Quarta-feira, 15 de Julho de 2009

Problema 1. Seja n um inteiro positivo e sejam $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ inteiros distintos do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tais que n divide $a_i(a_{i+1} - 1)$, para $i = 1, \ldots, k-1$. Demonstre que n não divide $a_k(a_1 - 1)$.

Problema 2. Seja ABC um triângulo cujo circuncentro é O. Sejam P e Q pontos interiores dos lados CA e AB, respectivamente. Sejam K, L e M os pontos médios dos segmentos BP, CQ e PQ, respectivamente, e Γ a circunferência que passa por K, L e M. Suponha que a recta PQ é tangente à circunferência Γ. Demonstre que $OP = OQ$.

Problema 3. Seja $s_1, s_2, s_3, \ldots$ uma sucessão estritamente crescente de inteiros positivos tal que as subsucessões

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{e} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

são ambas progressões aritméticas. Demonstre que a sucessão $s_1, s_2, s_3, \ldots$ também é uma progressão aritmética.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Quinta-feira, 16 de Julho de 2009

Problema 4. Seja ABC um triângulo com $AB = AC$. As bissectrizes dos ângulos $\angle CAB$ e $\angle ABC$ intersectam os lados BC e CA em D e E, respectivamente. Seja K o incentro do triângulo ADC. Suponha que $B\widehat{E}K = 45°$. Determine todos os possíveis valores de $C\widehat{A}B$.

Problema 5. Determine todas as funções f do conjunto dos inteiros positivos no conjunto dos inteiros positivos tais que, para todos os inteiros positivos a e b, existe um triângulo não degenerado cujos lados medem

$$a, \; f(b) \; \text{ e } \; f(b + f(a) - 1).$$

(Um triângulo é *não degenerado* se os seus vértices não são colineares).

Problema 6. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ inteiros positivos distintos e M um conjunto de $n-1$ inteiros positivos que não contém o número $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Um gafanhoto pretende saltar ao longo da recta real. Ele começa no ponto 0 e dá n saltos para a direita de comprimentos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, em alguma ordem.

Prove que essa ordem pode ser escolhida de modo que o gafanhoto nunca caia num ponto de M.

Duração: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos