Capítulo 9
Introdução ao cálculo diferencial: limite de uma função

Para pensar

1. Pelo dicionário eletrônico *Houaiss da Língua Portuguesa*, temos as seguintes definições:

1. *pensamento, proposição ou argumento que contraria os princípios básicos e gerais que costumam orientar o pensamento humano, ou desafia a opinião consabida, a crença ordinária e compartilhada pela maioria*
2. *aparente falta de nexo ou de lógica; contradição* Ex.: *pregar o amor e espancar os filhos é um paradoxo.*
3. *Rubrica: lógica.*
   raciocínio aparentemente bem fundamentado e coerente, embora esconda contradições decorrentes de uma análise insatisfatória de sua estrutura interna

2. De acordo com a obra *História da Matemática*, de Tatiana Roque (Rio de Janeiro: Zahar, 2012), enunciamos os paradoxos do seguinte modo:

Dicotomia

Para que possamos percorrer uma dada distância AB entre os pontos A e B, é preciso percorrer primeiro a metade de AB, ou seja, AP_1. Mas para percorrer AP_1 é necessário percorrer primeiro a metade desse segmento, ou seja, AP_2. Sendo assim, o paradoxo consiste em concluir que, se a distância AB pode ser infinitamente subdividida, para iniciar um movimento é peciso, em tempo finito, começar por percorrer infinitas subdivisões menores do espaço, o que é impossível. Esse exemplo é o contrário do anterior [Aquiles e a tartaruga], pois teríamos de mostrar que o espaço que sobra, após essas subdivisões infinitas, é zero.

Flecha

Supõe-se que o espaço e o tempo são compostos de partes indivisíveis que podemos chamar, respectivamente, de "pontos" e "instantes". Uma flecha voando ocupa, em um dado instante de voo, um ponto no espaço. O ponto é, nesse caso, o espaço ocupado pela própria flecha. No instante em questão, a flecha ocupa, portanto, um espaço que é igual a ela mesma. Mas tudo aquilo que ocupa um lugar no espaço que é igual a si mesmo na verdade não se move, pois a velocidade é a variação do espaço com o tempo. Logo, temos um paradoxo, pois a flecha está em repouso a cada instante de seu voo, não podendo, assim, estar em movimento.

Em termos atuais, podemos dizer que aqui está em questão a noção de velocidade instantânea. Qual o valor da relação entre o espaço percorrido e o intervalo de tempo gasto para percorrê-lo quando esse intervalo de tempo torna-se próximo de zero? Como é impossível imaginar um mínimo não nulo, a velocidade deve ser zero, e o movimento, impossível.

Estádio

Obtemos aqui mais um paradoxo supondo que o tempo pode ser subdividido até um elemento indivisível chamado "instante". Dados A_i, B_i e C_i, com i podendo ser igual a 1, 2 ou 3, como na configuração a seguir, supomos que cada B chegue ao A (mais próximo) em um instante que é o menor intervalo de tempo possível; e que cada C chegue ao A (mais próximo) em um instante que é o menor intervalo de tempo possível. Sejam A_i, B_i e C_i, corpos de mesmo tamanho, dispostos como se segue:

$$\begin{array}{cccccc} & & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & & \end{array}$$

Os B_i e os C_i movem-se de modo que, após um instante, ocupam as posições abaixo:

$$\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array}$$

Mas, para chegar a essas posições, cada C_i passou por dois B_i e, portanto, o instante, considerado como o intervalo de tempo que cada B levou para chegar a um A, não era o menor possível nem era indivisível. Isso porque, a partir da posição que era ocupada por B_3, C_1 passou por B_2 e chegou a B_1 nesse mesmo intervalo de tempo, logo, poderíamos considerar o instante como sendo o tempo que C_1 leva para chegar a B_2, que é menor do que o intervalo considerado inicialmente, suposto o menor.

Exercícios propostos

1. a) A taxa média de variação de uma função f no intervalo $[x_1, x_2]$ é:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Sendo $y = f(x) = x^2 - 2x$, $x \in [4, 5] = [x_1, x_2]$, temos:

$$m = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \frac{15 - 8}{1} = 7$$

b) Vértice da parábola (xv, yv):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Substituindo x_v na função $y = x^2 - 2x$, encontramos y_v:

$y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$

Portanto, o vértice da parábola é o ponto $(1, -1)$.

Raízes da função, ou seja, os valores de x para os quais $f(x) = 0$:

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

O gráfico de f corta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $(2, 0)$.

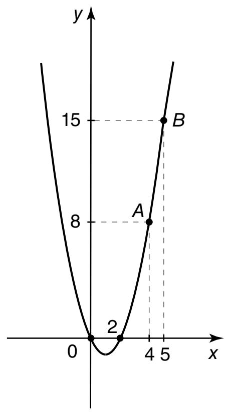
Como o gráfico passa pela origem, o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y é o ponto $(0, 0)$.

Pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ de abscissas 4 e 5, respectivamente:

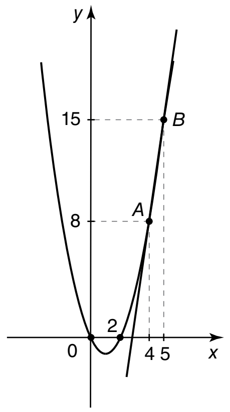
$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a) = f(4) = 8 \\ f(b) = f(5) = 15 \end{cases}$$

Portanto, $A(4, 8)$ e $B(5, 15)$ são os pontos procurados.

Com essas informações, o gráfico de f é desenhado abaixo:



c)



d) Dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, o coeficiente angular da reta que passa por esses pontos é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Assim, para $A(4, 8)$ e $B(5, 15)$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{15 - 8}{5 - 4} = \frac{7}{1} = 7$$

Logo, concluímos que o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é igual à taxa média de variação obtida no item **a**.

