightarrow x = \frac{180}{7}$$

Questão 15 – Letra A

Comentário: Considere a base do prédio como o ponto **B**; os pés da pessoa como o ponto **P**; a ponta da sombra como o ponto **O**; e o topo do prédio como o ponto **T**.

A pessoa estará no ponto máximo quando a cabeça dela, ponto **C**, estiver contido no segmento OT.

Teremos, assim, os triângulos BOT e POC, que são semelhantes.

Dessa semelhança, temos:

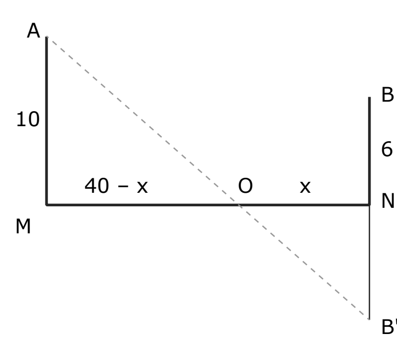
$\frac{PC}{BT} = \frac{OP}{OB}$, em que $\overline{PC} = 1{,}8$; $\overline{BT} = 15$; $\overline{OP} = 20 - x$ e $\overline{OB} = 20$.

Assim:

$$\frac{1{,}8}{15} = \frac{20 - x}{20} \Rightarrow \frac{36}{15} = 20 - x \Rightarrow x = 17{,}6\text{ m}$$

Questão 16 – Letra B

Comentário: Considere a figura:



A partir de um ponto **B’**, que é simétrico a **B** em relação ao segmento MN, então para a = AO e b = OB = OB’, deve-se ter os pontos **A**, **O** e **B’** pertencentes à mesma reta para que a + b seja mínimo.

Da figura, observamos que o ângulo B’ON e MOA são opostos pelo vértice, e ONB’ e OMA são retos, logo, os triângulos ONB’ e OMA são semelhantes. Assim,

$$\frac{x}{40-x} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{x}{40-x} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x = 3(40-x) \Rightarrow$$

8x = 120 ⇒ x = 15 m.

Questão 17 – Letra A

Comentário: Observando a figura, temos que os triângulos BED e BCA são semelhantes. Logo:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{5} = \frac{\overline{BD}}{4} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{6}{5}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BED, temos:

$$\overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{DE}^2 \Rightarrow \overline{BE}^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\overline{BE}^2 + \frac{36}{25} = \frac{9}{4} \Rightarrow \overline{BE}^2 = \frac{9\,.\,25 - 4\,.\,36}{100} \Rightarrow \overline{BE} = \frac{9}{10}$$

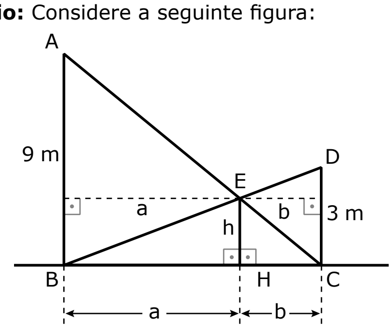
$$\therefore\ \overline{EC} = 3 - \frac{9}{10} = \frac{21}{10}$$

$\overline{BD}$ é igual à altura do paralelogramo, e $\overline{EC}$ é a base, logo, a área do paralelogramo será:

$$\overline{EC}.\overline{BD} = \frac{21}{10} \cdot \frac{6}{5} = \frac{63}{25}$$

Questão 18 – Letra D

Comentário: Considere a seguinte figura:



Como AB // EH // CD, ΔCHE ~ ΔCBA e ΔBHE ~ ΔBCD.

$$\begin{cases} \dfrac{a}{h} = \dfrac{a+b}{3} \Rightarrow 3a = h(a+b) \\[2ex] \dfrac{b}{h} = \dfrac{a+b}{9} \Rightarrow 9b = h(a+b) \end{cases}$$

Assim: a = 3b e, substituindo na segunda equação, temos $\frac{b}{h} = \frac{4b}{9}$, h = 2,25 m.

Questão 19 – Letra D

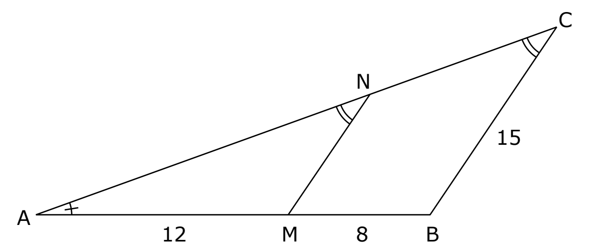
Comentário: Como $\overline{AB}$ vale $\frac{2}{3}$ de $\overline{AC}$, temos:

$$AB = \frac{2}{\cancel{3}}.\cancel{30} = 20 \text{ cm}$$

Agora, como $\overline{BC}$ vale a metade de $\overline{AC}$, temos:

$$BC = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}$$

Agora, considere a ilustração a seguir para a resolução do problema.



Note que os triângulos AMN e ABC são semelhantes (caso AAA), dessa forma, temos:

$$\frac{\overline{MN}}{\cancel{15}} = \frac{12}{\cancel{20}} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{3\,.\,\cancel{12}}{\cancel{4}} \Rightarrow \overline{MN} = 9 \text{ cm}$$

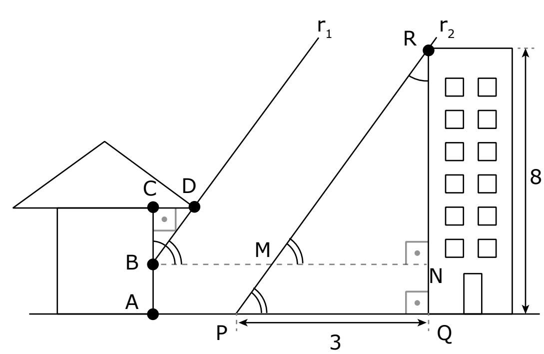
Agora, para encontrar o valor de $\overline{AN}$, temos:

$$\frac{\overline{AN}}{\cancel{30}} = \frac{9}{\cancel{15}} \Rightarrow \overline{AN} = 18 \text{ cm}$$

Portanto, o perímetro do triângulo AMN é dado por 12 + 9 + 18 = 39 cm.

Questão 20 – Letra A

Comentário: Considere a ilustração a seguir para a resolução do problema.



Para a construção, foi traçado o segmento BN // AQ. Com isso, é possível ver que os triângulos BCD e PQR são semelhantes. Dessa forma, temos:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{RQ}} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{CD}}{3} = \frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{8} \Rightarrow$$

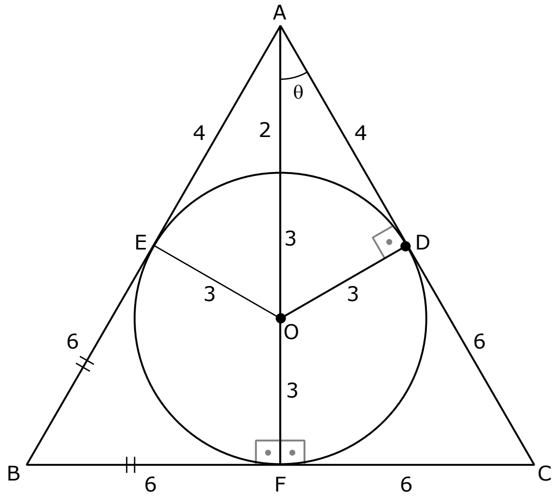
$$\frac{\overline{CD}}{3} = \frac{2{,}9 - 1{,}3}{8} \Rightarrow$$

$$\overline{CD} = 3.\frac{1{,}6}{8} \Rightarrow$$

$$\overline{CD} = 0{,}6 \text{ m}$$

Questão 21 – Letra C

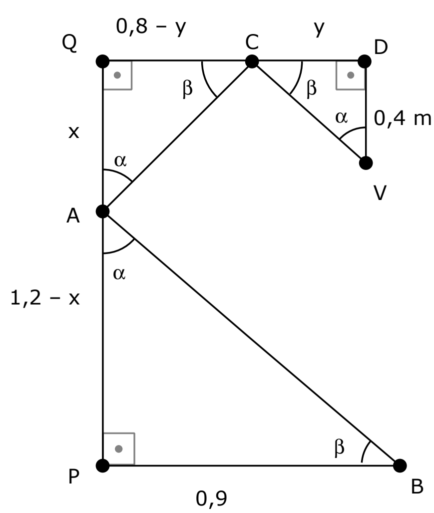
Comentário: Observe a figura a seguir que representa a situação proposta no enunciado.



Chamando de **D**, **E** e **F** as intersecções da circunferência com o triângulo, temos que AD = 4 cm, pelo Teorema de Pitágoras no triângulo AOD. Assim, $\text{tg}\ \theta = \frac{3}{4}$, $\frac{FC}{8} = \frac{3}{4}$, FC = 6 cm e BC = 2 . 6 = 12 cm.

Questão 22

Comentário: Observe a figura a seguir:



A conformação de ângulos da figura foi feita tendo-se em conta que os ângulos de incidência e reflexão em cada colisão são iguais. Além disso, devemos nos lembrar de que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°. Assim, os triângulos PBA, QCA e DCV são semelhantes. Logo, podemos escrever:

$$\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AQ} = \frac{CD}{DV} \Rightarrow$$

$$\frac{0,9}{1,2 - x} = \frac{0,8 - y}{x} = \frac{y}{0,4} \Rightarrow$$

$$\frac{(0,8 - y) + y}{x + 0,4} = \frac{0,8}{x + 0,4}$$

Assim:

$$0,9x + 0,36 = 0,96 - 0,8x \Rightarrow$$

$$1,7x = 0,6 \Rightarrow$$

$$x = \frac{6}{17}\ \text{m}$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: O mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o mosaico 2. Nele, os triângulos 30°, 60°, 90° são congruentes e o triângulo 30°, 30°, 120° é isósceles.

No mosaico 1, o triângulo 30°, 30°, 120° é isósceles, mas os triângulos 30°, 60°, 90° não são congruentes.

No mosaico 3, os triângulos 22°, 68°, 90° são congruentes, mas o triângulo 44°, 46°, 90° não é isósceles.

Nos mosaicos 4 e 5 não é possível formar um triângulo retângulo com as três peças.

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Denotando a medida de EF por **x**, AF = a e BF = b, podemos aplicar semelhança de triângulos entre BEF e BAC e entre AEF e ABD. Assim:

$$\frac{b}{a + b} = \frac{x}{4} \quad \text{e} \quad \frac{a}{a + b} = \frac{x}{6}$$

Dividindo uma equação pela outra, concluímos que $b = \frac{3a}{2}$. Substituindo na segunda equação, temos:

$$\frac{a}{a + \frac{3a}{2}} = \frac{2}{5} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 2,4\ \text{m}$$

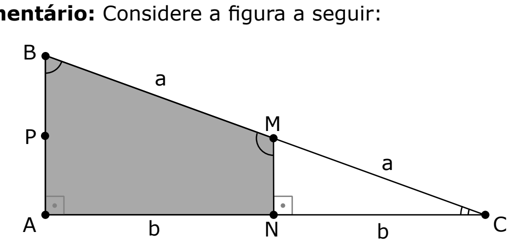
Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Considere a figura a seguir:



MATEMÁTICA

Os triângulos ABC e NMC são semelhantes e sua razão de proporcionalidade $k = \dfrac{BC}{MC} = 2$. Logo, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e NMC é igual a $k^2 = 4$.

Portanto, $\dfrac{S_{ABMN} + S_{NMC}}{S_{NMC}} = 4 \Rightarrow S_{ABMN} = 3.S_{NMC}$.

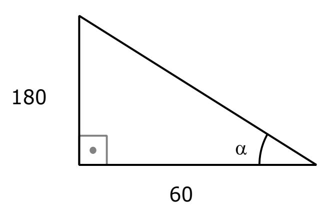
Questão 04 – Letra B

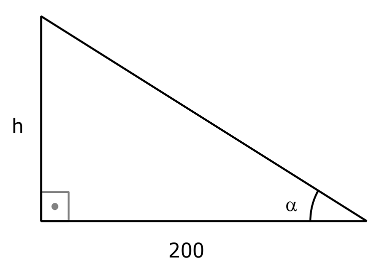
Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: No mesmo momento em que a sombra de uma pessoa de 180 cm de altura mede 60 cm, a sombra de um poste de h cm de altura mede 200 cm. Assim, temos as seguintes figuras:

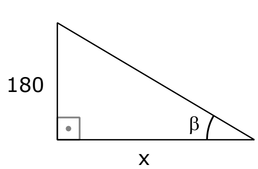


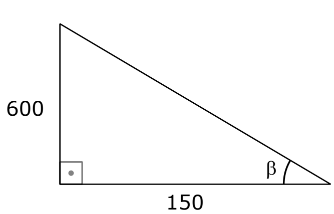


Da semelhança de triângulos, temos:

$\dfrac{180}{h} = \dfrac{60}{200} \Rightarrow h = 600$ cm

Se, mais tarde, a sombra do poste diminuir 50 cm, ou seja, passar a medir 150 cm, sendo então **x** a medida da sombra da mesma pessoa, em cm, teremos:





$\dfrac{180}{600} = \dfrac{x}{150} \Rightarrow x = 45$ cm

Portanto, a nova sombra da pessoa mede 45 cm.

MÓDULO – B 06

Quadriláteros

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra A

Comentário: Como os ângulos internos consecutivos estão na razão 1 : 3, podemos dizer que o ângulo agudo mede **x** e o ângulo obtuso mede 3x.

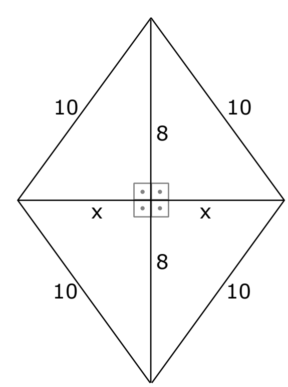
Então o valor de **x** será:

$x + 3x + x + 3x = 360° \Rightarrow$

$8x = 360° \Rightarrow \ x = \dfrac{360°}{8} = 45°$

Questão 02 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir:



Se o perímetro do losango, que tem todos os lados iguais, vale 40 cm, cada um de seus lados mede 10 cm. Também sabemos que as diagonais de um losango se cruzam no ponto médio de ambas, segundo um ângulo de 90°. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que x = 6 cm e, portanto, a diagonal menor mede 12 cm.

Questão 03 – Letra C

Comentário: A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. Assim, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$.

Por hipótese: $\hat{C} = \dfrac{1}{3}\hat{B}$, $\hat{A} = 5\hat{C}$ e $\hat{D} = 45°$.

Logo, podemos dizer que $\hat{B} = 3\hat{C}$.

Daí: $5\hat{C} + 3\hat{C} + \hat{C} + 45° = 360° \Rightarrow \hat{C} = 35°$

Como $\hat{C} = 35°$, temos:

$\hat{A} = 5\hat{C} \Rightarrow \hat{A} = 5 \ . \ 35° \Rightarrow \hat{A} = 175°$ e

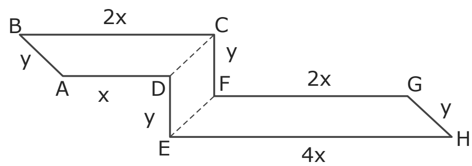
$\hat{B} = 3C \Rightarrow \hat{B} = 3 \ . \ 35° \Rightarrow \hat{B} = 105°$

Portanto, $\hat{A} - \hat{B} = 175° - 105° = 70°$.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Dado que EFCD é um losango, então $\overline{EF} = \overline{FC} = \overline{CD} = \overline{DE} = y$.

Dadas as propriedades das bases, formamos a seguinte figura:



Logo, o perímetro da figura é:

$2x + y + y + 2x + y + 4x + y + x + y = 9x + 4y$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Como todo quadrado (lados e ângulos congruentes, lados opostos paralelos) é losango (lados congruentes e lados opostos paralelos), e todo losango é paralelogramo (lados opostos paralelos), e todos eles têm quatro lados, a alternativa B é a correta.

Questão 06

Comentário: Como as diagonais de um paralelogramo se interceptam em seu ponto médio,

$$\begin{cases} x = 2y - 5 \\ x + 14 = 2y + 9 = 3y + 2 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

$AC = 9 + 9 = 18$

$BD = 23 + 23 = 46$

Questão 07

Comentário: Como as diagonais em um losango são bissetrizes e se cortam perpendicularmente, os ângulos dos triângulos considerados são 50°, 65° e 65°.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Sendo **x**, **y**, **z** e **w** os ângulos internos do quadrilátero, temos:

$\dfrac{x}{\frac{1}{5}} = \dfrac{y}{\frac{1}{8}} = \dfrac{z}{\frac{1}{10}} = \dfrac{w}{\frac{1}{40}} = k$, a divisão proporcional apresenta a seguinte propriedade:

$$\frac{x + y + z + w}{\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{40}} = k.$$

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. Então, $\dfrac{360^\circ}{\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{40}} = k.$

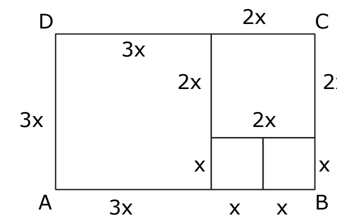
Portanto, $k = \dfrac{360^\circ}{\frac{8 + 5 + 4 + 1}{40}} = \dfrac{360^\circ}{\frac{18}{40}} = 800^\circ.$

Assim, x = 160°, y = 100°, z = 80°, w = 20°.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

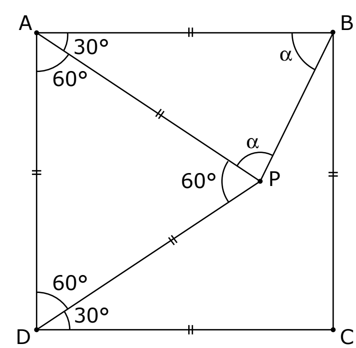
Comentário:



Pela análise da figura, temos $\overline{AB} = 5x$ e $\overline{BC} = 3x$. Assim, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{5x}{3x} = \dfrac{5}{3}$.

Questão 02 – Letra E

Comentário: Interpretando o problema, chegamos à seguinte figura:

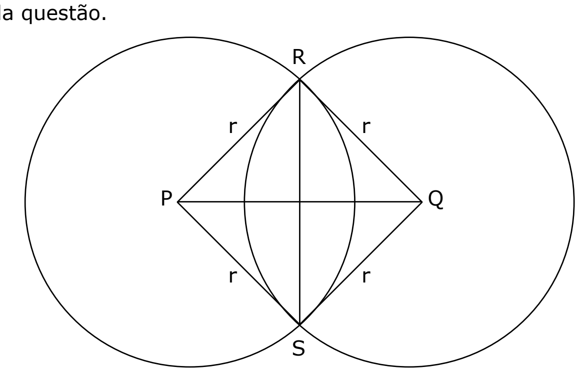


- Os ângulos $D\hat{A}P$, $A\hat{P}D$ e $A\hat{D}P$ medem 60° (triângulos APD equilátero).
- Os ângulos, $B\hat{A}P$ e $C\hat{D}P$ medem 30° (complementares de $D\hat{A}P$ e $A\hat{P}D$, respectivamente).
- O Δ APB é isósceles (os segmentos AP e AB são iguais).

Logo, $2\alpha + 30° = 180° \Rightarrow \alpha = 75°$.

Questão 03 – Letra D

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução da questão.



Como os segmentos RS e PQ têm a mesma medida e os lados do quadrilátero são iguais, PRQS é um quadrado de lado igual a 3 m. Portanto, sua área é igual a 3 . 3 = 9 m².

Questão 04 – Letra C

Comentário: No paralelogramo ABCD, temos que $A\hat{B}C \equiv A\hat{D}C = 120°$, $E\hat{D}C = 60°$.

Pelo triângulo retângulo EDC, temos que

$$\cos E\hat{D}C = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} \Rightarrow \cos 60° \frac{\overline{DE}}{100} \Rightarrow \overline{DE} = 50$$

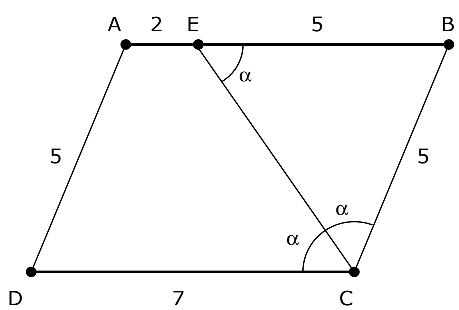
Logo, $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = 80 + 50 = 130$.

Sabemos que $D\hat{A}C + A\hat{C}D = 60°$ e $CD > AD$, logo $q = D\hat{A}C$ é maior que a média aritmética dos dois ângulos, ou seja, 30°.

Portanto, $\text{med}(\overline{AE}) = 130$ e $q > 30°$.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir:



Como se trata de um paralelogramo, AD = BC e AB = CD. $B\hat{E}C = D\hat{C}E$, pois são alternos internos. Assim, o triângulo BEC é isósceles, EB = 5 e AB = DC = 7. Com esses dados, conclui-se que o perímetro do paralelogramo é igual a 24.

Questão 06 – Letra A

Comentário:

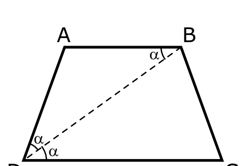
I. Incorreta. As diagonais de um losango, que não é um retângulo, interceptam-se em seus pontos médios.

II. Correta. Como, no caso de as diagonais se interceptarem em seus pontos médios, haverá a formação necessariamente de quatro triângulos congruentes, para que não haja absurdo, os lados do quadrilátero devem ser iguais, o que ocorre apenas nos losangos.

III. Incorreta. Um quadrilátero qualquer pode ter essa característica.

Questão 07 – Letra B

Comentário: Seja o trapézio isósceles ABCD.



Traçando sua diagonal $\overline{BD}$, temos, por hipótese, que $A\hat{D}B = C\hat{D}B$, pois BD é bissetriz do ângulo $A\hat{D}C$.

Sendo $\alpha = A\hat{D}B = C\hat{D}B$, temos que $A\hat{B}D = C\hat{D}B = \alpha$, pois esses ângulos são alternos internos.

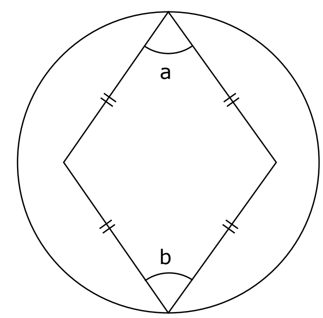
Logo, o triângulo ABD é isósceles, pois $A\hat{B}D = A\hat{D}B = \alpha$.

Assim, $\overline{AB} = \overline{AD}$, ou seja, a base menor do trapézio isósceles ABCD tem a mesma medida do lado oblíquo.

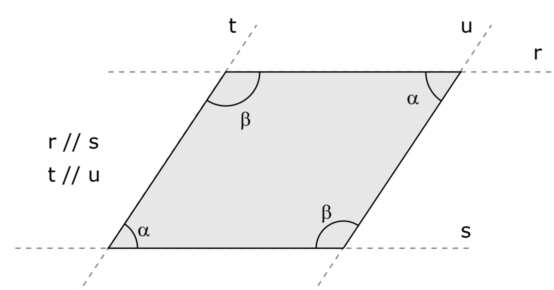
Questão 08 – Letra C

Comentário:

I. Incorreta. Os ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares somente se ele for inscritível. O Losango a seguir, como exemplo, não o é, logo, a + b ≠ 180°.



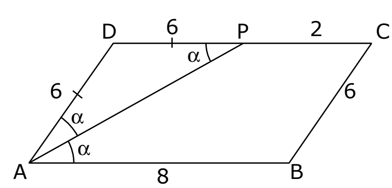
II. Correta. Em um paralelogramo, dois ângulos consecutivos serão sempre suplementares (colaterais internos).



III. Correta. Os paralelogramos que possuem diagonais perpendiculares entre si e que se cruzam em seu ponto médio são os quadrados e os losangos. Como sabemos que todo quadrado é um losango, podemos, de forma geral, afirmar que esses paralelogramos são losangos.

Questão 09 – Letra D

Comentário: Considere o paralelogramo ABCD.



Como ABCD é um paralelogramo, AB // CD.

Daí, $B\hat{A}P = D\hat{P}A$, pois são ângulos alternos internos.

Sendo $B\hat{A}P = \alpha$, então $D\hat{A}P = \alpha$.

Logo, o triângulo DPA é isósceles, pois os ângulos da base são iguais.

Assim, $\overline{DP} = \overline{AD} = 6$

Como $\overline{CD} = 8$, temos $\overline{AB} = 8$ e, como $\overline{AD} = 6$, temos BC = 6.

Observe que $\overline{AB} = 8$ e $\overline{BC} = 6$ satisfez a hipótese $\overline{AB} > \overline{BC}$.

Logo:

$2p = AB + BC + CD + DA \Rightarrow$

$2p = 8 + 6 + 8 + 6 \Rightarrow 2p = 28$ cm

Portanto, o perímetro do quadrilátero é 28 cm.

Questão 10 – Letra E

Comentário: Dado que o trapézio é isósceles, os ângulos da base maior **A** e **B** são congruentes, e os demais ângulos do trapézio também são congruentes.
Sendo os ângulos da base maior iguais a **x**, os outros ângulos serão iguais a 2x.

Por se tratar de um trapézio (quadrilátero), temos que:

$x + x + 2x + 2x = 360° \Rightarrow x = 60°$

O triângulo ABC é retângulo em **C**, e o ângulo **B** é 60°; esse triângulo tem hipotenusa igual a 10 cm, dado do enunciado.

Aplicando as relações trigonométricas no triângulo ABC, encontramos $\overline{BC} = 5$ cm, logo, $\overline{AD} = 5$ cm, pois o trapézio é isósceles.

Observando o triângulo BCD, temos que o ângulo $B\hat{D}C$ e o ângulo $D\hat{B}C$ são congruentes, logo, o triângulo BCD é isósceles e $\overline{BC} = \overline{CD}$, então $\overline{DC} = 5$ cm.

O perímetro do triângulo será 10 + 5 + 5 + 5 = 25 cm.

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Utilizando o Teorema de Pitágoras, concluímos que a diagonal de cada célula mede 10 cm e que cada célula produzirá 10 . 24 = 240 Wh diariamente. Como o consumo diário é de 20 160 Wh, são necessárias $\frac{20\,160}{240} = 84$ células, e 16 células devem ser retiradas.

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Como o cesto tem faces laterais no formato de retângulos e trapézios isósceles, então podemos eliminar as alternativas A, B e E. Concluímos do enunciado da questão que o fundo do cesto tem o formato de um quadrado. Logo, a alternativa correta é a C, pois o fundo do cesto da alternativa D tem o formato de um retângulo.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Como a área do retângulo menor (1) vale 4% da área do retângulo maior (2), temos:

$A_1 = 4\%.A_2 \Rightarrow x.26 = 0{,}04 . 260 . 400 \Rightarrow x = 160$ mm

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: A área e o perímetro de um quadro de dimensões 25 cm por 50 cm valem, respectivamente:

$A_1 = 0{,}25 . 0{,}50 = 0{,}125$ m^2 e $2p_1 = 2(0{,}25 + 0{,}50) = 1{,}5$ m

Como o custo por m^2 vale R\$ 20, por metro linear vale R\$ 15 e a taxa de entrega vale R\$ 10, o custo, em reais, para 8 desses quadros vale:

$C_1 = 8(0{,}125 . 20 + 1{,}5 . 15) + 10 = 210$

Já a área e o perímetro de um quadrado de dimensões 50 cm por 100 cm valem, respectivamente:

$A_2 = 0{,}50 . 1 = 0{,}5$ m^2 e $2p_2 = 2(0{,}5 + 1) = 3$ m

Logo, o custo, em reais, para 8 desses quadros vale:

$C_2 = 8(0{,}5 . 20 + 3 . 15) + 10 = 450$

Portanto, $C_2 > 2.C_1$.

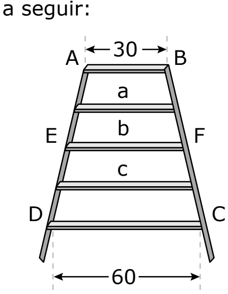
Questão 05 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Sejam **a**, **b** e **c** o comprimento dos degraus, conforme a figura a seguir:



Note que **b** é base média do trapézio ABCD, **a** é base média do trapézio ABFE e **c** é base média de EFCD. A base média é a média das bases superior e inferior de um trapézio. Logo:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{30+60}{2} = 45 \\ a &= \frac{b+30}{2} = \frac{75}{2} \\ c &= \frac{b+60}{2} = \frac{105}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 30 + a + b + c + 60 = 225$$

Então, o comprimento mínimo da tábua deverá ser 225 cm.

MATEMÁTICA

MÓDULO – B 07

Polígonos

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra B

Comentário: A figura apresenta 5 lados, logo, a soma dos ângulos internos será:

$S = 180°(n - 2) \Rightarrow S = 180°(5 - 2) \Rightarrow S = 540°$

Logo:

$$540° = (2x + 30°) + (4x - 40°) + (2x + 50°) + 2x + \frac{5}{2}x \Rightarrow$$

$$x = 40°$$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Como o número de diagonais é o triplo do número de lados, temos:

$$3n = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 3n = 6n \Rightarrow$$

$$n^2 - 9n = 0 \Rightarrow n(n - 9) = 0$$

Portanto, n = 9.

Questão 03 – Letra E

Comentário: Sabemos que o número de diagonais de um polígono regular é dado pela seguinte expressão:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 54 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 108 = n(n-3) \Rightarrow$$

$$n^2 - 3n - 108 = 0 \Rightarrow (n - 12)(n + 9) = 0$$

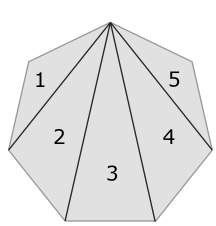
Resolvendo a equação, encontramos n = 12 ou n = –9, logo, o polígono tem 12 lados.

Questão 04 – Letra B

Comentário: A soma dos ângulos internos do hexágono é igual a 720°. Logo, $3 \,.\, 90° + 3y = 720° \Rightarrow y = 150°$.

Questão 05 – Letra B

Comentário: Utilizando a ideia apresentada no problema, teremos a seguinte figura:



Como foram formados 5 triângulos, temos que a soma dos ângulos será 180° multiplicado por 5, logo a soma será 900°.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Sendo **n** o número de lados do polígono, temos que, pela expressão de ângulo externo, $\frac{360°}{n} = 15° \Rightarrow n = 24$.

