MATEMÁTICA II

CAPÍTULO 17
Noções primitivas

Para que possamos compreender o estudo da geometria plana, abordaremos alguns conceitos fundamentais tais como:

- Ponto.
- Reta.
- Plano.

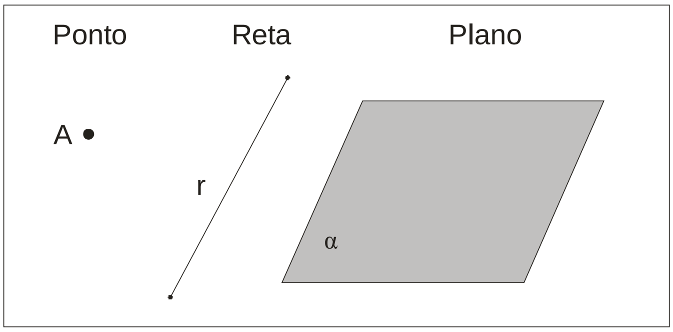
Proposição primitiva da Existência

- Numa Reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
- Num Plano há infinitos Pontos.

Notações de Ponto, Reta e Plano.

- Ponto – utilizam-se letras maiúsculas: A, B, C...
- Reta – utilizam-se letras minúsculas: a, b, c....
- Plano – utilizam-se letras Gregas minúsculas: α, β, γ, θ, λ...

Representação Geométrica



Observação: Uma reta é formada por infinitos pontos assim como um plano é formado por infinitas retas.

Proposição da Determinação:

a) Ponto: é um elemento do espaço que indica uma posição.

b) Reta: dois pontos distintos determinam uma única reta que passa entre eles.

c) Plano: três pontos não-colineares determinam um único plano que passam entre eles.

Segmento de Reta

Dados dois pontos distintos em uma reta, o conjunto de pontos entre eles forma um segmento de reta.

$\overline{AB} \longrightarrow$ É um segmento de reta.

Semirreta

Uma semirreta $\overrightarrow{AB}$ é a parte de uma reta que tem início em A, passa por B e se prolonga infinitamente.

O ponto A é a origem da semirreta $\overrightarrow{AB}$ que passa pelo ponto B e, $\overline{AB}$ é o segmento de reta com extremidades em A e B.

Ponto médio de um segmento: é o ponto que se encontra a mesma distância de suas extremidades.

Pontos Colineares: são pontos que pertencem à mesma reta.

Segmentos Colineares e Consecutivos: dois segmentos de reta são colineares se, e somente se, pertencem a uma mesma reta; e serão consecutivos se possuírem uma extremidade em comum.

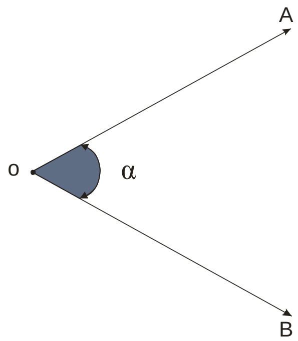
$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são Colineares e Consecutivos

Segmentos Adjacentes: Dois segmentos consecutivos e colineares são adjacentes quando possuem somente uma extremidade em comum.

Segmentos Congruentes: ocorre quando dois segmentos possuem a mesma medida absoluta.

Ângulo

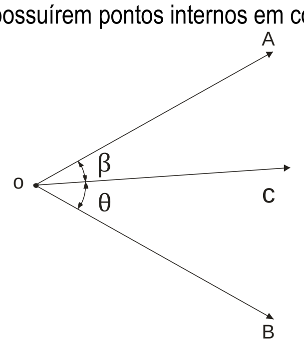
Definição: denomina-se ângulo a região compreendida entre duas semi-retas de mesma origem, não contidas na mesma reta. (Não colineares).



Notação: $\alpha = A\hat{O}B$

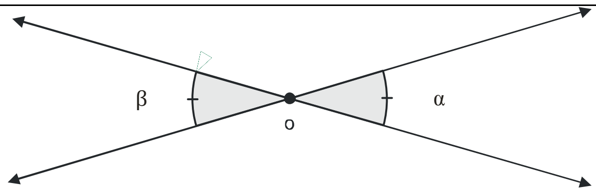
Ângulos consecutivos: dois ângulos são consecutivos se, e somente se, possuírem um lado em comum.

Ângulos adjacentes: dois ângulos consecutivos são adjacentes se, e somente se, não possuírem pontos internos em comum.

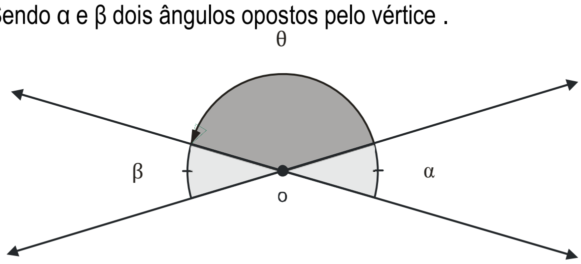


Note: o segmento de reta $\overline{OC}$ é comum aos ângulos θ e β.

Ângulos opostos pelo Vértice (OPV): ocorre quando os ângulos são formados pelas mesmas retas, contudo não são adjacentes.



Observe:
1. Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.
2. Sendo α e β dois ângulos opostos pelo vértice .



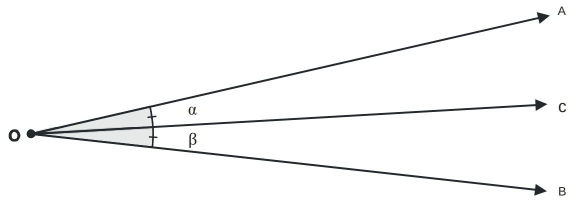
3. O ângulo θ é adjacente a α e β.
4. O ângulo θ é suplementar a α e β.

Assim Temos:

$$\begin{cases} \alpha + \theta = 180^{o} \\ \beta + \theta = 180^{o} \end{cases} \Rightarrow \alpha \cong \beta.$$

Ângulos congruentes: são ângulos que possuem a mesma medida.

Bissetriz de um ângulo: uma semirreta $\overline{OC}$ interna a um ângulo AOB é dita bissetriz se dividir o ângulo em dois ângulos congruentes.



Tipos de Ângulos

Reto: étodo ângulo que mede 90º.
Agudo: é todo ângulo menor que 90º.
Obtuso: é todo ângulo maior que 90º e menor que 180º.
Raso: é todo ângulo que mede 180º.
Nulo: é todo ângulo que mede 0º.

Ângulos complementares: ocorre quando a soma de dois ângulos adjacentes ou não somam 90°.

Ângulos suplementares: ocorre quando a soma de dois ângulos adjacentes ou não somam 180°.

Ângulos replementares: ocorre quando a soma de dois ângulos adjacentes ou não somam 360°.

Unidades de medida de ângulos: um ângulo é medido em graus(°), minutos(’) e segundos(”) de tal forma que:

1º = 60’ (lê-se: um grau é igual a sessenta minutos).
1’ = 60” (lê-se: um minuto é igual a sessenta segundos).

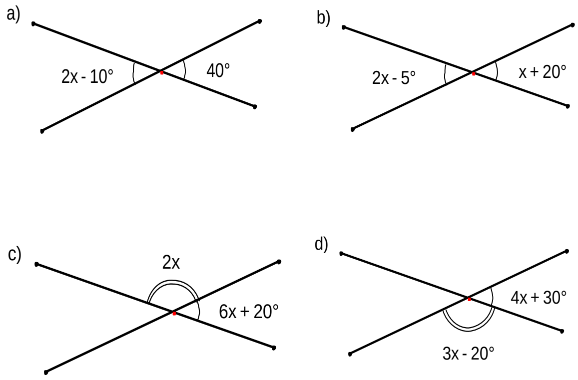
Exercícios de Treinamento

1. (AEPOM) Simplifique as seguintes medidas:
a) $30°\ 70’ =$
b) $45°\ 150’ =$
c) $65°\ 80’\ 123” =$
d) $110°\ 58’\ 300” =$
e) $30°\ 120’\ 240” =$

02. (AEPOM) Determine as operações de soma e subtração:
a) $30°\ 40’\ +\ 15°\ 35’ =$
b)$10°\ 30’\ 45”\ +\ 15°\ 80’\ 120” =$
c) $20c°\ 50’\ 45” - 5°\ 45’\ 60” =$

03. (AEPOM) Determine o produto e a divisão dos ângulos:
a) $2 \cdot (\ 10°\ 35’\ 54”\ ) =$
b) $5 \cdot (6°\ 15’\ 30”\ ) =$
c) $(-4) \cdot (5°\ 67") =$
d) $(-3) \cdot (\ 5°\ 23') =$
e) $(120°\ 60’\ 80”) \div 2 =$
f) $(53°\ 70’\ 85”) \div 3 =$

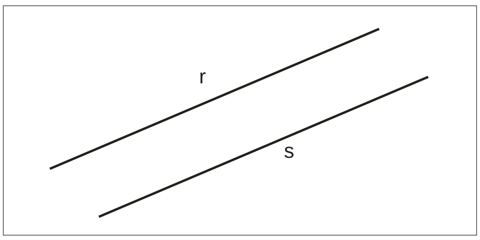
03. (AEPOM) Calcule o valor de x .



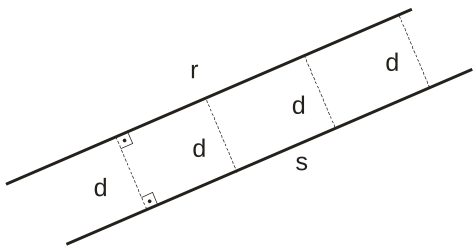
Paralelismo

Conceito: duas retas distintas num mesmo plano **α** são paralelas quando não têm nenhum ponto em comum.

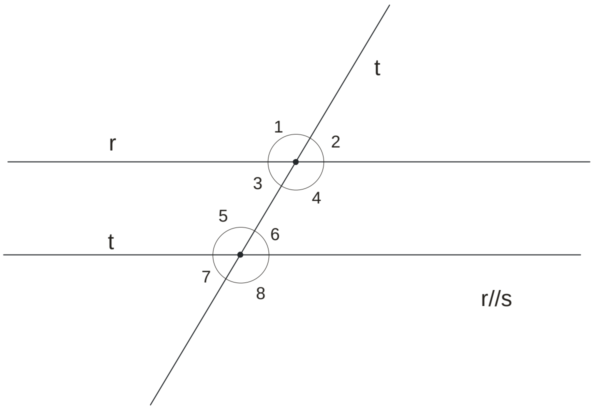
Retas Paralelas



Importante: a distância entre duas retas paralelas é sempre igual.



Sejam duas retas paralelas cortadas por uma transversal.



Nomenclatura dos ângulos

Alternos:
Internos: 3 e 6; 4 e 5.
Externos: 1 e 8; 2 e 7.

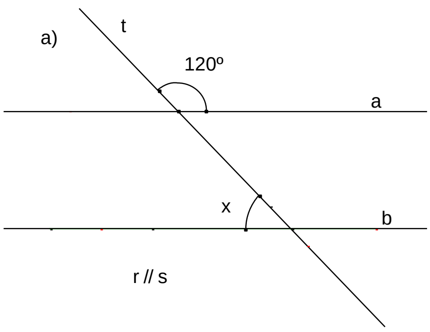
Correspondentes: 1 e 5; 2 e 6; 3 e 7; 4 e 8.

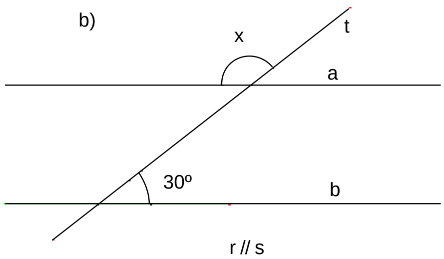
Colaterais:
Internos: 3 e 5; 4 e 6.
Exernos: 1 e 7; 2 e 8.

Propriedades:
P1. Os pares de ângulos alternos internos e externos são congruentes.
P2. Os pares de ângulos correspondentes são conguentes.
P3. Os pares de ângulos colaterais internos e externos são suplementares.

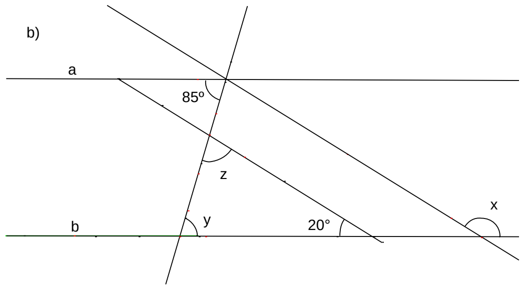
Exercícios de treinamento

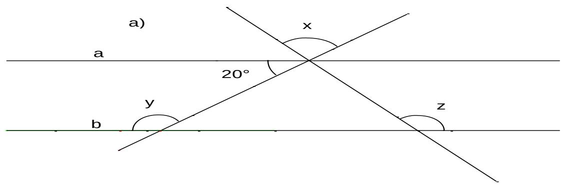
01. (AEPOM) Sendo a reta **a** paralela a reta **b**. Determine o valor de x.





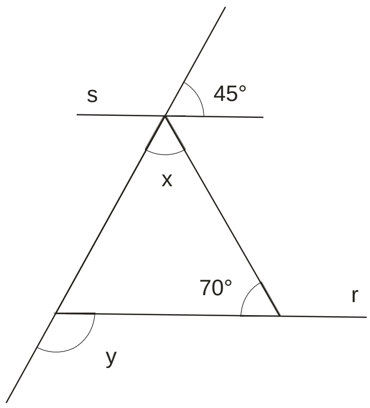
02. AEPOM) Determine os valores de x, y e z, sabendo que **a** e **b** são retas paralelas.



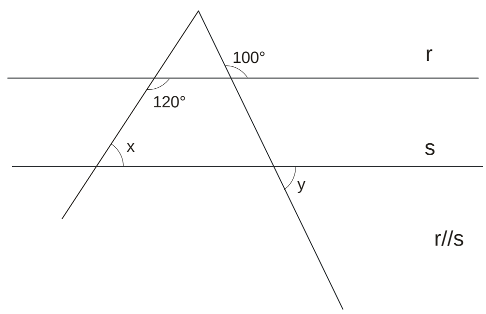


Exercícios Propostos

01. (PM/SP) Na figura abaixo, r e s são paralelas. A medida dos ângulos x e y são, respectivamente:
a) 65° e 115°.
b) 70° e 110°.
c) 65° e 135°.
d) 60° e 135°.



02. (AEPOM) Dados que as retas r e s são paralelas. Calcule o valor de x +y :
a) 130°.
b) 140°.
c) 150°.
d) 160°.



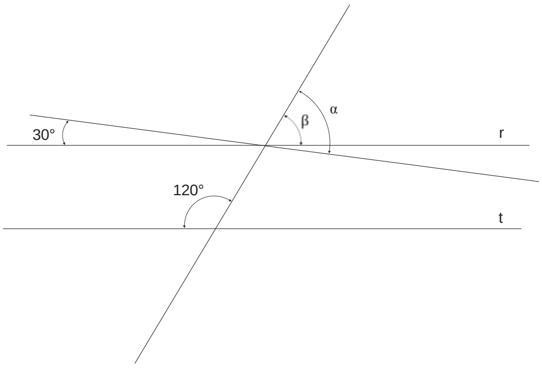
03. (EEAR) Sejam ABC um triângulo retângulo em A, $\overline{AM}$ a mediana relativa a $\overline{BC}$, $\overline{CN}$ a bissetriz interna de $\hat{C}$ e D é o

ponto de intersecção entre $\overline{AM}$ e $\overline{CN}$. Se $A\hat{B}C = 20^o$, então $C\hat{D}M$ mede, em graus,

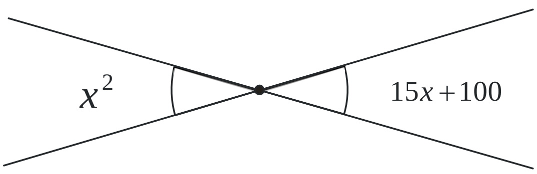
a) 90°.
b) 95°.
c) 100°.
d) 105°.

04. (CFN) Qual é o menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógio quando são exatamente 7 horas?
a) 210°.
b) 180°.
c) 165°.
d) 150°.
e) 120°.

05. (AEPOM) Na figura abaixo, o valor de α + β sabendo que r//t é:
a) 100°.
b) 150º.
c) 200°.
d) 210°.

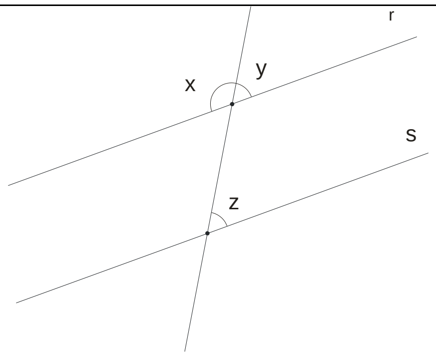


06. (AEPOM) Dados os ângulos formados pelas retas concorrentes. Calcule o valor de x.
a) 62° 30'.
b) 62°.
c) 36°.
d) 20°.

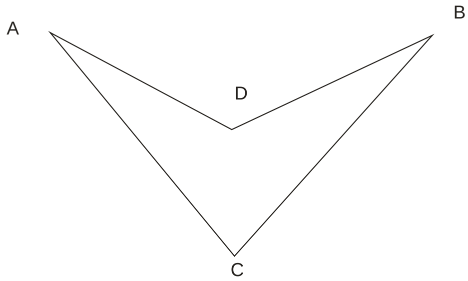


07. (AEPOM) Na figura abaixo, onde **r** e **s** são retas paralelas e **t** uma transversal, ficam determinados os ângulos não-nulos. É correto afirmar que:

a) $x > y = z$.
b) $y < z < x$.
c) $y - x = z$.
d) $x < y < z$.

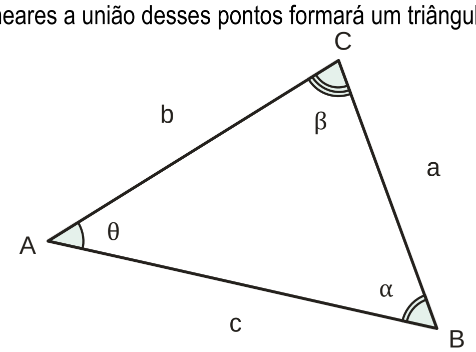


08.(EEAR) Na figura $B\hat{C}A$, $C\hat{A}D$, $A\hat{D}B$, medem respectivamente, 60° , 30° e 110°. A medida de $D\hat{B}C$ é:
a) 15°.
b) 20°.
c) 25°.
d) 30°.



CAPÍTULO 18
Estudo dos Triângulos

Vimos no capitulo anterior que as uniões de infinitos pontos colineares formam uma reta, contudo se tivermos três pontos A, B e C não colineares a união desses pontos formará um triângulo.



Elementos:
- Três Vértices:
  A, B e C.
- Três segmentos de reta:

$\overline{AB} = c$

$\overline{BC} = a$

$\overline{AC} = b$

- Três ângulos:

$A\hat{B}C = \alpha$

$A\hat{C}B = \beta$

$B\hat{A}C = \theta$

- Indicação:

Triângulo *ABC* = ∆ABC.

Observação: é importante identificar que existe uma relação entre ângulo e seu lado oposto. Assim temos:
Lado **a** oposto ao ângulo **θ.**
Lado **b** oposto ao ângulo **α.**
Lado **c** oposto ao ângulo **β.**

Concluindo: se, por exemplo, o ângulo **β** for o maior ângulo do triângulo ABC, o lado **c** será o maior lado desse triângulo.

Curiosidade: identificar as letras do alfabeto grego.

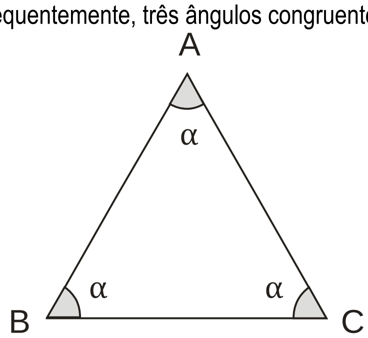
- α → Alfa
- β → Beta
- γ → Gama
- δ → Delta
- θ → Teta
- φ → Fi

Classificação dos Triângulos

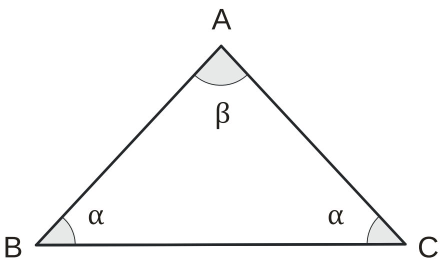
Os triângulos podem ser classificados em relação aos lados e aos seus ângulos.

- Classificação em relação aos lados.

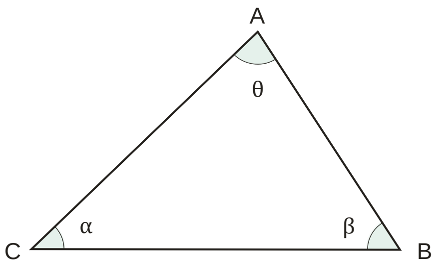
Triângulo Equilátero: é todo triângulo que possui os três lados iguais e, consequentemente, três ângulos congruentes.



Triângulo Isósceles: é todo triângulo que possui dois lados iguais e, consequentemente, dois ângulos congruentes.
.

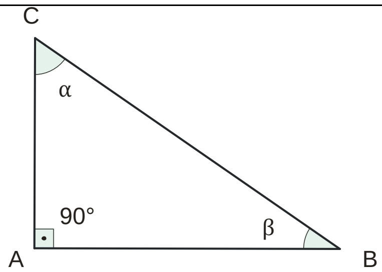


Triângulo Escaleno: é todo triângulo que possui os três lados diferentes e, consequentemente, três ângulos não congruentes.

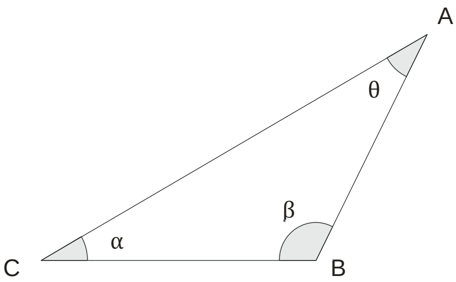


- Classificação em relação ao ângulo.

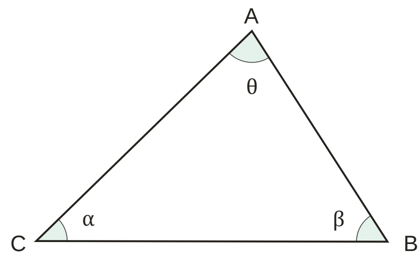
Triângulo Retângulo: é todo triângulo que possui um ângulo reto.



Triângulo Obtusângulo: é todo triângulo que possui um ângulo obtuso.

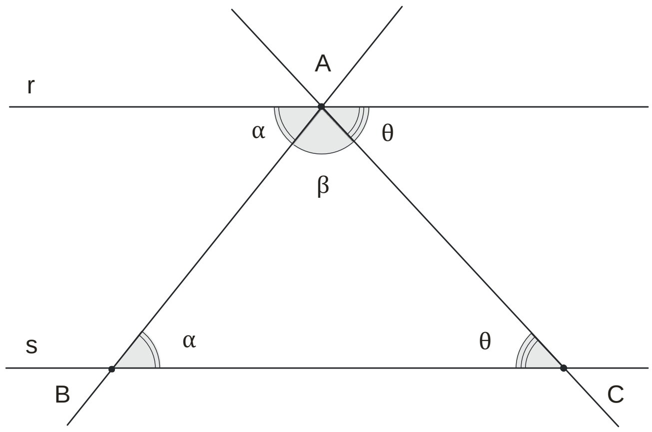


Triângulo Acutângulo: é todo triângulo que possui três ângulos agudos.



Soma dos ângulos internos de um Triângulo

Dadas duas retas paralelas cortadas por duas transversais, de acordo com a figura abaixo, podemos tirar as seguintes conclusões:



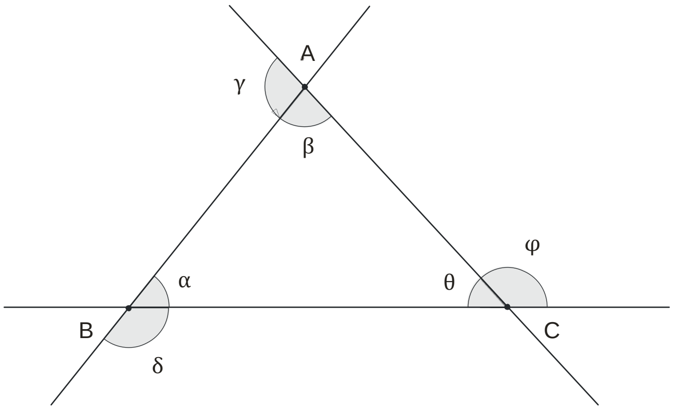
De acordo com o estudo de paralelismo, usaremos a propriedade de ângulos alternos internos para exportar os ângulos **α** e **θ** para a reta **r.** Depois de exportar, percebemos que:

$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

Teorema: A Soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

Ângulo externo de um Triângulo

Observe a figura abaixo:



Na figura, os ângulos são representados:

- Ângulos internos: α, β e θ
- Ângulos externos: γ, φ e δ

Chegaremos às seguintes conclusões:

1º. Teorema: a soma de um ângulo interno e um ângulo externo é igual a 180°.
Exemplo:

$$\gamma + \beta = 180°$$
$$\theta + \varphi = 180°$$
$$\alpha + \delta = 180°$$

2°. Teorema: a soma dos ângulos externos é igual a 360°.

$$\gamma + \varphi + \delta = 360°$$

3°. Teorema: um ângulo externo é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes.