2. a) Sendo $y = f(x) = \frac{1}{x}$, a taxa média de variação de f no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right] = [x_1, x_2]$ é dada por:

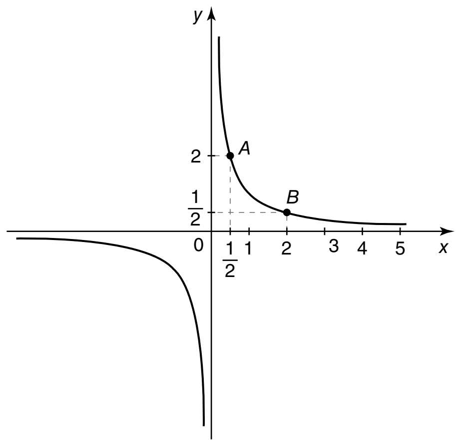
$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(2) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{4 - 1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{1}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1 - 4}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$

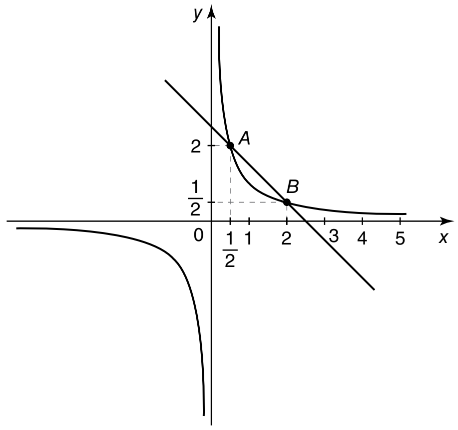
b) Sendo $y = f(x) = \frac{1}{x}$ e os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, temos:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \\ f(b) = f(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto, $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ e $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$.



c)



d) Dados dois pontos, o coeficiente angular de uma reta é: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Assim, para $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ e $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$, temos:

$$m = \frac{\frac{1}{2} - 2}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1 - 4}{2}}{\frac{4 - 1}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$

Concluímos que o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é igual à taxa média de variação obtida no item **a**.

3. a) Temos:

$f(2) = 6 \cdot 2 + 2 = 14$

$f(8) = 6 \cdot 8 + 2 = 50$

Assim:

$$m = \frac{f(8) - f(2)}{8 - 2} = \frac{50 - 14}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

b) Temos:

$f(50) = 6 \cdot 50 + 2 = 302$

$f(150) = 6 \cdot 150 + 2 = 902$

Assim:

$$m = \frac{f(150) - f(50)}{150 - 50} = \frac{902 - 302}{100} = \frac{600}{100} = 6$$

c) Temos:

$f(-10) = 6 \cdot (-10) + 2 = -60 + 2 = -58$

$f(15) = 6 \cdot 15 + 2 = 92$

Assim:

$$m = \frac{f(15) - f(-10)}{15 - (-10)} = \frac{92 - (-58)}{15 + 10} = \frac{150}{25} = 6$$

d) Temos:
$f(x_1) = 6x_1 + 2$
$f(x_2) = 6x_2 + 2$
Assim:
$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(6x_2 + 2) - (6x_1 + 2)}{x_2 - x_1} =$$
$$= \frac{6x_2 + 2 - 6x_1 - 2}{x_2 - x_1} = \frac{6(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 6$$

4. a) Temos que $f(1) = f(2) = 5$.
Assim:
$$m = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{5 - 5}{1} = 0$$
b) Temos que $f(4) = f(9) = 5$.
Assim:
$$m = \frac{f(9) - f(4)}{9 - 4} = \frac{5 - 5}{5} = 0$$
c) Temos que $f(1) = f(2) = 5$.
Assim:
$$m = \frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{5 - 5}{q - p} = \frac{0}{q - p} = 0$$

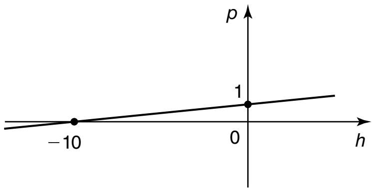
5. a) Temos que $f(a) = a^2 - 2a - 8$ e $f(b) = b^2 - 2b - 8$. Assim, a taxa média m_f de variação da função f, em relação a x, quando este varia de a até b, é dada por:
$$m_f = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - 2b - 8 - (a^2 - 2a - 8)}{b - a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_f = \frac{b^2 - a^2 - 2b + 2a}{b - a} =$$
$$= \frac{(b + a)(b - a) - 2(b - a)}{b - a}$$
$$\therefore m_f = \frac{(b - a)(b + a - 2)}{b - a} \Rightarrow m = b + a - 2$$
b) Temos que $g(a) = 5a - 18$ e $g(b) = 5b - 18$. Assim, a taxa média m_g de variação da função g, em relação a x, quando este varia de a até b, é dada por:
$$m_g = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{5b - 18 - (5a - 18)}{b - a} \Rightarrow m_g = 5$$

6. A taxa média de variação de f, no intervalo $[x_1, x_2]$, é:
$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
Logo, nos pontos considerados:
$x_1 = 2 + p \Rightarrow f(x_1) = f(2 + p) = (2 + p)^3$
$x_2 = 2 \Rightarrow f(x_2) = f(2) = 2^3$
$$m = \frac{f(2 + p) - f(2)}{2 + p - 2} = \frac{(2 + p)^3 - 2^3}{p}$$
Lembrando que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, o quociente anterior fica na forma:
$$m = \frac{2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot p + 3 \cdot 2 \cdot p^2 + p^3 - 2^3}{p} =$$
$$= \frac{p \cdot (12 + 6p + p^2)}{p} = p^2 + 6p + 12$$

7. Além das funções constantes, as funções que têm taxa média de variação constante, para qualquer intervalo de variação da variável x, são aquelas da forma $g(x) = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, que são chamadas de funções afins. Observe o cálculo da taxa média m de variação de g em um intervalo qualquer $[x_1, x_2]$, com $x_1 \neq x_2$.
$$m = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$
Salientamos que a taxa média de variação é o coeficiente de x na função $g(x) = ax + b$.
Assim, um exemplo possível é a função $g(x) = 3x + 5$, cuja taxa média de variação é 3, para qualquer intervalo de variação da variável x.

8. a) $h_1 = 0 \Rightarrow p(h_1) = p(0) = 1{,}0$
$h_2 = 15 \Rightarrow p(h_2) = p(15) = 2{,}5$
A taxa média de variação da pressão p no intervalo $[0, 15]$ é dada por:
$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = \frac{p(15) - p(0)}{15 - 0} = \frac{2{,}5 - 1{,}0}{15} = \frac{1{,}5}{15} = 0{,}1$$
Portanto, a taxa média de variação da pressão no intervalo $[0, 15]$ é de 0,1 atm/m.
b) $h_1 = 5 \Rightarrow p(h_1) = p(5) = 1{,}5$
$h_2 = 15 \Rightarrow p(h_2) = p(15) = 2{,}5$
A taxa média de variação da pressão p no intervalo $[5, 15]$ é dada por:
$$m = \frac{p(15) - p(5)}{15 - 5} = \frac{2{,}5 - 1{,}5}{10} = \frac{1{,}0}{10} = 0{,}1$$
Portanto, a taxa média de variação da pressão no intervalo $[5, 15]$ é de 0,1 atm/m.
c) De acordo com o enunciado, quando $0 \leqslant h \leqslant 15$, temos que $p = ah + b$, com $a \neq 0$.
Observemos que a função pressão, que queremos encontrar, é uma função do 1º grau e, assim, só precisaremos de dois pontos para calcular a e b:
$h_1 = 0 \Rightarrow p(h_1) = p(0) = 1$
$\therefore p(0) = a \cdot 0 + b = 1 \Rightarrow b = 1$ (I)
$h_2 = 15 \Rightarrow p(h_2) = p(15) = 2{,}5$
$\therefore p(15) = a \cdot 15 + b = 2{,}5$ (II)
Substituindo (II) em (I), temos:
$15a + 1 = 2{,}5$
$15a = 1{,}5$
$\therefore a = 0{,}1$
Portanto, $a = 0{,}1$ e $b = 1$. Assim, concluímos que $p = 0{,}1 \cdot h + 1$.
d) De acordo com o item anterior:
$0 \leqslant h \leqslant 15 \Rightarrow p = 0{,}1 \cdot h + 1$
$\therefore p(8) = 0{,}1 \cdot 8 + 1 = 0{,}8 + 1 = 1{,}8$
Logo, a pressão a 8 m de profundidade é 1,8 atm.
e) De acordo com o item **c**:
$0 \leqslant h \leqslant 15 \Rightarrow p(h) = 0{,}1 \cdot h + 1$
Se $[h_1, h_2] \subset [0, 15]$, temos:
$p(h_1) = 0{,}1 \cdot h_1 + 1$ e $p(h_2) = 0{,}1 \cdot h_2 + 1$
Assim, sendo m a taxa média de variação da pressão em relação à profundidade, temos:
$$m = \frac{p(h_2) - p(h_1)}{h_2 - h_1} =$$
$$= \frac{0{,}1 \cdot h_2 + 1 - (0{,}1 \cdot h_1 + 1)}{h_2 - h_1} =$$
$$= \frac{0{,}1 \cdot h_2 + 1 - 0{,}1 \cdot h_1 - 1}{h_2 - h_1} =$$
$$= \frac{0{,}1 \cdot h_2 - 0{,}1 \cdot h_1}{h_2 - h_1} = \frac{0{,}1 \cdot (h_2 - h_1)}{h_2 - h_1} = 0{,}1$$
Portanto, a taxa de variação é constante e vale 0,1 atm/m.

f) Na função $p = 0,1 \cdot h + 1$, para $p = 0$, temos:
$0,1 \cdot h + 1 = 0 \Rightarrow h = -10$
Logo, seu gráfico é uma reta e passa pelos pontos (0, 1) e (−10, 0).



9. A taxa média m de variação do volume do cubo, em centímetro cúbico por grau Celsius, quando a temperatura varia de 10 °C a 40 °C, é dada por:

$$m = \frac{20,0216 - 20}{40 - 10}\ \text{cm}^3/°\text{C} = 0,00072\ \text{cm}^3/°\text{C}$$

10. Considerando valores de t cada vez mais próximos de 0,5 minuto, as retas secantes ao gráfico da função $v = 20t^3$ que passam pelos pontos (0,5; v(0,5)) e (t, $20t^3$) se aproximarão cada vez mais da reta tangente ao gráfico no ponto (0,5; v(0,5)). Assim, a taxa média de variação se aproximará da taxa instantânea de variação, que é calculada pelo limite:

$$\lim_{t \to 0,5} \frac{v(t) - v(0,5)}{t - 0,5}, \text{ ou seja, } \lim_{t \to 0,5} \frac{20t^3 - 2,5}{t - 0,5}$$

11. Exemplos dessas vizinhanças:
a) $V(8) =]6, 18[$ e $\overline{V}(8) =]6, 18[- \{8\}$
b) $V(-2) =]-4, 10[$ e $\overline{V}(-2) =]-4, 10[- \{-2\}$
c) $V(0) =]-5, 3[$ e $\overline{V}(0) =]-5, 3[- \{0\}$
d) $V(-3) =]-7, 2[$ e $\overline{V}(-3) =]-7, 2[- \{-3\}$

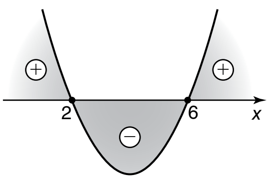
12. $|x - 3| < 5 \Rightarrow -5 < x - 3 < 5$
$\therefore -2 < x < 8$
Como $V(x) =]-2, 8[$, com $-2 < x < 8$, a única alternativa que satisfaz essa condição é a alternativa **c**: $x = 6$.
Alternativa **c**.

13. $$0 < |x - 7| < 9 \Rightarrow \begin{cases} |x - 7| > 0 \\ |x - 7| < 9 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x \neq 7 \\ -9 < x - 7 < 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 7 \\ -2 < x < 16 \end{cases}$$

Assim, o conjunto solução S da inequação pode ser representado por $S =]-2, 16[- \{7\}$, que é uma vizinhança reduzida de 7.
Alternativa **e**.