Assim, o número **d** de diagonais desse polígono será $d = \frac{24.(24-3)}{2} = 252$.

Questão 07 – Letra C

Comentário: Sendo **n** o número de lados desse polígono regular, pela expressão de ângulo interno:

$$144° = \frac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow 4n = 5n - 10 \Rightarrow n = 10$$

Logo, seu número **d** de diagonais será dado por $d = \frac{10.7}{2} = 35$.

Questão 08 – Letra E

Comentário: 60° será o ângulo externo do polígono regular que representa a trajetória do robô. Assim, sendo **n** o número de lados do polígono, $60° = \frac{360°}{n}$ e n = 6 lados.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Entre as sete peças do tangram, há 5 triângulos e 2 quadriláteros. Assim, a soma dos ângulos internos dessas figuras será de 5 . 180° + 2 . 360° = 1 620°.

Questão 02 – Letra C

Comentário: O comprimento do muro será igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao trapézio. Como o raio dessa circunferência é igual ao lado do trapézio, o muro terá 24 m de comprimento.

Questão 03 – Letra B

Comentário: A distância entre dois lados paralelos de um hexágono regular é dada pelo dobro do apótema do hexágono, que é a altura do triângulo equilátero formado por um lado e dois raios do hexágono. Logo, sendo **x** a medida do lado do hexágono, temos:

$$2.\frac{x\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Questão 04 – Letra C

Comentário: Como os segmentos AF e DC são paralelos, a medida de $B\hat{A}F$ é igual à medida do ângulo formado à esquerda do vértice **A**; denotando essa medida por **x**, temos $108° + 2x = 180° \Rightarrow x = 36°$.

Questão 05 – Letra C

Comentário: Por meio do enunciado, temos que os ângulos internos do quadrilátero $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são:

$\hat{A} = 5.\hat{C}$, $\hat{C} = \frac{1}{3}.\hat{B}$ e $\hat{D} = 45°$

Daí, $\hat{A} = 5.\frac{1}{3}.\hat{B} \Rightarrow \hat{A} = \frac{5}{3}.\hat{B}$

Logo:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360° \Rightarrow$

$\frac{5}{3}.\hat{B} + \hat{B} + \frac{1}{3}.\hat{B} + 45° = 360° \Rightarrow$

$3.\hat{B} = 315° \Rightarrow \hat{B} = 105°$

Assim:

$\hat{A} = \frac{5}{3}.105° \Rightarrow \hat{A} = 175°$

Portanto, $\hat{A} - \hat{B} = 175° - 105° = 70°$.

Questão 06 – Letra B

Comentário: $\overline{AQ} = \overline{QC} = \overline{AF} = \overline{FE} = 1$ dm, pois em um hexágono regular, o raio da circunferência inscrita é igual ao lado do polígono.

Perceba que $\dfrac{\overline{CE}}{2}$ corresponde à altura do triângulo equilátero QCD, então:

$$\left(\frac{\overline{CE}}{2}\right)^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\overline{CE}^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\overline{CE}^2 = 4.\frac{3}{4} \Rightarrow \overline{CE} = \sqrt{3}\text{ dm}$$

Logo, o perímetro do polígono AQCEF, é igual a $4 \,.\, 1 + \sqrt{3} = (4 + \sqrt{3})$ dm.

Questão 07 – Letra E

Comentário: O polígono regular formado pelo método descrito no enunciado tem ângulo interno de 60° + 40° + 60° = 160°. Sendo **n** seu número de lados, temos que:

$$\frac{180(n-2)}{n} = 160 \Rightarrow n = 18$$

Logo, como cada triângulo equilátero corresponde a um lado do polígono, há 18 triângulos equiláteros desenhados.

Questão 08 – Letra D

Comentário: Um hexágono convexo tem $\dfrac{6\,.\,3}{2} = 9$ diagonais. De cada um dos vértices de um polígono convexo de **n** lados, podem ser traçadas (n – 3) diagonais, e logo, no caso, n = 12.

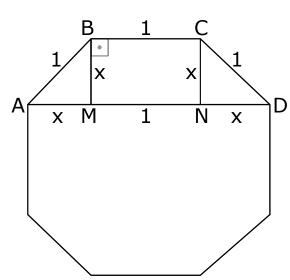
Questão 09 – Letra B

Comentário: Sabendo que o polígono tem 20 diagonais, temos:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 20 = \frac{n^2 - 3n}{2} \Rightarrow 40 = n^2 - 3n \Rightarrow$$

$$n^2 - 3n - 40 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ \text{ou} \\ n = -5 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Logo, trata-se de um octógono regular. Observe a figura a seguir:



Por se tratar de um octógono regular, cada ângulo interno vale 135°; logo, o triângulo AMB é retângulo isósceles, assim como o triângulo CND. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$1^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, o segmento AD equivale a $1 + 2x = 1 + \sqrt{2}$.

Questão 10 – Letra B

Comentário: Cada ângulo interno do hexágono regular ABCDEF mede 120°, então $\hat{B}$ = 120°. Sabemos que, a partir dos pontos médios dos lados, traça-se um novo hexágono A'B'C'D'E'F'; logo, o triângulo A'B'B é isósceles.

Denotando $\hat{A}' = \hat{B}' = \beta$.

$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{B} = 180° \Rightarrow$

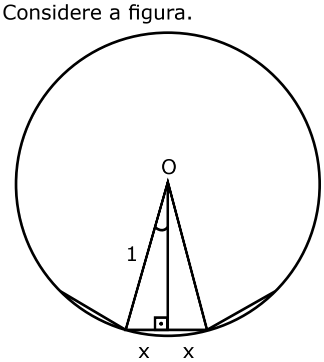
$2\beta + 120° = 180° \Rightarrow$

$\beta = 30°$.

Portanto, $B\hat{A}'B' = 30°$.

Questão 11 – Letra C

Comentário: Considere a figura.



Marcando 36 pontos espaçados igualmente na circunferência, temos um polígono regular de 36 lados inscrito. Todos os ângulos cêntricos do polígono serão iguais a $\dfrac{360°}{36} = 10°$.

$$\text{sen } 5° = \frac{x}{1} \Rightarrow x = 0{,}08$$

Logo, o lado do polígono mede 2 . 0,08 = 0,16.

Questão 12 – Letra D

Comentário: Pelo enunciado, sabemos que as bissetrizes dos ângulos internos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ cortam-se no ponto **O**, considerando $\hat{X} = 2\alpha$, $\hat{Y} = 2\beta$, $\hat{O} = \theta$, temos que:

$\hat{X} + \hat{Y} + \hat{Z} + \hat{W} = 360° \Rightarrow$

$2\alpha + 2\beta + 128° + 76° = 360° \Rightarrow$

$2\alpha + 2\beta = 156° \Rightarrow$

$\alpha + \beta = 78°$

No triângulo XOY, temos:

$\alpha + \beta + \theta = 180° \Rightarrow 78° + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 102°$

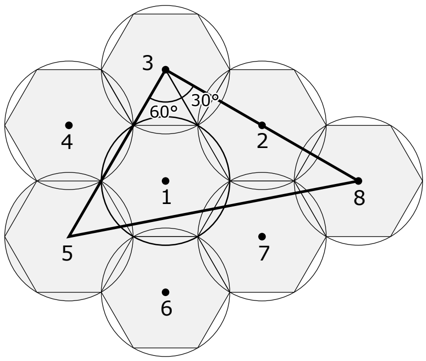
Portanto, $X\hat{O}Y = 102°$.

Questão 13 – Letra B

Comentário: Como P_1 e P_2 são congruentes entre si, necessariamente terão o mesmo número de lados, o que implica que o segmento de reta divide o polígono original em duas regiões, cada uma contendo metade dos lados do polígono original. Assim, tanto P_1 quanto P_2 terão $\dfrac{n}{2}$ lados do polígono original e mais um lado referente ao segmento interno construído.

Questão 14 – Letra D

Comentário: Observe a figura. Sabendo que os hexágonos são regulares e congruentes, seus lados têm as mesmas medidas dos raios dos círculos.



$d_{3,8} = 4.(\text{altura do triângulo equilátero de lado } 1)$

$d_{3,8} = 4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\text{ km}$

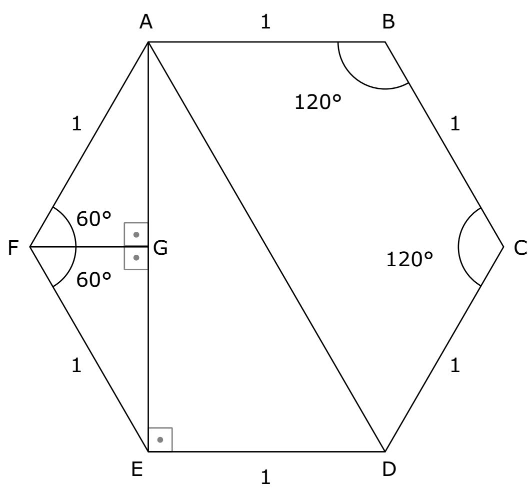
$d_{3,5} = 3\text{ km}$

$d_{5,8}$ = hipotenusa do triângulo "538"

$(d_{5,8})^2 = (d_{3,8})^2 + (d_{3,5})^2 \Rightarrow \; d_{5,8} = \sqrt{12+9} = \sqrt{21}\text{ km}$

Questão 15 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir, que representa a geometria da situação.



A medida do ângulo interno do hexágono regular é:

$$a_i = \frac{(n-2)180°}{n} \Rightarrow a_i = \frac{(6-2)180°}{6} \Rightarrow a_i = 120°$$

O Δ AFE é isósceles e o segmento FG é mediatriz do segmento AE; logo, Δ AFG ≡ Δ EFG. Utilizando as relações trigonométricas no Δ AFG, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{\overline{AG}}{1} \Rightarrow \overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AE} = \overline{AG} + \overline{GE} \Rightarrow$$

$$\overline{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\overline{AE} = \sqrt{3}$$

Para determinar a medida da diagonal $\overline{AD}$, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no Δ AED. Assim:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 \Rightarrow$$

$$\overline{AD}^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 \Rightarrow$$

$$\overline{AD}^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\overline{AD} = 2$$

O hexágono possui $d = \dfrac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d = \dfrac{6\,.\,3}{2} \Rightarrow d = 9$ diagonais.

Entre as nove diagonais, seis medem $\sqrt{3}$ e três medem 2; logo, a soma dos quadrados de todas as diagonais é:

$$6\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3\,.\,2^2 = 18 + 12 = 30$$

Questão 16 – Letra B

Comentário: P, sendo um hexágono, tem $\dfrac{6\,.\,3}{2} = 9$ diagonais.

Como partem 9 diagonais de cada um dos vértices de **Q**, **Q** tem 12 lados. Assim, seu ângulo interno será de $\dfrac{180°\,.\,10}{12} = 150°$.

Seção Enem

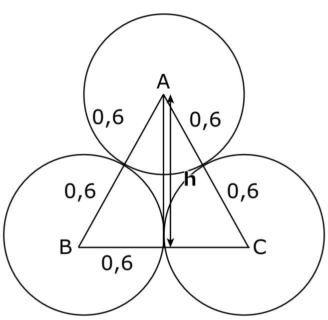
Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

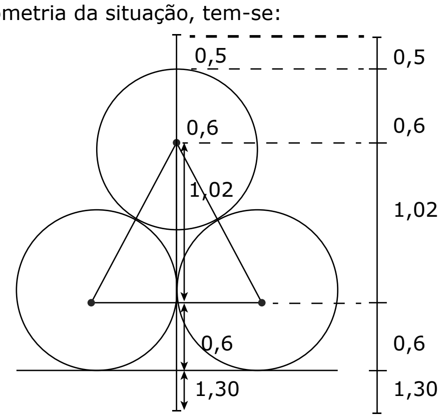
Comentário:



ABC é um triângulo equilátero de lado 1,2 cm. A altura **h** do triângulo é:

$$h = \frac{1{,}2\sqrt{3}}{2} = 0{,}6\sqrt{3} = 0{,}6 \cdot 1{,}7 = 1{,}02\text{ m}$$

Pela geometria da situação, tem-se:



0,5 + 0,6 + 1,02 + 0,6 + 1,30 = 4,02 m

A altura mínima do viaduto é 4,02 m.

Questão 02 – Letra B

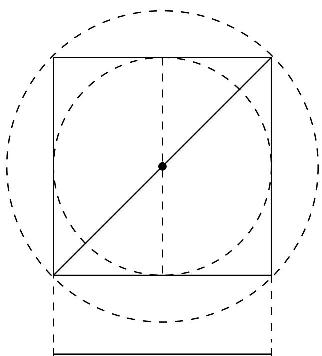
Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 3

Habilidade: 13

Comentário: Para que as outras peças não caibam na perfuração circular e a peça de base circular não caiba nas demais perfurações, o diâmetro da serra copo deve ser um valor **D** tal que esteja entre o diâmetro dos círculos inscritos e circunscritos às figuras dadas.

Analisando a perfuração de forma quadrada, tem-se:



Diâmetro círculo inscrito = 4 cm (lado).

Diâmetro círculo circunscrito = $4.\sqrt{2} = 5,4\,\text{cm}$ (diagonal).

Logo, 4 cm < D < 5,4 cm.

Portanto, deverá ser escolhida a serra copo de diâmetro 4,7 cm.

Questão 03 – Letra C

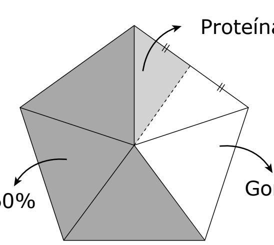
Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Calculando as áreas destinadas a carboidratos, gorduras e proteínas em cada um dos polígonos, verificamos que o único que atende à divisão pedida é o pentágono regular, como mostrado a seguir:

Unindo o centro do pentágono regular a cada um dos vértices, ele fica dividido em 5 triângulos congruentes, cada um com área igual a 20% da área do pentágono.



Os carboidratos ocupam 3 triângulos (60%), as gorduras ocupam um triângulo e meio (30%) e as proteínas ocupam meio triângulo (10%).

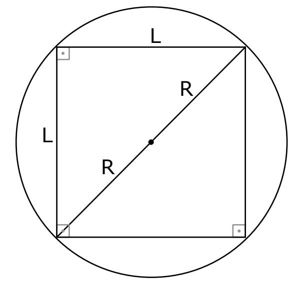
Questão 04 – Letra A

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Com base nos dados do enunciado, podemos extrair a seguinte figura:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo formado, temos:

$$(2R)^2 = (L)^2 + (L)^2 \Rightarrow 4R^2 = 2L^2 \Rightarrow$$

$$R^2 = \frac{L^2}{2} \Rightarrow R = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Perceba que na figura apresentada temos a situação-limite e, portanto, o valor de **R** poderá ser igual ou maior ao apresentado. Logo:

$$R \geq \frac{L}{\sqrt{2}}$$

MÓDULO – B 08

Circunferência

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra C

Comentário: A cada volta, a roda percorre 0,6π m. Assim, ela percorreu $\frac{900\pi}{0,6\pi} = 1\,500$ voltas.

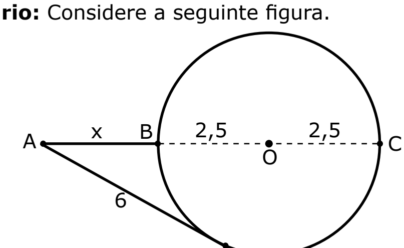
Questão 02 – Letra B

Comentário: A distância **d** pedida é um terço do comprimento de uma circunferência de raio 4,35 m, já que 20 minutos são um terço de uma hora:

$$d = \frac{1}{3}.4,35\,.\,2\,.\,3,1 \cong 9\text{ m}$$

Questão 03 – Letra E

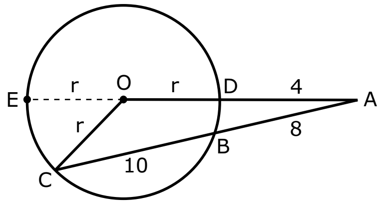
Comentário: Considere a seguinte figura.



Como as retas AC e AT são, respectivamente, secante e tangente à circunferência, temos:
$AT^2 = AB.AC \Rightarrow 6^2 = x(x + 5) \Rightarrow$
$x^2 + 5x - 36 = 0 \Rightarrow x = 4$ cm, pois $x > 0$.

Questão 04 – Letra E

Comentário: Considere a seguinte figura.



Trace o raio OE = r.

Como as retas AE e AC são concorrentes à circunferência, temos:

$AD.AE = AB.AC \Rightarrow 4.(4 + 2r) = 8 . 18 \Rightarrow$

r = 16, ou seja, OC = r = 16 cm

Assim, o perímetro 2p, em cm, do triângulo AOC mede:

2p = AO + OC + CA = (4 + 16) + 16 + (10 + 8) = 54 cm

Questão 05 – Letra B

Comentário: A distância total percorrida por ambas será igual, pelo tipo de transmissão do movimento, e valerá 90 . 600 = 54 000 cm. Logo, sendo **r** o raio procurado em centímetros:

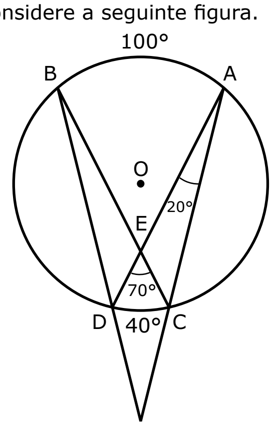
$$54\,000 = 1\,800 . 2\pi r \Rightarrow r = \frac{15}{\pi} \text{ cm}$$

Questão 06 – Letra E

Comentário: O número de voltas dadas pelo pneu da bicicleta pode ser dado pelo quociente entre a distância total percorrida e o comprimento da circunferência da roda. O diâmetro da roda, em cm, é dado por 26 . 2,5 = 65 cm. Assim, seu comprimento é de 0,65 . 3,1 = 2,015 m. O total de voltas percorridas será então $\frac{855,6}{2,015} \cong 425$.

Questão 07 – Letra E

Comentário: Considere a seguinte figura.



$$D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow 20° = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 40°$$

Como o ângulo $C\hat{E}D$ é excêntrico interior, temos:

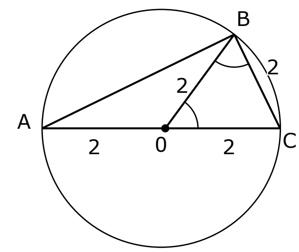
$$C\hat{E}D = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow 70° = \frac{\overset{\frown}{AB} + 40°}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 100°$$

Já o ângulo $A\hat{M}B$ é excêntrico exterior. Então:

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow A\hat{M}B = \frac{100° - 40°}{2} \Rightarrow A\hat{M}B = 30°$$

Questão 08 – Letra E

Comentário: De acordo com a figura, temos que $\overline{OB} = \overline{OC}$ = raio; logo, o triângulo OBC é equilátero de lado 2 m. Como o triângulo ABC é retângulo, calculemos o Teorema de Pitágoras:



$$4^2 = 2^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: A distância **d** percorrida pelo disco está relacionada com o número de voltas **n**, logo:

$$d = n.\left(2\pi.\underset{\text{Raio}}{R}\right) \underbrace{\Rightarrow}_{\pi = 3,14} d = 10.(2 . 3,14 . 1) \Rightarrow d = 62,8$$

Portanto, quando o disco completar 10 voltas, o ponto **P** estará em 62,8.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Seja **R** a medida do raio da Terra, temos que a distância percorrida pela sola dos pés de uma pessoa é igual a $2\pi R$. Se a pessoa tem 2 m de altura, a distância percorrida pelo topo de sua cabeça é de

$$2\pi(R + 2) \cong \overbrace{\text{Distância percorrida pela sola dos pés}}^{2\pi R} + 12,6$$

Portanto, o topo da cabeça teria percorrido 12,6 m a mais que a sola dos pés.

Questão 03 – Letra E

Comentário: Pela relação de potência de ponto da interseção de duas cordas:

$\cancel{6x}.(2x + 2) = \cancel{2x}.(8x - 2) \Rightarrow$
$6x + 6 = 8x - 2 \Rightarrow$
$x = 4$

Assim, as cordas medirão 8x + 2 = 8 . 4 + 2 = 34 cm e 10x – 2 = 10 . 4 – 2 = 38 cm.

Logo, o comprimento da maior corda vale 38 cm.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Pelas relações entre ângulos e arcos em uma circunferência, e notando que $\overset{\frown}{AP} = 360° - (194° + 100°) = 66°$, temos:

$$x = \frac{194° - 66°}{2} = 64°$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Como PQ é o lado de um hexágono regular, sua medida será igual ao raio da circunferência, que será então de 3 cm. Por outro lado, o arco menor determinado por **P** e **Q** mede 60°; dessa forma, a formiga percorreu um arco de medida 300° sobre a circunferência. Assim, a distância **d** percorrida será de $d = \frac{300°}{360°}.2\pi.3 = 5\pi$ cm.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Como $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$ olham para o mesmo arco, terão a mesma medida de 40°. Como $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$, $A\hat{C}B$ = 80°. Como $\overline{AB}$ = $\overline{AC}$, então $A\hat{B}C$ = 80°. Utilizando a relação angular no Δ ABC, temos: α + 80° + 80° = 180° $\Rightarrow$ α = 20°.

Questão 07 – Letra B

Comentário: Denotando por **x** a medida comum de $\widehat{BPC}$, $\widehat{CQD}$ e $\widehat{DRE}$, o arco $\widehat{BE}$ mede (360 – 3x)°. Pelas relações entre ângulos e arcos em uma circunferência, temos:

$$\frac{3x - (360° - 3x)}{2} = 60° \Rightarrow x = 80°$$

Como o vértice **E** do ângulo $B\hat{E}C$ está sobre a circunferência, sua medida será a metade da medida do arco para o qual olha, e assim medirá 40°.

Questão 08 – Letra C

Comentário: SP e RQ são segmentos de reta de medida 3, PQ um arco de raio 3 e medida 60° e RS um arco de raio 6 e medida 60°:

$$PQ = \frac{60°}{360°}.2\pi.3 = \pi$$

$$RS = \frac{60°}{360°}.2\pi.6 = 2\pi$$

Logo, o perímetro da região sombreada é igual a 2p = 3 + 3 + π + 2π = 3π + 6.

Questão 09 – Letra C

Comentário: A medida dos arcos maior e menor determinados por **A** e **B** sobre a circunferência será de 288° e 72°, respectivamente; isso pode ser facilmente observado pelo fato de que os vértices do pentágono dividem a circunferência em 5 arcos de mesma medida. Assim, a medida procurada é tal que $A\hat{P}B = \frac{288° - 72°}{2} = 108°$.

Questão 10 – Letra D

Comentário: O raio da circunferência percorrida pelo atleta da raia mais interna é de 36,70 m, enquanto para o atleta da raia mais externa será 36,70 + 8,00 = 44,70 m. No total, cada um percorre o comprimento inteiro de sua circunferência. Assim, a diferença **d** entre as distâncias percorridas por ambos será dada por:

$$d = 44,70 \,.\, 2 \,.\, 3,14 - 36,70 \,.\, 2 \,.\, 3,14 = 8 \,.\, 2 \,.\, 3,14 = 50,24 \text{ m}$$

Questão 11 – Letra C

Comentário: Observe que BD = BE e DC = CF. Ademais, AE = AF = 20 cm. Todas essas relações foram deduzidas utilizando-se potência de ponto. Perceba que o perímetro procurado é 2p = AB + BD + DC + AC = (AB + BE) + (CF + AC) = AE + AF = 20 + 20 = 40 cm.

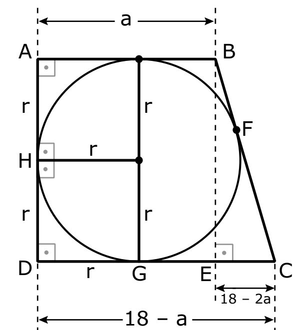
Questão 12 – Letra B

Comentário:

$$A\hat{B}C = \frac{300° - 60°}{2} = 120° \Rightarrow O\hat{D}B = 60° \Rightarrow F\hat{D}E = 60° = D\hat{E}F = 30°$$

Questão 13 – Letra C

Comentário: Seja um trapézio retângulo ABCD circunscritível:



O comprimento do menor lado de um trapézio retângulo é sempre a base menor. Daí:

AB + CD = 18 $\Rightarrow$
a + CD = 18 $\Rightarrow$
CD = 18 – a e
BC – AD = 2 $\Rightarrow$
BC – 2r = 2 $\Rightarrow$
BC = 2r + 2
Como o quadrilátero ABCD é circunscritível, temos:
AB + CD = AD + BC $\Rightarrow$ a + 18 – a = 2r + 2r + 2 $\Rightarrow$ r = 4
Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BEC, temos:
$BC^2 = EC^2 + BE^2 \Rightarrow$
$(2r + 2)^2 = (18 - 2a)^2 + (2r)^2 \Rightarrow$
$(10)^2 = (18 - 2a)^2 + (8)^2 \Rightarrow$
a = 6, pois a > 0
Portanto, a + r = 6 + 4 = 10 cm.

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Observa-se que os raios associados aos pontos T_1, T_2 e T_3 são, respectivamente, iguais a 50 m, 100 m e 150 m. Representando as velocidades de T_1, T_2 e T_3 por V_{T_1}, V_{T_2}, V_{T_3}, tem-se:

$$V_{T_1} = \frac{2\pi.50}{25} = \frac{2.3.50}{25} = 12 \text{ m/h}$$

$$V_{T_2} = \frac{2\pi.100}{25} = \frac{2.3.100}{25} = 24 \text{ m/h}$$

$$V_{T_3} = \frac{2\pi.150}{25} = \frac{2.3.150}{2\pi} = 36 \text{ m/h}$$

MATEMÁTICA

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Como o papel é enrolado 5 vezes em torno do cilindro, seu comprimento será 5 vezes o comprimento do cilindro, ou seja, $5.2\pi r \underbrace{=}_{2r = d} 5\pi d$.

Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Quando AC medir **R**, o triângulo AFC será equilátero, pois FC = FA = R. Logo, o ângulo medirá 60°.

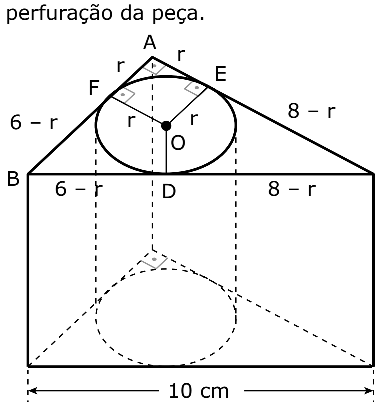
Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Considere a figura a seguir, em que **r**, em cm, é o raio da perfuração da peça.



O triângulo ABC é retângulo, pois $10^2 = 6^2 + 8^2$.

Logo, OE = OF = AE = AF = r. Daí:

CE = 8 – r e BF = 6 – r

Assim:

CD = CE = 8 – r e BD = BF = 6 – r, pois CD e CE e BD e BF são segmentos tangentes à circunferência.

Portanto, $6 - r + 8 - r = 10 \Rightarrow r = 2$ cm.

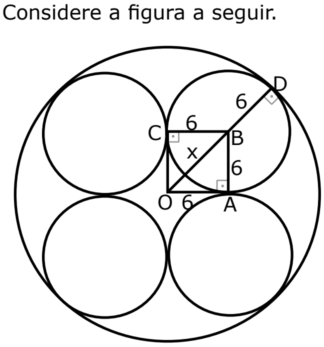
Questão 05 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Considere a figura a seguir.



Seja **B** o centro de uma das circunferências menores. Trace os raios BC, BA e BD = AO = BC, pois OABC é um quadrado. Seja BO = x.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OAB, temos:

$x^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$, pois $x > 0$

Logo, o raio do maior tubo vale:

$OD = 6 + x = 6 + 6\sqrt{2} = 6\left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm

MÓDULO – C 05

Médias

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra B

Comentário: Pela definição dada no enunciado:

$$\mu = \frac{2\,.\,5 + 3\,.\,7}{5} = 6{,}2$$

Questão 02 – Letra E

Comentário: A média procurada é tal que:

$$\mu = \frac{2\,.\,1 + 3\,.\,4 + 4\,.\,4 + 5\,.\,6 + 6\,.\,5 + 7\,.\,8 + 8\,.\,8 + 9\,.\,4}{1 + 4 + 4 + 6 + 5 + 8 + 8 + 4} \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{2 + 12 + 16 + 30 + 30 + 56 + 64 + 36}{40} = \frac{246}{40} = 6{,}15$$

Questão 03

Comentário: O cliente pagou R$ 18,50 quatro vezes na semana e R$ 22,00 três vezes. Assim, para encontrar a média dos valores pagos por ele, devemos calcular a média ponderada de 18,50 e 22,00, sendo que o primeiro tem peso quatro e o segundo, peso três. Assim:

$$M = \frac{(18{,}5\,.\,4) + (22\,.\,3)}{4 + 3} = \frac{140}{7} = 20 \text{ reais}$$

Questão 04 – Letra B

Comentário: A média pedida é dada por:

$$\mu = \frac{1410 + 1400 + 1536 + 1352 + 1666}{47 + 50 + 48 + 52 + 49} = \frac{7364}{246} \approx 29{,}9$$

Assim, a média é inferior a 30.

Questão 05 – Letra B

Comentário: Como a velocidade média é dada pela média harmônica das velocidades ao longo do percurso, temos:

$$V = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{100}} \Rightarrow V = \frac{2}{\frac{5 + 3}{300}} \Rightarrow V = 75$$

Portanto, a velocidade média desse veículo no percurso inteiro foi de 75 km/h.

Questão 06 – Letra A

Comentário: Como a média salarial inicial é de 3 500 reais, a soma dos salários será de 3 500 . 22 = 77 000. Com a contratação dos três novos funcionários, a soma dos salários passará a ser 77 000 + 900 + 1 200 + 1 800 = 80 900 reais. Assim, a nova média salarial será, em reais, de $\mu = \frac{80\,900}{25} = 3\,236{,}00$.

Questão 07 – Letra A

Comentário: A média, em geral, é calculada como a razão entre a soma dos valores dos elementos de uma amostra e a quantidade de elementos da amostra. No caso em tela, a amostra é formada pelas notas dos alunos. Assim, a média **M** pedida é tal que:

$$M = \frac{60\,.\,5{,}0 + 50\,.\,4{,}0 + 40\,.\,7{,}0 + 50\,.\,3{,}0}{60 + 50 + 40 + 50} \Rightarrow$$

$$M = \frac{300 + 200 + 280 + 150}{200} = 4{,}65$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: A soma dos salários da empresa, inicialmente, será de 3 200 . 100 = 320 000 reais. A soma dos salários dos empregados dispensados será de 20 . 4 000 = 80 000 reais. Então, a soma dos salários dos 100 – 20 = 80 funcionários que restaram na empresa é de 320 000 – 80 000 = 240 000 reais. A média salarial ao final será portanto de $\mu = \frac{240\,000}{80} = 3\,000$ reais.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário: Chamemos de **x** o número total de pagamentos. Assim, 0,24x pagamentos foram feitos com cheque e 0,46x com cartão. Observe que, como estamos calculando a média apenas para pagamentos com cartões ou cheque, a quantidade total de pagamentos será 0,24x + 0,46x = 0,7x. Assim:

$$M = \frac{0{,}24x\,.\,623 + 0{,}46x\,.\,65}{0{,}70x} = \frac{149{,}52x + 29{,}90x}{0{,}70x} \approx 256$$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Sendo **x** a menor nota que garante a aprovação do aluno, tem-se:

$$\frac{2x + 3\left(\frac{4\,.\,2 + 6\,.\,3}{2+3}\right)}{2+3} = 5 \Rightarrow\ 2x + 3\,.\,\frac{26}{5} = 25 \ \Rightarrow$$

$$2x = \frac{47}{5} \Rightarrow\ x = 4{,}7$$

Questão 03 – Letra C

Comentário: O preço médio é a média dos preços praticados por cada barraca:

$$\mu = \frac{\frac{48}{1} + \frac{44}{0{,}8} + \frac{45}{1} + \frac{48}{1} + \frac{40}{0{,}8} + \frac{40}{0{,}8}}{6} \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{48 + 55 + 45 + 48 + 50 + 50}{6} = \frac{296}{6} \cong 49$$

Questão 04 – Letra C

Comentário: Assumindo que o preço por quilo de cada mistura de cafés é a média ponderada dos preços dos cafés I e II, em relação à quantidade destes na mistura, temos, chamando de **x** o preço por quilo do café I e de **y** o preço por quilo do café II:

$$\frac{2x+3y}{2+3} = 6{,}80 \Rightarrow 2x + 3y = 34 \ (\text{I})$$

$$\frac{3x+2y}{3+2} = 8{,}20 \Rightarrow 3x + 2y = 41 \ (\text{II})$$

$$(\text{I}) + (\text{II}) \Rightarrow 5x + 5y = 75 \Rightarrow 2x + 2y = 30 \ (\text{III})$$

$$(\text{II}) - (\text{III}) \Rightarrow x = 11$$

Questão 05 – Letra D

Comentário: O peso da atleta será calculado por meio da média aritmética, que foi dada, dos pesos das 122 atletas participantes. Logo:

$$62 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{122}}{122} \Rightarrow$$

$7\,564 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{121} + x_{122}$ (I)

Como uma atleta foi excluída do grupo, a média passou a ser 61,9 kg, ou seja:

$$61{,}9 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{121}}{121} \Rightarrow$$

$7\,489{,}9 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{121}$ (II)

Substituindo II em I, temos:

$7\,564 = 7\,489{,}9 + x_{122} \Rightarrow x_{122} = 74{,}1$

Portanto, a atleta excluída pesa 74,1 kg.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Sendo **S** a soma das notas dos homens, a soma das notas das garotas será 2S. Sendo **M** a média da classe, a média das garotas será (M + 1). Pela definição de média, temos:

$$M = \frac{S + 2S}{8+6} = \frac{3S}{14} \ (\text{I})$$

$$M + 1 = \frac{2S}{8} = \frac{S}{4} \ (\text{II})$$

$(\text{II}) - (\text{I})$:

$$1 = \frac{S}{4} - \frac{3S}{14} = \frac{S}{28} \ \Rightarrow S = 28$$

Logo, a média dos homens será $\frac{28}{6} \approx 4{,}7$.

Questão 07 – Letra C

Comentário: Seja S(47) a soma dos 47 números remanescentes e **S** a média aritmética dos 50 números, temos:

$$S = \frac{S(47) + 75 + 125 + 155}{50} = 40 \Rightarrow$$

$$S = S(47) + 355 = 2\,000 \Rightarrow$$

$$S(47) = 1\,645 \Rightarrow \frac{S(47)}{47} = \frac{1\,645}{47} = 35$$

Questão 08 – Letra C

Comentário: Chamemos de S_1 a soma das notas dadas pelo primeiro conjunto de entrevistados e de S_2 a soma das notas dadas na segunda etapa da pesquisa, pelos **n** entrevistados. Pela definição de média, temos:

$$M_1 = \frac{S_1}{n} \Rightarrow 7 = \frac{S_1}{1\,000} \Rightarrow S_1 = 7\,000$$

MATEMÁTICA

A média total será dada por:

$$M_t = 8 = \frac{S_1 + S_2}{1\ 000 + n} = \frac{7\ 000\ +\ S_2}{1\ 000 + n}\ \text{(I)}$$

Como a média aumentou, é imediato que ela aumentará de forma mais rápida se todos da segunda etapa derem nota 10 para o doce, ou seja, se a média das notas da segunda etapa for dez. Assim, para a hipótese de número mínimo de entrevistados na segunda etapa, temos:

$$10 = \frac{S_2}{n} \Rightarrow S_2 = 10n\ \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$8 = \frac{7\ 000 + 10n}{1\ 000 + n} \Rightarrow n = 500$$

Questão 09 – Letra D

Comentário: O peso das três provas são respectivamente de 1, 4 e 9. Como se deseja que o aluno seja aprovado independentemente das notas tiradas nas outras provas, ou seja, tirando zero tanto na P_1 como na P_2, tem-se que o conjunto de notas **x** da P_3 que satisfaz essa condição é dado por:

$$\frac{0\ .\ 1 + 0\ .\ 4 + x\ .\ 9}{1 + 4 + 9} = \frac{9x}{14} \geq 5{,}4 \ \Rightarrow\ x \geq 8{,}4$$

Questão 10 – Letra E

Comentário: Pelas informações do enunciado, sendo **a** e **b** os números procurados:

$$\frac{a+b}{2} = 4{,}1 \Rightarrow a + b = 8{,}2 \Rightarrow a = 8{,}2 - b\ \text{(I)}$$
$$\sqrt{ab} = 4 \Rightarrow ab = 16\ \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II):

$$b(8{,}2 - b) = 16$$
$$b^2 - 8{,}2b + 16 = 0$$
$$\Delta = 3{,}24$$
$$b = \frac{8{,}2 \pm 1{,}8}{2} \Rightarrow b = 5 \ \text{ou}\ b = 3{,}2$$

Logo, o maior dos números procurados é 5.

Questão 11 – Letra D

Comentário: Considerando que a classe tem **n** alunos, haverá 0,9n homens e 0,1n mulheres, as quais tiraram, cada uma, uma nota **x**. Como a média dos homens foi 83, pela definição de média, temos:

$$M_h = 83 = \frac{S_h}{0{,}9n} \Rightarrow$$
$$S_h = 74{,}7n\ \text{(I)}$$

É imediato que a soma das notas das mulheres é o produto da nota de cada uma pela quantidade destas, ou seja, S_m = 0,1nx. Assim, a média total será:

$$M_t = 84 = \frac{S_t}{n} = \frac{S_h + S_m}{n} = \frac{74{,}7n + 0{,}1nx}{n} \Rightarrow$$
$$84n = 74{,}7n + 0{,}1nx \Rightarrow$$
$$x = 93$$

Questão 12 – Letra C

Comentário: Como os cinco números são positivos, o menor deles necessariamente é **x**. Assim, pela condição de o valor da média ser aumentado de 7 unidades, retirando-se **x**, temos:

$$\frac{(2x) + (x + 10) + (3x + 10) + 4x}{4} - \frac{(2x) + (x + 10) + x + (3x + 10) + 4x}{5} = 7$$
$$\frac{10x + 20}{4} - \frac{11x + 20}{5} = 7 \Rightarrow 2{,}5x + 5 - 2{,}2x - 4 = 7 \Rightarrow$$
$$0{,}3x = 6 \Rightarrow x = 20$$

O maior elemento será 4x = 80 e o menor x = 20, cuja diferença é 60.

Questão 13 – Letra C

Comentário: Sejam x_1, x_2, x_3 as idades dos jogadores mais novos e x_4 a idade do segundo jogador mais velho do time e x_5 a idade do jogador mais velho. Calculando a média aritmética das idades dos jogadores, temos que:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} \Rightarrow$$
$$13 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 17}{5} \Rightarrow$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 17 = 5\ .\ 13 \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 48$$

Para que a idade do segundo mais velho seja a maior possível, a idades dos três mais novos deverão ser as menores possíveis. Logo, devemos considerar que os três jogadores mais novos têm 11 anos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 48 \Rightarrow$$

$$11 + 11 + 11 + x_4 = 48 \Rightarrow$$

$$x_4 = 48 - 33 = 15$$

Questão 14 – Letra D

Comentário: Como há 20 alunos cujo conjunto de notas deve ter média superior a 7,50, a soma das notas dos alunos deve ser maior ou igual a 7,5 . 20 = 150. A soma das notas dos dezenove alunos que não Joana é igual a 7,6 . 19 = 144,4. Logo, a nota final de Joana deve ser maior ou igual a 150 – 144,4 = 5,60. O conjunto de notas **x** na segunda chamada que satisfazem tal condição é dado por:

$$\frac{2\ .\ 7 + 3\ .\ 5 + 5x}{10} \geq 5{,}60 \Rightarrow$$
$$14 + 15 + 5x \geq 56 \Rightarrow$$
$$x \geq 5{,}40$$

Questão 15 – Letra A

Comentário: Pelas informações do enunciado e sendo **z** a média procurada:

$$x = \frac{a + b + c}{3} \Rightarrow y = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \Rightarrow z = \frac{2ab + 2ac + 2bc}{3}$$

Elevando a primeira equação ao quadrado:

$$x^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{9} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} + \frac{2(ab + ac + bc)}{9} \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}{3} + \frac{\frac{2ab + 2ac + 2bc}{3}}{3} = \frac{y}{3} + \frac{2z}{3} \Rightarrow 3x^2 = y + 2z \Rightarrow$$

$$z = \frac{3x^2 - y}{2}$$

Questão 16 – Letra D

Comentário: Seja **x** e **y** a soma dos números das cartas de Pedro e Luíza, respectivamente, então:

Média de Pedro = $\frac{x}{5} = 6 \Rightarrow x = 30$

Média de Luíza = $\frac{y}{5} = 4 \Rightarrow y = 20$

Considerando que na primeira rodada Pedro passou uma carta com número z para Luíza e Luíza passou uma carta para Pedro que estava escrito o número 1. Se a média aritmética de Pedro após a troca passou a ser 4,8, temos que:

$$\frac{x - z + 1}{5} = 4{,}8 \Rightarrow \frac{31 - z}{5} = 4{,}8 \Rightarrow z = 7$$

Logo, o número da carta que Pedro passou para Luíza era 7.

Questão 17 – Letra A

Comentário: Seja **S** a média aritmética dos jogadores titulares, S(5) a soma dos 5 jogadores remanescentes do time titular, S' a média aritmética da idade dos reservas, S'(5) a soma das idades dos jogadores reservas que não entraram no sexteto titular, **x** a idade do jogador reserva que entrou no sexteto titular e **y** a idade do jogador titular afastado, então, temos:

$$S' = \frac{S'(5) + x}{6} = 24 \Rightarrow S'(5) + x = 144 \quad (I)$$

$$\frac{S'(5)}{5} = 24{,}8 \Rightarrow S'(5) = 124 \quad (II)$$

Substituindo II em I, temos:

$124 + x = 144 \Rightarrow x = 20$

Agora, avaliando as idades do time titular, temos:

$$S - 1 = \frac{S(5) + 20}{6} = 26 \Rightarrow S(5) + 20 = 156 \Rightarrow S(5) = 136 \text{ (III)}$$

$$S = \frac{S(5) + y}{6} = 27 \Rightarrow S(5) + y = 162 \quad (IV)$$

Substituindo II em IV, temos:
$136 + y = 162 \Rightarrow x = 26$ anos.

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 7

Habilidade: 27

Comentário:

$$\text{Média} = \frac{0.50 + 1.17 + 2.15 + 3.10 + 4.6 + 5.2}{100} = \frac{111}{100} = 1{,}11$$

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 7

Habilidade: 27

Comentário: A média é dada por:

$$M = \frac{0{,}2 \,.\, 46 + 0{,}1 \,.\, 60 + 0{,}3 \,.\, 50 + 0{,}4 \,.\, x}{0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4} = 60 \Rightarrow$$

$9{,}2 + 6 + 15 + 0{,}4x = 60 \Rightarrow$

$30{,}2 + 0{,}4x = 60 \Rightarrow$

$0{,}4x = 29{,}8 \Rightarrow$

$x = 74{,}5$

Portanto, ele precisa obter no mínimo 74,5 pontos.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Como o diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros, calcula-se a média.

$$\overline{X} = \frac{37 + 33 + 35 + 22 + 30 + 35 + 25}{7} \Rightarrow$$

$$\overline{X} = \frac{217}{7} \Rightarrow$$

$$\overline{X} = 31$$

Assim, o mês em que o lucro mais se aproximou da média foi o mês V.

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: A média final das cinco etapas corresponde à média aritmética ponderada entre:

1) A média nas quatro primeiras etapas;
2) A pontuação na quinta etapa, com pesos 4 e 1, respectivamente.

Calculando a média final de cada candidato, teremos:

$$M_A = \frac{90 \,.\, 4 + 60 \,.\, 1}{5} = 84$$

$$M_B = \frac{85 \,.\, 4 + 85 \,.\, 1}{5} = 85$$

$$M_C = \frac{80 \,.\, 4 + 95 \,.\, 1}{5} = 83$$

$$M_D = \frac{60 \,.\, 4 + 100 \,.\, 1}{5} = 66$$

$$M_E = \frac{60 \,.\, 4 + 100 \,.\, 1}{5} = 68$$

A ordem de classificação no concurso é, portanto: B, A, C, E, D.

MATEMÁTICA

Questão 05 – Letra A

Eixo cognitivo: V

Competência de área: 7

Habilidade: 30

Comentário: Calculando as médias dos candidatos (I) e (III), temos:

$$M_I = \frac{20 . 4 + 23 . 6}{10} = 21,8$$

$$M_{III} = \frac{21 . 4 + 18 . 6}{10} = 19,2$$

Para ganhar, a média de (II) deve ser maior que 21,8:

$$\frac{4x + 6 . 25}{10} > 21,8 \Rightarrow x > 17$$

Assim, a menor nota inteira que (II) deve tirar é 18.

Questão 06 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Calculando a média para cada reagente, temos:

$$M_1 = \frac{1 + 6 + 6 + 6 + 11}{5} = 6$$

$$M_2 = \frac{0 + 6 + 7 + 6 + 5}{5} = 4,8$$

$$M_3 = \frac{2 + 3 + 8 + 10 + 11}{5} = 6,8$$

$$M_4 = \frac{2 + 4 + 7 + 8 + 12}{5} = 6,6$$

$$M_5 = \frac{1 + 2 + 9 + 10 + 11}{5} = 6,6$$

Por inspeção, percebe-se que a média do reagente 2 foi, em quatro oportunidades, acima da média, ficando apenas o experimento 1 abaixo da média.

Questão 07 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: O desmatamento médio por estado em 2004 era:

$$A_{2004} = \frac{4 + 136 + 326 + 549 + 766 + 797 + 3\,463 + 7\,293 + 10\,416}{9} \Rightarrow$$

$A_{2004} \cong 2\,638,9$ km²

Considerando que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5% em relação a 2004, essa média passou para:

$A_{2009} = A_{2004} . 1,105 \Rightarrow$

$A_{2009} = 2\,638,9 . 1,105 \Rightarrow$

$A_{2009} \cong 2\,916$ km², ou seja, valor entre 2 800 km² e 3 200 km².

MÓDULO – C 06

Trigonometria no Triângulo Retângulo

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra A

Comentário: $\dfrac{\cos 45° + \text{sen} 30°}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} + 1$

Questão 02 – Letra E

Comentário: Sendo **x** a extensão de cada degrau o cateto adjacente a 30° no triângulo retângulo maior da figura terá medida 6x. Assim:

$$\text{tg } 30° = \frac{2}{6x} = \frac{1}{3x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3x} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ m}$$

Questão 03 – Letra D

Comentário: Sendo **x** a distância entre a parede e a escada, que será o cateto oposto ao ângulo de 30° no triângulo retângulo formado por escada, parede e chão:

$$\text{sen } 30° = \frac{x}{7} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{7} \Rightarrow x = 3,5 \text{ m}$$

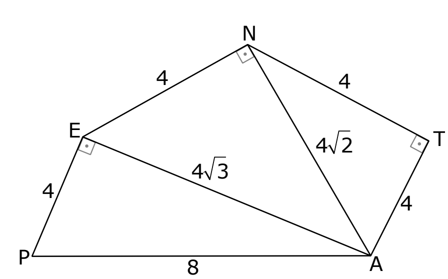
Questão 04 – Letra A

Comentário: O segmento imaginário ligando o olho do observador e o cume da torre forma um ângulo de 30° com o solo, e será a hipotenusa do triângulo retângulo que tem como catetos o segmento ligando o olho do observador com a base da torre e a torre em si. Sendo **h** a altura da torre:

$$\text{tg } 30° = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 100.\text{tg } 30° \text{ m}$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir que ilustra a situação descrita no enunciado:



Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos da figura, temos:

$\overline{NA} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

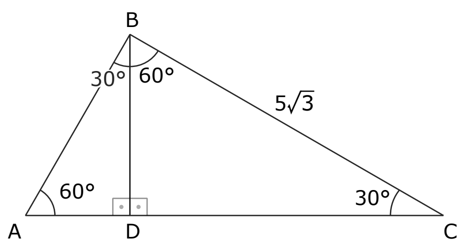
$\overline{EA} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{3}$

$\overline{PA} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8$

$2p = 4 + 4 + 4 + 4 + 8 = 24$ cm.

Questão 06 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir que ilustra a situação descrita pelo enunciado:



Os ângulos da figura foram derivados com base na relação da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Assim, no triângulo retângulo BDC:

$$\text{sen } 60° = \frac{\overline{DC}}{5\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{DC}}{5\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\overline{DC} = \frac{15}{2}$$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Inicialmente:

$$\text{tg } 30° = \frac{2,5}{x} \Rightarrow 0,577 = \frac{2,5}{x} \Rightarrow x \approx 4,33 \text{ m}$$

Na segunda situação:

$$\text{tg } 45° = \frac{2,5}{y} \Rightarrow 1 = \frac{2,5}{y} \Rightarrow y = 2,5 \Rightarrow$$

Logo, $x - y \cong 1,83$ m.

Questão 08 – Letra A

Comentário: Sendo **h** a altura do prédio e **x** a distância horizontal do observador ao prédio na segunda situação, tem-se:

$$\text{tg } 45° = 1 = \frac{h - 1,7}{x} \Rightarrow$$

$$x = h - 1,7$$

$$\text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h - 1,7}{x + 3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{x + 3} \Rightarrow$$

$$x\sqrt{3} = x + 3 \Rightarrow$$

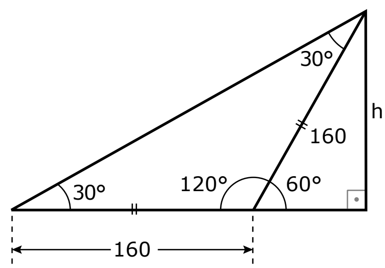
$$x = \frac{3}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{2} \cong 4,0 \text{m} \Rightarrow$$

$$h \cong 5,6 \text{ m}$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Observe a figura a seguir:



$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{160} \Rightarrow$$

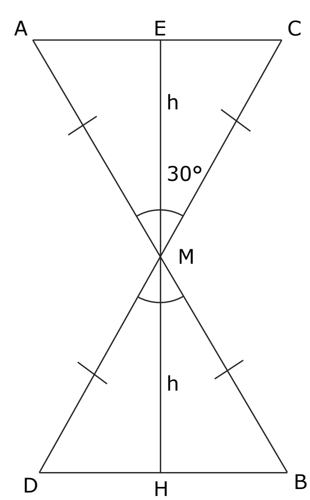
$$2h = 160\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$h = 80\sqrt{3} \text{ m}$$

Sabemos que a altura do teodolito é de 1,5 metro, logo a altura do morro é igual a $80\sqrt{3} + 1,5$ metros.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir que ilustra a situação descrita pelo enunciado:



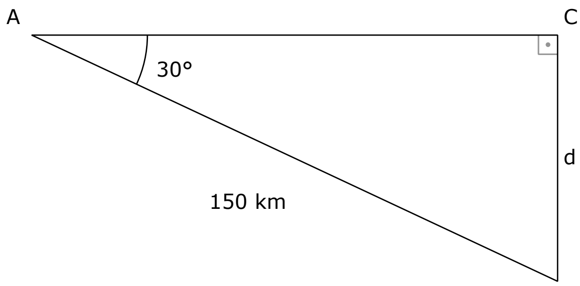
Como o triângulo AMC é isósceles de base $\overline{AC}$, a altura também é bissetriz e os ângulos são como mostrados na figura. A distância pedida pode ser dada por $\overline{ME}$, que denotamos por **h**, somado com $\overline{HM}$, que por simetria também medirá **h**. Utilizando relações trigonométricas no triângulo MEC, temos:

$$\cos 30° = \frac{h}{0,5} \Rightarrow h = 0,5.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{4} \cong 0,425 \text{ m}$$

Portanto, a altura do tampo dessa mesa armada em relação ao plano do chão corresponde a 0,425 . 2 = 0,85 m, ou, 85 cm.

Questão 03 – Letra A

Comentário: Como a velocidade é constante de 50km/h, após 3 horas, o móvel terá percorrido 150 km.



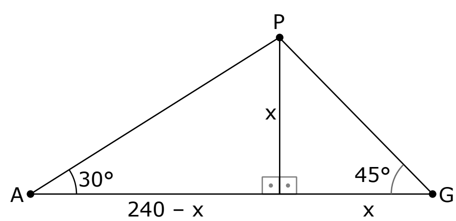
Seja **d** a distância procurada:

$$\text{tg } 30° = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 100.\text{tg } 30°.$$

Portanto, após 3 h o móvel estará a uma distância de 75 km da reta AC.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir que ilustra a situação descrita no enunciado.



Sendo **x** a altura procurada, temos:

$$\text{tg } 30° = \frac{x}{240 - x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{240 - x} \Rightarrow$$

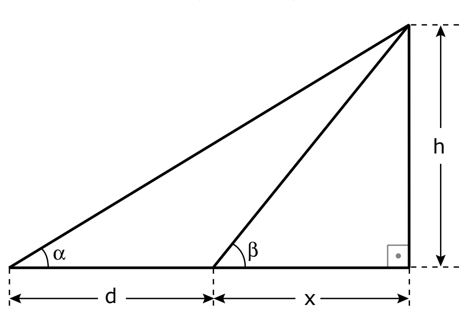
$$x\sqrt{3} = 240 - x \Rightarrow$$

$$x\left(1 + \sqrt{3}\right) = 240 \Rightarrow$$

$$x = \frac{240}{\left(1 + \sqrt{3}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\left(\sqrt{3} - 1\right)} = 120.\left(\sqrt{3} - 1\right) \text{ m}$$

Questão 05 – Letra A

Comentário: Observe a figura a seguir:



Temos que:

$$\begin{cases} \text{tg } \beta = \dfrac{h}{x} \Rightarrow x = \dfrac{h}{\text{tg } \beta} \quad \text{(I)} \\ \text{tg } \alpha = \dfrac{h}{d + x} \Rightarrow h = d.\text{tg } \alpha + x.\text{tg } \alpha \ \text{(II)} \end{cases} \Rightarrow$$

Substituindo (I) em (II):

$$h = d.\text{tg } \alpha + \frac{h}{\text{tg } \beta}.\text{ tg } \alpha \Rightarrow$$

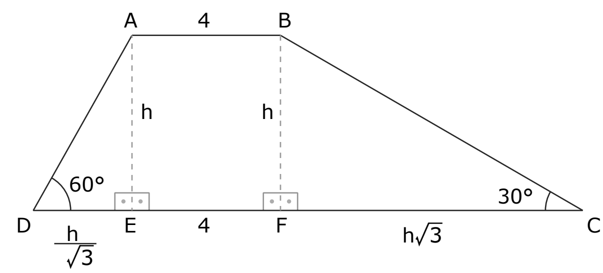
$$h.\text{tg } \beta = d.\text{tg } \alpha.\text{tg } \beta + h.\text{tg } \alpha \Rightarrow$$

$$h(\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) = d.\text{tg } \alpha.\text{tg } \beta \Rightarrow$$

$$h = \frac{d.\text{tg } \alpha.\text{tg } \beta}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$$

Questão 06 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir que ilustra a situação descrita pelo enunciado:



Temos que $\overline{CF} + \overline{DE} = 8$. Pelo uso das relações de tangente nos triângulos retângulos ADE e BFC, temos que $\overline{DE} = \frac{h}{\sqrt{3}}$ e $\overline{CF} = h\sqrt{3}$. Portanto:

$$\frac{h}{\sqrt{3}} + h\sqrt{3} = 8 \Rightarrow$$

$$\frac{4h\sqrt{3}}{3} = 8 \Rightarrow$$

$$h = 2\sqrt{3}$$

Calculando as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$:

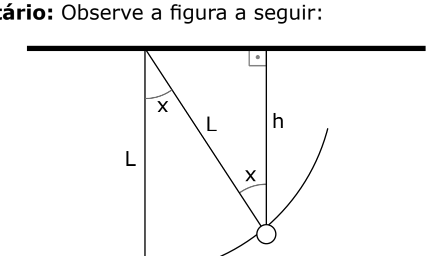
$$\text{sen } 30° = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AD} = 4$$

Logo, o perímetro do trapézio é igual a $2p = 4 + 12 + 4 + 4\sqrt{3} = 20 + 4\sqrt{3}$ cm.

Questão 07 – Letra A

Comentário: Observe a figura a seguir:



Sendo **h** a altura procurada, temos:

$\cos x = \dfrac{h}{L} \Rightarrow h = L . \cos x$

Questão 08 – Letra B

Comentário: Seja **a** e **b** a medida dos catetos do triângulo retângulo, e **c** a medida da hipotenusa, temos:

$\dfrac{a}{b} = \text{tg } \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo:

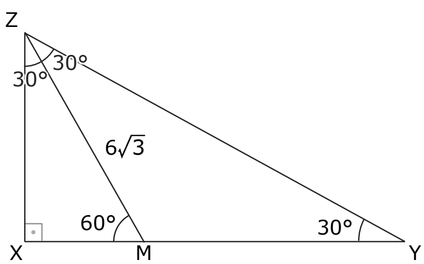
$c^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

$c = \sqrt{3}$

Logo, $\text{sen } \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Questão 09 – Letra A

Comentário: Considere a imagem a seguir para a resolução do problema:



- Como $Z\hat{X}Y = 90°$ e $X\hat{Y}Z = 30°$, temos $Y\hat{Z}X = 60°$.
- Como $\overline{ZM}$ é bissetriz, $X\hat{Z}M = M\hat{Z}Y = 30°$.
- Como o triângulo ZMY é isósceles, $\overline{ZM} = \overline{MY} = 6\sqrt{3}$ m.

Com base nessas informações, temos:

$\text{sen } 30° = \dfrac{\overline{XM}}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{1}{\cancel{2}} = \dfrac{\overline{XM}}{\cancel{6}\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{XM} = 3\sqrt{3}\,\text{m}$

$\text{sen } 60° = \dfrac{\overline{XZ}}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \dfrac{\overline{XZ}}{\cancel{6}\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{XZ} = 9\,\text{m}$

$\text{sen } 30° = \dfrac{\overline{XZ}}{\overline{YZ}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{\overline{YZ}} \Rightarrow \overline{YZ} = 18\text{ m}$

Portanto, o perímetro do triângulo é dado por:

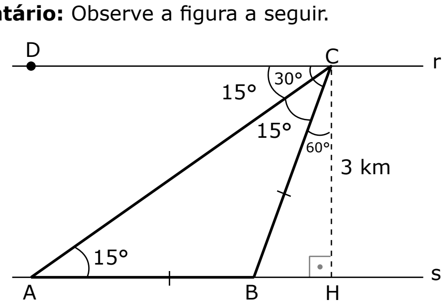
$9 + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 18 = \left(27 + 9\sqrt{3}\right)\text{ m}$

Usando 1,73 como aproximação para $\sqrt{3}$, temos:

$27 + 9\sqrt{3} \cong 27 + 9 . 1{,}73 = 27 + 15{,}57 = 42{,}57\text{ m}$

Questão 10 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir.



As retas **r** e **s** são paralelas cortadas por uma transversal AC, então $D\hat{C}A = B\hat{A}C$, ou seja, $B\hat{A}C = 15°$.

Sabemos que $A\hat{C}B = 30° - 15° = 15°$.

Logo, o triângulo ABC é isósceles de base AC, ou seja, BC = AB.

Sabemos também que $B\hat{C}H = 90° - 30° = 60°$.