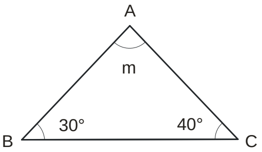
Exemplo:

$$\gamma = \alpha + \theta$$
$$\varphi = \alpha + \beta$$
$$\delta = \beta + \theta$$

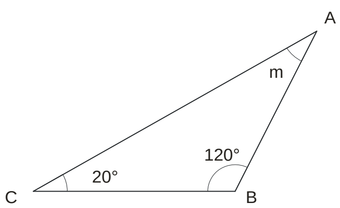
Exercício de Treinamento

01. (AEPOM) Calcule o valor de m nas figuras abaixo.

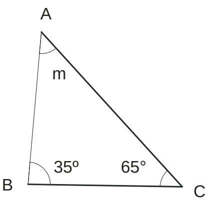
a)



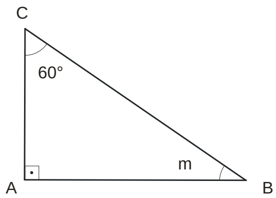
b)



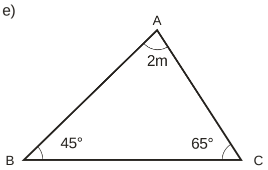
c)



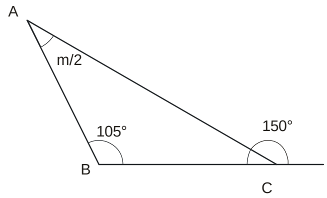
d)



e)



f)



Semelhança entre triângulos

Um triângulo é congruente a outro se, somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de acordo com os seguintes casos.

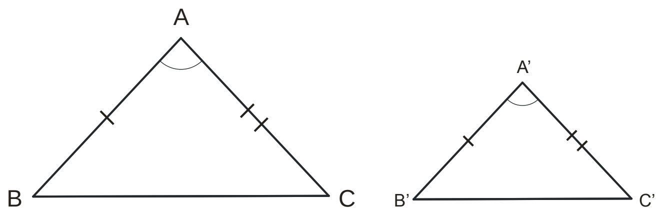
Notação:
1. Símbolo de semelhança: ~
2. Símbolo de congruência: ≡
Ex.:

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$
(lê-se: o triângulo ABC é semelhante ao triângulo PQR).

$$\alpha \equiv \beta$$
(lê-se: o ângulo α é congruente ao β).

Casos de Semelhança

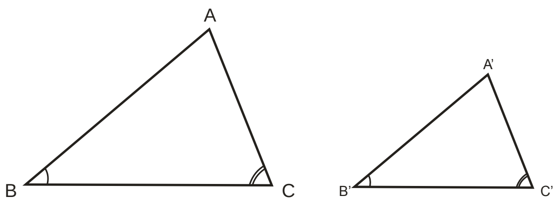
1°. Critério: LAL (lado-ângulo-lado)
Se dois triângulos possuem ordenadamente dois lados proporcionais, e o ângulo formado entre estes lados for congruente, então eles são semelhantes.



Esquema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

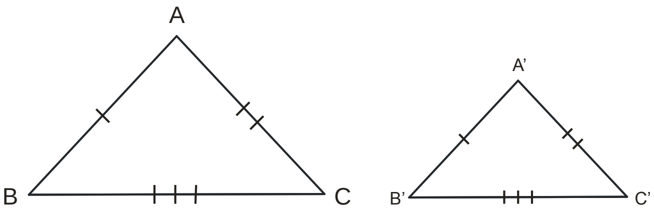
2°. Critério: AA (ângulo-ângulo)
Se dois triângulos possuem ordenadamente dois ângulos congruentes, então os triângulos são semelhantes.



Esquema:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

3º. Critério: LLL (lado-lado-lado)
Se dois triângulos possuem ordenadamente três lados iguais, então estes triângulos são semelhantes.



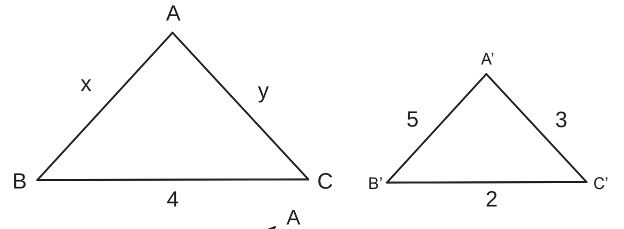
Esquema:

$$\left.\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

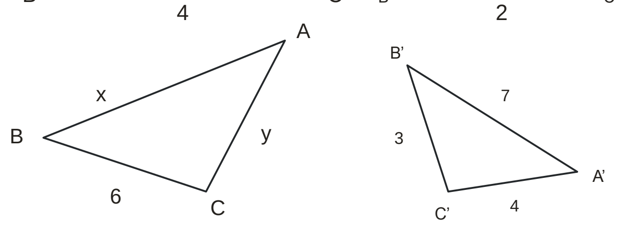
Exercício de Treinamento

01. (AEPOM) Calcule o valor de x e y nas figuras abaixo.

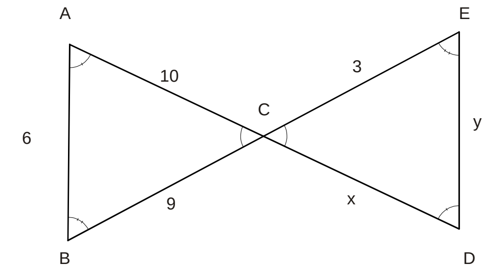
a)



b)

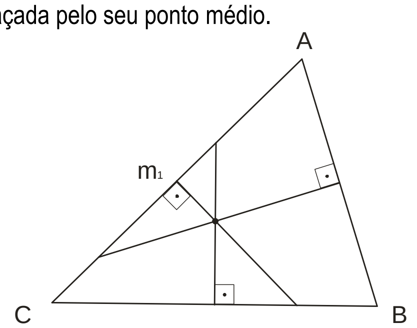


c)



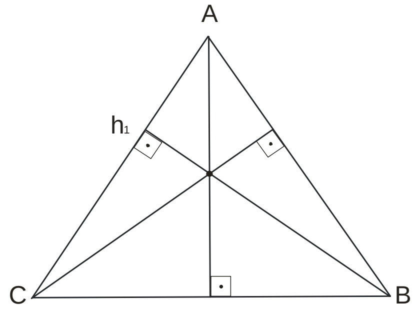
Pontos notáveis de um triângulo

Mediatriz: a mediatriz é a reta perpendicular a um lado do triângulo, traçada pelo seu ponto médio.



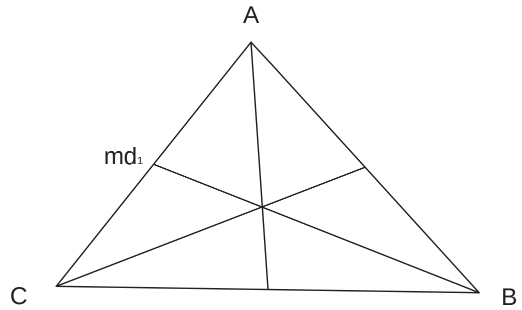
Ponto Notável: circuncentro é o ponto de união entre as três mediatrizes de um triângulo. No circuncentro, localiza-se o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Altura: altura é um segmento que une um vértice ao seu lado posto formando um angulo de 90º. Este lado é chamado base da altura, e o ponto onde a altura intercepta a base é chamado de pé da altura.



Ponto Notável: ortocentro é o ponto de interseção das três alturas de um triângulo . No triângulo acutângulo, o ortocentro é interno ao triângulo; no triângulo retângulo é o vértice do ângulo reto; e no triângulo obtusângulo é externo ao triângulo.

Mediana: mediana é o segmento de reta que une cada vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto.

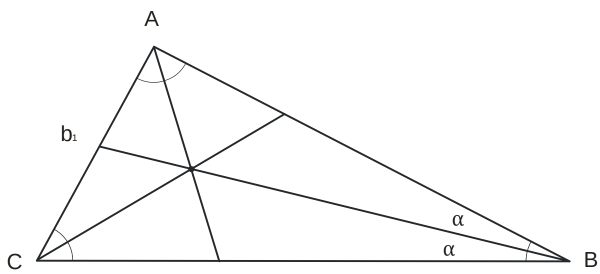


Nota: a mediana relativa à hipotenusa em um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.

Ponto Notável: baricentro ou centro de gravidade é o ponto de interseção das três medianas de um triângulo. O baricentro divide a mediana em dois segmentos. O segmento que une o vértice ao baricentro vale o dobro do segmento que une o baricentro ao lado oposto ao vértice.

Nota: no triângulo equilátero, as medianas, mediatrizes, bissetrizes e alturas são coincidentes.

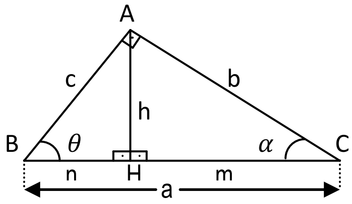
Bissetriz: abissetriz interna de um triângulo corresponde ao segmento de reta que parte de um vértice, e vai até o lado oposto dividindo o seu ângulo em dois ângulos congruentes.



Ponto Notável: incentro é o ponto de intersecção das três bissetrizes de um triângulo.

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Sabemos que todo triângulo retângulo possui dois ângulos agudos complementares e um ângulo reto.
Observe a figura abaixo:

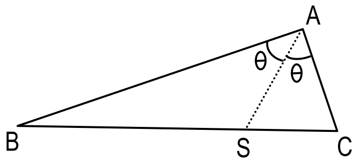


Analisando o triângulo de acordo com os critérios de semelhança, temos:

R1. $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de pitágoras).
R2. $b^2 = a \cdot m$.
R3. $c^2 = a \cdot n$.
R4. $h^2 = m \cdot n$.
R5. $a \cdot h = b \cdot c$.

Teorema da Bissetriz Interna

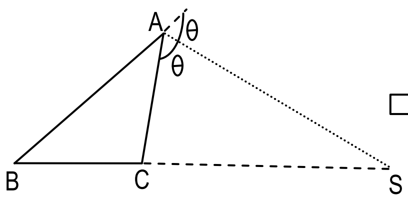
Dado um triângulo ABC, a bissetriz de um ângulo interno estabelece no seu lado oposto os dois segmentos proporcionais aos lados desse mesmo ângulo. Observe:



$$\boxed{\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}}$$

Teorema da Bissetriz Externa

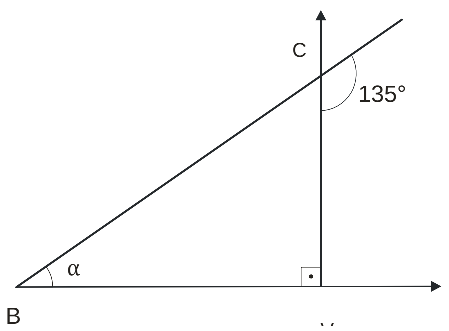
Dado um triângulo ABC e sempre que a bissetriz de um ângulo externo de certo triângulo interceptar a reta que possui o lado oposto, ficará estabelecido nesta mesma reta dois segmentos proporcionais aos lados desse triângulo. Observe:



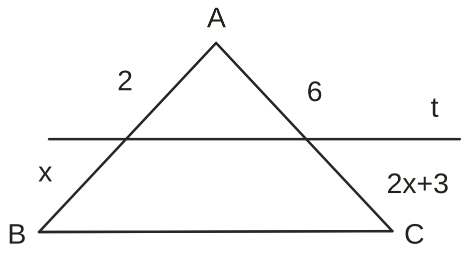
$$\boxed{\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}}$$

Exercícios Propostos

01. (PM/SP) No triângulo ABC da figura abaixo. O ângulo α vale:
a) 35°.
b) 40°.
c) 45°.
d) 50°.



02. (PM/SP) Seja o triângulo ABC

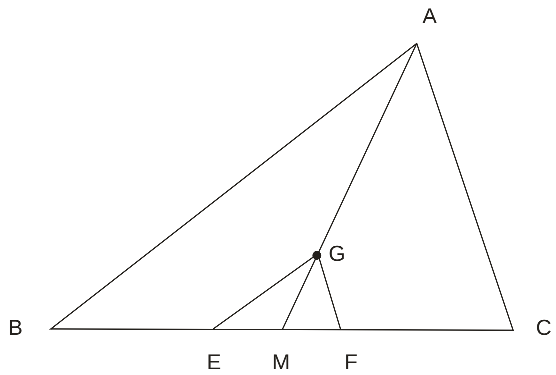


Se a reta t é paralela ao lado BC, então o valor de x é:
a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 6.

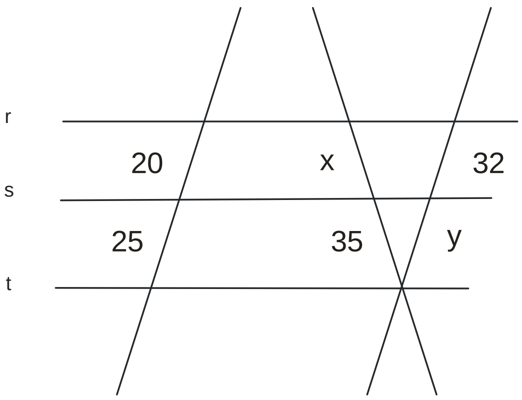
03.(CFN) Um dos ângulos da base de um triângulo isósceles mede 40°. Quanto mede o ângulo do vértice?
a) 108°.
b) 100°.
c) 99º.
d) 95°.
e) 90°.

04.(CFN) Um triângulo tem as seguintes medidas de seus lados, em ordem crescente: 15, 20 e x. Sabendo que um dos ângulos deste triângulo mede meio ângulo raso, qual o valor de x?
a) 50.
b) 45.
c) 35.
d) 30.
e) 25.

05. 05. (AFA) Considere um triângulo ABC, de lados AB=15, AC =10, BC=12 e seu baricentro G. Traçam-se GE e GF paralelos a AB e AC, respectivamente, conforme figura abaixo. O perímetro do triângulo GEF é um número que, escrito na forma de fração irredutível, tem a soma do numerador com o denominador igual a:
a) 43.
b) 38.
c) 40.
d) 35.

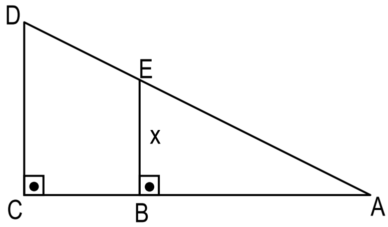


06.(PM/SP) Para qual das alternativas abaixo são corretas no que se refere ao valor de x e y, sabendo que r//s//t.
a) 25 e 42.
b) 32 e 22.
c) 28 e 25.
d) 28 e 40.

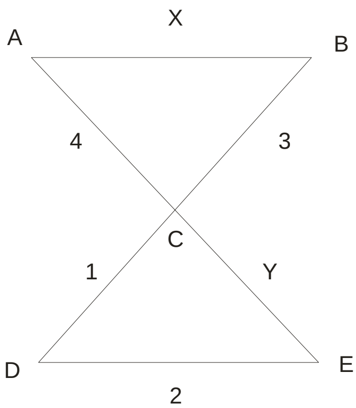


07. (EEAR) Dada a figura abaixo, se $\overline{AB} = 8\ \text{cm}$ $\overline{CD} = 4\ \text{cm}$ e $\overline{AD} = 20\ \text{cm}$, a medida, em cm, de x é

a) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.
b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
c) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.
d) $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

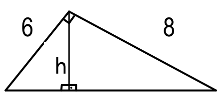


08. (AEPOM) Na figura abaixo, *AB // ED*. Nessas condições, os valores de x e y são, respectivamente:



a) $6\ e\ \dfrac{4}{3}$.
b) $6\ e\ \dfrac{2}{3}$.
c) $4\ e\ \dfrac{4}{3}$.
d) $2\ e\ 3$.

09. (AEPOM) A altura do triângulo retângulo, da figura abaixo, vale:
a) 4
b) 4,4
d) 4,8
d) 8
e) 10

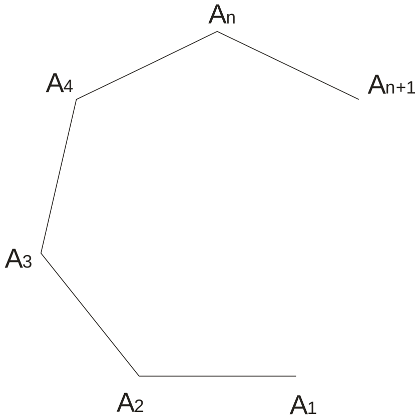


CAPÍTULO 19
Polígonos

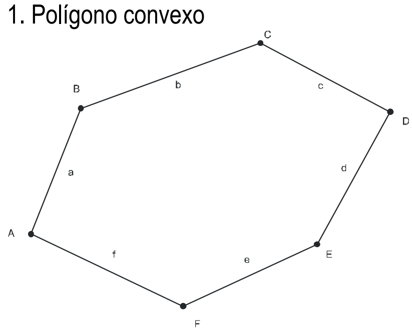
Definição: dada uma sequência de pontos de um plano $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, com n ≥ 3, todos distintos, chama-se polígono a união de pontos de tal forma que:

$$(\overline{A_1A_2},\ \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_nA_{n+1}})$$

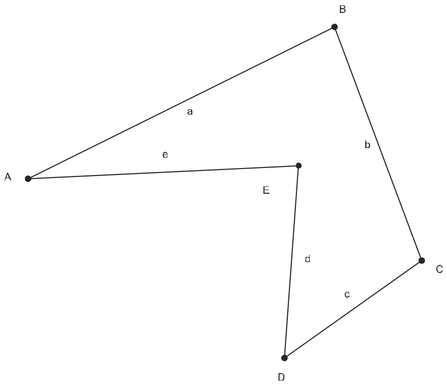
Geometricamente temos:

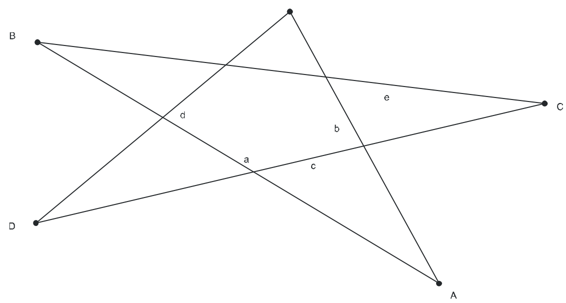


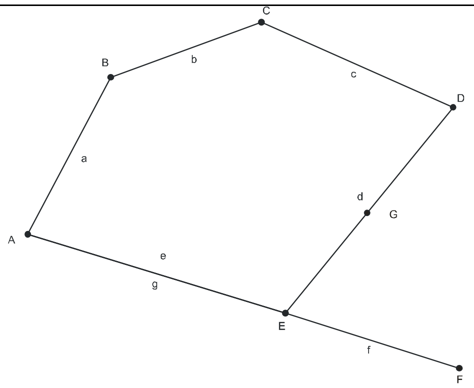
Exemplos:
1. Polígono convexo



2. Polígono côncavo





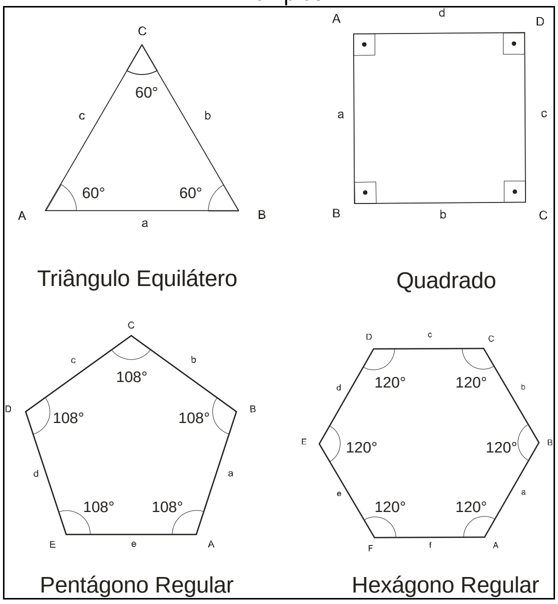


Esta figura não é um polígono, pois possui um ponto aberto (F) e possui dois conjuntos de três pontos não colineares EGD e AEF.

Polígonos Regulares

Um polígono que possui os lados congruentes é equilátero. Quando possui os ângulos congruentes é equiângulo. Para ser considerado regular deve possuir lados e ângulos congruentes.

Exemplos:



Triângulo Equilátero
Quadrado
Pentágono Regular
Hexágono Regular

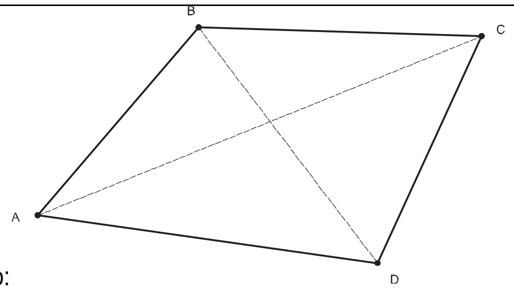
Classificação dos polígonos

De acordo com o número de lados, temos as seguintes classificações:

Valor de n	Nomenclatura	Lados
3	Triângulo	3
4	Quadrilátero	4
5	Pentágono	5
6	Hexágono	6
7	Heptágono	7
8	Octógono	8
9	Eneágono	9
10	Decágono	10
11	Undecágono	11
12	Dodecágono	12
15	Pentadecágono	15
20	Icoságono	20

Elementos importantes de um polígono

Diagonais→ é um segmento que une dois vértices não consecutivos de um polígono.



Exemplo:
Neste caso, temos um polígono de 4 lados e 4 vértices A, B, C, D.
São considerados diagonais do polígono acima os segmentos $\overline{AC}\ e\ \overline{BD}$ em pontilhado.

Número de diagonais de um polígono de n lados

$$D = \frac{n(n-3)}{2}\text{; com n} \geq 3.$$

Ângulos internos → o ângulo interno de um **polígono regular** é calculado dividindo a soma dos ângulos internos pelo número de lados. O calculo da soma dos ângulos internos de um triângulo é:

$$S_i = (n-2)\times 180^{o}$$

Assim, temos que:

$$a_i = \frac{(n-2)\times 180^{o}}{n}$$

$$a_i = \frac{S_i}{n}$$

Ângulo Externo → é o ângulo suplementar adjacente a um ângulo interno de um polígono.
Em um polígono qualquer, a soma dos ângulos externos é 360°.

$$S_e = 360^{o}$$

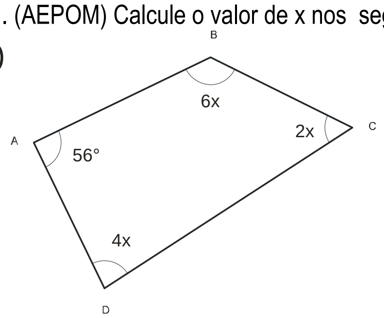
Importante: a soma de um ângulo interno com um ângulo externo é igual a 180°.

$$a_i + a_e = 180^{o}$$

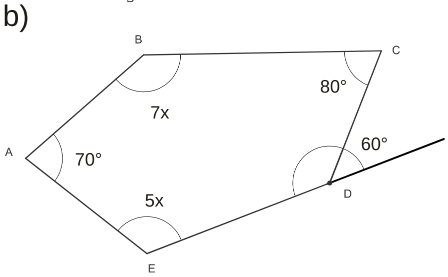
Exercícios de Treinamento

01. (AEPOM) Calcule o valor de x nos seguintes polígonos.

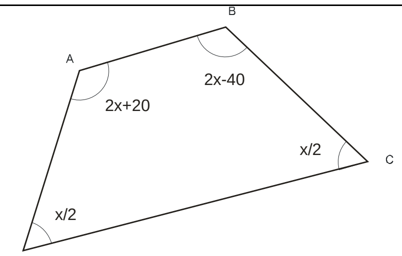
a)



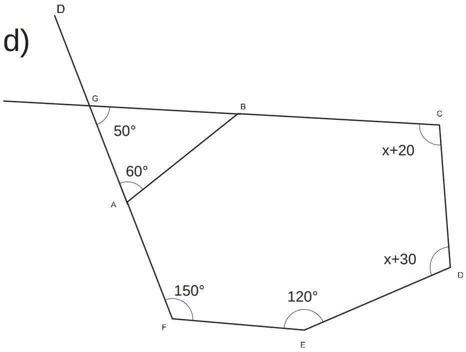
b)



c)



d)



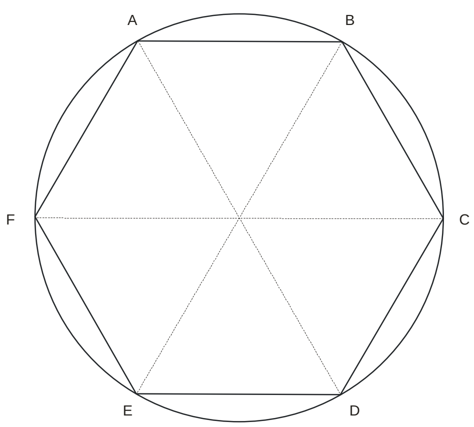
02. (AEPOM) Calcule o número de diagonais, soma dos ângulos internos e o ângulo interno dos polígonos:
a) Quadrado.
b) Octógono.
c) Dodecágono.
d) Icoságono.