14. Para $f(x) = x^2 - 8x + 12$, façamos o estudo dos sinais de f, ou seja, quando $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$. Para tanto, vamos construir o gráfico de $f(x)$.
- Raízes de f:
  $x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = 6$ ou $x = 2$
- Como $a > 0$, o gráfico da parábola terá a concavidade voltada para cima, assim:



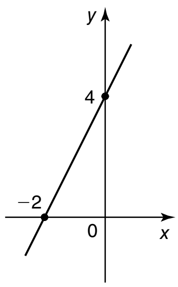
Pelo gráfico, observamos que:
- $\alpha \in]-\infty, 2[\Rightarrow f(\alpha) > 0$
- $\beta \in]2, 6[\Rightarrow f(\beta) < 0$
- Para qualquer vizinhança $\overline{V}(2)$, tem-se $\overline{V}(2) \cap]-\infty, 2[\neq \emptyset$ e $\overline{V}(2) \cap]2, 6[\neq \emptyset$.

Logo, qualquer que seja a vizinhança reduzida de 2, existem números α e β pertencentes a ela tal que $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.
Alternativa **d**

15. Como o intervalo indicado no termômetro é uma vizinhaça completa de 20 °C, a temperatura 20 °C deve estar inclusa. Assim, as alternativas **a**, **b**, **c** e **d** estão descartadas.
Resolvendo a inequação $|T - 20| < 10$, obtemos:
$-10 < T - 20 < 10 \Rightarrow 10 < T < 30$
Assim, o conjunto solução S da inequação pode ser representado por: $S =]10, 30[$, que é uma vizinhança completa de 20.
Alternativa **e**.

(*Nota*: A alternativa **e** não afirma que a extremidade móvel da coluna de mercúrio assinalou todas as temperaturas do intervalo]10, 30[, mas que temperaturas desse intervalo foram assinaladas.)

16. **a)** Para $x = 0$, temos $f(0) = 4$;
Para $f(x) = 0$, temos $x = -2$.
Assim, obtemos:

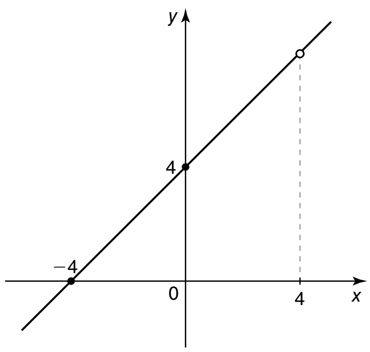


$$\lim_{x \to 3} (2x + 4) = \lim_{x \to 3} 2x + \lim_{x \to 3} 4 =$$
$$= 2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10$$

b) Simplificando a fração, temos:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = x + 4, \text{ com } x$$

diferente de 4.
Para $x = 0$, temos $f(0) = 4$;
Para $f(x) = 0$, temos $x = -4$.
Assim, obtemos:



$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{x^2 - 16}{x - 4}\right) = \lim_{x \to 4} \left(\frac{(x - 4) \cdot (x + 4)}{(x - 4)}\right) =$$
$$= \lim_{x \to 4} (x + 4) = \lim_{x \to 4} x + \lim_{x \to 4} 4 = 4 + 4 = 8$$

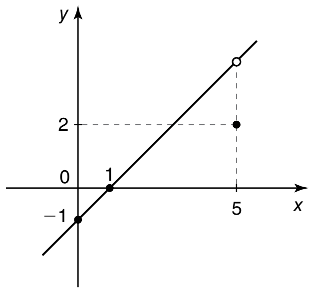
c) Simplificando a primeira expressão da função, temos:

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} = \frac{(x - 1)(x - 5)}{x - 5} = x - 1$$

Assim:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \neq 5 \\ 2, \text{ se } x = 5 \end{cases}$$

Para $x = 0$, temos $f(0) = -1$;
Para $f(x) = 0$, temos $x = 1$.
Assim, obtemos:



$$\lim_{x \to 5} \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5} \right) = \lim_{x \to 5} \left(\frac{(x - 1) \cdot (x - 5)}{(x - 5)} \right) =$$

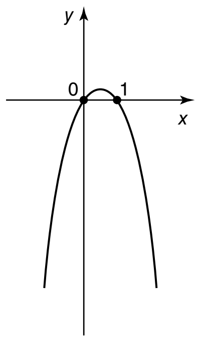
$$= \lim_{x \to 5} (x - 1) = \lim_{x \to 5} x - \lim_{x \to 5} 1 = 5 - 1 = 4$$

d) Como o coeficiente do x^2 é negativo a concavidade do gráfico é para baixo.
Encontrando as raízes, temos:
$-x^2 + x = 0 \Rightarrow x(-x + 1) = 0$
$\therefore\ x = 0$ ou $x = 1$
As coordenadas do vértice são:

$$x_v = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}$$

$$y_v = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Logo, temos o gráfico:



$$\lim_{x \to -3} (-x^2 + x) = -\lim_{x \to -3} x^2 + \lim_{x \to -3} x =$$

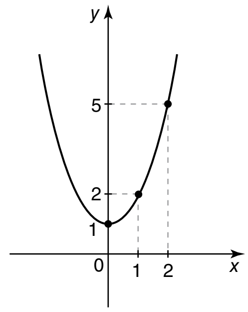
$$= -(-3)^2 + (-3) = -9 - 3 = -12$$

e) Como o coeficiente do x^2 é positivo a concavidade do gráfico é para cima.
Encontrando as raízes, temos:
$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$
Portanto, não existe raiz real.
As coordenadas do vértice são:

$$x_v = \frac{-0}{2 \cdot 1} = 0$$

$$y_v = (0)^2 + 1 = 1$$

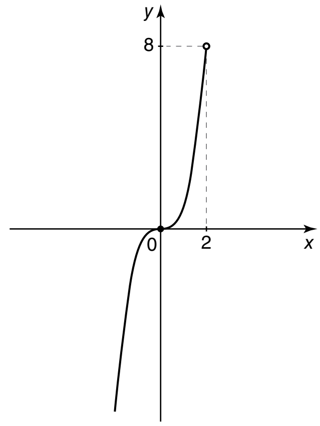
Para $x = 1$, temos $y = 2$;
Para $x = 2$, temos $y = 5$.
Logo, temos o gráfico:



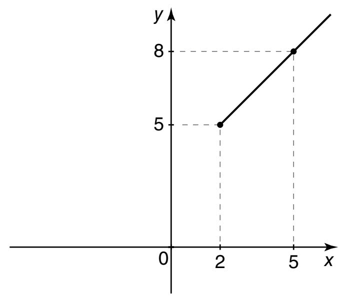
$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 1 =$$

$$= 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

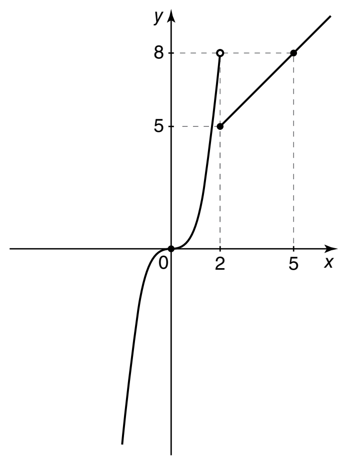
f) Para $x < 2$, temos:



Para $x \geqslant 2$, temos:



Logo, o gráfico da função f é:

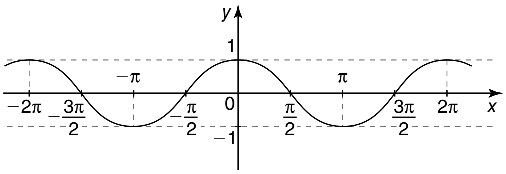


I) No eixo Ox, quando nos aproximamos do ponto de abscissa 2 pela direita, ou seja, quando fazemos x tender a 2 por valores maiores que 2, $f(x)$ aproxima-se de 5 ou, ainda, $f(x)$ tende a 5.

II) No eixo Ox, quando nos aproximamos do ponto de abscissa 2 pela esquerda, ou seja, quando fazemos x tender a 2 por valores menores que 2, $f(x)$ aproxima-se de 8 ou, ainda, $f(x)$ tende a 8.

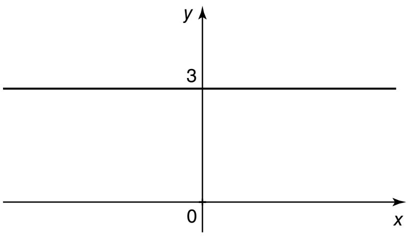
Por I e II, constatamos que, quando x tende a 2 pela esquerda e pela direita, $f(x)$ tende a dois valores diferentes. Por isso, não existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

g)



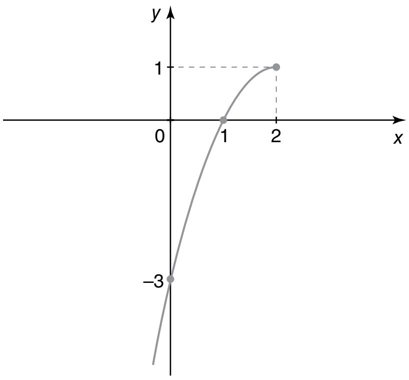
$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos\left(\lim\limits_{x \to 0} x\right) = \cos 0 = 1$

h)

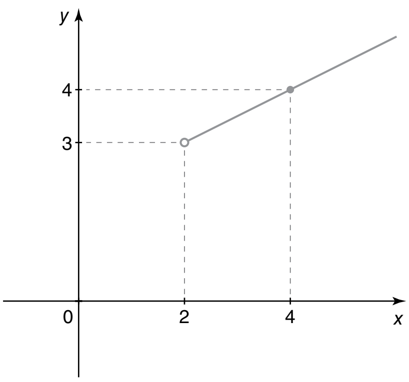


$\lim\limits_{x \to 5} 3 = 3$

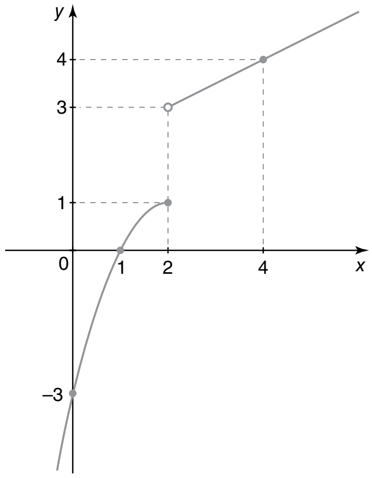
17. **a)** Para $x \leqslant 2$, temos:



Para $x > 2$, temos:



Logo, o gráfico da função f é:



b) **I)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$:

No eixo Ox, quando nos aproximamos do ponto de abscissa 2 pela direita, ou seja, quando fazemos x tender a 2 por valores maiores que 2, $f(x)$ aproxima-se de 3 ou, ainda, $f(x)$ tende a 3. Assim, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$.

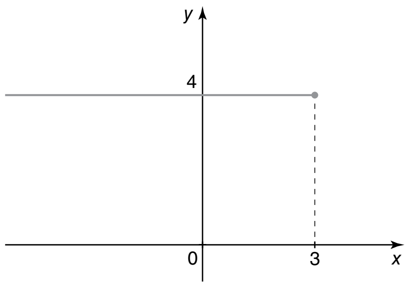
II) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$:

No eixo Ox, quando nos aproximamos do ponto de abscissa 2 pela esquerda, ou seja, quando fazemos x tender a 2 por valores menores que 2, $f(x)$ aproxima-se de 1 ou, ainda, $f(x)$ tende a 1. Assim, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$.

