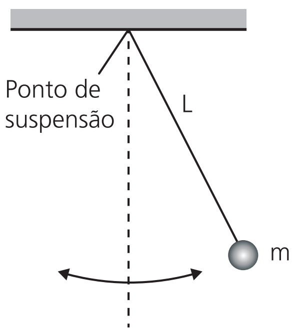
Resumo Teórico

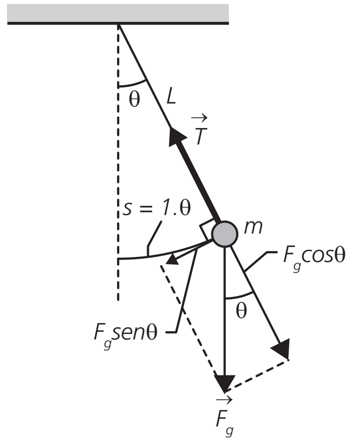
Pêndulos

Pêndulos Simples

O pêndulo simples é uma das mais cobradas aplicações de oscilações harmônicas simples em vestibulares. Trata-se de uma situação descrita da seguinte maneira: considere uma partícula, de massa **m**, presa por um fio ideal, de comprimento l, de tal forma que a outra extremidade se encontre fixa ao teto.



Desprezaremos todas as forças externas, como resistência do ar, viscosidades etc. As únicas forças que serão levadas em conta, nesse caso, são peso e tração. Veja a configuração a seguir.



Perceba que a componente do peso radial não produz aceleração tangencial. Analisaremos somente a componente perpendicular à tração. Veja:

$$-mg\,\text{sen}\theta = m\alpha$$

Daí, para ângulos pequenos, podemos fazer a seguinte aproximação:

$$-mg\theta = ml\alpha$$

Onde α é a aceleração angular. Podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\alpha + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Essa equação também representa um MHS. Ao invés da aceleração linear, temos a aceleração angular. A mesma substituição é feita para a posição: trocamos a posição linear (x) pela posição angular (θ). Podemos ainda concluir que a frequência angular será calculada por:

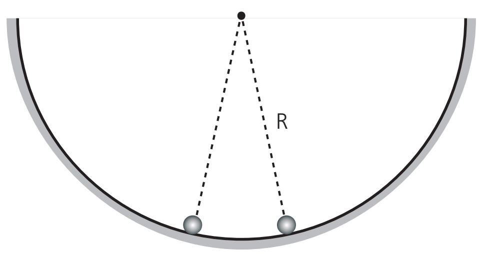
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

A partir dessa relação, afirmamos que o período de um pêndulo simples é determinado pela seguinte equação:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Importante observar que, mais uma vez, não depende da massa. Nesse caso, só depende do comprimento e da gravidade. Lembre-se que estamos considerando pequenas oscilações!

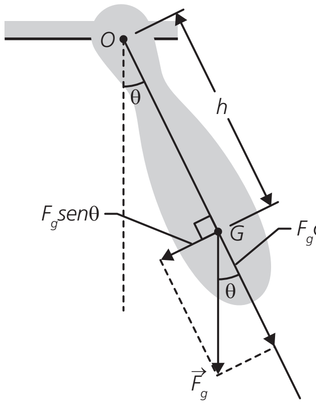
Essa mesma fórmula pode ser aplicada para a determinação do período de uma partícula que (continuo batendo na mesma tecla) oscila em pequenas amplitudes no interior de um hemisfério. Veja:



Nesse caso, o comprimento do fio seria substituído por R e quem faria o papel da tração seria a normal.

Pêndulo físico

A partir desse ponto, podemos começar a considerar mais detalhes para o nosso problema. Imagine que a massa da corda não é mais desprezível, ou melhor, imagine uma distribuição de massa contínua ao longo de um corpo. Veja a situação a seguir.



A figura representa um pêndulo físico. O ponto O está fixo e um corpo extenso oscila em torno de O. A equação, para esse caso, deve ser da seguinte maneira:

$$\tau_{res} = I\alpha$$

A Segunda Lei de Newton para as rotações diz que o torque resultante das forças externas (τ_{res}), em relação a um dado ponto, é igual ao produto do seu momento de inércia (I) pela sua aceleração angular (α), também em relação a esse ponto. Nesse material não entraremos a fundo na dinâmica rotacional, mas o aluno deve saber utilizar corretamente tal equação e adaptar esse modelo de solução para desenvolver algumas questões.