03. (AEPOM) Determine o ângulo interno e externo de um:
a) Triângulo equilátero.
b) Quadrado.
c) Pentágono regular.
D) Hexágono regular.

Polígonos Inscritos e Circunscritos

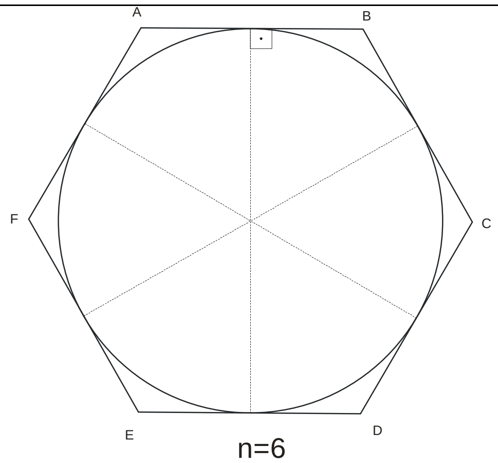
Existe uma propriedade de polígonos que diz:

- ❖ Dividindo uma circunferência em n partes iguais, sendo n≥3, temos:
- ➢ **1°. Caso:** se ligarmos todos esses pontos através de um segmento de reta formaremos um polígono regular inscrito nesta circunferência.



n=6

- ➢ **2°. Caso:** as tangentes traçadas pelos pontos de divisão determinam um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência.



n=6

Nota: Todo polígono regular é inscritível e circunscritível.

Elementos notáveis:

Centro de um polígono regular é o centro comum da circunferência circunscrita ou inscrita.

Apótema de um polígono regular é distância do centro do polígono a um dos lados.

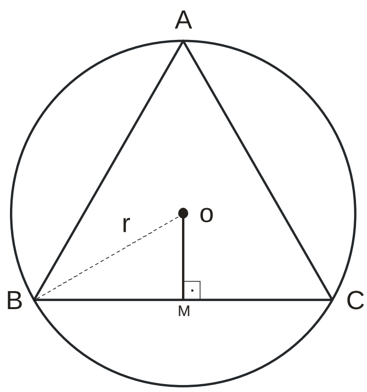
Importante: o apótema de um polígono regular é o raio da circunferência inscrita.

O segmento $\overline{OM}$ é denominado apótema do pentágono ABCDE.

Nota: Se um polígono possui um número par de lados então todas as suas diagonais passam pelo centro, no caso de um número ímpar de lados, não há diagonais passando pelo centro.

Calculando medidas de lado e apótema em polígonos inscritos:

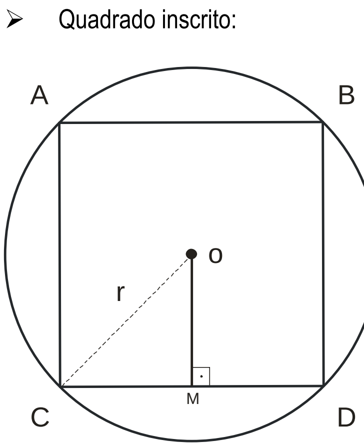
- ➢ Triângulo equilátero inscrito:



$$l_3 = r\sqrt{3}$$

$$a_3 = \frac{r}{2}$$

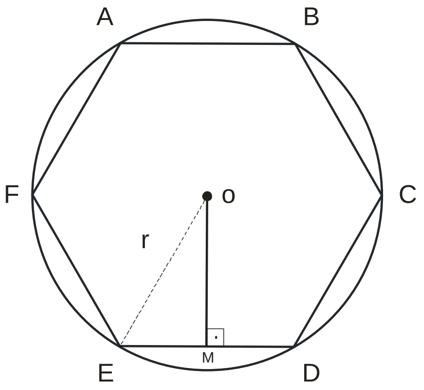
- ➢ Quadrado inscrito:



$$l_4 = r\sqrt{2}$$

$$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

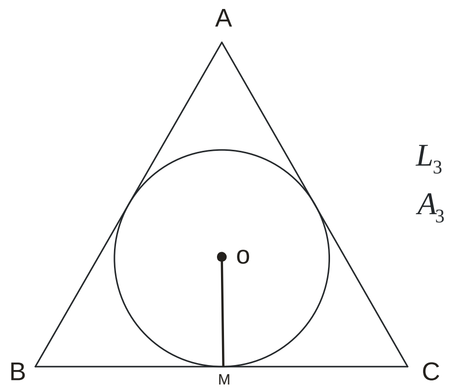
- Hexágono regular inscrito:



$$l_6 = r$$
$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

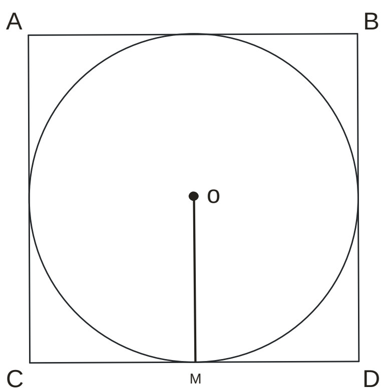
Principais polígonos Circunscritos:

- Triângulo equilátero circunscrito:



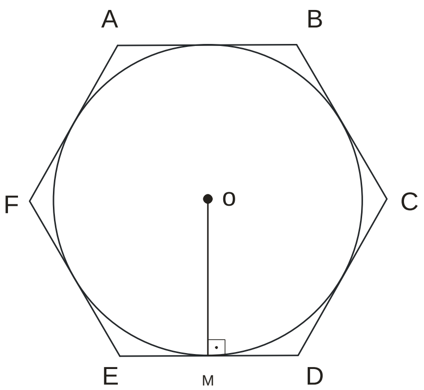
$$L_3 = 2\sqrt{3}r$$
$$A_3 = r$$

- Quadrado circunscrito:



$$L_4 = 2r$$
$$A_4 = r$$

- Hexágono circunscrito:

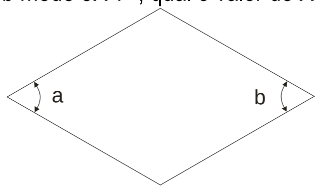


$$L_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$
$$A_6 = r$$

Nota: Como podemos observar nos casos acima, o valor do apótema nos polígonos circunscritos equivale ao raio da circunferência.

Exercícios Propostos

01. (PM/SP) Dado o paralelogramo abaixo, se o ângulo a mede 5X+20° e o ângulo b mede 8X-7°, qual o valor de X?

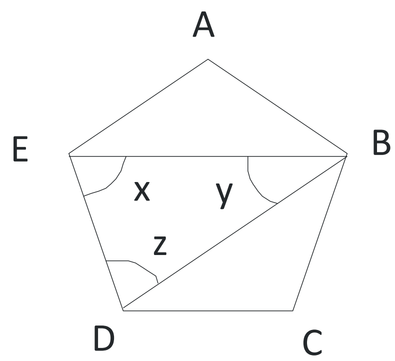


a) 9°.
b) 11°.
c) 13°.
d) 15°.

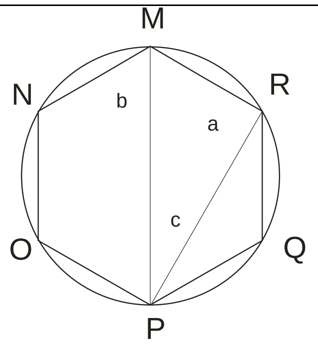
02. (EEAR) Em um polígono regular, a medida de um ângulo interno é o triplo da medida de um ângulo externo. Esse polígono é o:
a) Hexágono.
b) Octógono.
c) Eneágono.
d) Decágono.

03. (EEAR) Em um trapézio, a base média mede 6,5 cm e a base maior, 8 cm. A base menor desse trapézio mede, em cm,
a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.

04. (EEAR) Na figura abaixo, ABCDE é um pentágono regular. As medidas dos ângulos x, y e z, em graus, são, respectivamente:
a) 36, 36, 72.
b) 72, 36, 72.
c) 72, 36, 36.
d) 36, 72, 36.

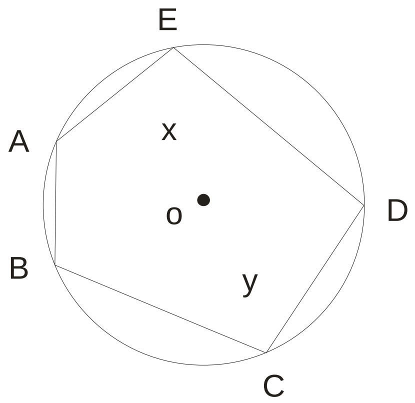


05. (EEAR) Se MNOPQR é um hexágono regular inscrito na circunferência, então a + b – c é igual a:
a) 150°.
b) 120°.
c) 100°.
d) 90°.



06. (EEAR) Seja o pentágono ABCDE da figura, inscrito numa circunferência de centro O. Se o ângulo $A\hat{O}B = 50^o$, então "$x + y$" vale, em graus,

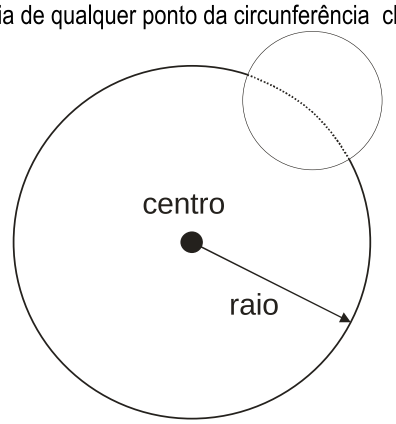
a) 216.
b) 205.
c) 180.
d) 105.



CAPÍTULO 20

Circunferência

Definição: circunferência é um conjunto de pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo neste plano é sempre igual e não-nula. A este ponto damos o nome de centro da circunferência e a sua distância de qualquer ponto da circunferência chama-se raio.



Posição de um ponto em relação a uma reta

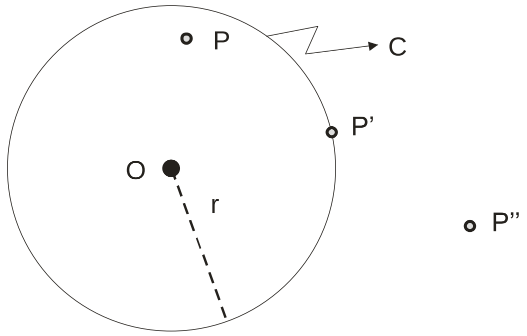
Dado um ponto P e uma circunferência de centro em O e raio r e considerando:

$d_{p,o}$ →Distância do centro da circunferência ao ponto P.

Temos que:

- P é interno a circunferência ↔ $d_{p,o}$ < r.
- P pertence à circunferência ↔ $d_{p,o}$ = r.
- P é externo a circunferência ↔ $d_{p,o}$ > r.

Exemplo:

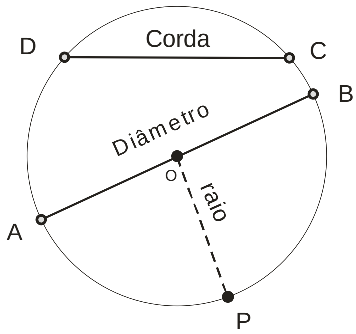


Assim concluímos:

P é interno a circunferência c.
P' é pertence à circunferência c.
P'' é externo a circunferência c.

Elementos de uma circunferência

São elementos fundamentais de uma circunferência: corda, diâmetro e raio.



Corda é todo segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência.

$\overline{CD}$ é uma corda.

Diâmetro é uma corda que passa pelo centro, também conhecido como corda máxima.

$\overline{AB}$ é diâmetro.

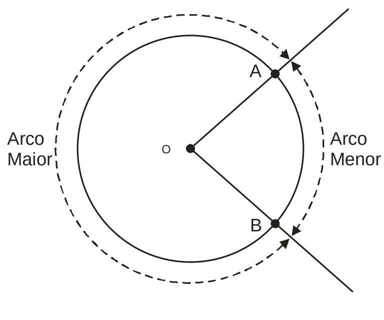
Raio é o segmento de reta que liga o centro à qualquer ponto pertencente a uma circunferência.

$\overline{AO}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OP}$ são raios

Definições importantes de uma circunferência

- **Arco**

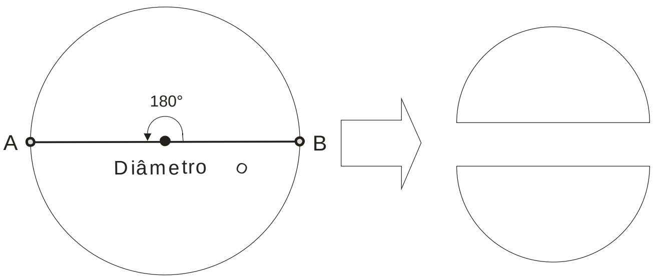
Seja uma circunferência C e sejam A e B dois pontos pertencentes a C. Nessas condições temos:



O Arco $\widehat{AB}$ é determinado pelo conjunto de pontos pertencentes à circunferência de A até B no sentido horário ou no sentido anti-horário. Assim poderemos determinar o arco maior e o menor entre dois pontos.

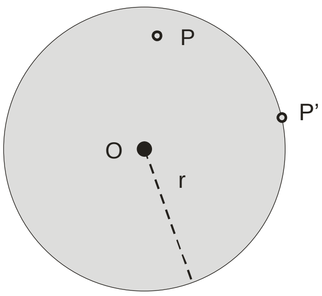
- **Semicircunferência**

A semicircunferência é um arco obtido pela reunião dos pontos extremos de um diâmetro, ou seja, a semicircunferência é um arco de circunferência de 180°.
Observe a figura abaixo:



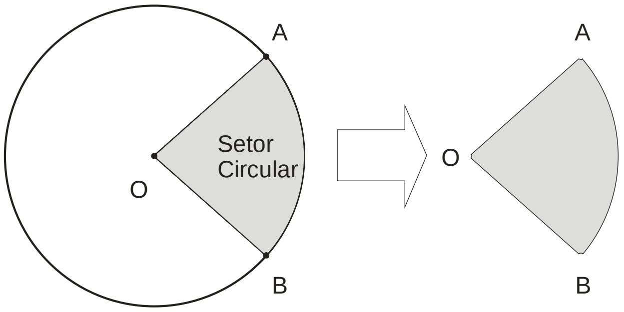
- **Círculo**

É o conjunto de todos os pontos que pertencem à circunferência juntamente com os pontos internos. Na prática, chamamos um círculo como um disco formado por uma circunferência de raio r e centro em O. Definimos o círculo como sendo a região sombreada na figura abaixo.



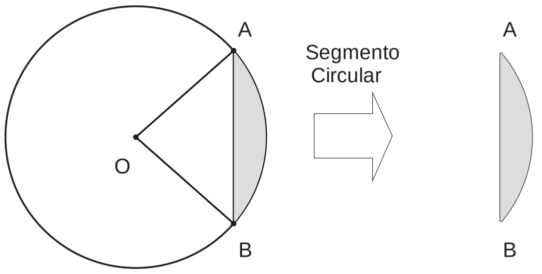
- **Setor Circular**

É o conjunto de pontos compreendidos no interior de um arco. Dada uma circunferência de centro em O e AÔB o ângulo formado pelo arco $\widehat{AB}$. Definimos o setor circular como sendo a região sombreada na figura a segui:



- **Segmento circular**

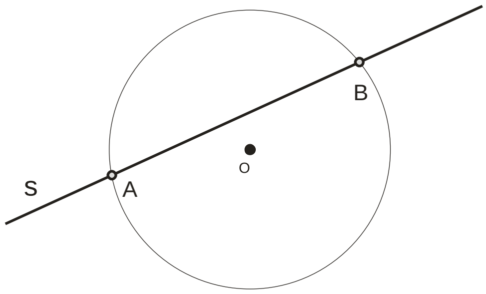
Segmento circular é o conjunto formado pelos pontos localizados na região limitada por uma corda e um arco comum ao mesmo ângulo.



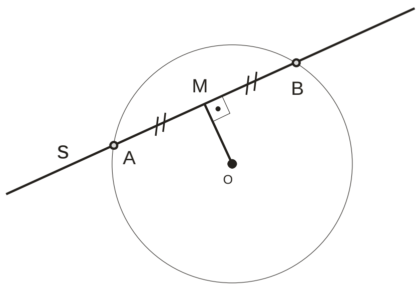
Posições relativas de uma reta e uma circunferência

- **Secante**

Uma reta é secante quando a intercepta uma circunferência em dois pontos distintos.

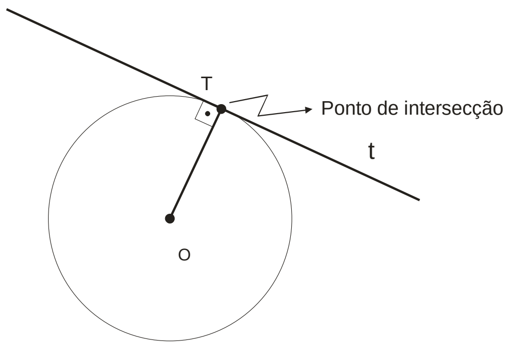


Importante: se uma secante não passa pelo centro, existe um segmento que parte do centro da circunferência e intercepta a corda $\overline{AB}$ no ponto médio formando um ângulo de 90°.



- **Tangente**

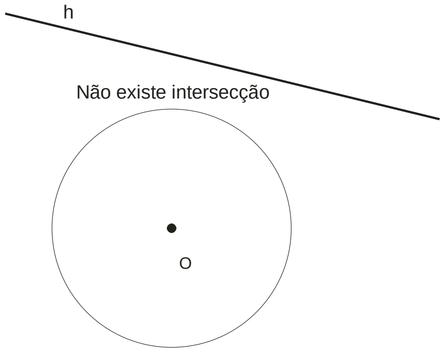
Uma reta é tangente a uma circunferência quando a intercepta em um único ponto.



Importante: a Tangente em qualquer ponto da circunferência sempre formará com o segmento $\overline{OT}$ um ângulo de reto.

- **Exterior (Não secante)**

Uma reta é exterior a uma circunferência quando não a intercepta.

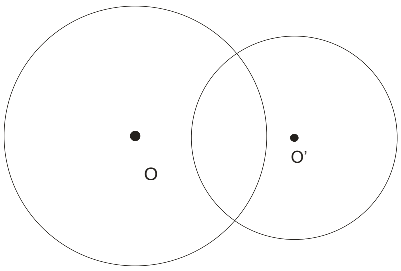


Importante: a distância entre o centro da circunferência e a reta h é maior que raio.

Posições relativas entre circunferências

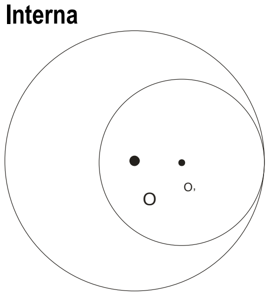
Dadas duas circunferências de centros em O e o' de forma que R é o raio da circunferência maior, r o raio da circunferência menor e d a distância entre os centros $\overline{Oo'}$. Definimos circunferências:

- **Secantes**



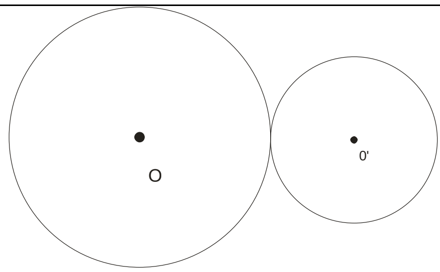
$$R-r<d<R+r$$

- **Tangente Interna**



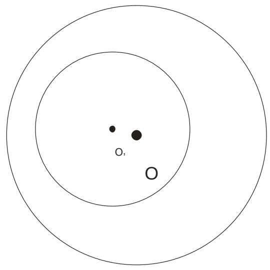
$$d=R-r$$

- **Tangente Externa**



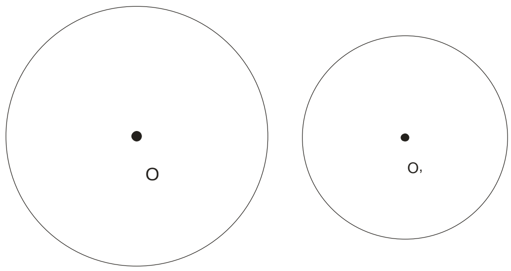
$$d=R+r$$

- **Interiores**



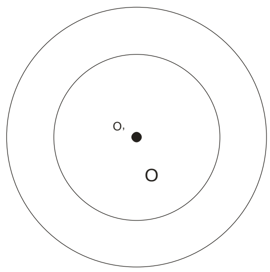
$$d<R-r$$

- **Exteriores**



$$d>R+r$$

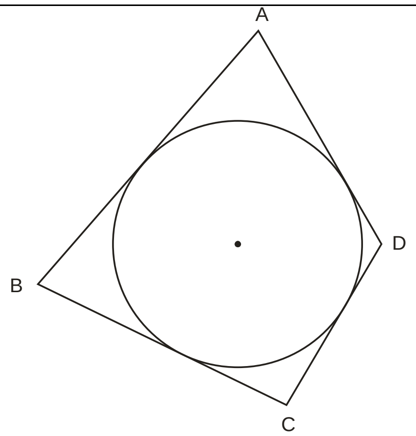
- **Concêntricas**



$$d=0$$

Quadriláteros Circunscritíveis

Um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência se, somente se, seus quatro lados são tangentes à circunferência.

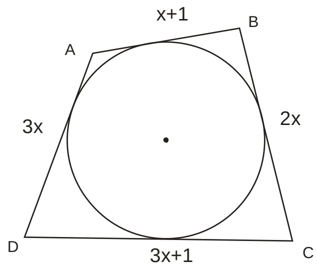


Propriedade: para verificarmos se um quadrilátero ABCD convexo é circunscritível, basta que a soma dos lados opostos sejam iguais:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$$

Exercício Resolvido

01. (AEPOM) Determine o perímetro do quadrilátero ABCD, circunscrito na circunferência.



Resolução: Aplicaremos a propriedade.

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$$

$$(x+1) + (3x+1) = 2x + 3x$$

$$4x + 2 = 5x$$

$$4x - 5x = -2$$

$$-x = -2$$

$$x = \frac{-2}{-1} = 2$$

Assim temos:

$\overline{AB} = x + 1 = 2 + 1 = 3$

$CD = 3x + 1 = 3.2 + 1 = 7$

$\overline{BC} = 2x = 2.2 = 4$

$\overline{AD} = 3x = 3.2 = 6$

Concluindo: perímetro é igual à soma dos lados:

$$2P = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC} + \overline{AD}$$
$$2P = 3 + 7 + 4 + 6$$
$$2P = 20$$

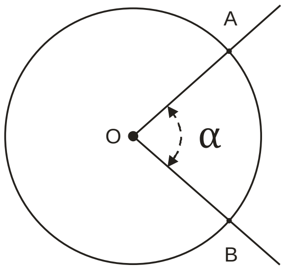
Resposta: Perímetro é igual a 20.

Ângulos na circunferência

Dada uma circunferência de raio unitário, temos:

- **Ângulo Central**

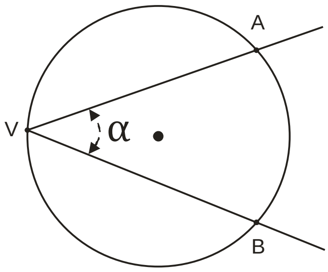
É o ângulo que possui seu vértice no centro da circunferência.



$$\alpha = \widehat{AB}$$

- **Ângulo inscrito**

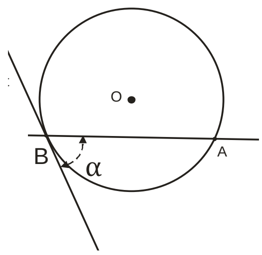
É o ângulo que possui seu vértice num ponto pertencente à circunferência.



$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

- **Ângulo de segmento**

É o ângulo que possui seu vértice num ponto pertencente à circunferência, porém este ângulo é formado por uma reta secante e uma reta tangente.

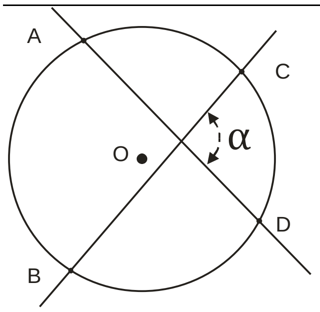


$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

Observação: o ângulo de segmento também é chamado de ARCO CAPAZ.

- **Ângulo excêntrico interno**

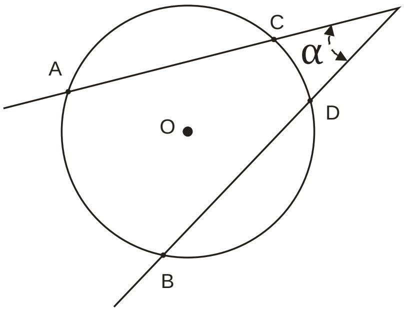
É o ângulo que possui seu vértice num ponto interior a circunferência, formado pela intersecção de duas secantes.



$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

- **Ângulo excêntrico externo**

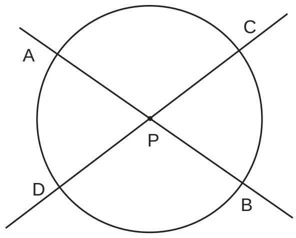
É o ângulo que possui seu vértice num ponto exterior a circunferência, formado pela intersecção de duas retas secantes.



$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

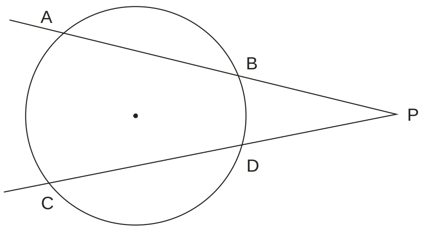
Relações Métricas no Círculo

- **Interceptação de duas secantes num ponto interior.**



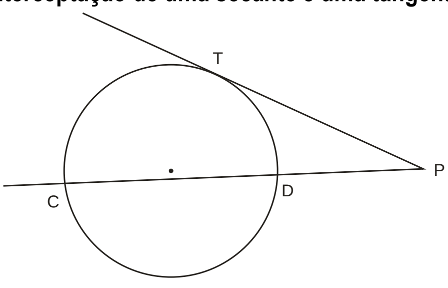
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

- **Interceptação de duas secantes num ponto exterior.**



$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

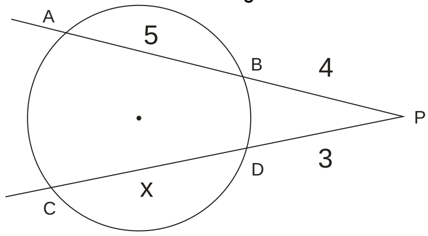
- **Interceptação de uma secante e uma tangente**.



$$\overline{PT}^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

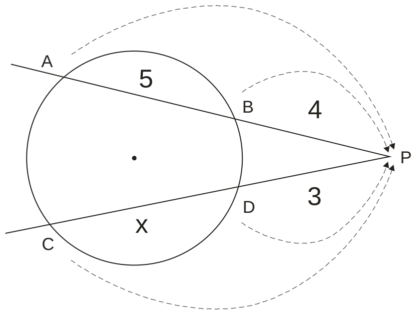
Exercício Resolvido

06. (AEPOM) Calcule o valor de x na figura abaixo.



Resolução:
Usaremos a relação:

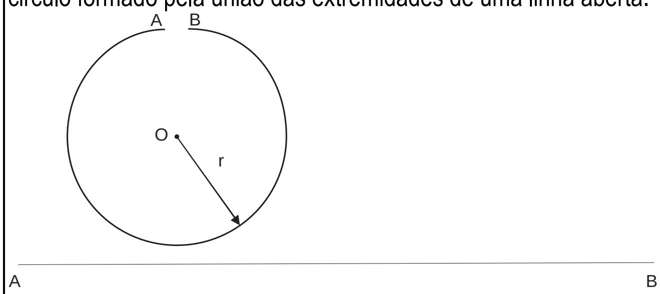
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$



$$(5+4) \cdot 4 = (x+3) \cdot 3$$
$$9 \cdot 4 = 3x + 9$$
$$36 - 9 = 3x$$
$$x = \frac{27}{3} = 9$$

Comprimento de uma Circunferência

Dada uma circunferência de raio r e centro em O, calcula-se o comprimento de uma circunferência como sendo o contorno de um circulo formado pela união das extremidades de uma linha aberta.



Temos uma propriedade que diz que a razão entre o comprimento e o diâmetro de qualquer circunferência é sempre constante. A esta constante dá-se o nome de π (Pí).
Assim temos:

$$Razão = \frac{C}{D} = \frac{C}{2r} = \pi;$$

$$Logo, \quad C = 2\pi r.$$

Exercícios Propostos

01. (EEAR) Sejam: $\overline{AB}$ o diâmetro de uma circunferência de centro O; $\overline{AR}$ uma corda, tal que $B\hat{A}R = 20^o$; t, paralela a $\overline{AR}$, uma reta tangente à circunferência, em T. Sabendo que T e R são pontos da mesma semicircunferência em relação à $\overline{AB}$, a medida, em graus, do ângulo agudo formado pela reta t e pela corda $\overline{AT}$ é igual a

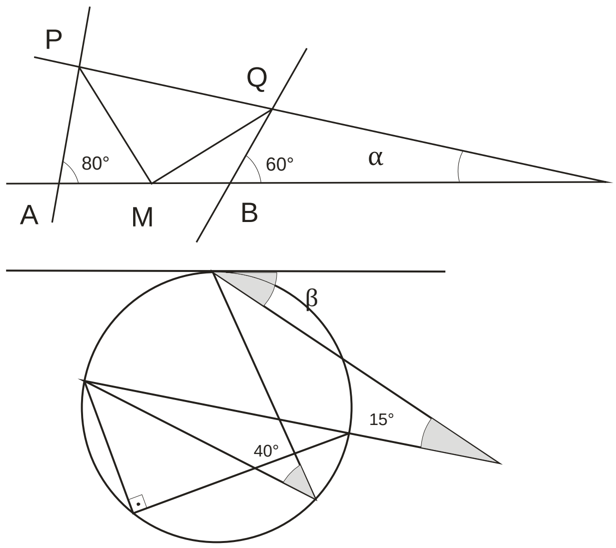
a) 25.
b) 35.

c) 50.
d) 70.

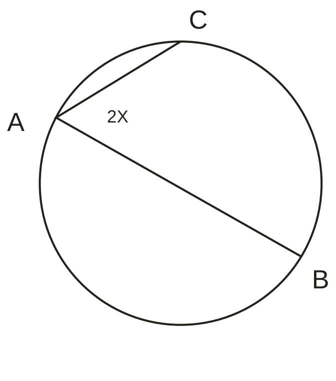
02. (EEAR) Traçam-se duas cordas de uma mesma extremidade de um diâmetro de um círculo. Uma delas mede 9 cm, e sua projeção sobre o diâmetro mede 5,4 cm. O comprimento da outra corda, cuja projeção no diâmetro é de 9,6 cm mede, em cm,
a) 10.
b) 12.
c) 14.
d) 15.

03. (CPCAR) Nas figuras abaixo, o valor de α + β é:
DADOS: AM = AP ,BM = BQ e MP = MQ.

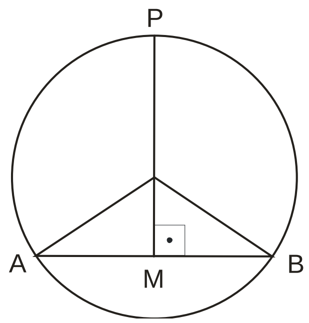
a) 25°.
b) 30°.
c) 35°.
d) 40°.



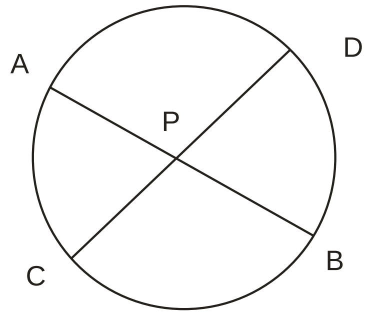
04. (CFT) Seja a circunferência e suas cordas AC e AB. Se BC = 120º, o valor de x é:
a) 90°.
b) 45°.
c) 30°.
d) 15°.



05. (CFT) Na circunferência de centro O, AM = MB = 3 cm, e MP = 9 cm. O perímetro do triângulo AOB é, em cm,
a) 10.
b) 16.
c) 20.
d) 24.



05. (EEAR) Na figura, AB e CD são cordas tais que $AP = 2PB$, CD = 10 cm, $\frac{CP}{2} = \frac{PD}{3}$ medida de AB, em cm, é:
a) $6\sqrt{3}$.
b) $7\sqrt{3}$.
c) $8\sqrt{2}$.
d) $9\sqrt{2}$.



CAPÍTULO 21

Definição de Área.

Área é um conceito matemático que pode ser definido como quantidade de espaço associado ao comprimento e a largura de um plano ou uma figura geométrica. A área, em regra, é calculada através do produto de duas dimenções .

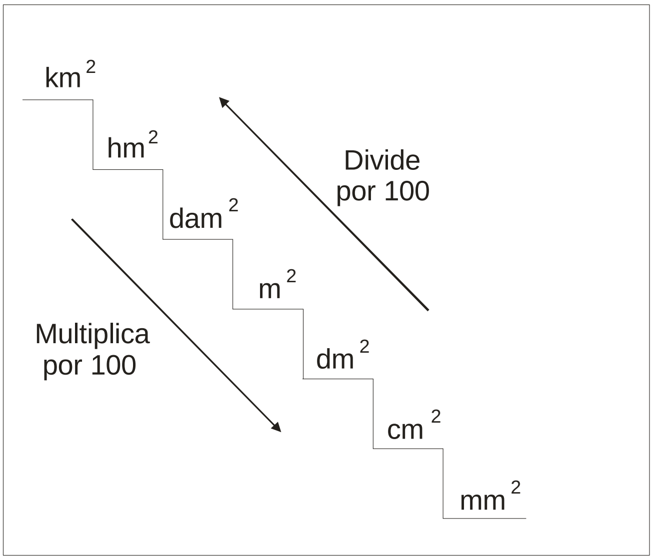
Unidades de área

Dentre várias, usaremos as unidades relacionadas ao metro, seus múltiplos e submúltiplos.

Multiplos e Submúltiplos do metro:

Unidades	Abreviação	Conversão
Quilômetro quadrado	km^2	10^6m^2
Hectômetro quadrado	hm^2	10^4m^2
Decâmetro quadrado	dam^2	10^2m^2
Metro quadrado	m^2	$1m^2$
Decímetro quadrado	dm^2	$10^{-2}m^2$
Centímetro quadrado	cm^2	$10^{-4}m^2$
Milímetro quadrado	mm^2	$10^{-6}m^2$

Utilizando o método das escadas temos:



Exemplo:

01. Tranformando $3m^2$ em cm^2 teremos:

$$1cm^2 = 10^{-4}m^2$$
$$xcm^2 = 3m^2$$

Fazendo uma regra de três simples :

$$1 \cdot 3 = x \cdot 10^{-4}$$
$$x = \frac{3}{10^{-4}} \rightarrow x = 3.10^4 cm^2$$

Exercicio de Treinamento

01. Efetue as seguintes transformações:

a) $4m^2 \rightarrow mm^2$

b) $2hm^2 \rightarrow m^2$

c) $7mm^2 \rightarrow dam^2$

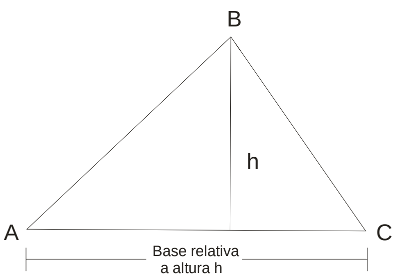
d) $1dm^2 \rightarrow cm^2$

e) $2{,}4m^2 \rightarrow km^2$

Área de polígonos

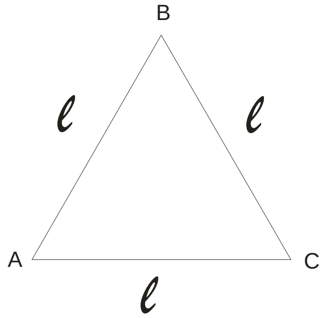
- **Triângulo qualquer**

Dado um triângulo ABC e altura h temos:



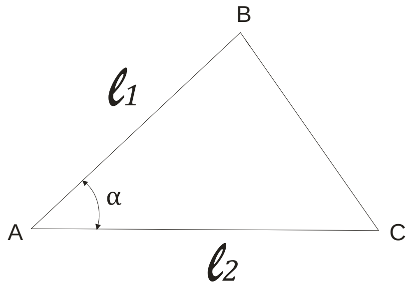
$$A = \frac{B \cdot h}{2}$$

- **Triângulo Equilátero**



$$A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

- **Triângulo em função de um ângulo**



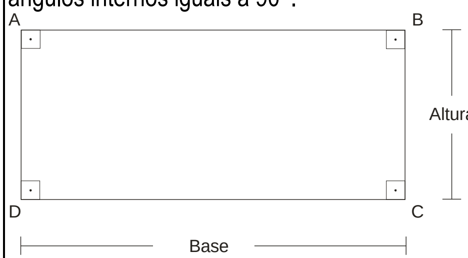
$$A = \frac{l_1 \cdot l_2}{2} \cdot sen\alpha$$

Nota: existe ainda a fórmula de Heron para o cálculo da área em função dos lados a, b e c. Para isso, devemos, também, calcular o semiperímetro (Equivale a metade do perímetro).

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \ \ , com \ \ p = \frac{a+b+c}{2}.$$

- **Retângulo**

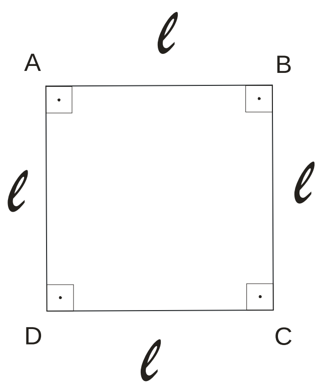
Dado um quadrilátero ABCD cujos lados são paralelos e possui ângulos internos iguais a 90°.



$$A = B \cdot h$$

- **Quadrado**

É um quadrilátero ABCD cujos lados opostos são paralelos e iguais.

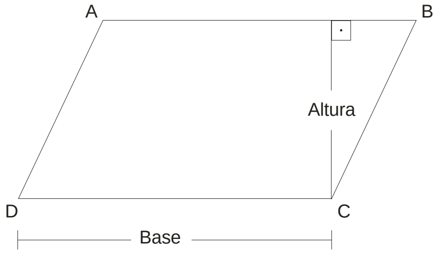


$$A = B \cdot h$$
$$A = l \cdot l$$
$$A = l^2$$

Nota: as diagonais do quadrado são bissetrizes e formam entre si um ângulo de 90°.

- **Paralelogramo**

É um quadrilátero ABCD cujos lados opostos são paralelos.

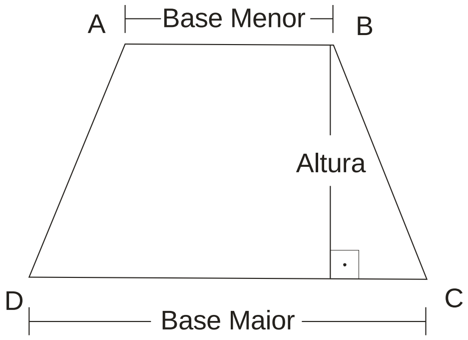


$$A = B \cdot h$$

Nota: os quadriláteros: quadrado, retângulo e paralelogramo possuem diagonais que se interceptam em seus respectivos pontos médios.

- **Trapézio**

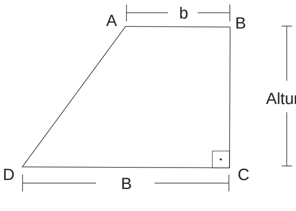
É um quadrilátero ABCD cujas bases são paralelas e os outros dois lados opostos não são paralelos.



$$A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$$

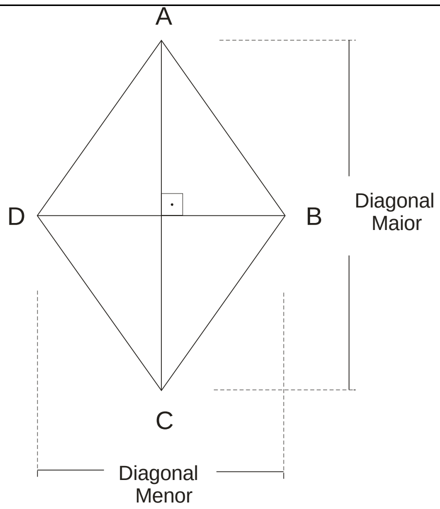
1ª Observação : trapézio isósceles é aquele que possui ângulos da base iguais. Outra consequência é que suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios.

2ª Observação: trapézio retângulo é aquele que possui um ângulo da base igual a 90°.



- **Losango**

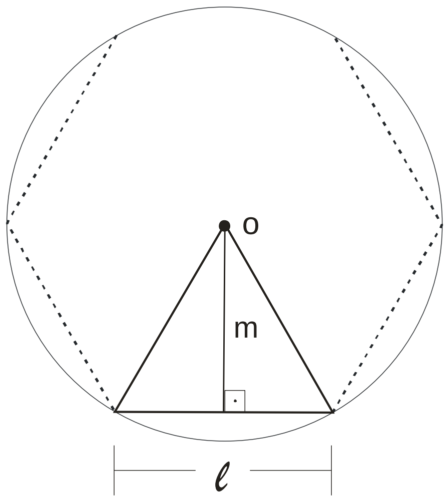
É um quadrilátero ABCD cujos lados opostos são paralelos e suas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios formando um ângulo de 90°.



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

- **Polígonos Regulares**

Dado um polígono regular qualquer de n lados. Determinaremos o calculo da área formada por n triângulos de altura m e base l.



Nomenclaturas:
n = número de lados.
m = medida do apótema.
l = medida do lado.
p = semiperímetro.

$$A_{poligono} = n \cdot A_{triângulo}$$

Sendo:

$$A_{triângulo} = \frac{m \cdot l}{2}$$

<u>Concluímos que</u>:

$$A_{poligono} = n \cdot m \cdot \frac{l}{2}$$

Nota: a área do polígono também pode ser determinada por:

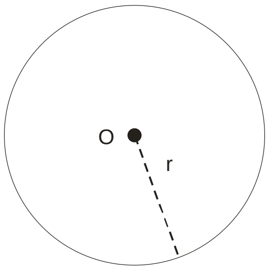
$$A_{polígono} = p \cdot r$$

Com,
p: semiperímetro do polígono e r: raio da circunferência.

Áreas de estruturas curvilíneas

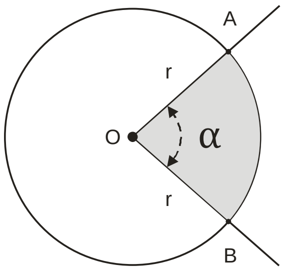
- **Circunferência**

Dada uma circunferência de raio r e centro em O.



$$A = \pi r^2$$

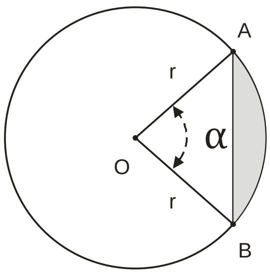
- **Setor Circular**



$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

Observação: o valor de α deve ser dado em graus.

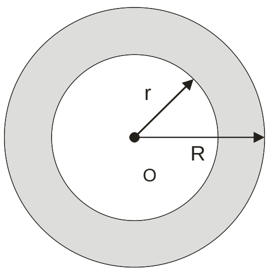
- **Segmento Circular**



$$A = \frac{r^2}{2}\ (\alpha - sen\alpha)$$

Observação: o valor de α deve ser usado em radianos.

- **Coroa Circular**



$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Exercício Resolvido

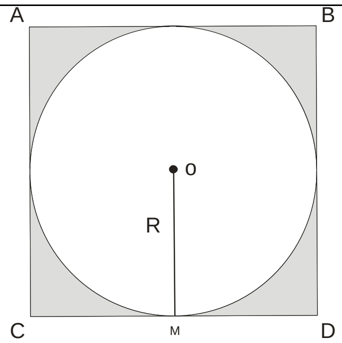
01. (AEPOM) Dado o Quadrado ABCD com uma circunferência inscrita. Calcule o valor da área em cinza, sabendo que o raio da circunferência vale 5 cm.

a) $A_{somb} = 25(4 - \pi)cm^2$.

b) $A_{somb} = 25(4 + \pi)cm^2$.

c) $A_{somb} = 100(1 - \pi)cm^2$.

d) $A_{somb} = 5(20 - \pi)cm^2$.



Resolução: para descobrir a área da região sombreada devemos calcular a área do quadrado e subtrair da área da circunferência.

$$A_{somb} = A_{quad} - A_{circf}$$

Substituindo as formula teremos:

$$A_{somb} = l^2 - \pi r^2$$

Sabendo que o lado do quadrado é o dobro do raio, então teremos:

$$A_{somb} = (2r)^2 - \pi r^2$$

$$A_{somb} = (2 \times 5)^2 - \pi 5^2$$

$$A_{somb} = 10^2 - 25\pi$$

$$A_{somb} = 100 - 25\pi$$

$$A_{somb} = 25(4 - \pi)cm^2$$

Resposta: alternativa **a**.

Exercícios Propostos

01. (EEAR) Se S = 36 cm^2 é a área de um quadrado de lado l cm, o valor de l é:
a) 3.
b) 6.
c) 9.
d) 12.

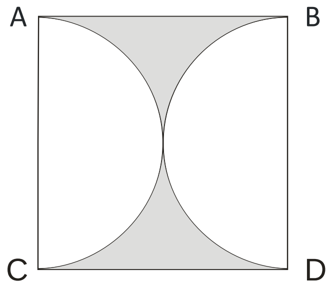
02. (PM/SP) A diagonal de um terreno retangular mede 15 m e um dos lados mede 9m. A área desse terreno em m^2 é:
a) 96.
b) 108.
c) 144.
d) 162.

03. (EEAR) A área de um triângulo de perímetro 54m circunscrito a um círculo de 25π m², em m², é:
a) 125.
b) 130.
c) 135.
d) 140.

04. (EEAR) Com 4 palitos de mesmo comprimento, forma-se um quadrado com $x\ cm^2$ de área e $y\ cm$ de perímetro. Se $x - y = 0$, o comprimento de cada palito, em cm, é:
a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 8.

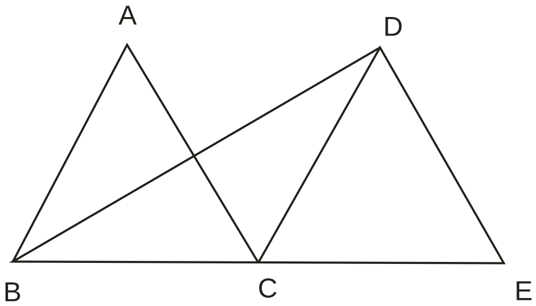
05. (AEPOM) Na figura abaixo, o lado do quadrado é 2 cm. Então a área hachurada, em cm² vale:

a) $4-\pi$.
b) $4+\pi$.
c) $2-\pi$.
d) $2+\pi$.



06. (EEAR) Na figura BC e CE são segmentos colineares de 4cm cada um. Se os triângulos ABC e DCE são equiláteros, a área do triângulo BDE é:

a) $4\sqrt{3}$.
b) $6\sqrt{3}$.
c) $8\sqrt{3}$.
d) $10\sqrt{3}$.

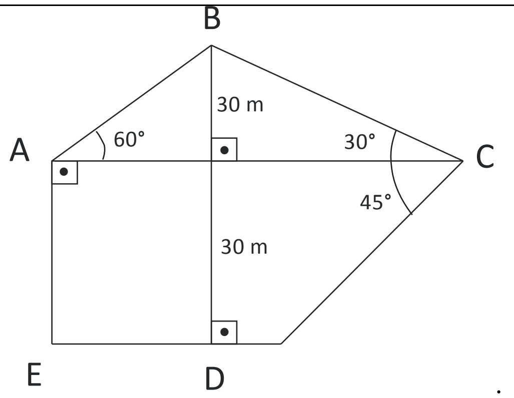


07. (AEPOM) Calcule a área de um quadrado de lado a sabendo que o raio da circunferência circunscrita a esse quadrado mede $2\sqrt{2}$ cm.

a) 4.
b) $4\sqrt{2}$.
c) $\sqrt{2}$.
d) 16.

08. (EEAR) Feito o levantamento de um terreno pentagonal, foram determinados os dados indicados na figura a seguir. A área do terreno, em m², é:

a) 450.
b) $450(4\sqrt{3}-1)$.
c) 900.
d) $900(3\sqrt{3}-2)$.

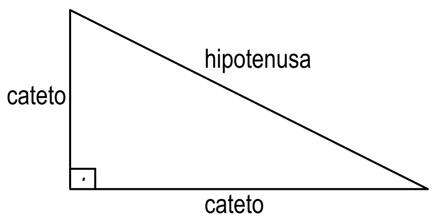


09. (EEAR) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo regular é de 720º, Sabendo-se que o seu lado mede 4 cm e que ele está inscrito numa circunferência, então a área desse polígono, em cm², é

a) $6\sqrt{3}$.
b) $12\sqrt{3}$.
c) $18\sqrt{3}$.
d) $24\sqrt{3}$.

CAPÍTULO 22
Introdução ao Estudo de Trigonometria
Razões Trigonométricas no triângulo Retângulo

Em um triângulo chamamos o lado oposto ao ângulo reto de **hipotenusa** e os lados adjacentes de **catetos**.
Observe a figura:



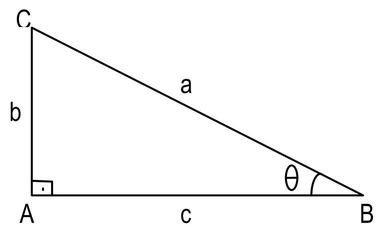
Definimos:

$$seno = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$cosseno = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$tangente = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ do\ cateto\ adjacente}$$

Consideremos um triângulo retângulo ABC.



Assim, podemos concluir:

1. $sen\ \theta = \frac{b}{a}$.