Analisando o triângulo BHC, temos:

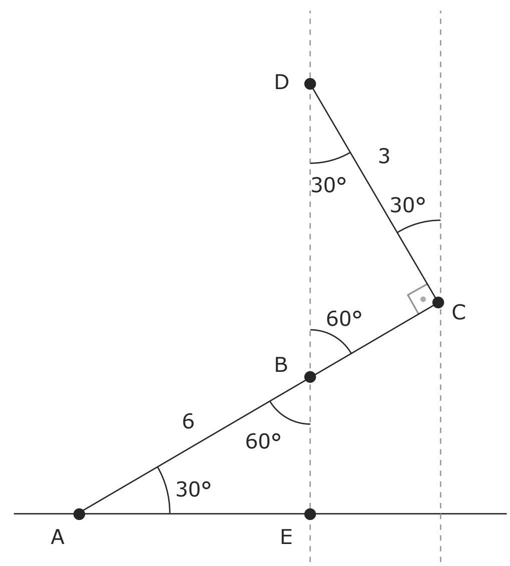
$\cos 60° = \dfrac{HC}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{HC}{\cos 60°}$

Como BC = AB, temos:

$AB = \dfrac{HC}{\cos 60°} \Rightarrow AB = \dfrac{3}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AB = 6\text{ km}.$

Questão 11 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir que ilustra a situação descrita pelo enunciado:



Para encontrar as medidas de $\overline{BD}$ e $\overline{BE}$, serão usadas as relações trigonométricas nos triângulos retângulos DBC e ABE, respectivamente:

$\text{sen } 30° = \dfrac{\overline{BE}}{6} \Rightarrow \overline{BE} = 3\,\text{cm} \Rightarrow$

$\text{sen } 60° = \dfrac{3}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD} = 2\sqrt{3}\text{ cm}$

$\overline{DE} = \overline{DB} + \overline{BE} = \left(3 + 2\sqrt{3}\right)\text{ cm}$

Seção Enem

Questão 01 – Letra C

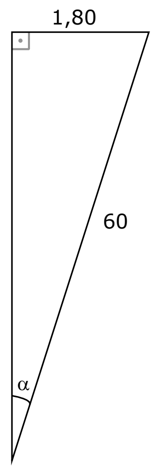
Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Como o prédio tem uma inclinação α em relação à sua posição original, podemos esboçar um triângulo retângulo:

MATEMÁTICA



E é possível calcular $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1,8}{60} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0,03$.

Dessa forma, de acordo com as informações da tabela, podemos afirmar que $0,026 \leq \text{sen}\ \alpha < 0,031$ e, portanto, $1,5 \leq \alpha < 1,8$.

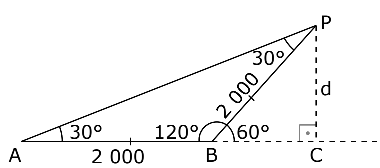
Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Mantendo a mesma trajetória, a menor distância, em metros, do barco até o ponto **P** é dada por **d**. Assim:



$$\text{sen } 60° = \frac{d}{2\ 000} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{2}.2\ 000 \Rightarrow d = 1\ 000\sqrt{3}\text{ m}$$

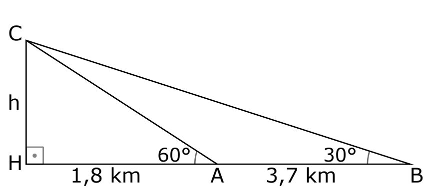
Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Seja **C** a localização do balão e h = CH sua altura, conforme a figura a seguir:



Como o ângulo $C\hat{A}B$ mede 120° (pois é suplementar ao ângulo $C\hat{A}H$), temos no triângulo ABC:

$A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180° \Rightarrow B\hat{C}A = 180° - 120° - 30° \Rightarrow B\hat{C}A = 30°$.

Logo, o triângulo ABC é isósceles e AC = AB = 3,7 km.

Então, usando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACH, chegamos a:

$AH^2 + CH^2 = AC^2 \Rightarrow 1,8^2 + h^2 = 3,7^2 \Rightarrow h^2 = 10,45 \Rightarrow h \cong 3,1$

MÓDULO – C 07

Arcos e Ciclo Trigonométrico

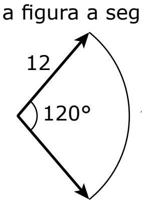
Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra E

Comentário: Dividindo 4555° por 360°, encontramos o quociente 12 (voltas completas) e resto 235°, ou seja, o arco pertence ao terceiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 4195°, pois dividindo 4195° por 360, temos o quociente 11 e resto também igual a 235°.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir.



$$\left.\begin{matrix} 360° \text{ — } 60 \text{ minutos} \\ x \text{ — } 20 \text{ minutos} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$x = \frac{360°.20}{60} \Rightarrow x = 120° \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}$$

Daí, o seu comprimento ℓ é:

$\ell = \alpha.R \Rightarrow$

$\ell = \dfrac{2\pi}{3}.12 \Rightarrow$

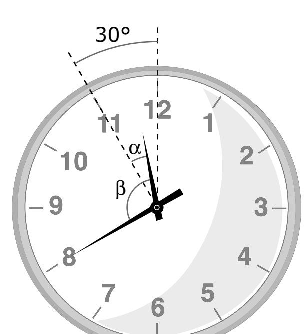
$\ell = 8\pi \Rightarrow$

$\ell \cong 25,12$

Portanto, a distância percorrida pelo ponteiro do relógio é de, aproximadamente, 25,1 cm.

Questão 03 – Letra C

Comentário:



$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{40}{60}.30° = 20° \\ \beta = 3\,.\,30° + 20° = 110° \end{cases}$$

Questão 04 – Letra A

Comentário: Como uma volta equivale a 360°, 540° equivalem a $\frac{540°}{360°} = 1{,}5$ voltas e 900° a $\frac{900°}{360°} = 2{,}5$ voltas.

Questão 05 – Letra A

Comentário: De acordo com o enunciado e lembrando que o arco entre duas letras é de 30°, temos:

1) $A \xrightarrow{120°} E$ (Sentido anti-horário)

2) $E \xrightarrow{270°} H$ (Sentido horário)

Por fim, pela instrução 3, ao se caminhar $\frac{3}{4}\pi$ = 135° no sentido anti-horário, o cofre será aberto e a seta estará entre **L** e **A**.

Questão 06 – Letra B

Comentário: Seja α = 20° = $\frac{\pi}{9}$ e o arco ℓ_1 = 5 cm, temos que o raio **R** desse círculo mede,

$$\alpha = \frac{\ell_1}{R} \Rightarrow$$
$$\frac{\pi}{9} = \frac{5}{R} \Rightarrow$$
$$R = \frac{45}{\pi}$$

Logo, se β = 40° = $\frac{2\pi}{9}$, o arco ℓ_2 tem medida igual a:

$$\frac{2\pi}{9} = \frac{\ell_2}{\frac{45}{\pi}} \Rightarrow \ell_2 = 10 \text{ cm}$$

Questão 07 – Letra C

Comentário: O ângulo **x** é tal que:

$$x = (8-5).\frac{360°}{12} + 30°.\frac{25}{60} = 90° + 12{,}5° = 102{,}5°$$

Questão 08 – Letra E

Comentário: O ângulo **x** procurado, em radianos, é tal que:

$$x = (4-3).\frac{2\pi}{12} - \frac{20}{60}.\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: De acordo com os dados do gráfico, temos:

$$\alpha - \beta = (76{,}5\%).\underbrace{2\pi}_{\substack{\text{Ângulo}\\ \text{central}\\ \text{em rad}}} - (11{,}5\%).\underbrace{2\pi}_{\substack{\text{Ângulo}\\ \text{central}\\ \text{em rad}}} = \frac{65}{100}.2\pi = \frac{13\pi}{10} \text{ rad}$$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Como $\frac{21}{5} = 4{,}2$, e 4 < 4,2 < 6, o arco localiza-se na terceira volta. Para chegar à primeira volta deve-se subtrair 2 . 2π = 4π rad, ou seja, o arco **x** pedido é tal que $x = \frac{21\pi}{5} - 4\pi = \frac{\pi}{5}$ rad.

Questão 03 – Letra D

Comentário: Se o comprimento do arco de giro é de L = 30 cm e o raio **R** da roda mede 50 cm, então o ângulo central α é igual a

L = R.α ⇒ 30 = 50.α ⇒ α = 0,6 rad.

Questão 04 – Letra C

Comentário: O comprimento do arco de raio **R** e medida 144° é 100 metros. Assim:

$$100 = 2\pi R.\frac{144°}{360°} \Rightarrow R = \frac{125}{\pi} \text{ m}$$

Questão 05 – Letra B

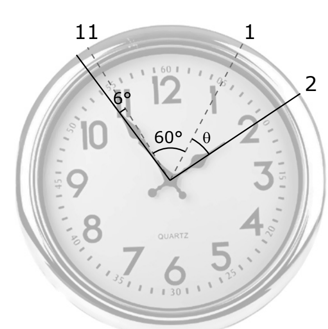
Comentário: A medida do ângulo central AÔB é igual à medida angular do arco AB. Assim, sendo **x** tal medida, em graus:

$$M\hat{A}C = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$
$$N\hat{A}B = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$5\pi = 2\pi.6\frac{x}{360°}$$
$$x = 150°$$

Questão 06 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir que ilustra a situação descrita no enunciado:



O ângulo θ é tal que:

Ângulo	Minutos
θ ____________	54
30° ____________	60

Daí, θ = 27°.

Em se tratando do ponteiro dos minutos, uma volta de 360° corresponde a 60 min. Logo, 1 min. equivale a 6°.

O ângulo total formado pelos ponteiros é de 60° + 6° + 27° = 93°. A medida **x** de um arco de θ rad é dada por $x = r.\theta$. Passando 93° para radianos e considerando que r = 20 cm, temos:

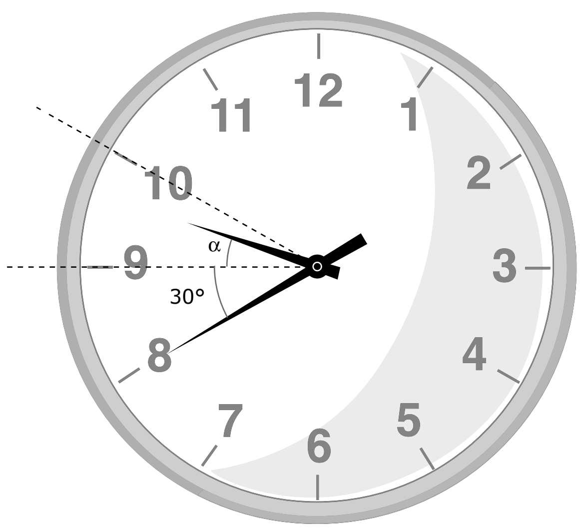
Radianos	Graus
θ	93
π	180

$$\theta = \frac{93\pi}{180} = 1{,}55 \text{ rad}$$

Dessa forma, x = 1,55 . 20 = 31 cm

Questão 07 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir, que representa a geometria da situação.



Seja β o ângulo formado pelo relógio às 21h40min. Como o relógio é dividido em 12 partes, o ângulo central entre dois números consecutivos será dado por $\frac{360°}{12} = 30°$. Logo, o ângulo β pedido será:

$$\alpha = \frac{40}{60}.30° = 20°$$

$$\beta = 30° + \alpha = 30° + 20° = 50°$$

Questão 08 – Letra D

Comentário: Perceba que o comprimento da linha do Equador é igual ao comprimento da esfera que representa a Terra. Esse é o comprimento que seria percorrido caso se desse uma volta em torno da Terra, o que equivale a 360°. Para percorrer entre Goiânia e Curitiba, perfaz-se um arco de medida angular de 25°25´– 16°40′ = 8°45′ = 8,75°. Assim, a distância **x** pedida é tal que:

$$x = 40\,000.\frac{8{,}75°}{360°} \cong 972 \text{ km}$$

Questão 09 – Letra E

Comentário: Analisando cada uma das alternativas, temos:

A) Verdadeira. Convertendo α em graus, temos $\frac{23 . 180°}{3} = 1\,308°$.

B) Verdadeira. Dividindo 1 308° por 360°, obtemos quociente 3 (voltas completas) e 300° como resto, ou seja, o arco pertence ao 4º quadrante.

C) Verdadeira.

$$\text{sen } 300° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

D) Verdadeira.

$$\cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

E) Falsa. *Vide* alternativa B.

Questão 10 – Letra C

Comentário: Considerando, primeiramente, o ponteiro das horas, ele desloca 30° a cada hora, ou seja, a cada minuto ele se desloca 0,5°. Portanto, a cada **x** minutos, ele se desloca 0,5°x. Portanto, $0{,}5°x = \alpha \Rightarrow x = 2\alpha$.

Considerando agora, o ponteiro dos minutos, ele desloca 6° a cada minuto, ou seja, em **x** minutos ele se desloca 6°x. Então

$$360° - \alpha = 6°x \Rightarrow x = \frac{360° - \alpha}{6°}.$$

Igualando as equações encontradas, temos:

$$2\alpha = \frac{360° - \alpha}{6°} \Rightarrow 12\alpha = 360° - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{360}{13}$$

Portanto, $x = 2.\frac{360}{13} = \frac{720}{13} = 55\frac{5}{13}$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

Comentário: Considere que o giro no sentido anti-horário seja positivo e o horário negativo. A posição leste será o 0° trigonométrico. Logo, oeste será 180°.

$$180 + \underbrace{135°}_{1^a \text{ mudança}} - \underbrace{60°}_{2^a \text{ mudança}} + \underbrace{45°}_{3^a \text{ mudança}} = 300°$$

Observe que a direção NO representa o ângulo 135°.

Portanto, $300° - x = 135° \Rightarrow x = 165°$.

Deve-se subtrair 165°. Logo, o giro será no sentido horário em 165°.

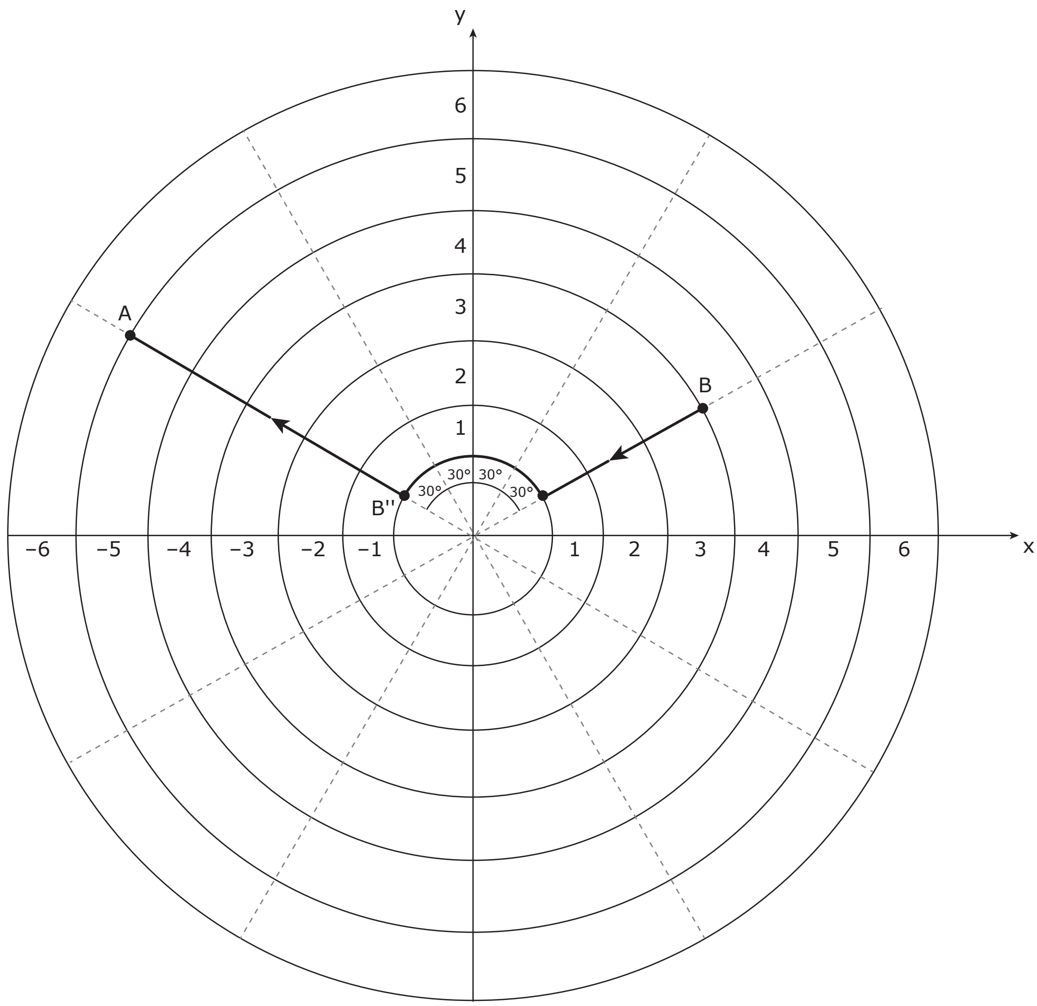
Questão 02 – Letra A

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 5

Habilidade: 20

Comentário: Observe a figura a seguir:



Sequência de deslocamentos (para o menor percurso):

- De B até B′ $\rightarrow$ 3 unidades
- De B′ até B″ $\rightarrow$ Arco de circunferência de raio 1, associado a um ângulo de 120°: $\frac{1}{3} . 2 . \pi . 1$
- De B″ até A = 5 unidades

Deslocamento total: $\frac{2 . \pi . 1}{3} + 8$

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 3

Habilidade: 11

Comentário: Uma volta completa corresponde a 360°. Ao dividir 900 por 360, obtemos:

900° = 2 . 360° + 180°, ou seja, duas voltas e meia.

MÓDULO – C 08

Funções Seno e Cosseno

Exercícios de Aprendizagem

Questão 01 – Letra D

Comentário: O gráfico da função é obtido espelhando-se a função f(x) em relação ao eixo **x**, o que é representado pela alternativa D.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Sabemos, da relação fundamental, que:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{1}{16} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{15}{16} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Por hipótese, o ângulo α está no terceiro quadrante, ou seja, sen $\alpha < 0$.

Logo, sen $\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Questão 03 – Letra E

Comentário: Procura o valor de A(2 045 – 2 015) = A(30):

$$A(30) = 850 + 200.\cos\frac{30\pi}{30} = 850 + 200\cos\pi \Rightarrow$$

$$A(30) = 850 + 200(-1) = 650$$

Portanto, a quantidade de algas na baía no início de 2045 será de 650 toneladas.

Questão 04 – Letra A

Comentário: Calculando as quantidades vendidas em março e julho, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} P(2) = 6\,000 + 50\,.\,2 + 2\,000.\left(\frac{1}{2}\right) = 7\,100 \\ P(6) = 6\,000 + 50\,.\,6 + 2\,000.(-1) = 4\,300 \end{cases}$$

$$7\,100 \text{ —— } 100\%$$
$$4\,300 \text{ —— } x\% \Rightarrow x \cong 60{,}5$$

Portanto, em julho, haverá uma queda na quantidade vendida de aproximadamente 39,5%.

Questão 05 – Letra C

Comentário: Para encontrar o período da função, devemos avaliar qual deve ser a variação de **x** para que o argumento do cosseno varie de 2π. Sendo **a** um valor qualquer e **p** o período procurado, matematicamente, temos:

$$\frac{(a+p)-2}{\pi} - \frac{(a)-2}{\pi} = 2\pi \Rightarrow \frac{a}{\pi} + \frac{p}{\pi} - \frac{2}{\pi} - \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} = 2\pi \Rightarrow p = 2\pi^2$$

A imagem da função cosseno é o intervalo [–1, 1]. Logo:

$$-1 \le \cos\left(\frac{x-2}{\pi}\right) \le 1 \Rightarrow -3 \le -3.\cos\left(\frac{x-2}{\pi}\right) \le 3 \Rightarrow$$

$$2 \le 5 - 3.\cos\left(\frac{x-2}{\pi}\right) \le 8$$

Por isso, a imagem de f(x) é [2, 8].

Questão 06 – Letra D

Comentário: Como f(0) = 0, a função representada é uma senoide do tipo f(x) = A.sen(Bx). Percebe-se que o período da função é π. Logo, $\frac{2\pi}{B} = \pi$ e B = 2. Como o contradomínio da função seno assim parametrizada é [–A, A] e o contradomínio da função representada é [–2,2], A = 2. Logo, f(x)=2sen 2x.

Questão 07 – Letra A

Comentário: Sabendo A'P = 120°, temos:

$$\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

Logo, as coordenadas de **P** são $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Questão 08 – Letra B

Comentário: Como o período da função é 4, temos $4 = \frac{2\pi}{w}$ e $w = \frac{\pi}{2}$. Como o contradomínio da função cosseno assim parametrizada é [–A,A], e pelo gráfico, o contradomínio é [–2,2], A = 2. Logo, $X = 2.\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \alpha\right)$. Como f(0) = 0, temos:

$$X - 2.\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \alpha\right) \Rightarrow$$

$$0 = 2.\cos \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, $\alpha + w + A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2 = 2 + \pi$.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra A

Comentário: Como o domínio da função seno é o intervalo fechado que vai de –1 a 1, o contradomínio da função dada é [A – B, A + B] = [–1, 5]. Logo:

$$\begin{matrix} A + B = 5 \\ A - B = -1 \end{matrix} \quad A = 2 \text{ e } B = 3$$

Portanto, A.B = 6.

Questão 02 – Letra E

Comentário: As vendas serão máximas quando o argumento da função seno for côngruo a 90° e mínimas quando o argumento for côngruo a 270°.

Vendas mínimas:

$$\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\frac{t}{6} = 1 + 2k$$
$$t = 6 + 12k,\ k \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ t = 6 \text{ (junho)}$$

Vendas máximas:

$$\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$t = 12k,\ k \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ t = 12 \text{ (dezembro)}$$

Questão 03 – Letra E

Comentário: Como o domínio da função cosseno é o intervalo fechado que vai de –1 a 1, o contradomínio da função f(x) será o intervalo [b – a, b + a]. Pela análise do gráfico, percebe-se que tal contradomínio é o intervalo [–1, 3]. Logo, a + b = 3 e b – a = –1.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Para determinar a previsão de vendas no primeiro trimestre, basta calcular a soma dos valores de f(1), f(2) e f(3). Logo:

$$f(1) = 100 + 0,5\,.\,1 + 3.\text{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \ f(1) = 100 + 0,5 + 3\,.\,\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$f(1) = 100 + 0,5 + 1,5 \Rightarrow \ f(1) = 102$$

$$f(2) = 100 + 0,5\,.\,2 + 3.\text{sen}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \ f(2) = 100 + 1 + 3\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\sqrt{3}=1,7}{\Rightarrow}$$

$$f(2) = 101 + 2,55 \Rightarrow \ f(2) = 103,55$$

$$f(3) = 100 + 0,5\,.\,3 + 3.\text{sen}\frac{\pi}{2} \Rightarrow \ f(3) = 100 + 1,5 + 3 \Rightarrow$$

$$f(3) = 101,5 + 3 \Rightarrow \ f(3) = 104,5$$

Calculando a soma dos valores encontrados, temos:

f(1) + f(2) + f(3) = 102 + 103,55 + 104,5 = 310,05

Portanto, a previsão de vendas para o primeiro trimestre será, em toneladas, de 310,05.

Questão 05 – Letra B

Comentário: Deseja-se encontrar o menor valor positivo de **t** que satisfaça $H_1 = H_2$:

$$H_1 = H_2 \Rightarrow$$

$$12\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{60}\right) = 12\cos\left(\frac{2\pi t}{60}\right) \Rightarrow$$

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{60}\right) = \cos\left(\frac{2\pi t}{60}\right) \ \Rightarrow \ \left(\frac{2\pi t}{60}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$2t = 15 + 60k,\ k \in \mathbb{Z}$$

O valor procurado de **t** ocorrerá quando k = 0, ou seja, t = 7,5 ms.

Questão 06 – Letra B

Comentário: Procura-se o valor máximo e o valor mínimo da função L(d), que corresponderão à máxima e à mínima duração da luz solar em Ancara, respectivamente. Como o domínio da função seno é o intervalo fechado de –1 a 1, o valor máximo (mínimo) da função L(d) será atingido quando o valor do seno que compõe tal função for 1 (–1). Portanto:

Máx (L(d)) = 12 + 1 . 2,8 = 14,8 horas

Mín (L(d)) = 12 + (–1) . 2,8 = 9,2 horas

Questão 07 – Letra B

Comentário: O valor mínimo será atingido quando o argumento da função cosseno for côngruo a 180°:

$$\frac{\pi x}{3} = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$x = 3 + 6k,\ k \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 9$$

Logo, o valor mínimo é atingido duas vezes.

Questão 08 – Letra A

Comentário: O navio encalhará quando após as 8h, a maré atingir 12 m. Assim:

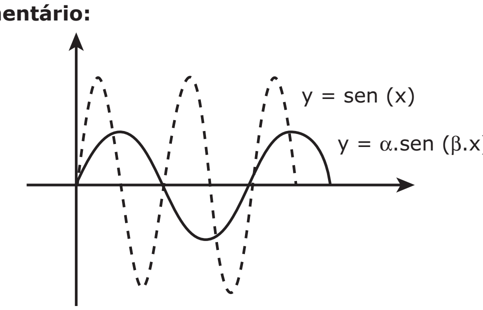
$$h(t) = 12$$
$$10 + 4\text{sen}\left(\frac{t\pi}{12}\right) = 12 \ \Rightarrow$$

$$\text{sen}\left(\frac{t\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{t\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{t\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ou} \ \Rightarrow \begin{cases} t = 2 + 24k \\ t = 10 + 24k \end{cases}$$

Assim, o navio encalhará às 10 horas, ou seja, poderá permanecer 2 horas sem encalhar.

Questão 09 – Letra A

Comentário:



O valor da amplitude da função f(x) = sen (x) é 1, e para a função g(x) = α . sen(βx) será o módulo de α. Como a amplitude da função **g** é menor que 1, e pelo gráfico α > 0, então, pode-se afirmar que 0 < α < 1.

O período da função **f** e **g** são, respectivamente, 2π e 4π. Logo, para β > 0, tem-se que $P = 4\pi = \frac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$ e pode-se afirmar que 0 < β < 1.

Questão 10 – Letra D

Comentário: A função trigonométrica terá como imagem o intervalo [–0,6; 0,6] e período 5. Do primeiro fato, concluímos que 0,6 deve multiplicar a função trigonométrica. Do segundo fato, podemos encontrar o coeficiente **x** de **t**:

$$P = 5 = \frac{2\pi}{x} \Rightarrow$$

$$x = \frac{2\pi}{5}$$

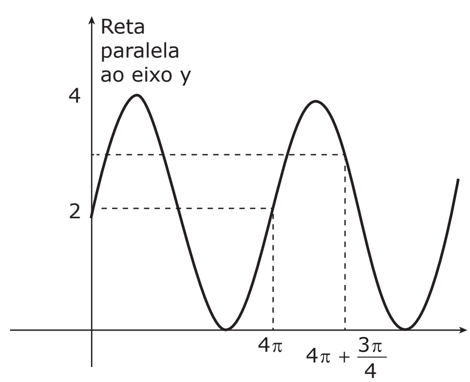
A função modelada é a função seno, que passa pela origem (lembrando que não há translação no argumento).

Questão 11 – Letra D

Comentário: Sabemos que:

$$\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4} = 2.(2\pi) + \frac{3\pi}{4}$$

Como a função do gráfico possui período 2π, podemos representar $f\left(\frac{19\pi}{4}\right)$ como:



Logo, $f\left(\frac{19\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cong 3,4.$

Portanto, para $y = f\left(\frac{19\pi}{4}\right)$, temos 2 < y < 4.

Questão 12 – Letra B

Comentário: Pela posição relativa entre os pontos **B** e **P**, temos:

$$\text{sen}\,\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha > \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\alpha > -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{3\pi}{4}$$

Questão 13 – Letra B

Comentário:

$$M\hat{A}C = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

$$N\hat{A}B = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

Como ANB e AMC são triângulos retângulos de hipotenusa 1, aplicando as relações trigonométricas nesses triângulos, podem ser encontradas as medidas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$:

$$\cos N\hat{A}B = \frac{AB}{AN} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{1} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos M\hat{A}C = \frac{AC}{AM} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{AC}{1} \Rightarrow AC = \frac{1}{2}$$

Logo, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

Questão 14 – Letra E

Comentário:

1. Verdadeira: Para o triângulo equilátero n = 3 e para o quadrado n = 4. Assim, denotando por S_3 e S_4 a área dessas figuras, respectivamente:

   $$S_3 = 2.3.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

   $$S_4 = 2.4.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 8\text{ cm}^2$$

2. Verdadeira: sendo S_{12} a área do dodecágono regular:

   $$S_{12} = 2\,.\,12.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{12}\right) = 2\,.\,12.\frac{1}{2} = 12\text{ cm}^2$$

3. Verdadeira: Quando **n** aumenta indefinidamente, a área do polígono tende a se tornar a área da circunferência. Assim, $A = \pi.(2)^2 = 4\pi\text{ cm}^2$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Pelo gráfico de **f** dado, tem-se:

- Período da função = 2π
- $f_{máx}$ = 168 m
- Linha de centro da curva: y = 88 m
- Amplitude da função = $f_{máx}$ – linha de centro = 168 – 88 = 80 m

Sabe-se que, dada uma função da forma f(t) = V + A . sen(pt), tem-se:

- V = linha de centro da curva
- |A| = Amplitude
- Período = $\dfrac{2\pi}{|p|}$

Pelo exposto, a função f(t) correspondente ao gráfico é

$f(t) = 80\ \text{sen}(t) + 88$

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Como $I(x) = k\ \text{sen}(x)$, temos que $I_{máx}(x) = k$, pois teremos $\text{sen}(x) = 1$.

Para $x = 30°$, teremos $I(30°) = k\ .\ \text{sen}\ 30° = \frac{k}{2}$.

Logo, a probabilidade se reduz a 50% do valor máximo.

Questão 03 – Letra D

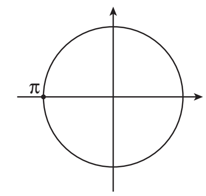
Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 4

Habilidade: 17

Comentário: Como $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) \leq 1$, então temos que a produção será máxima quando o preço for mínimo.

Logo, teremos $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$, ou seja:



$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \Rightarrow$$

$$\pi x = 7\pi \Rightarrow x = 7$$

Portanto, o mês de produção máxima será julho.

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 4

Habilidade: 17

Comentário: Sabemos que o apogeu e o perigeu ocorrem quando **r** assume seus valores máximo e mínimo, respectivamente. Logo:

$$\begin{cases} r_{máx.} = \dfrac{5\,865}{1 + 0{,}15.(-1)} = 6\,900\text{ km} \\[2ex] r_{mín.} = \dfrac{5\,865}{1 + 0{,}15.(+1)} = 5\,100\text{ km} \end{cases}$$

Assim, S = 6 900 + 5 100 = 12 000 km.

Bernoulli
Colégio e Pré-vestibular

Rua Diorita, 43 - Prado
Belo Horizonte - MG
Tel.: (31) 3029-4949