Dando continuidade ao caso anterior, podemos escrever que:

$$-mgh\ sen\theta = I\alpha$$

Através da aproximação de $sen\ \theta \approx \theta$, obtemos:

$$\alpha + \frac{mgh}{I}\theta = 0$$

Onde o período passa a ser agora igual a:

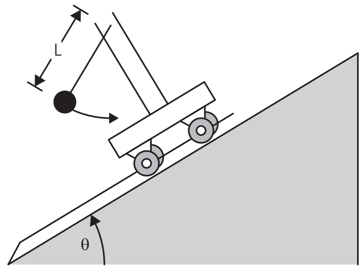
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

Exercícios

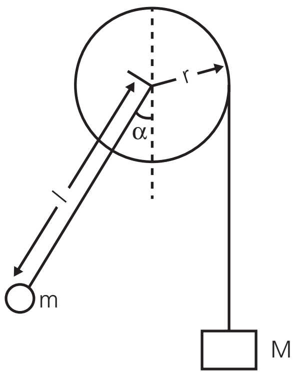
01. Um pêndulo simples realiza oscilações de pequena amplitude na superfície da Terra, com período igual a 2,0 s.
A) Se esse pêndulo realizasse oscilações de pequena amplitude na superfície da Lua, qual seria o seu período? Considere $g_{Lua} = 16\ g_{Terra}$.
B) Esse pêndulo oscilaria se estivesse preso ao teto de um elevador em queda livre?

02. Certo pêndulo simples, que bate o segundo em Paris, onde $g = 9,81\ m/s^2$, foi transportado para o equador terrestre e, então, verificou-se que o número de oscilações (de pequena amplitude) realizadas pelo referido pêndulo, por dia, ficou diminuído de 125 em relação ao número de oscilações (também de pequena amplitude) que ele realizava em Paris, por dia. Pode-se, então, afirmar que o módulo da aceleração da gravidade, em um ponto qualquer do equador terrestre, tem valor
a) igual a $9,75\ m/s^2$.
b) igual a $9,80\ m/s^2$.
c) igual a $9,85\ m/s^2$.
d) igual a $9,90\ m/s^2$.
e) diferente de qualquer dos acima especificados.

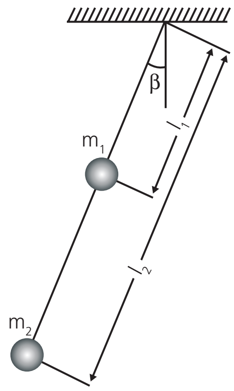
03. Um pêndulo simples, de comprimento L, está preso em um carrinho que desce sem atrito por um plano inclinado de θ (figura abaixo). Calcule o período de oscilação do pêndulo no carrinho.



04. A uma polia, de raio r e massa desprezível, está fixa uma barra de comprimento l e massa também desprezível com uma bola de massa **m** na extremidade. Existe um fio enrolado na polia que possui uma massa M na extremidade livre (ver figura a seguir). Determine o período das oscilações.

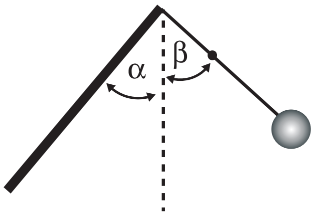


05. Encontre o período de oscilações do pêndulo abaixo.

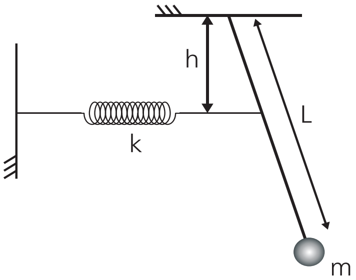


As massas são m_1 e m_2 e a barra possui peso desprezível.

06. Ao ponto O de uma parede que forma um pequeno ângulo α com a vertical, prende-se através de um fio, de comprimento L, uma esfera. Em seguida, inclina-se o fio, com a bola, de um ângulo β ($\beta < \alpha$) e abandona-se o conjunto. Considerando absolutamente elástico o choque da bola com a parede, encontre o período das oscilações desse pêndulo.



07. Um pêndulo é formado por uma haste rígida (de massa desprezível e comprimento l) e uma massa **m** presa em sua extremidade inferior. Ele pode oscilar livremente em torno do seu ponto de suspensão e a gravidade local é **g**. Prende-se uma mola, de constante elástica **k**, a uma distância **h** abaixo do ponto de suspensão.

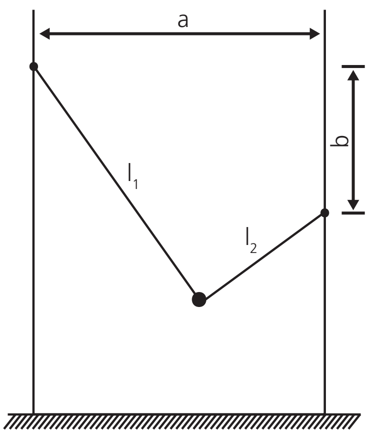


Suponha que a mola mantenha-se sempre horizontal (isto é, podemos imaginar que a mola seja muito longa) e que ela se encontre relaxada quando o pêndulo estiver vertical.

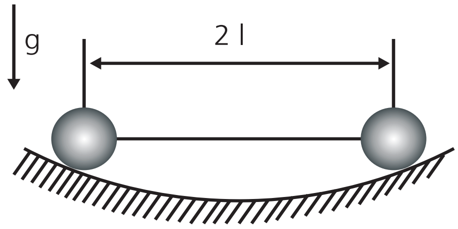
A) Calcule o período de pequenas oscilações do pêndulo em torno de sua posição de equilíbrio. Assuma que o movimento esteja restrito ao plano da mola-haste.