2. $cos\ \theta = \frac{c}{a}$.

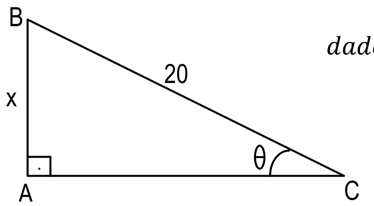
3. $tg\ \theta = \frac{b}{c}$.

Ângulos Notáveis

Podemos fazer algumas considerações importantes com relação aos ângulos de 30º, 45º e 60º, chamados de **ângulos notáveis**.
A partir de um triângulo retângulo conveniente e das definições acima, podemos obter a seguinte tabela:

θ	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo:
01. (AEPOM) Calcule o valor da medida do lado AB da figura abaixo.



$dado: \theta = 30°$

Resolução:
Observando a figura acima, temos:
- 20 é a hipotenusa do triângulo ABC.
- x é o cateto oposto ao ângulo de 30º.
Assim,

$$sen\ 30° = \frac{x}{20} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{x}{20} \quad \Leftrightarrow \quad x = 10.$$

Relações Fundamentais e Auxiliares

Como foi visto, definimos as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Diante disso, podemos verificar as seguintes relações fundamentais:

a) $sen^2x + cos^2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} sen^2x = 1 - cos^2x \\ e \\ cos^2x = 1 - sen^2x \end{cases}$

b) Cotangente de x

$$cotg\ \boldsymbol{x} = \frac{1}{tg\ x} = \frac{cos\ x}{sen\ x}\text{, com } sen\ \boldsymbol{x} \neq 0$$

c) Secante de x

$$sec\ \boldsymbol{x} = \frac{1}{cos\ x}\text{, com } cos\ \boldsymbol{x} \neq 0$$

d) Cossecante de x

$$cossec\ \boldsymbol{x} = \frac{1}{sen\ x}\text{, com } sen\ \boldsymbol{x} \neq 0$$

e) $sec^2\boldsymbol{x} = 1 + tg^2\boldsymbol{x}$

f) $cossec^2\boldsymbol{x} = 1 + cotg^2\boldsymbol{x}$

Operações com Arcos

Adição e Subtração de Arcos

Sejam a e b dois arcos, podemos fazer as seguintes relações:

- **Seno** de $(a + b)$.

$$sen(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = sen\ \boldsymbol{a} \cdot cos\ \boldsymbol{b} + sen\ \boldsymbol{b} \cdot cos\ \boldsymbol{a}.$$

- **Seno** de $(a - b)$.

$$sen(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = sen\ \boldsymbol{a} \cdot cos\ \boldsymbol{b} - sen\ \boldsymbol{b} \cdot cos\ \boldsymbol{a}.$$

- **Cosseno** de $(a + b)$.

$$\cos(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = cos\ \boldsymbol{a} \cdot cos\ \boldsymbol{b} - sen\ \boldsymbol{a} \cdot sen\ \boldsymbol{b}.$$

- **Cosseno** de $(a - b)$.

$$\cos(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = cos\ \boldsymbol{a} \cdot cos\ \boldsymbol{b} + sen\ \boldsymbol{a} \cdot sen\ \boldsymbol{b}.$$

- **Tangente** de $(a + b)$.

$$tg(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \frac{tg\ \boldsymbol{a} + tg\ \boldsymbol{b}}{1 - tg\ \boldsymbol{a} \cdot tg\ \boldsymbol{b}}$$

- **Tangente** de $(a - b)$

$$tg(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \frac{tg\ \boldsymbol{a} - tg\ \boldsymbol{b}}{1 + tg\ \boldsymbol{a} \cdot tg\ \boldsymbol{b}}$$

Arco Duplo

Seja $\boldsymbol{a}$ um arco, podemos determinar as funções circulares da forma $2\boldsymbol{a}$ através das aplicações das fórmulas definidas anteriormente. Assim,

- **Seno**

$$\begin{aligned} sen\ 2\boldsymbol{a} &= sen(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}) \\ &= sen\ \boldsymbol{a} \cdot cos\ \boldsymbol{a} + sen\ \boldsymbol{a} \cdot cos\ \boldsymbol{a} \\ &= 2 \cdot sen\ \boldsymbol{a} \cdot cos\ \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

- **Cosseno**

$$\begin{aligned} cos\ 2\boldsymbol{a} &= cos(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}) \\ &= cos\ \boldsymbol{a} \cdot cos\ \boldsymbol{a} - sen\ \boldsymbol{a} \cdot sen\ \boldsymbol{a} \\ &= cos^2\ \boldsymbol{a} - sen^2\ \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

Usando a relação fundamental a), obtemos:

$$cos2\boldsymbol{a} = 1 - sen^2\boldsymbol{a}$$

Ou

$$cos2\boldsymbol{a} = 2cos^2\boldsymbol{a} - 1$$

Observe que encontramos três fórmulas equivalentes para o cálculo de $cos2\boldsymbol{a}$**.** Assim, dependo da situação, podemos escolher a mais indicada.

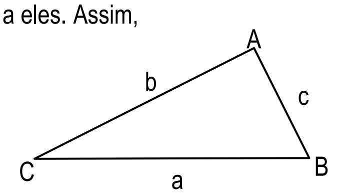
- **Tangente**

$$tg(2\boldsymbol{a}) = tg(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a})$$
$$= \frac{tg\,\boldsymbol{a} + tg\,\boldsymbol{a}}{1 - tg\,\boldsymbol{a} \cdot tg\boldsymbol{a}} = \frac{2tg\,\boldsymbol{a}}{1 - tg^2\,\boldsymbol{a}}$$

Válida para $a \neq k \cdot \frac{\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{N}$.

Lei dos Senos

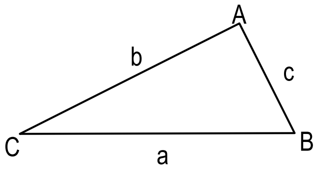
Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles. Assim,



$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Lei dos Cossenos

Em todo triângulo, o quadrado de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado. Assim, podemos citar três casos:



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,cos\hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\hat{C} \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

01. (ESPCEX) Simplificando a expressão $E = (1 + cotg^2x) \cdot (1 - cos^2x)$, obtemos:

a) tgx.
b) $senx$.
c) $\sqrt{2}$.
d) 1.
e) – 1.

Resolução:

Utilizando das relações fundamentais, temos:

$$E = (1 + cotg^2x) \cdot (1 - cos^2x)$$
$$= (cossec^2x) \cdot (sen^2x)$$
$$= \left(\frac{1}{sen^2x}\right) \cdot sen^2x$$
$$= \frac{sen^2x}{sen^2x} = 1$$

Resposta: alternativa **d.**

02. (AEPOM) Se $cos\,x = \frac{4}{5}$ então podemos afirmar que $cos2x$ vale:

a) $\frac{7}{25}$.
b) $-\frac{7}{25}$.
c) $\frac{8}{10}$.
d) $\frac{2}{5}$.

Resolução:

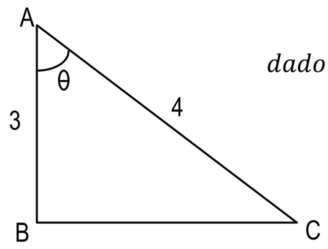
Sabemos que: $cos2\boldsymbol{x} = 2cos^2\boldsymbol{x} - 1$

Substituindo os valores obtemos:

$$cos2\boldsymbol{x} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{16}{25}\right) - 1$$
$$= \frac{32}{25} - 1$$
$$= \frac{32 - 25}{25} = \frac{7}{25}$$

$\therefore cos2x = \frac{7}{25}$, alternativa **a.**

03. (OBJETIVO-SP) Determinar a medida do lado BC, no triângulo da figura.



$dado: \theta = 60°$

Resolução:

Pela lei dos cossenos, sabemos:

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 - 2.3.4.cos60°$$
$$BC = \sqrt{9 + 16 - 24.\frac{1}{2}}$$
$$BC = \sqrt{25 - 12}$$
$$BC = \sqrt{13}$$

Resposta: $\sqrt{13}$**.**

Exercícios Propostos

01. (AEPOM) O valor de $sen75°$ é:

a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.
b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6}$
d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.
e) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

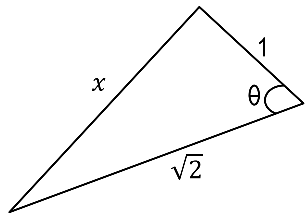
02. (EFOMM) Para todo $x \in \mathbb{R}$, o valor da expressão $\frac{1}{1+tg^2x} + \frac{1}{1+cotg^2x}$ é igual a:

a) 1.
b) 2.
c) $2 + tg^2x + cotg^2x$.
d) $sec^2x + cossec^2x$.
e) 0.

03. (ESPCEX) Sabendo que $cossec\ x = \frac{5}{4}$ e que x pertence ao primeiro quadrante, o valor da expressão $25sen^2x - 9tg^2x$ é:
a) 2.
b) 3.
c) 0.
d) 4.
e) 1.

04. (EEAR) Sendo $a - b = 30°$, calculando o valor de $y = (sen\ a + cosb)^2 + (sen\ b - cosa)^2$, obtemos:
a) 1.
b) $\frac{2}{3}$.
c) 3.
d) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

05. (AEPOM) Da figura abaixo, sabe-se $cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Então, x vale:
a) 1.
b) $\sqrt{2}$.
c) $\sqrt{3}$.
d) 2.
e) 1,5.



06. (EFOMM) Se $sen\ 2x = sen\ x$ e $0 < x < \pi$, então x é:
a) $\frac{\pi}{6}$.

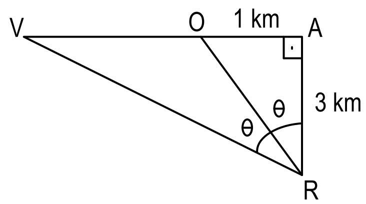
b) $\frac{\pi}{4}$.

c) $\frac{\pi}{3}$.

d) $\frac{\pi}{2}$.

e) $\frac{2\pi}{3}$.

07. (AFA) Ao saltar do avião que sobrevoa o ponto A, um paraquedista cai e toca o solo no ponto V. Um observador que está em R, contacta a equipe de resgate localizada em O. A distância, em Km, entre o ponto em que o paraquedista tocou o solo e a equipe de resgate é igual a:
a) 1,15.
b) 1,25.
c) 1,35.
d) 1,75.

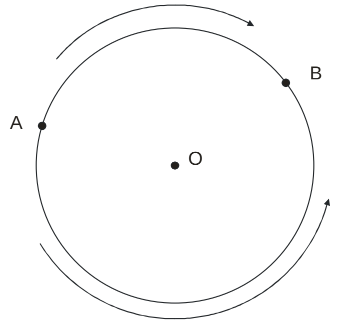


08. (EEAR) Em triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual ao dobro do produto das medidas dos catetos. Um dos ângulos agudos desse triângulo mede:
a) 15º.
b) 30º.
c) 45º.
d) 60º.

09. (EEAR) Um triângulo de $40\sqrt{2}\ cm^2$ de área tem dois lados medindo 10 cm e 16 cm. A medida do ângulo formado entre esses lados é:
a) 75°.
b) 60°.
c) 45°.
d) 30°.

CAPÍTULO 23
Arcos de uma Circunferência

Dados dois pontos A e B distintos em uma circunferência. Temos:



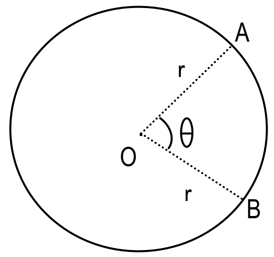
Supondo que queremos deslocar do ponto A para o ponto B. Poderemos adotar dois sentidos para este descolamento curvilíneo. Um no sentido horário e outro anti-horário.
Ao comprimento deste deslocamento chamamos de arco de uma circunferência.

Notação:

$\widehat{AB}$ ➔ Sentido horário
$\widehat{BA}$ ➔ Sentido anti-horário

Medidas de arcos

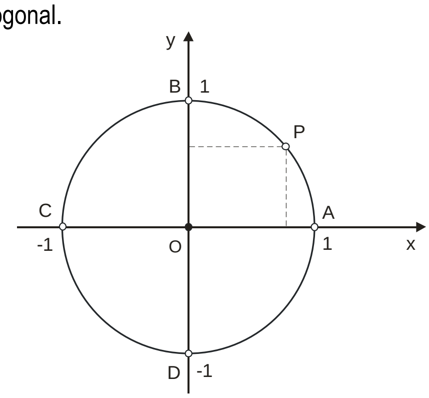
Dada uma circunferência de centro em O, definimos como a medida de um arco AB, em radianos, o quociente entre o comprimento do arco e o raio dessa circunferência.
Observe a figura:



$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\widehat{AB}}{r}$$

Círculo Trigonométrico

É uma circunferência de raio unitário e centro O sobre um plano cartesiano, onde o centro da circunferência coincide com a origem do sistema ortogonal.



Observe que em cada ponto teremos os seguintes pares ordenados:

P= (x, y)
A= (1, 0)
B= (0, 1)
C= (-1, 0)
D= (0, -1)

Relembrando que o comprimento de uma circunferência vale $C = 2\pi r$ e que $r = 1$.
Temos:

$$C = 2\pi r$$

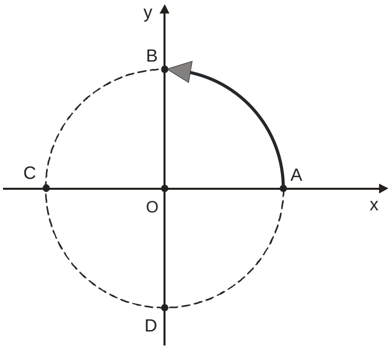
Substituindo r=1, temos:

$$C = 2\pi \cdot 1$$

$$\therefore \quad C = 2\pi$$

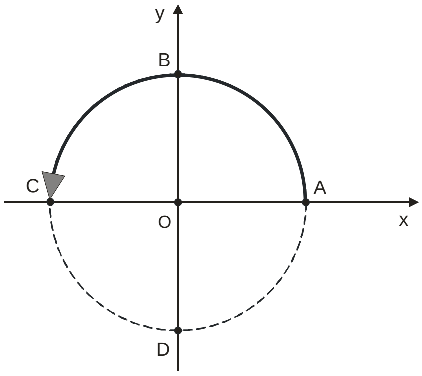
Assim, concluímos que o comprimento de uma circunferência de raio unitário é igual a 2π.
Vamos considerar o ponto P ocupando a posição A, B C e D partindo de A no sentido anti-horário.

- 1ª. Parte



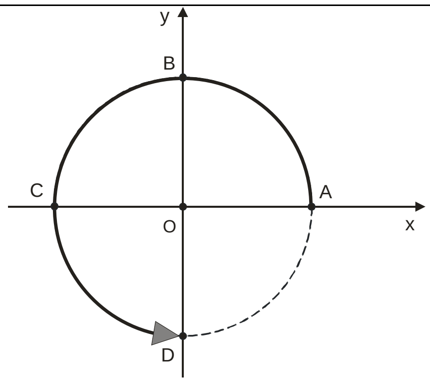
$\widehat{AB} = \dfrac{\pi}{2}$ rad

- 2ª. Parte



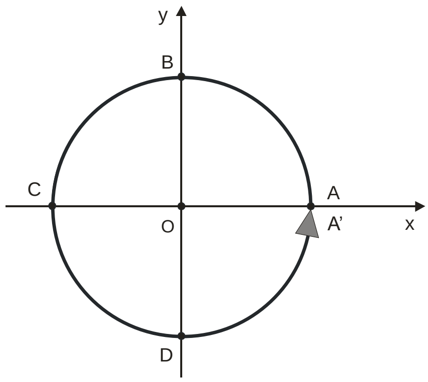
$\widehat{AC} = \pi$ rad

- 3ª. Parte



$\widehat{AD} = \dfrac{3\pi}{2}$ rad

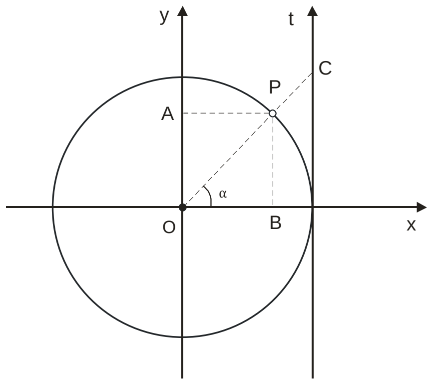
- 4ª. Parte



$\widehat{AA'} = 2\pi$ rad

Funções Circulares

Dado um plano cartesiano de origem em O e nesta mesma origem traçarmos um circunferência de raio unitário. Iremos associar um arco qualquer a três eixos:

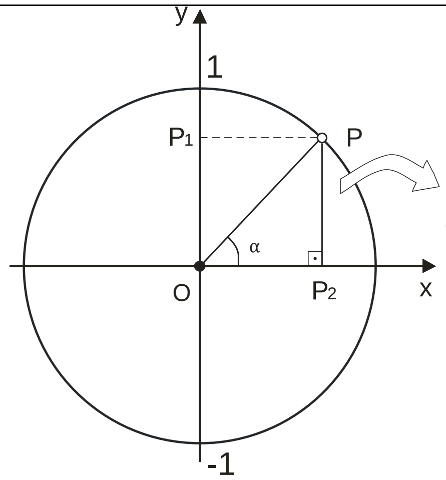


Podemos observar que na figura acima o ponto P determina um arco que mede α (graus ou radianos). Também o Ponto P possui uma associação nos vértices x, y e t.
Assim, temos:

- Eixo x → corresponde ao valor cosseno do referido arco.
- Eixo y → corresponde ao valor seno do referido arco.
- Eixo t → corresponde ao valor da tangente do referido arco.

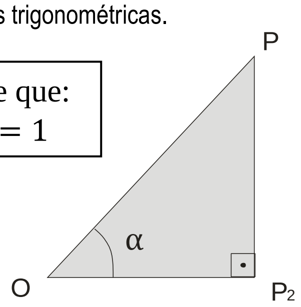
Estudo da função seno

Denominamos a função seno a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada ângulo uma projeção no eixo y, de tal forma que $\overline{OP_1} = Sen\ x$.



De acordo com o ΔOP_2P retângulo em P_2, vamos considerar as seguintes relações trigonométricas.

Sabe-se que:
$\overline{OP} = 1$



$$Sen\alpha = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PP_2}}{1} = \overline{PP_2}$$

$$Cos\alpha = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP_2}}{1} = \overline{OP_2}$$

No círculo trigonométrico, podemos perceber que:

$$\overline{PP_2} = \overline{P_1O}$$

Com isso, vemos que o seno de um ângulo localiza-se no eixo y (eixo das ordenadas) no plano cartesiano.

Nota: esta definição demonstra que poderemos encontrar o seno para infinitos valores positivos ou negativos de α, porém o valor do seno varia de 1 até -1.

Assim, dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = sen\ x$, temos:

1. Imagem de $f(x)$

$$Im(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq senx \leq 1\}$$

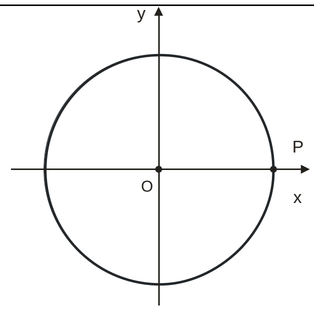
2. Domínio de $f(x)$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Valores do seno no ciclo Trigonométrico

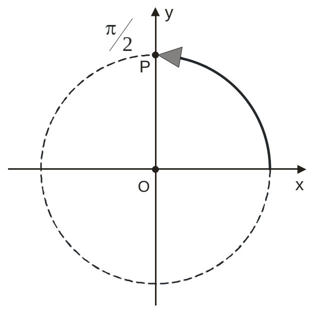
De acordo com o valor de **α,** temos os seguintes valores para o sen **α**:

- $Para\ \alpha = 0°$



$Sen\ 0° = 0$

- $Para\ \alpha = 90°\ ou\ \frac{\pi}{2}\ rad.$

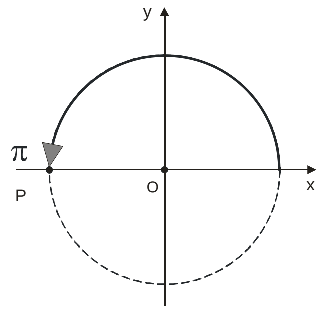


$Sen\ 90° = 1$

⇕

$Sen\ \dfrac{\pi}{2} = 1$

- $Para\ \alpha = 180°\ ou\ \pi\ rad.$

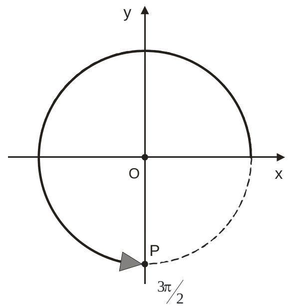


$Sen\ 180° = 0$

⇕

$Sen\ \pi = 0$

- $Para\ \alpha = 270°\ ou\ \frac{3\pi}{2}\ rad.$

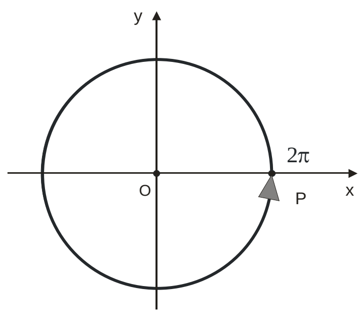


$Sen\ 270° = -1$

⇕

$Sen\ \dfrac{3\pi}{2} = -1$

- $Para\ \alpha = 360°\ ou\ 2\pi\ rad.$

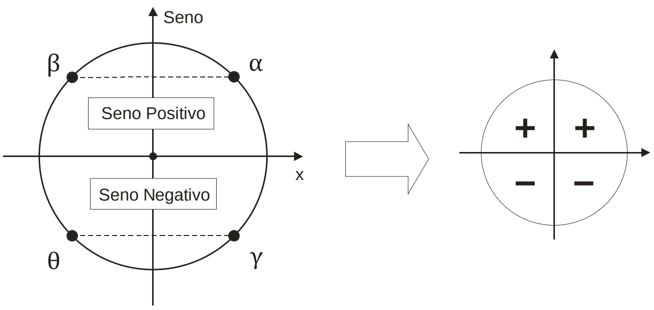


$Sen\ 360° = 0$

⇕

$Sen\ 2\pi = 0$

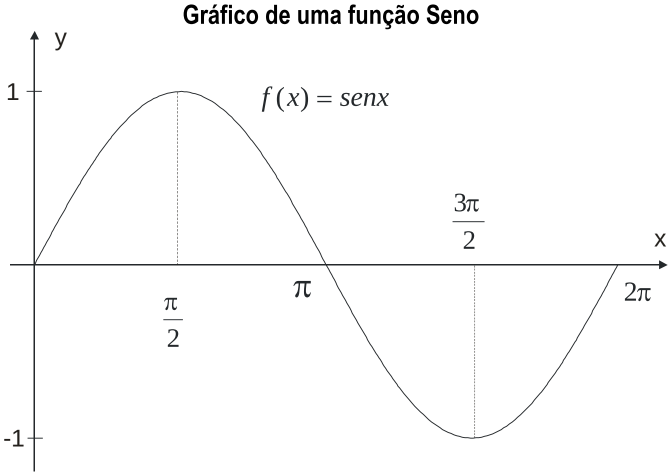
Sinal do seno no 1°. Ciclo



Como podemos perceber no desenho acima, os valores para o seno obedecem à seguinte tabela, de acordo com o quadrante em que ele se encontra:

1° Quadrante	Seno Positivo
2° Quadrante	Seno Positivo
3° Quadrante	Seno Negativo
4° Quadrante	Seno Negativo

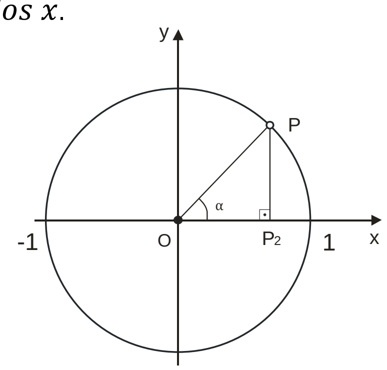
Gráfico de uma função Seno



Observação: o gráfico de uma função $sen\ x$ chama-se senóide e possui um período igual a 2π.

Estudo da função Cosseno

Denominamos a função cosseno a função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada ângulo uma projeção no eixo x, de tal forma que $\overline{OP_2} = Cos\ x$.



Nota: No ciclo trigonométrico poderemos, encontrar o cosseno para infinitos valores positivos ou negativos de α, porém o valor do Cosseno varia de 1 até -1.

