15^a Olimpíada Matemática do Cone Sul

Caaguazú – Paraguai

14 à 23 de Maio de 2004

Primeiro Dia – Terça-feira, 18 de Maio

Duração: 4 horas

Problema 1

Maxi escolheu 3 dígitos e, fazendo todas as permutações possíveis, obteve 6 números distintos, cada um com 3 dígitos. Se exatamente um dos números que Maxi obteve é um quadrado perfeito e exatamente três são primos, encontrar os 3 dígitos que Maxi escolheu.
Dê todas as possibilidades para os 3 dígitos.

Problema 2

Dada uma circunferência C e um ponto P exterior a ela, traçam-se por P as duas tangentes à circunferência, sendo A e B os pontos de tangência.
Toma-se um ponto Q sobre o menor arco AB de C. Seja M a interseção da reta AQ com a perpendicular à AQ traçada por P, e seja N a interseção da reta BQ com a perpendicular à BQ traçada por P.
Demonstre que, ao variar Q no arco AB, todas as retas MN passam por um mesmo ponto.

Problema 3

Seja n um inteiro positivo. Chamamos C_n a quantidade de inteiros positivos x, menores que 10^n, tais que a soma dos dígitos de $2x$ é menor que a soma dos dígitos de x.

Demonstre que $C_n \geq \frac{4}{9}\left(10^n - 1\right)$.

15^a Olimpíada Matemática do Cone Sul

Caaguazú – Paraguay

14 à 23 de Maio de 2004

Segundo Dia – Quarta-feira, 19 de Maio

Duração: 4 horas

Problema 4

Arnaldo escolhe um inteiro a, $a \geq 0$, e Bernaldo escolhe um inteiro b, $b \geq 0$. Ambos dizem, em segredo, o número que escolheram a Cernaldo, e este escreve em um quadro os números 5, 8 e 15, sendo um desses a soma $a + b$.
Cernaldo toca uma campainha e Arnaldo e Bernaldo, individualmente, escrevem em papéis distintos se sabem ou não qual dos números no quadro é a soma de a e b, e entregam seus papéis para Cernaldo.
Se em ambos os papéis está escrito NÃO, Cernaldo toca novamente a campainha, e o procedimento se repete.
Sabe-se que Arnaldo e Bernaldo são sinceros e inteligentes.
Qual é o número máximo de vezes que a campainha pode ser tocada até que um deles escreva que sabe o valor da soma?

Problema 5

Utilizando triangulinhos eqüiláteros de papel, de lado1, forma-se um triângulo eqüilátero de lado 2^{2004}.
Desse triângulo retira-se o triangulinho de lado 1 cujo centro coincide com o centro do triângulo maior.
Determine se é possível cobrir totalmente a superfície restante, sem superposições nem buracos, dispondo-se somente de fichas em forma de trapézio isósceles, cada uma formada por três triangulinhos eqüiláteros de lado 1.

Problema 6

Sejam m, n inteiros positivos. Em um tabuleiro $m \times n$, quadriculado em quadradinhos de lado 1, considere todos os caminhos que vão do vértice superior direito ao inferior esquerdo, percorrendo as linhas do quadriculado exclusivamente nas direções $\leftarrow$ e $\downarrow$.

Define-se a *área* de um caminho como sendo a quantidade de quadradinhos do tabuleiro que há abaixo desse caminho. Seja p um primo tal que $r_p(m) + r_p(n) \geq p$, onde $r_p(m)$ representa o resto da divisão de m por p e $r_p(n)$ representa o resto da divisão de n por p.
Em quantos caminhos a *área* é um múltiplo de p?