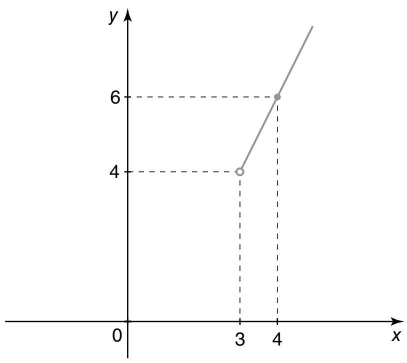
III) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$:

Por I e II, constatamos que, quando x tende a 2 pela esquerda e pela direita, $f(x)$ tende a dois valores diferentes. Por isso, não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

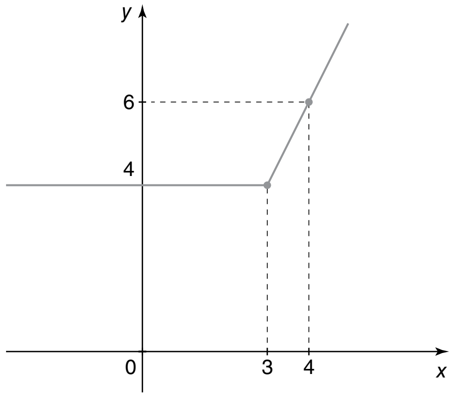
18. **a)** Para $x \leqslant 3$, temos:



Para $x > 3$, temos:



Logo, o gráfico da função f é:



b) I) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$:

No eixo Ox, quando nos aproximamos do ponto de abscissa 3 pela direita, ou seja, quando fazemos x tender a 3 por valores maiores que 3, $f(x)$ aproxima-se de 4 ou, ainda, $f(x)$ tende a 4. Assim, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$.

II) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$:

No eixo Ox, quando nos aproximamos do ponto de abscissa 3 pela esquerda, ou seja, quando fazemos x tender a 3 por valores menores que 3, $f(x)$ aproxima-se de 4 ou, ainda, $f(x)$ tende a 4. Assim, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4$.

III) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$:

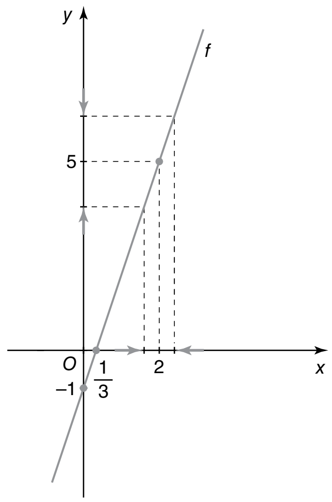
Por I e II, constatamos que, quando x tende a 3 pela esquerda e pela direita, $f(x)$ tende a 4. Assim, concluímos que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$.

19. I) Para $x = 0$, temos $f(0) = -1$;

Para $f(x) = 0$, temos $x = \frac{1}{3}$;

Para $x = 2$, temos $f(2) = 5$.

Logo, o gráfico de f é:



Vamos calcular $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ de maneira intuitiva.

Considerando no eixo Oy uma vizinhança completa qualquer de 5, $V(5)$, cujos extremos são as pontas das setas verticais da figura, podemos determinar no eixo Ox uma vizinhança reduzida de 2, $\overline{V}(2)$, cujos extremos são as pontas das setas horizontais da figura tal que, quanto mais as pontas das setas horizontais se aproximam do ponto de abscissa 2, sem tocar esse ponto, mais as pontas das setas verticais correspondentes se aproximam de 5. Isso significa que, quando x tende a 2, $f(x)$ tende a 5. Logo, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.

II) O domínio D da função g é dado por: $D = \mathbb{R} - \{2\}$.

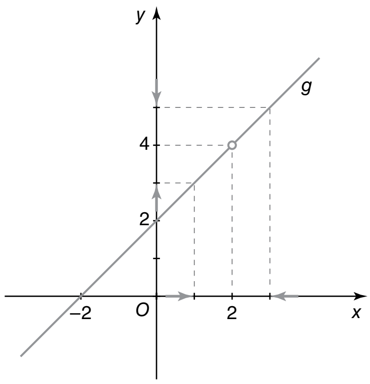
Sob esse domínio:

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \Rightarrow g(x) = x + 2$$

Para $x = 0$, temos $g(0) = 2$;

Para $g(x) = 0$, temos $x = -2$.

Logo, o gráfico de g é:



Vamos calcular $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ de maneira intuitiva.

Considerando no eixo Oy uma vizinhança completa qualquer de 4, $V(4)$, cujos extremos são as pontas das setas verticais da figura, podemos determinar no eixo Ox uma vizinhança reduzida de 2, $\overline{V}(2)$, cujos extremos são as pontas das setas horizontais da figura tal que, quanto mais as pontas das setas horizontais se aproximam do ponto de abscissa 2, sem tocar esse ponto, mais as pontas das setas verticais correspondentes se aproximam de 4. Isso significa que, quando x tende a 2, $g(x)$ tende a 4. Logo, $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$.

III) a) $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to 2} f(x) + \lim\limits_{x \to 2} g(x) = 5 + 4 = 9$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to 2} f(x) - \lim\limits_{x \to 2} g(x) = 5 - 4 = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 2} g(x) = 5 \cdot 4 = 20$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} f(x)}{\lim\limits_{x \to 2} g(x)} = \frac{5}{4}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) + f(x) + f(x)] = \lim\limits_{x \to 2} f(x) + \lim\limits_{x \to 2} f(x) + \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5 + 5 + 5 = 15$

f) $\lim\limits_{x \to 2} [f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdot f(x)] = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 2} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 2} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

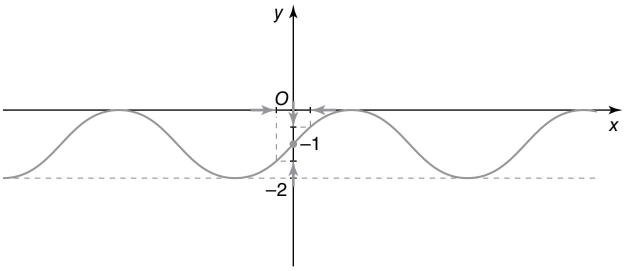
g) $\lim\limits_{x \to 2} [f(x)]^5 = \left[\lim\limits_{x \to 2} f(x)\right]^5 = 5^5 = 3.125$

h) $\lim\limits_{x \to 2} [4 + f(x)] = \lim\limits_{x \to 2} 4 + \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4 + 5 = 9$

i) $\lim\limits_{x \to 2} [4 \cdot f(x)] = \lim\limits_{x \to 2} 4 \cdot \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4 \cdot 5 = 20$

20. a) Movendo cada ponto do gráfico sen x para baixo em 1, portanto, como sen $0 = 0$, então, $-1 + \text{sen } 0 = -1$.

Logo, o gráfico de f é:



Vamos calcular $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ de maneira intuitiva.

Considerando no eixo Oy uma vizinhança completa qualquer de -1, $V(-1)$, cujos extremos são as pontas das setas verticais da figura, podemos determinar no eixo Ox uma vizinhança reduzida de 0, $\overline{V}(0)$, cujos extremos são as pontas das setas horizontais da figura tal que, quanto mais as pontas das setas horizontais se aproximam do ponto de abscissa 0, sem tocar esse ponto, mais as pontas das setas verticais correspondentes se aproximam de -1. Isso significa que, quando x tende a 0, como consequência, $f(x)$ tende a -1.

Logo, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$.

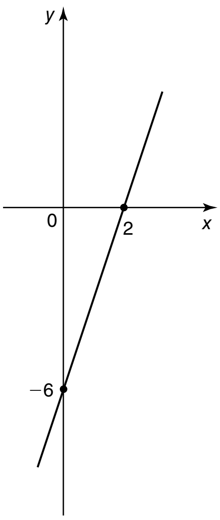
b) $\lim\limits_{x \to 0} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x \to 0} g\,(f(x)) = g\left[\lim\limits_{x \to 0} f(x)\right] =$

$= g(-1) = 1 + (-1)^{10} = 2$

21. a) Para $x = 0$, temos $f(0) = -6$;

Para $f(x) = 0$, temos $x = 2$.

Logo, o gráfico de f é:



b) $f(x) = 3x - 6$

$f(4) = 3 \cdot 4 - 6 = 12 - 6 = 6$

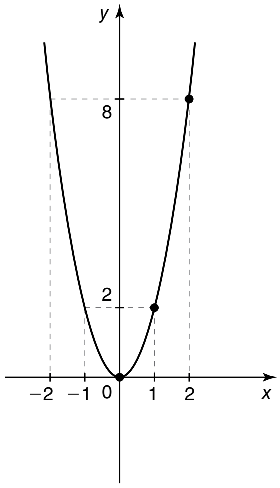
c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (3x - 6) = \lim\limits_{x \to 4} 3x - \lim\limits_{x \to 4} 6 =$

$= 3 \cdot \lim\limits_{x \to 4} x - 6 = 3 \cdot 4 - 6 = 12 - 6 = 6$

d)
- O número 4 pertence ao domínio de $f(x)$ e, portanto, existe $f(4)$.
- Existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.
- $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4) = 6$

Assim, concluímos que a função é contínua em $x = 4$.

22. a) O gráfico de f é:



b) $f(x) = 2x^2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^2 = 8$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 2x^2 = 2 \cdot \lim\limits_{x \to 2} x^2 =$

$= 2 \cdot \left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$

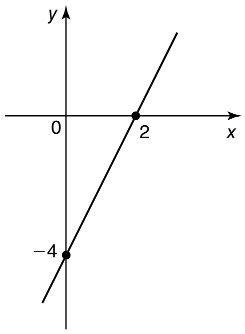
d)
- O número 2 pertence ao domínio de $f(x)$ e, portanto, existe $f(2)$.
- Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 8$.

Assim, concluímos que a função é contínua em $x = 2$.

23. a) Para $x = 0$, temos $f(0) = -4$;

Para $f(x) = 0$, temos $x = 2$.

Logo, o gráfico de f é:



Observando que $f(x)$ tende a $2a - 4$ quando x tende a qualquer número real a, concluímos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 2a - 4$. E, como $f(a) = 2a - 4$, temos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Logo, f é contínua em a, para qualquer a de seu domínio $\mathbb{R}$, ou seja, f é contínua.

b) Como o coeficiente do x^2 é positivo, a concavidade do gráfico é para cima.

Encontrando as raízes, temos:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

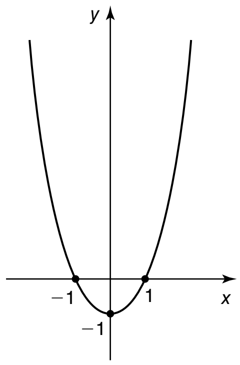
$\therefore\ x = 1$ ou $x = -1$

As coordenadas do vértice são:

$x_v = \dfrac{-0}{2 \cdot 1} = 0$

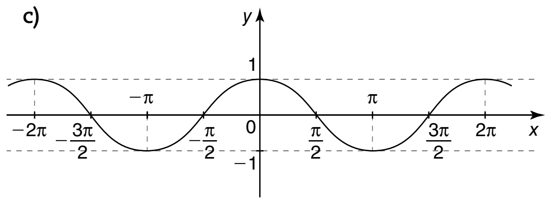
$y_v = (0)^2 - 1 = -1$

Logo, o gráfico de f é:



Observando que $f(x)$ tende a $a^2 - 1$ quando x tende a qualquer número real a, concluímos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a^2 - 1$. E, como $f(a) = a^2 - 1$, temos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Logo, f é contínua em a, para qualquer a de seu domínio $\mathbb{R}$, ou seja, f é contínua.

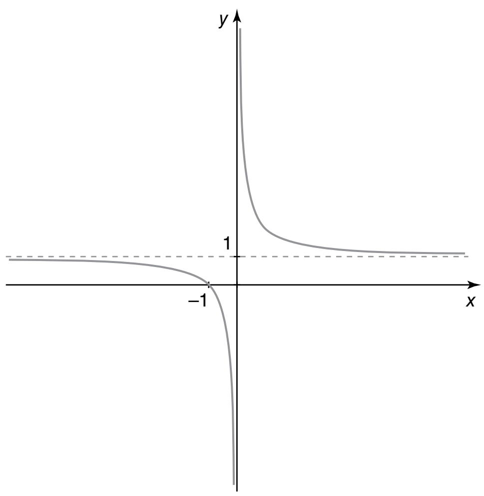
c)



Observando que $f(x)$ tende a $\cos a$ quando x tende a qualquer número real a, concluímos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \cos a$. E, como $f(a) = \cos a$, temos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Logo, f é contínua em a, para qualquer a de seu domínio $\mathbb{R}$, ou seja, f é contínua.