Assim, dada uma função $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = cos\ x$, temos:

1. Imagem de $f(x)$

$$Im(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq cos\ x \leq 1\}$$

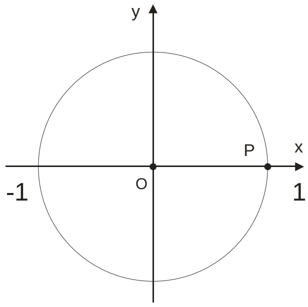
2. Domínio de $f(x)$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Valores do Cosseno no ciclo Trigonométrico

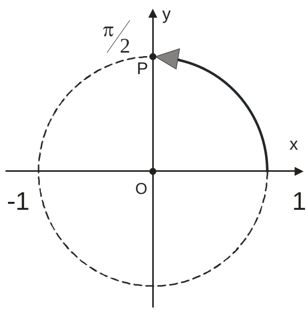
De acordo com o valor de α, termos os seguintes valores para o $cos\ \alpha$:

- $Para\ \alpha = 0°$



$Cos\ 0° = 1$

- $Para\ \alpha = 90°\ ou\ \frac{\pi}{2}\ rad.$

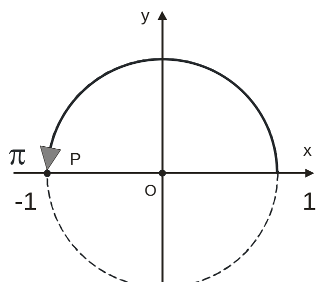


$$Cos\ 90° = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$Cos\ \frac{\pi}{2} = 0$$

- $Para\ \alpha = 180°\ ou\ \pi\ rad.$

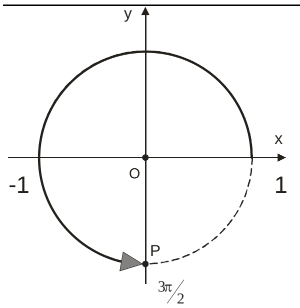


$$Cos\ 180° = -1$$

$$\Updownarrow$$

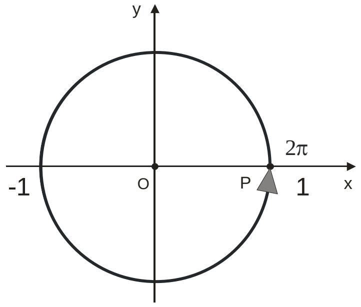
$$Cos\ \pi = -1$$

- $Para\ \alpha = 270°\ ou\ \frac{3\pi}{2}\ rad.$



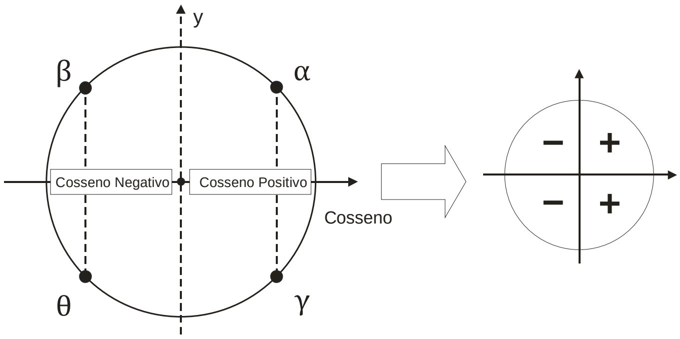
$$Cos\ 270° = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$Cos\ \frac{3\pi}{2} = 0$$

- $Para\ \alpha = 360°\ ou\ 2\pi\ rad.$



$$Cos\ 360° = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$Cos\ 2\pi = 1$$

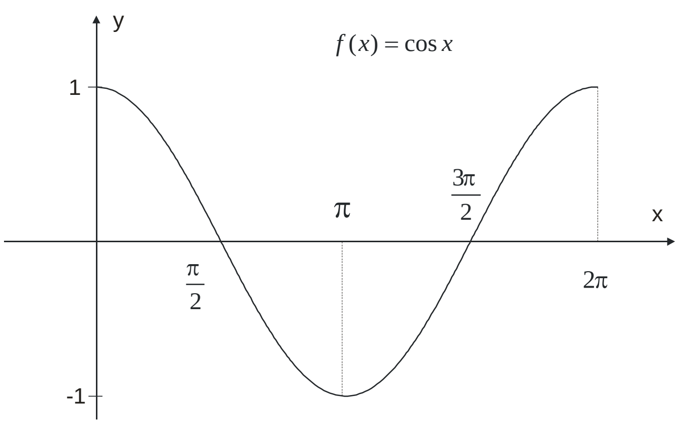
Sinal do Cosseno no 1°. Ciclo



Como podemos perceber no desenho acima os valores para o cosseno obedecem à seguinte tabela de acordo com o quadrante em que ele se encontra:

1° Quadrante	Cosseno Positivo
2° Quadrante	Cosseno Positivo
3° Quadrante	Cosseno Negativo
4° Quadrante	Cosseno Positivo

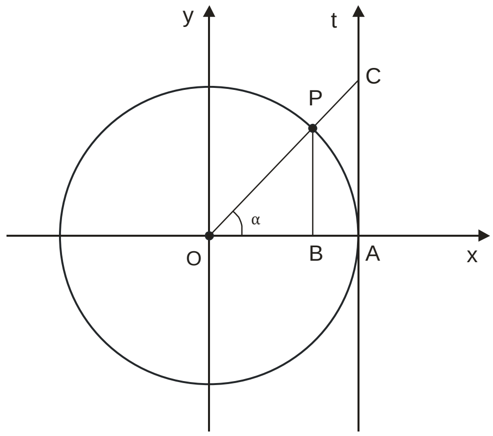
Gráfico de uma função Cosseno



Observação: o gráfico de uma função $cos\ x$ chama-se cossenóide e possui um período igual a 2π.

Estudo da função Tangente

Seja o ciclo trigonométrico abaixo, o arco $O\widehat{P} = \alpha$ e o ponto C é a intersecção o segmento de reta $\overline{OC}$ e a reta t.



Definimos tangente de α a medida algébrica do segmento $\overline{AC}$, assim $tg\ \alpha = \overline{AC}$.
Observe que os triângulos retângulos ΔOBP e ΔOAC são semelhantes, pois os ângulos α e o reto são comuns aos dois.
Algebricamente temos:

$$\frac{BP}{AC} = \frac{OB}{OA}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OA} = 1 \\ \overline{OB} = \cos\alpha \\ \overline{BP} = sen\alpha \\ \overline{AC} = tg\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{sen\alpha}{tg\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1} \Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

Como $\cos\alpha \neq 0$, não existe valor definido para tangente quando α é igual 90° ou 270°.
Assim, dada uma função do tipo $f(x) = tg\ x$, temos:
1. Imagem de $f(x)$

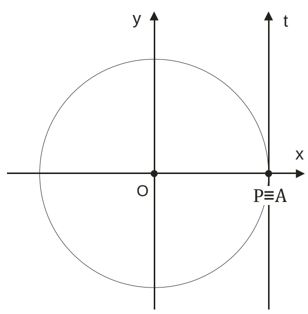
$$\boldsymbol{Im(f)} = \mathbb{R}$$

2. Domínio de $f(x)$

$$\boldsymbol{D(f) = \{x \in \mathbb{R} /\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$$

Valores da Tangente no ciclo Trigonométrico

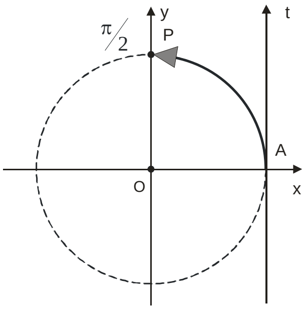
- $Para\ \alpha = 0°$



$$tg\ 0° = 0$$

Importante: como podemos perceber o prolongamento do segmento de reta $\overline{OP}$ intercepta a reta t no ponto igual a zero.

- $Para\ \alpha = 90°$

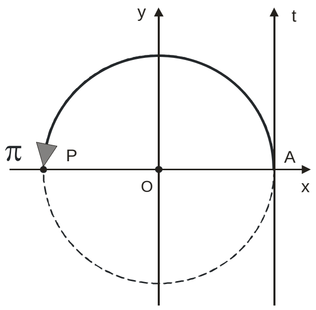


$$tg\ 90° = \nexists$$
$$\Updownarrow$$
$$tg\ \frac{\pi}{2} = \nexists$$

Importante: percebe-se que o prolongamento do segmento de reta $\overline{OP}$ é paralelo a reta t. Sabemos que duas retas paralelas não se interceptam, logo não podemos definir um valor para tangente de 90°.

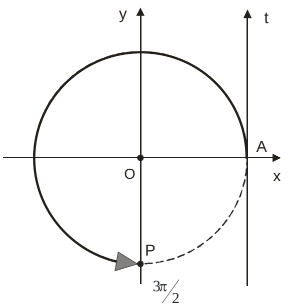
Símbolo usado:
∄(Lê-se: não existe)

- $Para\ \alpha = 180°$



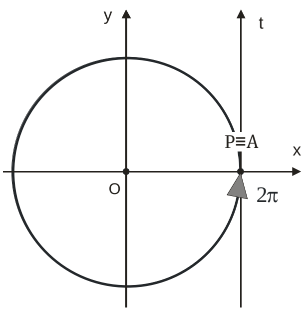
$$tg\ 180° = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$tg\ \pi = 0$$

- $Para\ \alpha = 270°$



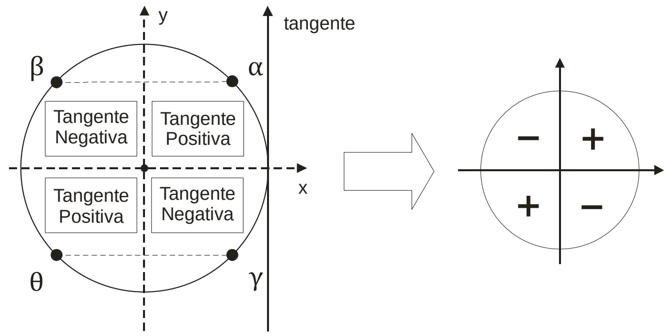
$$tg\ 270° = \nexists$$
$$\Updownarrow$$
$$tg\ \frac{3\pi}{2} = \nexists$$

- $Para\ \alpha = 360°$



$$tg\ 360° = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$tg\ 2\pi = 0$$

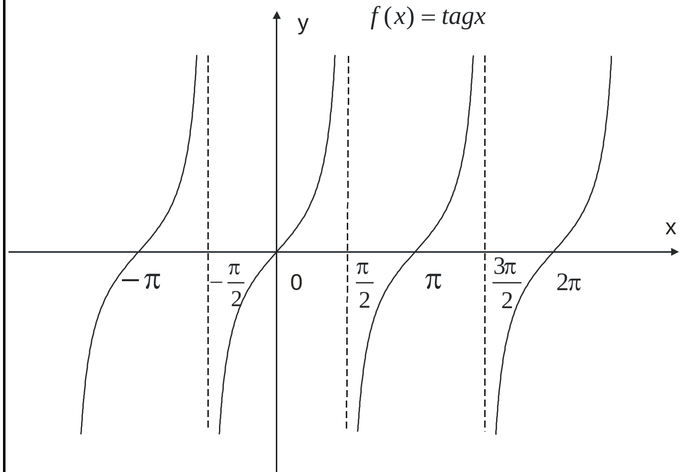
Sinal da tangente no 1°. Ciclo



Como podemos perceber no desenho que os valores para o tangente obedecem a seguinte tabela:

1° Quadrante	Tangente Positivo
2° Quadrante	Tangente Negativo
3° Quadrante	Tangente Positivo
4° Quadrante	Tangente Negativo

Gráfico de uma função Tangente



Observação: o gráfico de uma função tangente chama-se tangentóide e possui um período igual a π.

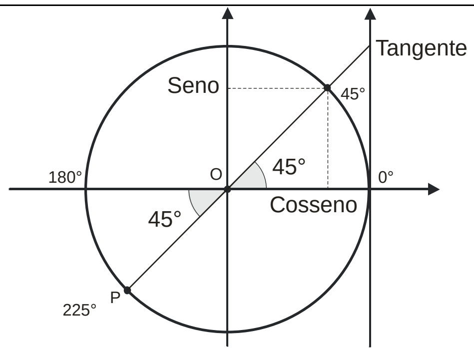
Exercícios Resolvidos

01. (AEPOM) Calculando o valor do seno, cosseno e tangente do ângulo $\frac{5\pi}{4}$ teremos respectivamente:

Resolução:
Vamos transformar o ângulo de radianos para graus.

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{5 \cdot 180°}{4} = \frac{900°}{4} = 225°$$

Desenhando o círculo trigonométrico:



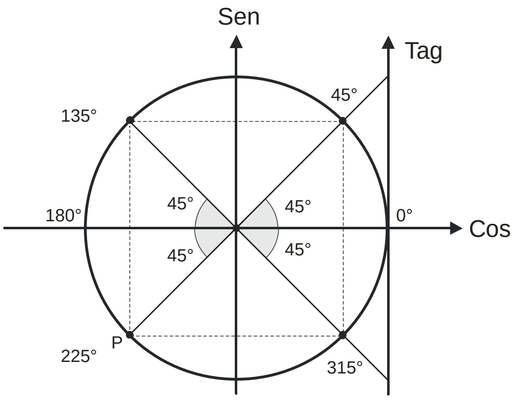
Percebemos que o ângulo pertence ao 4°. Quadrante.

Para chegar à resposta, adotaremos os seguintes passos:

- Ligar o ponto P ao centro do círculo de modo interceptar o eixo das tangentes.
- Calcular o ângulo formado entre o arco e o eixo x, que neste caso é 45°.

Comentário: este método é conhecido como redução ao 1°. quadrante, pois percebemos que o cada ângulo irá possuir 4 referências em cada quadrante respectivo. Isso ajuda a descobrir de maneira fácil o valor de seno, cosseno e tangente de qualquer ângulo.

Observe a figura:



Assim, podemos chegar às seguintes conclusões:

- Na função Seno:

$$\boxed{\begin{aligned} sen45° &= sen135° = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sen225° &= sen315° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}}$$

- Na função Cosseno:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 45° &= \cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 135° &= \cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}}$$

- Na função Tangente:

$$\boxed{\begin{aligned} tg45° &= tg225° = 1 \\ tg135° &= tg315° = -1 \end{aligned}}$$

Concluindo:

$$sen\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

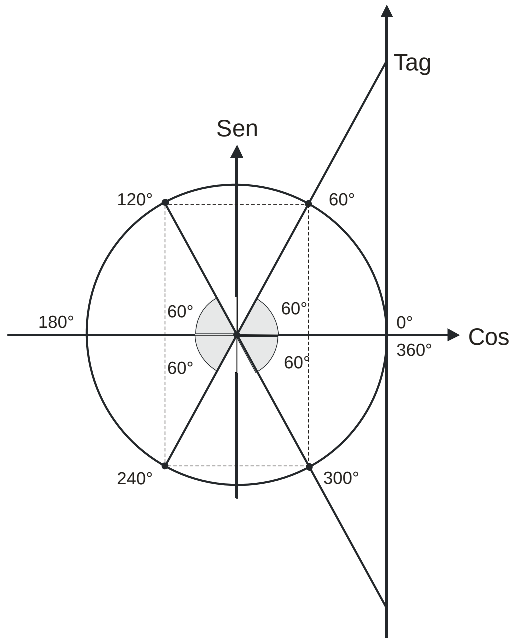
$$\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tag\frac{5\pi}{4} = 1$$

02. (AEPOM) Calcule o valor da x na equação:

$$x = \frac{tg300° + \cos 90°}{sen240°}$$

Resolução:
Iremos desenhar o círculo trigonométrico e colocar os ângulos que precisamos calcular:



De acordo com a figura, vimos que os ângulos de 240° e 300° formam o mesmo ângulo em relação ao eixo x. Com isso, podemos reduzi-los ao 1°. quadrante encontrando o ângulo de 60°.

$$sen240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 90° = 0$$

$$tg300° = -\sqrt{3}$$

Substituindo na equação acima, temos:

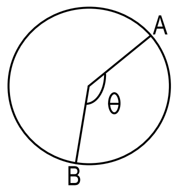
$$x = \frac{\sqrt{3}+0}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$x = -2$$

Exercícios propostos

01. (FUVEST) O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:
a) 27º.
b) 30º.
c) 36º.
d) 42º
e) 72º.

02. (AEPOM) Sabendo que o comprimento do arco AB indicado na figura é 12 cm, podemos afirmar que o raio da circunferência vale:



$dado: \theta = 1{,}2\ rad$

a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.
e) 14.

03. (AEPOM) Os Arcos cujo cosseno é 1,4142 podem estar nos quadrantes:
a) 1º e 4º.
b) 2º e 3º.
c) 1º e 3º.
d) 3º e 4º.
e) nenhuma das opções é correta.

04. (EEAR) No ciclo trigonométrico

I - O arco $\frac{11\pi}{4}$ *rad* pertence ao 2º quadrante.
II - O arco 1510º pertence ao 3º quadrante.
III - O arco $-\frac{13\pi}{3}$ *rad* pertence ao 4º quadrante.
A(s) assertativa(s) correta(s) é (são):
a) II.
b) I e II.
c) I e III.
d) I, II e III.

05. (EEAR) O quadrante em que as funções seno, cosseno e tangente são, simultaneamente, crescentes é o:
a) 1º.
b) 2º.
c) 3º.
d) 4º.

06. (EEAR) O menor valor real e positivo de x tal que $4^{senx} = \frac{1}{2}$ é:
a) $\frac{\pi}{6}$.
b) $\frac{5\pi}{6}$.
c) $\frac{7\pi}{6}$.
d) $\frac{11\pi}{6}$.

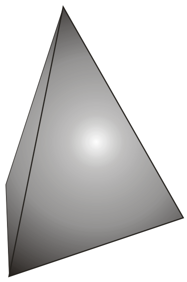
07. (AFA) Sabendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, analise as proposições e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

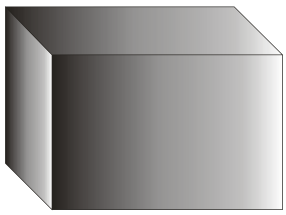
( ) Se $\alpha + x = 2\pi$, então $tgx = -tg\alpha$.
( ) Se $\alpha + x = \frac{\pi}{2}$, então $secx = cossec\alpha$.
( ) Sendo $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$, então $\cos(\pi - x) = \frac{3}{5}$.
( ) A função $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ é idêntica a função $g(x) = 2 - cosx$.
Tem-se a sequência:
a) V - V - V - V.
b) V - F - F - F.
c) F - V - F - F.
d) V - V - F - V.

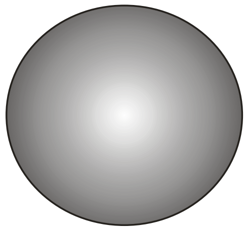
08. (AFA) Considere $\boldsymbol{m}$ a raiz da função $f(x) = cos\,2x + 3sen^2x - senx - 3$ no intervalo $[0, 2\pi]$. Podemos afirmar que o valor de $cotg\,\boldsymbol{m} - sec\,2\boldsymbol{m}$ é:
a) 0.
b) -1.
c) 1.
d) $-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

CAPÍTULO 24
Geometria Espacial I
Sólidos Geométricos

Denomina-se sólido geométrico, todo objeto em que podemos ter plena noção visual de seu comprimento, largura e altura.
São objetos geométricos:


Pirâmide


Caixa

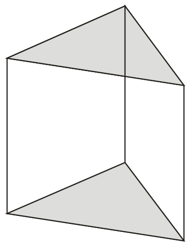

Esfera

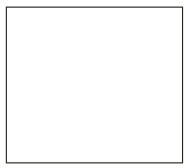

Cilindro

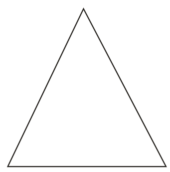
Poliedros

Poliedro é todo sólido formado por quatro ou mais polígonos que possuem dois a dois lados em comum.
Exemplo 1:

Formação


Prisma Triângular

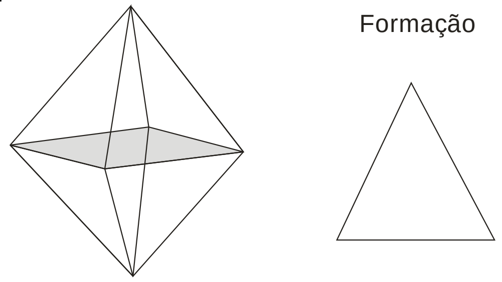

3 Partes Laterais Retângulos


2 Bases Paralelas Triângulos

Importante: as estruturas geométricas que estudaremos serão formadas pela combinação de várias figuras planas que conhecemos anteriormente. No exemplo acima, fica claro que três retângulos e dois triângulos são o suficiente para que possamos formar um prisma de base triangular.

Exemplo 2:

Formação

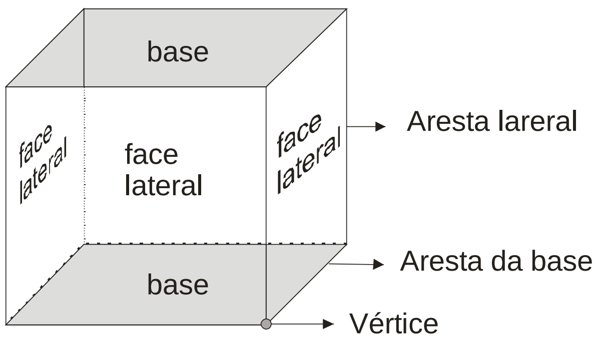


Octaedro — 8 Triângulos Equiláteros

Observações:

- ✓ As Partes laterais de um poliedro são denominadas **faces laterais** do poliedro.
- ✓ O lado das faces laterais e base são denominados respectivamente **arestas laterais** e **arestas da base**.

Assim, temos:



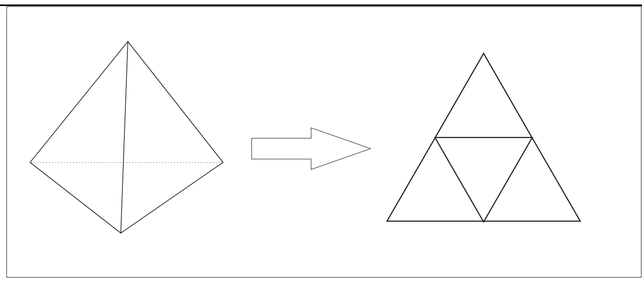
Os poliedros convexos são classificados de acordo com o número de faces:

Nomenclatura	Número de faces
Tetraedro	4
Pentaedro	5
Hexaedro	6
Heptaedro	7
Octaedro	8
Decaedro	10
Icosaedro	20

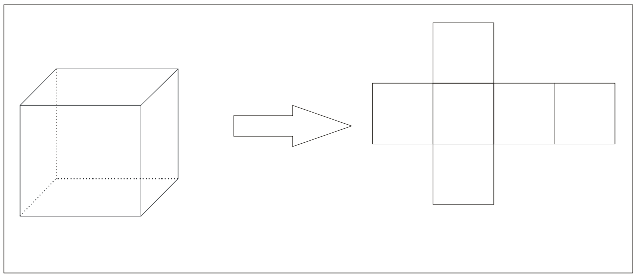
Poliedros Regulares

Na geometria plana, dizemos que um polígono é regular quando todos os seus lados e ângulos são congruentes. Assim um poliedro convexo é regular quando suas faces são polígonos regulares de mesma natureza.

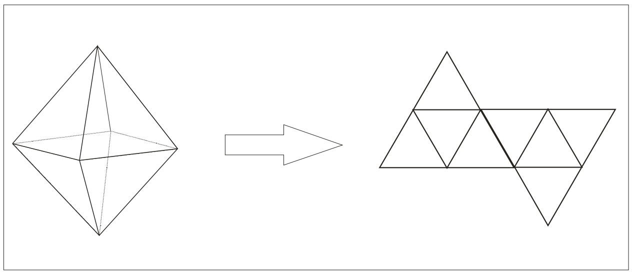
- ➢ **Tetraedro:** faces formadas por quatro triângulos equiláteros.



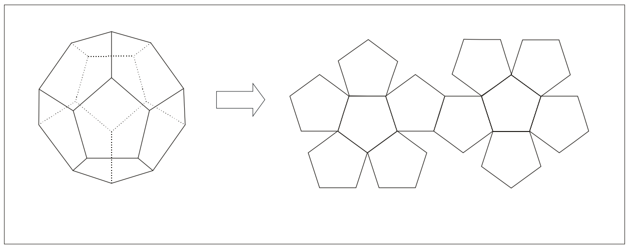
- ➢ **Hexaedro (Cubo):** faces formadas por seis quadrados.



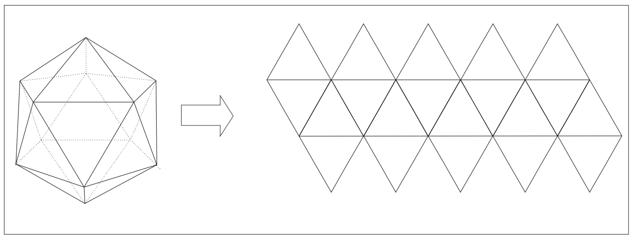
- ➢ **Octaedro:** faces formadas por oito triângulos equiláteros.



- ➢ **Dodecaedro:** faces formadas por 12 pentágonos regulares.



- ➢ **Icosaedro:** faces formadas por 20 triângulos equiláteros.



Nota: esses cinco poliedros são chamados de poliedros de platão.

Relação de Euler

Para todo poliedro convexo fechado, vale a relação:

$$A + 2 = V + F$$

Sendo: F → número de faces.
A → número de Arestas.
V → número de Vértices.

Exercício Resolvido

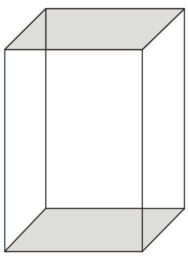
01. (AEPOM) Num poliedro convexo de 15 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces têm este poliedro?
a) 3.
b) 6.
c) 9.
d)18.