B) Se a haste também tivesse uma massa **m'** homogeneamente distribuída, como isso entraria na expressão para o período?

08. O sistema representado na figura a seguir oscila entrando e saindo no plano do papel. As cordas não possuem massa, são perpendiculares entre si e seus comprimentos são l_1 e l_2, respectivamente. Determine o período de oscilação do sistema em função de **g**, l_1, l_2 e **a**.



09. Sobre uma superfície esférica de raio R, estão duas partículas de mesma massa ligadas por uma haste rígida (sem massa) de comprimento 2l. Calcule a frequência angular das pequenas oscilações. Considere a gravidade igual a **g**.



A) $\omega^2 = \dfrac{g}{R}\sqrt{1-\dfrac{l^2}{R^2}}$

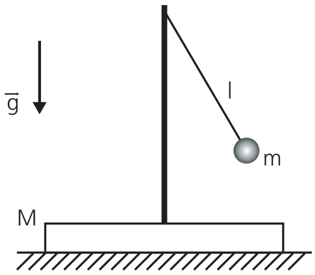
B) $\omega^2 = \dfrac{g}{R}$

C) $\omega^2 = \dfrac{\frac{g}{R}l^2}{R^2}$

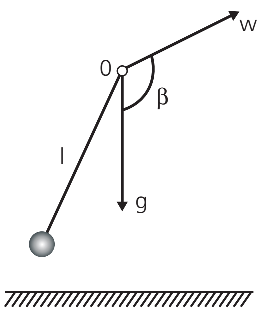
D) $\omega^2 = \dfrac{g}{R}\sqrt{1-\dfrac{4l^2}{R^2}}$

E) n.d.a.

10. Uma plataforma de massa M possui uma haste vertical e na extremidade superior existe um cordão com uma massa **m** presa à outra extremidade. Considere que não há atrito entre a plataforma e o solo. Determine o período para pequenas oscilações do sistema.

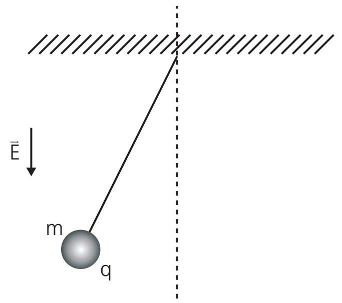


11. Determine o período das pequenas oscilações de um pêndulo simples, de comprimento l = 21 cm, suspenso em um ponto O, que se move aceleradamente com aceleração de módulo w = g/2. A aceleração $\vec{w}$ faz um ângulo de 120° com $\vec{g}$.



A) 0,8 s
B) 0,4 s
C) 1,0 s
D) 1,4 s
E) 1,8 s

12. (IME) A figura abaixo apresenta um pêndulo simples, constituído por um corpo de massa 4 g e carga + 50 μC e um fio inextensível de 1 m. Esse sistema se encontra sob a ação de um campo elétrico $\vec{E}$ de 128 kN/C, indicado na figura. Considerando que o pêndulo oscile com amplitude pequena e que o campo gravitacional seja desprezível, o período de oscilação, em segundos, é:



A) $\frac{\pi}{20}$

B) $\frac{\pi}{10}$

C) $\frac{\pi}{5}$

D) $\frac{2\pi}{5}$

E) $\frac{4\pi}{5}$

13. (ITA-SP) Um relógio de pêndulo, construído de um material de coeficiente de dilatação linear α, foi calibrado a uma temperatura de 0 °C para marcar 1 s exato ao pé de uma torre de altura **h**. Elevando-se o relógio até o alto da torre, observa-se um certo atraso, mesmo mantendo-se a temperatura constante. Considerando R o raio da Terra, L o comprimento do pêndulo a 0 °C e que o relógio permaneça ao pé da torre, então a temperatura para a qual se obtém o mesmo atraso é dada pela relação

A) $\frac{2h}{\alpha R}$

B) $\frac{h(2R+h)}{\alpha R^2}$

C) $\frac{(R+L)-LR}{\alpha LR}$

D) $\frac{R(2h+R)}{\alpha(R+h)^2}$

E) $\frac{2R+h}{\alpha R}$

14. (Unicamp-SP) Um relógio de pêndulo marca o tempo corretamente quando funciona à temperatura de 20 °C. Quando este relógio se encontra a uma temperatura de 30 °C, seu período aumenta devido à dilatação da haste do pêndulo.

a) Ao final de 24 horas operando a 30 °C, o relógio atrasa 8,64 s. Determine a relação entre os períodos τ_{30} a 30 °C e τ_{20} a 20 °C, isto é, τ_{30}/τ_{20}.

b) Determine o coeficiente de expansão térmica linear do material do qual é feita a haste do pêndulo. Use a aproximação.

Gabarito

01	02	03	04	05	06	07
–	A	–	–	–	–	–
08	**09**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
–	A	–	A	A	B	–

– Demonstração.

SUPERVISOR/DIRETOR: Dawison Sampaio – AUTOR: Carlos Eduardo Renan – REV.: Sarah