Resolução:
Aplicando a relação de Euler, para verificar o número de faces, temos:

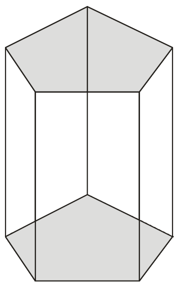
$$A + 2 = V + F$$
$$16 + 2 = F + F$$
$$18 = 2F$$
$$F = \frac{18}{2} = 9$$

Estudo do prisma

Os prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes que denominamos bases. As demais faces em forma de quadriláteros são faces laterais do prisma.
Exemplos:

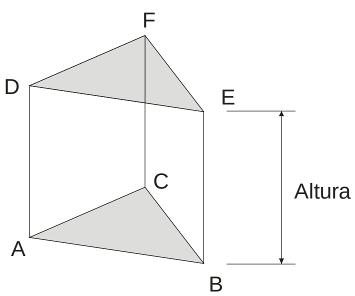


Prisma de Base Quadrangular



Prisma de Base Pentagonal

Elementos de um prisma:



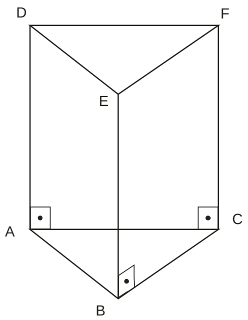
- Arestas das Bases: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}, \overline{DE}, \overline{EF}$ e $\overline{DF}$.
- Arestas laterais: $\overline{AD}, \overline{BE}$ e $\overline{CF}$.
- Altura do Prisma é a distância entre as bases.
- Faces laterais são quadriláteros.
- As bases são triângulos.

Tipos de Prismas

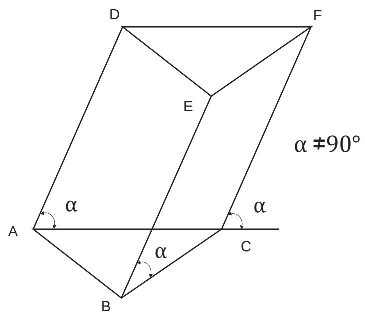
- **Prisma Reto:** é aquele em que as arestas laterais são perpendiculares aos planos da base. Num prisma reto, as faces laterais são retângulos.

- **Prisma oblíquo:** é aquele em que as arestas laterais formam com os planos das bases um ângulo diferente de 90°. Num prisma oblíquo, as faces laterais são paralelogramos.

- **Prisma Regular:** é o prisma reto cujas bases são polígonos regulares.



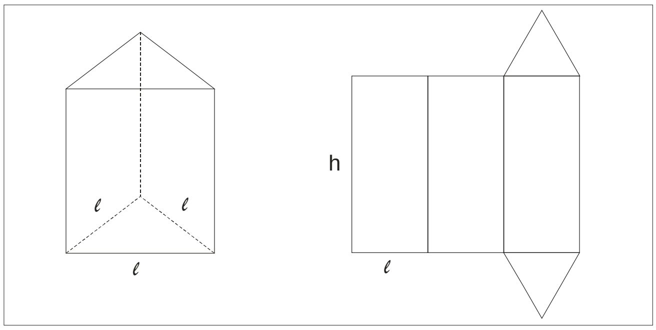
Prisma Reto



Prisma Oblíquo

Cálculo da Área da base, Área lateral, Área total e Volume de um prisma

Dado um prisma regular de base triangular:



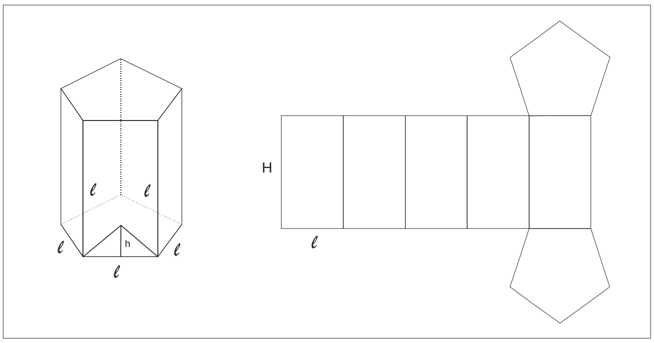
Na planificação do prisma podemos observar as seguintes características:

- Possui 3 faces laterais em forma de retângulo.
- Possui 2 bases em forma de triângulo equilátero.

Assim calculamos:

- **Área Lateral**: $A_l = 3 \cdot b \cdot h$
- **Área da Base**: $A_b = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
- **Área Total**: $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$
- **Volume**: $V = A_b \cdot h$

Dado um prisma regular de base Pentagonal:



Na planificação do prisma, podemos observar as seguintes características:

- Possui 5 faces laterais em forma de retângulo.
- Possui 2 bases em forma de pentágono regular.

Assim, calculamos:

- **Área Lateral**: $A_l = 5 \times l \cdot h$

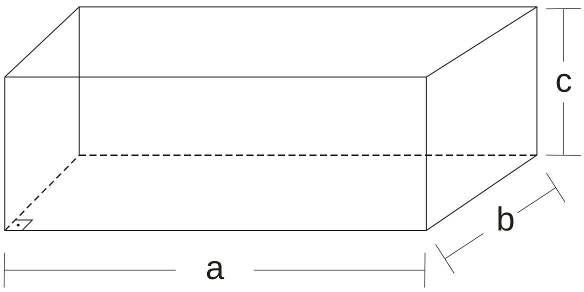
- **Área da Base**: $A_b = 5 \cdot \dfrac{l \cdot h}{2}$

- **Área Total**: $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$

- **Volume**: $V = A_b \cdot h$

Paralelepípedo

Paralelepípedo ou bloco retangular é a designação dada a um prisma cujas faces são retâgulos.



Assim, temos:

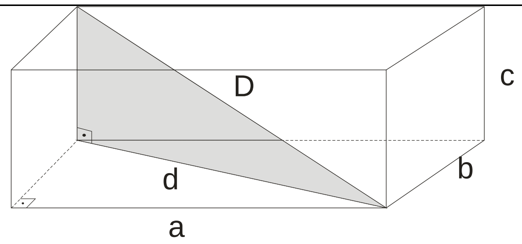
- **Área Lateral**: $A_l = 2(bc + ac)$

- **Área da Base**: $A_b = a \cdot b$

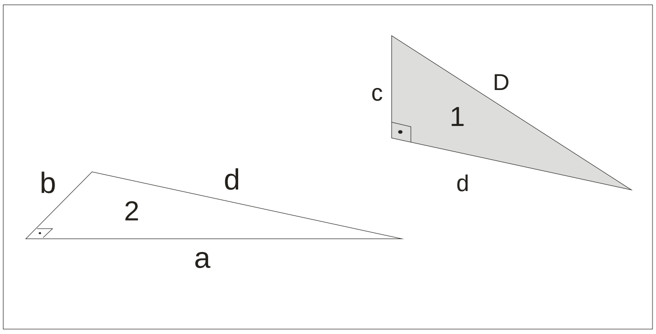
- **Área Total**: $A_t = A_l + 2A_b \quad \Rightarrow A_t = 2(ab + bc + ac)$

- **Volume**: $V = abc$

Diagonal de um paralelepípedo



Dados:
D→ Diagonal do paralelepípedo.
d→ diagonal da base retangular do paralelepípedo.
Iremos separar os seguintes triângulos retângulos.



Seguindo as relações métricas nos triângulos 1 e 2, temos:

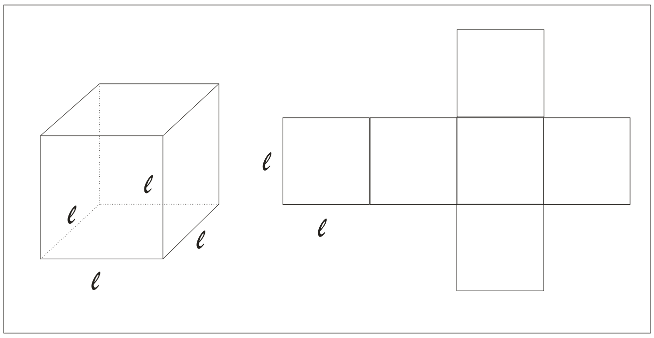
$$D^2 = d^2 + c^2 \quad (1)$$
$$d^2 = a^2 + b^2 \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cubo

É um prisma regular de base quadrangular que possui todas as suas faces e bases em forma de quadrados congruentes.



Assim, temos:

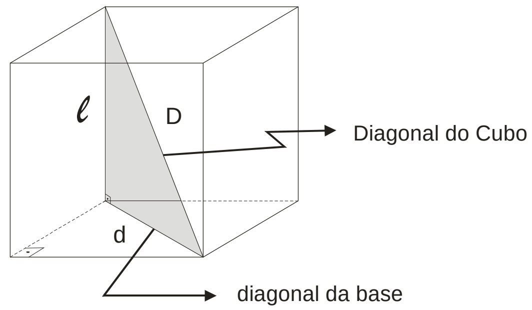
- **Área Lateral**: $A_l = 4 \cdot l^2$

- **Área da Base**: $A_b = l^2$

- **Área Total**: $A_t = 6 \cdot l^2$

- **Volume**: $V = A_b \cdot h \quad \Rightarrow V = l^3$

Diagonal do Cubo

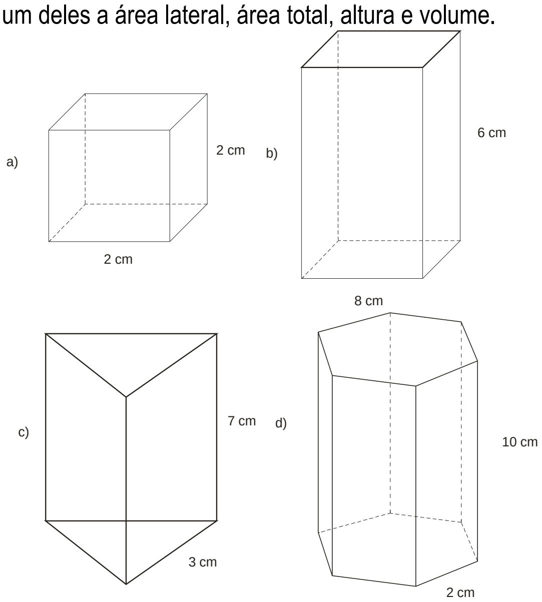


Sabendo que a diagonal do quadrado vale: $d = l\sqrt{2}$
Pela relação de Pitágoras no triângulo retângulo acima, temos:

$$D^2 = (l\sqrt{2})^2 + l^2$$
$$D^2 = 2l^2 + l^2$$
$$D^2 = 3l^2$$
$$D = l\sqrt{3}$$

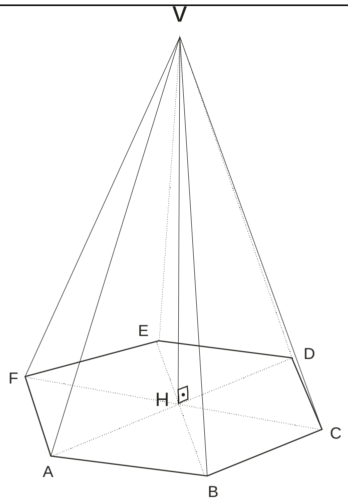
Exercício de Treinamento

01. (AEPOM) Considere os prismas regulares abaixo. Calcule em cada um deles a área lateral, área total, altura e volume.



Estudo de Pirâmide

As Pirâmides são poliedros cuja base é um polígono, e as faces laterais são triângulos.
Exemplo:



Elementos:

Vértice: V.
Base: Hexagonal.
Altura: $\overline{VH}$.

Faces laterais: Seis triângulos.

$$\Delta AVB, \Delta BVC, \Delta CVD, \Delta DVE, \Delta EVF \text{ e } \Delta FVA.$$

Arestas Laterais(é a intersecção entre dois planos):

$$\overline{AV}, \overline{BV}, \overline{CV}, \overline{DV}, \overline{EV}, e\ \overline{FV}.$$

Arestas da Base(lados do hexágono regular):

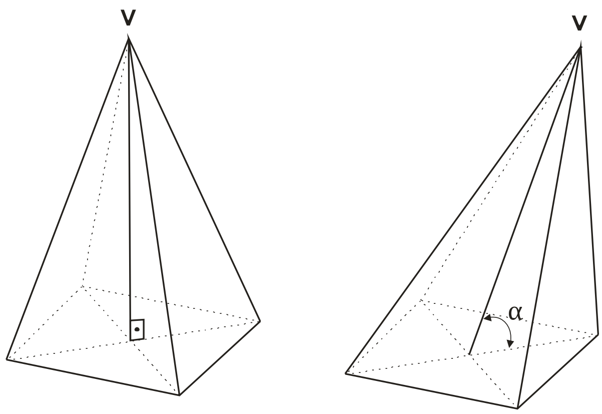
$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}\ e\ \overline{FA}.$$

Tipos de Pirâmides

Pirâmide Reta: é aquela em que a projeção ortogonal do vértice em relação à base recai no centro da base.

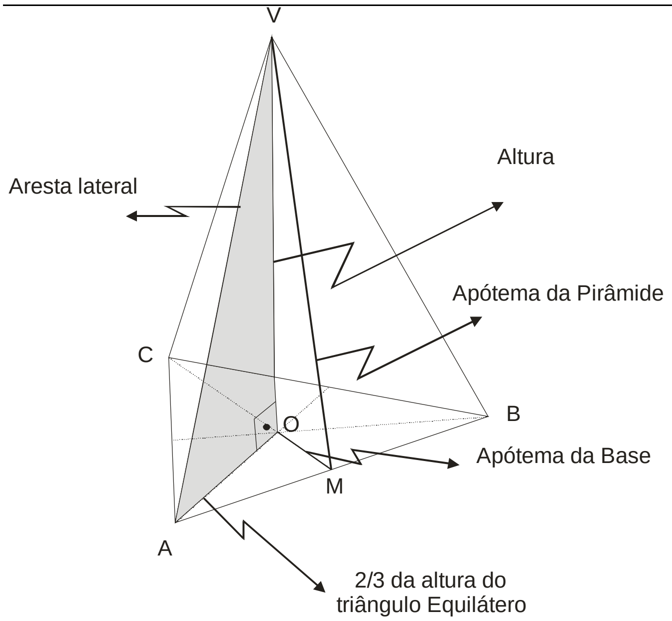
Pirâmide oblíqua: é aquela em que a projeção ortogonal do vértice em relação à base não coincide com o centro da base.

Observe:



Pirâmide Regular: é aquela que possui características de uma pirâmide reta, cuja base é um polígono regular e arestas laterais congruentes.
Exemplo:

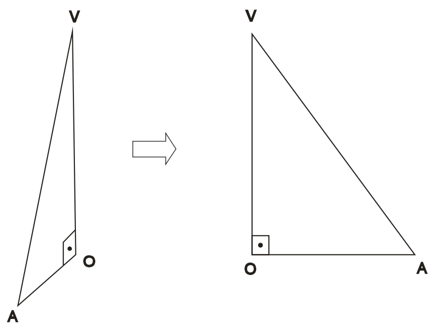
Tetraedro regular



Agora vamos destacar algumas relações métricas na pirâmide.

De acordo com a figura acima, adotaremos duas possibilidades para calcular a altura da pirâmide de base triangular usando seus principais elementos.

1°. Caso: iremos usar o triângulo VOA.



$\overline{AV}$ é aresta lateral:

$$AV = A \ \rightarrow Apótema$$

$\overline{AO}$ é 2/3 da altura do triângulo da base:

$$\overline{AO} \ = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AO} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

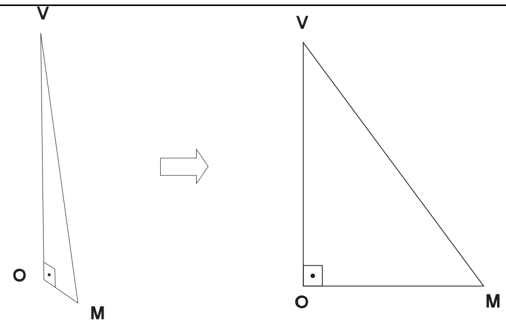
$\overline{VO}$ é a altura da pirâmide:

$$\overline{VO} = H \ \rightarrow hipotenusa\ do\ \Delta VOA$$

Assim é válida a seguinte relação:

$$H^2 = \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 + A^2$$

2°. Caso: iremos usar o triângulo VOM.



$\overline{VM}$ é altura face lateral.

$$VM = h.$$

$\overline{OM}$ é 1/3 da altura do triângulo da base:

$$\overline{AO} \ = \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AO} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$\overline{VO}$ é a altura da pirâmide.

$$\overline{VO} = H \ \rightarrow hipotenusa\ do\ \Delta VOM.$$

Assim é válida a seguinte relação:

$$H^2 = \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2$$

Também podemos calcular outras medidas importantes tais como:

Área da Base

É a área correspondente ao polígono que forma a base. No caso anterior é a área do triângulo equilátero.

$$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Área da Lateral

É a área formada pelos polígonos que formam as faces laterais. No caso anterior, é a soma das áreas dos triângulos isósceles que formam as faces laterais da pirâmide de base triangular.

$$A_l = 3 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

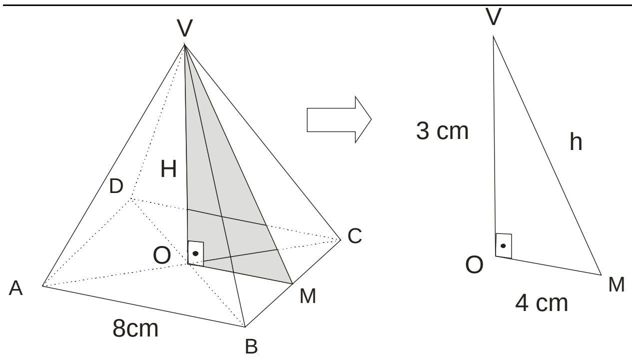
Área da Total

É a soma da área da base mais a área lateral.

$$A_l = A_b + A_l$$

Exercício Resolvido

01. (AEPOM) Numa pirâmide de base quadrangular, a aresta da base mede 8cm. Sabendo que a altura da pirâmide é 3cm, calcular a área lateral e a área total dessa pirâmide.
Resolução: desenhando a pirâmide, teremos:



Para calcular as faces laterais precisamos da altura do triângulo da face.

$$h^2 = 3^2 + 4^2$$
$$h^2 = 9 + 16$$
$$h = \sqrt{25} = 5$$

Assim, calcularemos a área lateral:

$$A_l = 4 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$
$$A_l = 4 \cdot \frac{8 \cdot 5}{2}$$
$$\therefore \quad A_l = 4 \cdot \frac{40}{2} = 60cm^2$$

Calcularemos a área da base.

$$A_b = l^2 = 8^2 = 16cm^2$$

Concluindo:

$$A_t = A_l + A_b$$
$$A_t = 60 + 16$$
$$\therefore \quad A_t = 76cm^2$$

Volume de uma Pirâmide

O volume é uma medida de capacidade de um sólido espacial. Para seu calculo precisaremos a área da base e a altura.
Assim, temos:

$$V = \frac{1}{3} A_b . H$$

V: volume.
A_b: área da base.
H: altura da pirâmide

Observações:
1ª. Se dois sólidos são semelhantes, e k for a constante de proporcionalidade, temos:

Notação:

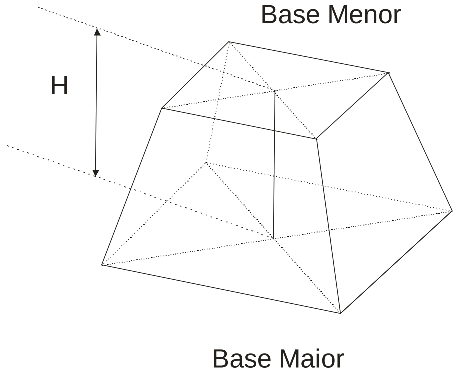
V_1 e V_2: volumes das pirâmides.
A_1 e A_2: áreas das bases das pirâmides.
H_1 e H_2: alturas das pirâmides.

Assim,

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3, \text{ com } k = \frac{H_1}{H_2}.$$

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2, \text{ com } k = \frac{H_1}{H_2}.$$

2ª. Cálculo do volume do Tronco de Pirâmide:



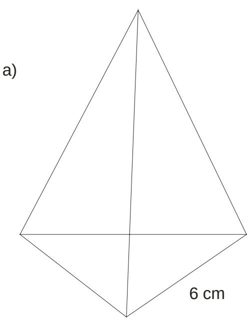
Dados:
A_B = Área da base maior.
A_b = Área da base menor.

$$\therefore \quad V_{TP} = \frac{H}{3} \cdot \left(A_B + \sqrt{A_B . A_b} + A_b\right)$$

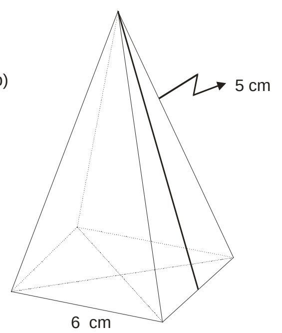
Exercício de treinamento

01. (AEPOM) Calcule a altura, área total e o volume das pirâmides abaixo.

a)



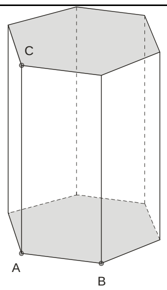
b)



Exercícios Propostos

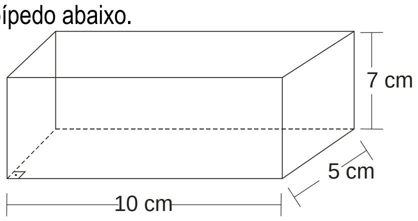
01. (EEAR) O perímetro da base de uma pirâmide quadrangular regular é 80cm. Se a altura da pirâmide é 15cm, seu volume, é:
a) 2300 cm^3
b) 2000 cm^3
c) 1200 cm^3
d) 1000 cm^3

02. (UNICAMP) A figura ao lado apresenta um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares. Os lados dos hexágonos medem 4 cm cada e a altura do prisma é 10cm.



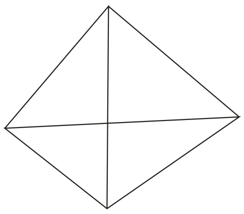
a) Calcule o volume do prisma.
b) Encontre a área da secção desse prisma que passa pelos pontos a, b e c.

03. (AEPOM) Calcule a área total, diagonal e o volume do paralelepípedo abaixo.



04. (AEPOM) A base do cesto reto é um quadrado de lado 25cm. Se cada parte lateral e o fundo do cesto possuem a mesma área. Determine o comprimento do tecido necessário para forrar toda a estrutura externa do cesto, sabendo que o tecido é vendido com uma largura de 50cm.
a) 62,5 cm.
b) 64 cm.
c) 61,5 cm.
d) 75 cm.

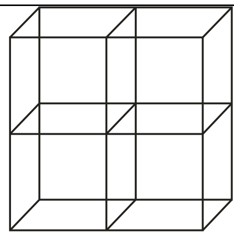
05. (EEAR) A aresta lateral de uma pirâmide triangular regular mede 5m e a aresta da base, 6m. A área lateral dessa pirâmide vale em metros quadrados.



a) 30.
b) 32.
c) 34.
d) 36.

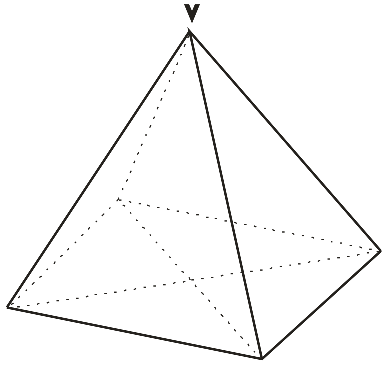
06. (EEAR) A base de um prisma reto é um triângulo retângulo, cujos catetos medem 3cm e 4cm. Se esse prisma tem altura igual a 3,5cm, então seu volume, em cm^3, é
a) 21.
b) 18.
c) 15.
d) 12.

07. (EEAR) Quatro cubos idênticos são dispostos como na figura a seguir, formando um único sólido. Considerando que a diagonal de cada cubo mede cm $10\sqrt{3}$, a diagonal desse sólido é, em cm,



a) $30\sqrt{3}$.
b) $40\sqrt{3}$.
c) 20.
d) 30.

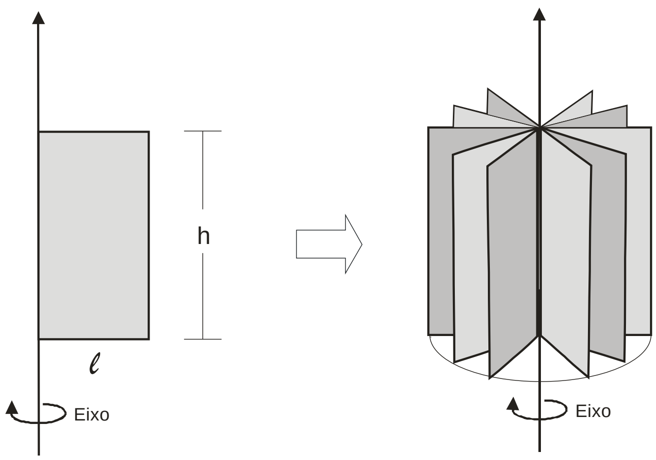
08. (AEPOM) Calcule a área lateral, a área total e o volume de uma pirâmide de base quadrangular cujas medidas dos lados da base e das faces laterais medem 5cm.



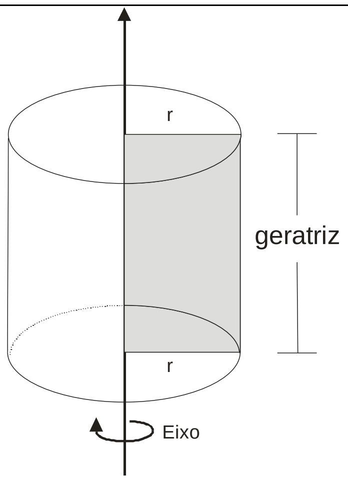
CAPÍTULO 25
Geometria Espacial II

Cilindros

Dado um retângulo de altura h e lado l, iremos girá-lo em torno de um eixo no sentido horário de acordo com a figura abaixo.



Como podemos visualizar um retângulo girando em torno de um eixo formará uma estrutura cilíndrica. A este fenômeno, damos o nome de cilindro de revolução. Logo, verifica-se que o lado do retângulo formará uma circunferência de raio r e sua altura irá gerar a superfície lateral do cilindro.



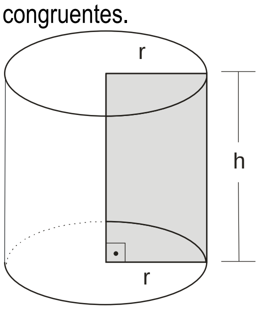
Tipos de Cilindros

- **Cilindro Reto:** é aquele em que a geratriz é perpendicular com o raio da base.

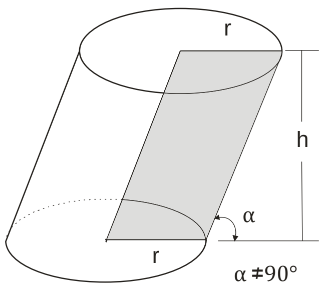
- **Cilindro Oblíquo:** é aquele em que a geratriz é não perpendicular com o raio da base.

- **Cilindro Equilátero:** é aquele em que a geratriz equivale ao diâmetro da base, ou seja, a secção meridiana é um quadrado de lado $2r$. Secção mediana é o plano que contém o eixo de revolução, ou seja, é aquele que divide o cilindro em duas partes iguais.

Nota: secção transversal é o plano paralelo a base do cilindro que o corta formando secções congruentes a base, ou seja, círculos congruentes.



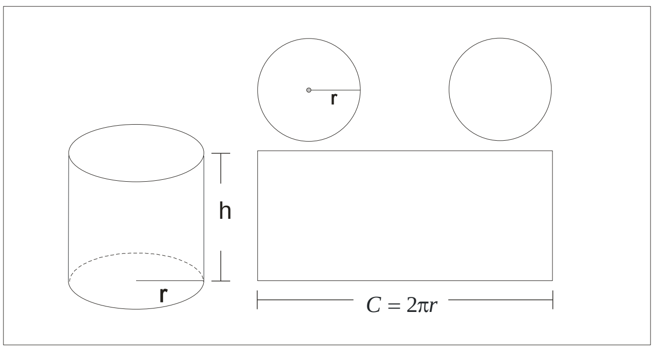
Cilindro Reto



Cilindro Oblíquo

Cálculo da Área da base, Área lateral, Área total e Volume de um Cilindro

Dado um Cilindro reto.



Na planificação do cilindro podemos, observar as seguintes características:

- Sua face lateral é um retângulo.
- Possui 2 bases em forma de círculo.

Assim calculamos:

- Área Lateral: $A_l = 2\pi \cdot r \cdot h$

- **Área da Base:** $A_b = \pi \cdot r^2$

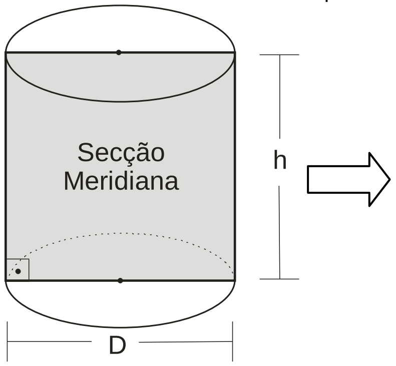
$A_t = A_l + 2A_b$

- Área Total: $A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$A_t = 2\pi r(h + r)$

- Volume: $V = \pi r^2 \cdot h$

Nota: desenho de um Cilindro Equilátero:

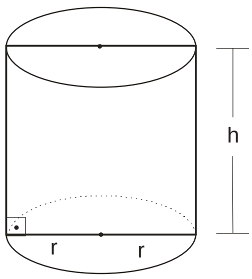


Área da secção meridiana(A_{SM}):
$A_{SM} = D \cdot h$

Exercício resolvido

01. (AEPOM) Dado um cilindro eqüilátero, de altura igual a 4cm. Calcule:
a) Área lateral.
b) Área total.
c) Volume.
d) Área da secção meridiana.

Resolução: já que o cilindro é equilátero, isso significa que a altura é o dobro do raio.
Assim, o raio vale 2cm.



a)

$$A_l = 2\pi.r.h$$
$$A_l = 2\pi.2.4$$
$$A_l = 8cm^2$$

b)

$$A_t = 2\pi r(h + r)$$
$$A_t = 2\pi.2(2 + 4)$$
$$A_t = 4\pi.6$$
$$A_t = 24\pi cm^2$$

c)

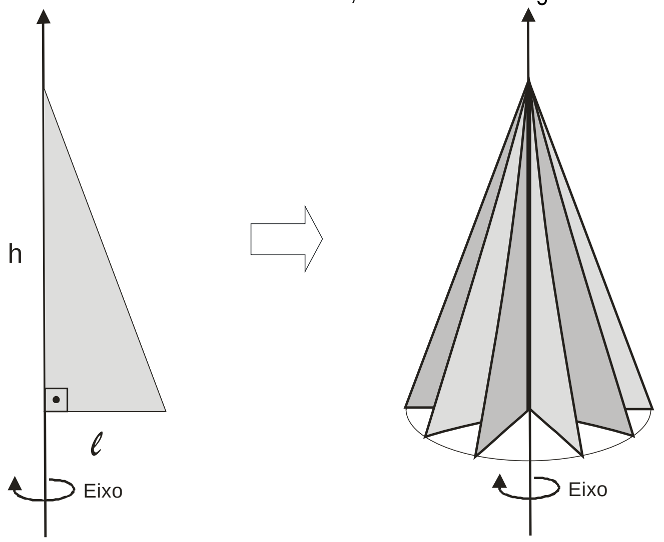
$$V = \pi r^2 \times h$$
$$V = \pi.2^2.4$$
$$V = 16\pi cm^2$$

d) Equivale a área do quadrado de lado h.

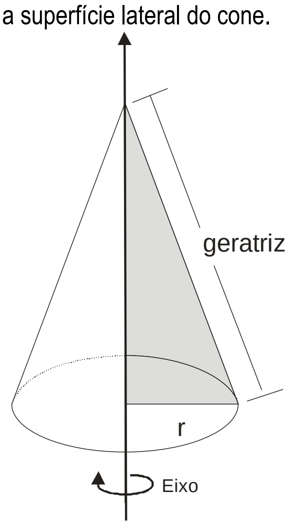
$$A_m = h^2$$
$$A_m = 4^2$$
$$A_m = 16cm^2$$

Cone

Dado um triângulo retângulo, de altura h e base l, iremos girá-lo em torno de um eixo no sentido horário,de acordo com a figura abaixo.



Como podemos visualizar o triângulo retângulo girando em torno de um eixo formará uma estrutura cônica. A este fenômeno, damos o nome de cone de revolução. Logo se verifica que a base do triângulo retângulo formará uma circunferência de raio r e sua hipotenusa gerará a superfície lateral do cone.



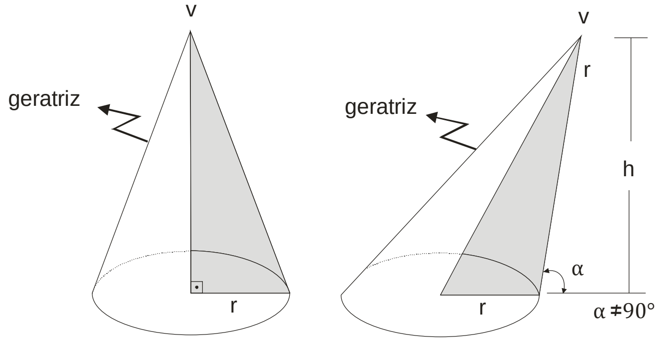
Tipos de Cones

- **Cone Reto:** é aquele em que o segmento de reta que liga o vértice ao centro da circunferência é perpendicular com o raio da base.

- **Cone Oblíquo:** é aquele em que o segmento de reta que liga o vértice ao centro da circunferência não é perpendicular com o raio da base.

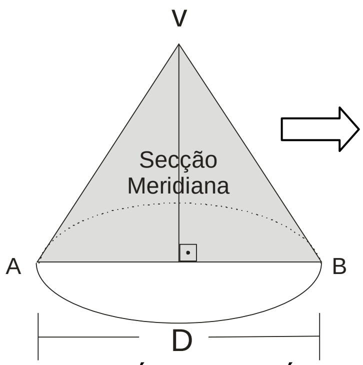
- **Cone Equilátero:** é aquele em que a secção meridiana é um triângulo Equilátero e $g = 2r$.

Nota: secção meridiana é o plano que contém o eixo de revolução, ou seja, é aquele que divide o cone em duas partes iguais.



Cone Reto Cone Oblíquo

Nota: desenho de um Cone Equilátero:

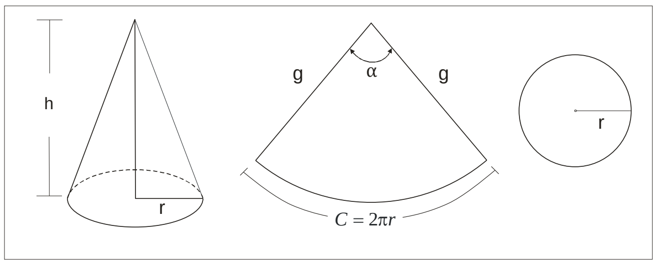


Área da Secção Meridiana (A_{SM}):

$$A_{SM} = \frac{D \cdot h}{2}$$

Cálculo da Área da base, Área lateral, Área total e Volume de um Cone

Dado um Cilindro reto.



Na planificação do cone, podemos observar as seguintes características:

- Sua face lateral é um setor circular.
- Possui uma base em forma de circulo de raio r.

Assim, calculamos:

- Área Lateral: a área lateral de um cone circular reto de raio da base r e geratriz g é equivalente a um setor circular de raio g e comprimento do arco $2\pi r$. Sendo:

Comprimento do arco		Área do setor
$2\pi g$	–	πg^2
$2\pi r$	–	A_l

$$A_l = \frac{2\pi \cdot r \cdot \pi \cdot g^2}{2\pi \cdot g}$$

$$A_l = \pi \cdot r \cdot g$$

- Área da Base: $A_b = \pi \cdot r^2$

$$A_t = A_l + A_b$$

- Área Total: $A_t = \pi r g + \pi r^2$

$$A_t = \pi r(g + r)$$

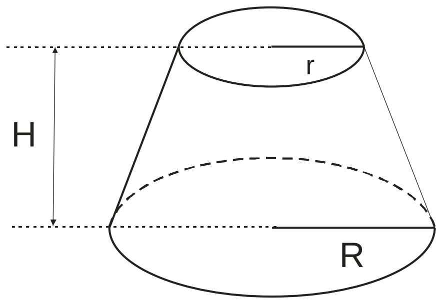
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

- Volume: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$

Observações:

1ª. Como foi visto no capítulo anterior, se dois sólidos são semelhantes, então vale a razão de semelhança.

2ª. Cálculo do volume do tronco de cone. Observe a figura:



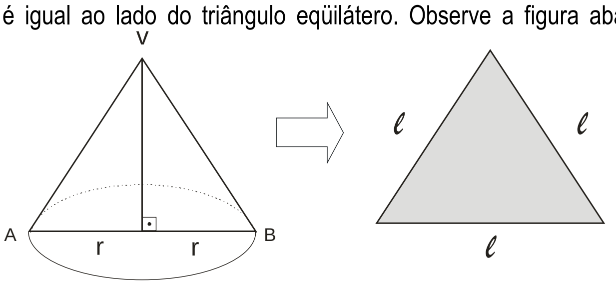
Dados:
R: raio da base Maior.
r: raio da base Menor.

$$\therefore \boldsymbol{V_{TP}} = \frac{\boldsymbol{\pi \cdot H}}{\boldsymbol{3}} \cdot (\boldsymbol{R^2 + R \cdot r + r^2})$$

Exercício resolvido

01. (AEPOM) Dado um cone equilátero cuja geratriz vale 8cm. Calcule:
a) Área lateral.
b) Área total.
c) Volume.
d) Área da secção meridiana.

Resolução: já que o cone é equilátero, isto significa que a geratriz é igual ao lado do triângulo eqüilátero. Observe a figura abaixo.



$$\therefore g = 2r \Rightarrow r = 4.$$

a)

$$A_l = \pi.r.g$$
$$A_l = \pi.4.8$$
$$A_l = 32\ cm^2$$

b)

$$A_t = \pi r(g + r)$$
$$A_t = \pi.4(8 + 4)$$
$$A_t = 4\pi.12$$
$$A_t = 48\pi\ cm^2$$

c)

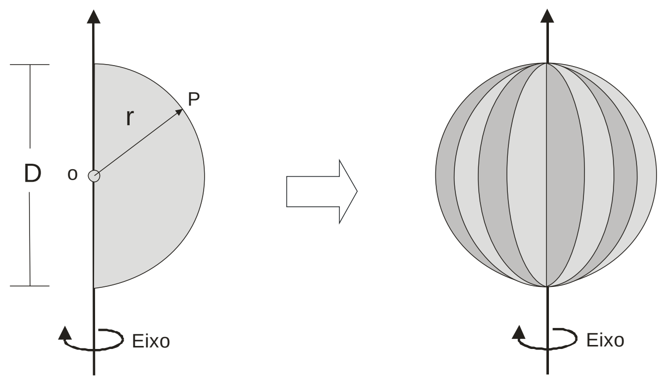
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}$$
$$V = \frac{1}{3}\pi.4^2 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2}$$
$$V = \frac{64\sqrt{3}}{3}\pi\ cm^3$$

d) Equivale a área do triângulo equilátero de lado l.

$$A_{Sm} = l^2\ \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$A_{Sm} = 8^2\ \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$A_{Sm} = 16\sqrt{3}\ cm^2$$

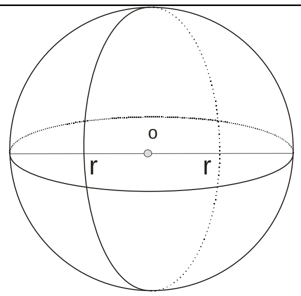
Esfera

Consideremos um ponto O e um segmento de medida r. Chama-se esfera de centro em O e raio r ao conjunto de pontos P do espaço, tais que a distância OP seja menor ou igual a r. Também a esfera é um sólido gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.



Cálculo da Área superficial e Volume de uma Esfera

Dada uma Esfera.



De forma bastante simples, podemos definir que a superfície esférica é a uma “casca”, enquanto a esfera é a união da “casca” com o “interior”.
Assim, calculamos:

- Área da superfície esférica:

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

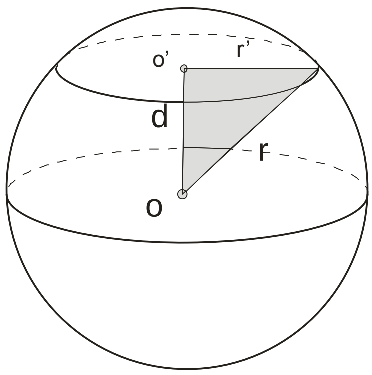
- Volume:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Secção Plana da Esfera

A intersecção de um plano com uma esfera é um círculo.

Observe:

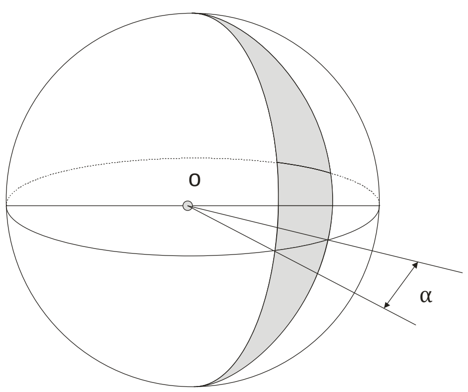


Vale a relação:
$$R^2 = d^2 + (R')^2$$

Fuso e Cunha

- **Fuso Esférico**

É a intersecção da superfície de uma esfera com dois planos cuja aresta contém um diâmetro da superfície esférica.
O Ângulo α, caracteriza a abertura do fuso e é medido em graus.

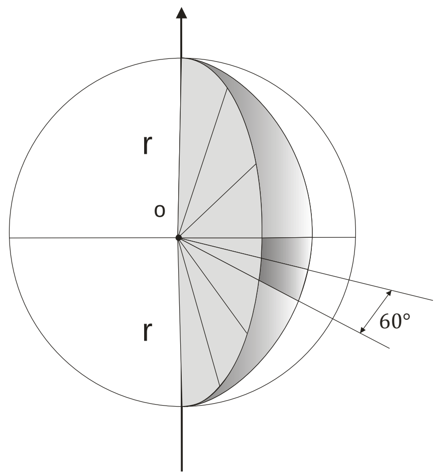


$$A_{fuso} = \frac{\pi . r^2 . \alpha}{90}$$

- **Cunha esférica**

É a intersecção de uma esfera com um diedro(ou setor diedral) cuja aresta contém o diâmetro da esfera.

O volume da cunha é dada pela seguinte fórmula:



1°. Caso: Ângulo α em graus.

$$V_{cunha} = \frac{\pi . r^3 . \alpha}{270}$$

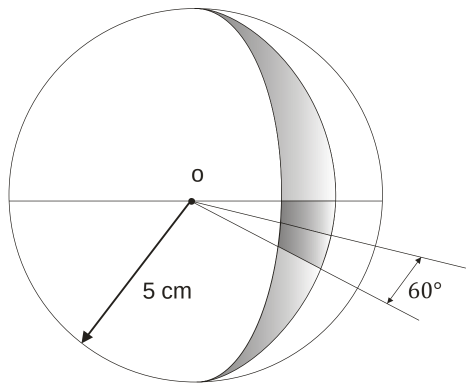
2°. Caso: Ângulo α em radianos.

$$V_{cunha} = \frac{2 . r^3 . \alpha}{3}$$

Exercício resolvido

01. (AEPOM) Dado a esfera de raio 5 cm. Calcule:
a) Área da Superfície.
b) Volume.
c) Áreas do fuso de ângulo 60°.

Resolução: usaremos as fórmulas citadas acima.



a)

$$S = 4\pi \cdot r^2$$
$$S = 4\pi \cdot 5^2$$
$$S = 4\pi \cdot 25$$
$$S = 100\pi\ cm^2$$

b)

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3$$
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 125$$
$$V = \frac{500\pi}{3}\ cm^3$$

c)

$$A_{fuso} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90}$$
$$A_{fuso} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 60}{90}$$
$$A_{fuso} = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 6}{9}$$
$$A_{fuso} = \frac{150\pi}{9}\ cm^2$$

Exercícios Propostos

02. (EEAR) A diagonal da secção meridiana de um cilindro equilátero mede $10\sqrt{2}$ cm. A área lateral desse cilindro, em cm^2, é:

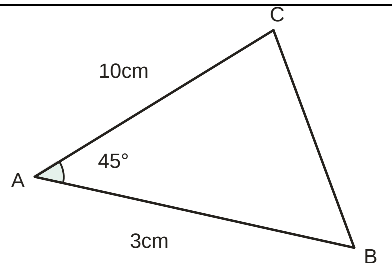
a) 250π.
b) $200\ \pi$.
c) 100π.
d) 50π.

02. (EEAR) Uma esfera tem $9\pi cm^2$ de área. Para que a área passe a $100\pi cm^2$, o raio deve ter sua medida aumentada em

a) $\frac{70}{9}$ **%.**
b) $\frac{70}{3}$ **%.**
c) $\frac{700}{9}$ **%.**
d) $\frac{700}{3}$ **%.**

03. (EEAR) O maior e o menor lado de um triângulo medem, respectivamente, 10 cm e 3 cm e formam entre si um ângulo de 45º. O volume do sólido gerado pela rotação de 360º desse triângulo em torno do seu lado maior é, em cm^3,

a) 30π.
b) 15π.
c) 10π.
d) 20π.

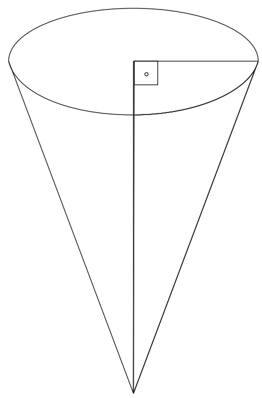


04. (CFT) Um cilindro circular reto tem altura medindo 4 cm e raio da base, 3 cm. A área lateral desse cilindro, em cm², é:

a) 30π.
b) $27\ \pi$.
c) $24\ \pi$.
d) $18\ \pi$.

05. (AFA) Um recipiente no formato de uma superfície de um cone equilátero, conforme figura, e a sua superfície lateral desenvolvida em um semicírculo de área igual a $18\pi cm^2$ Se tal recipiente, em seu interior armazena até $2/3$ de sua altura, pode-se dizer que o volume do líquido Armazenado em cm^3, é igual a:

a) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.
b) $2\pi\sqrt{3}$.
c) $8\pi\sqrt{3}$.
d) $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$.



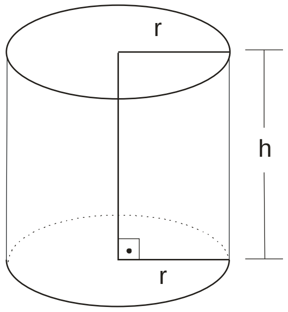
06. (EEAR) A geratriz de um cone de revolução forma com o eixo do cone um ângulo de 45º. A área lateral, em dm^2, desse cone, sabendo-se que a área de sua secção meridiana é 18 dm^2, é

a) $18\pi\sqrt{2}$.
b) $9\pi\sqrt{2}$.
c) 18π.
d) $18\pi(\sqrt{2}+1)$

07. (AFA) Uma vinícola armazena o vinho produzido em um tanque cilíndrico (reto) com sua capacidade máxima ocupada. Esse vinho será distribuído igualmente em barris idênticos também cilíndricos (retos) e vendidos para vários mercados de uma cidade. Sabe-se

que cada mercado receberá dois barris de vinho, com altura igual a $1/5$ da altura do tanque e com diâmetro da base igual a $1/4$ do diâmetro da base do tanque. Nessas condições, a quantidade x de mercados que receberão os barris (com sua capacidade máxima ocupada) é tal que x pertence ao intervalo:

a) $0 < x < 20.$
b) $20 \leq x < 40.$
c) $60 \leq x < 80.$
d) $40 \leq x < 60.$



08. (EEAR) A base de um prisma regular é um hexágono inscrito num círculo de raio R. Se o prisma é equivalente ao cubo, cuja base está inscrita no mesmo círculo, então a altura do prisma hexagonal, em cm, é

a) $2R.$

b) $\frac{2R\sqrt{6}}{3}.$

c) $\frac{4R\sqrt{6}}{3}.$

d) $\frac{4R\sqrt{6}}{9}.$

09. (EEAR) A cuba de uma pia tem a forma de uma semi-esfera de 3dm de raio. A capacidade dessa cuba é ____ litros.
a) $12\pi.$
b) $14\ \pi.$
c) $16\ \pi.$
d) $18\ \pi.$

CAPÍTULO 26
Gabarito

Capítulo 17
01. C.
02. B
03. D.
04. D.
05. A.
06. B
07. A
08. D.
09. B.

Capítulo 18
01. C.
02. B.
03. B.
04. E.
05. C.
06. D.
07. C.
08. A.
09. C.

Capítulo 19
01. A.
02. B.
03. B.
04. B.
05. D.
06. B.

Capítulo 20
01. B.
02. B.
03. D.
04. C.
05. B.
06. A.

Capítulo 21
01. B.
02. B.
03. C.
04. B.
05. A.
06. C.
07. D.

Capítulo 22
01. E.
02. A.
03. C.
04. C.
05. B.
06. C.
07. B.
08. C.
09. C.

Capítulo 23
01. C.
02. A.
03. E.
04. C.
05. D.
06. C.
07. D.
08. C.

Capítulo 24
01. B.
02. a) $240\sqrt{3}\ cm^3$ b) $20\ m^2$.

03. $A_T = 310\ cm^2, D = \sqrt{174}\ cm, e\ V = 350\ cm^3$.
04. D.
05. D.
06. A.
07. D.
08. $A_L = 25\sqrt{3}\ cm^2,\ A_T = 25\left(1+\sqrt{3}\right)\ cm^2 \quad e$ $V = \frac{125\sqrt{2}}{6}\ cm^3$.

Capítulo 25

01. C.
02. D.
03. B.
04. C.
05. D.
06. A.
07. D.
08. D.
09. D.