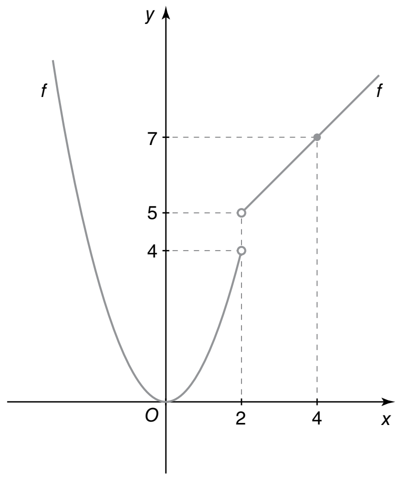
d) $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$

Logo, o gráfico de f é:



Observando que $f(x)$ tende a $\dfrac{a+1}{a}$ quando x tende a qualquer número real a, concluímos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dfrac{a+1}{a}$. E, como $f(a) = \dfrac{a+1}{a}$, temos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Logo, f é contínua em a, para qualquer a de seu domínio $\mathbb{R}^*$, ou seja, f é contínua.

24. O gráfico da função f é:



a) V, pois, para x tendendo a 2 pela esquerda, $f(x)$ tende a 4; logo, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$.

b) V, pois, para x tendendo a 2 pela direita, $f(x)$ tende a 5; logo, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5$.

c) F, pois $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

d) F, pois não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

e) F, pois 2 não pertence ao domínio de f.

f) V, pois o domínio D da função f é a reunião dos intervalos abertos $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$ e f é contínua em cada um deles.

g) V, pois f é definida apenas para $x < 2$ e para $x > 2$.

25. a) Sendo $g(x) = x^5$ e $h(x) = 4$ contínuas, temos que $f(x) = g(x) + h(x) = x^5 + 4$ é contínua, pois a soma de funções contínuas é uma função contínua.

b) Sendo $g(x) = x^3$ e $h(x) = x$ contínuas, temos que $f(x) = g(x) - h(x) = x^3 - x$ é contínua, pois a diferença de funções contínuas é uma função contínua.

c) Sendo $g(x) = x^2$ e $h(x) = 7$ contínuas, temos que $f(x) = h(x) \cdot g(x) = 7x^2$ é contínua, pois o produto de funções contínuas é uma função contínua.

d)
- Sendo $g_1(x) = 5$ e $g_2(x) = x^4$ contínuas, temos que $f_1(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) = 5x^4$ é uma função contínua, pois é o produto de duas funções contínuas.
- Sendo $h_1(x) = 3$ e $h_2(x) = x^2$ contínuas, temos que $f_2(x) = h_1(x) \cdot h_2(x) = 3x^2$ é uma função contínua, pois é o produto de duas funções contínuas.
- Sendo $I_1(x) = 2$ e $I_2(x) = x$ contínuas, temos que $f_3(x) = I_1(x) \cdot I_2(x) = 2x$ é uma função contínua, pois é o produto de duas funções contínuas.

Assim, como a soma de funções contínuas também é uma função contínua, concluímos que $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2x$ é contínua.

e) Sendo $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = x + 5$ contínuas, temos que $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{x}{x+5}$ é uma função contínua, pois o quociente de funções contínuas é uma função contínua (neste caso, a continuidade se dá no domínio $\mathbb{R} - \{-5\}$).

f) Sendo $g(x) = \text{sen } x$ e $h(x) = \cos x$ contínuas, temos que a função $f(x) = h(x) \cdot g(x) = \text{sen } x \cdot \cos x$ é contínua, pois o produto de funções contínuas é uma função contínua.

g) A função $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ é contínua, pois é a composição $g \circ h$ das funções contínuas $g(x) = \cos x$ e $h(x) = x + \frac{\pi}{5}$.

26. a) $\lim\limits_{x \to 0} 7 = 7$

b) $\lim\limits_{x \to 5} x = 5$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^4 = 2^4 = 16$

d) $\lim\limits_{x \to -2} 5x^3 = 5 \cdot (-2)^3 = 5 \cdot (-8) = -40$

e) $\lim\limits_{x \to 2} (2x^3 + 3x^2 - 2x + 1) = 2 \cdot (2)^3 + 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 16 + 12 - 4 + 1 = 25$

f) $\lim\limits_{x \to 0} (x^5 - x^4 + 2x^3 - 5x - 3) = 0^5 - 0^4 + 2 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0 - 3 = 0 - 0 + 0 - 3 = -3$

g) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \text{sen } (x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \cos (x) = \cos (0) = 1$

i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \text{tg } (x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

j) $\lim\limits_{x \to -3} |x| = |-3| = 3$

k) $\lim\limits_{x \to 2} |x - 1|(4x + 1) = |2 - 1| (4 \cdot 2 + 1) = |1| \cdot 9 = 1 \cdot 9 = 9$

l) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^3 + x + 1)(x^2 - 3)(x^4 - 1) = (2 \cdot 1^3 + 1 + 1)(1^2 - 3)(1^4 - 1) =$
$= (2 \cdot 1 + 1 + 1)(1 - 3)(1 - 1) = (4) \cdot (-2) \cdot 0 = 0$

m) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x}{x + 1} = \frac{2^2 - 3 \cdot 2}{2 + 1} = \frac{4 - 6}{3} = \frac{-2}{3}$

27. Sendo 0 e k os instantes, em segundo, em que a maçã se desprendeu do galho e em que ela atingiu o solo, respectivamente, temos:

a) Para qualquer valor da variável t, com $0 \leqslant t \leqslant k$, existe $d = f(t)$ e d assume todas as medidas, em metro, do intervalo $[0, 2]$. Assim, concluímos que a função $d = f(t)$ é contínua em todo o seu domínio $[0, k]$.

Outra explicação possível:
O gráfico da função $d = f(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant k$ é uma linha sem interrupções; logo, a função $d = f(t)$ é contínua em todo o seu domínio $[0, k]$.

Outra explicação possível:
As condições seguintes garantem que a função $d = f(t)$ é contínua em todo o seu domínio $[0, k]$.

- Para qualquer valor t_0, com $0 < t_0 < k$, temos que $\lim\limits_{x \to t_0} f(t) = f(t_0)$;
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(t) = f(0)$
- $\lim\limits_{x \to k^-} f(t) = f(k)$

b) Para qualquer valor da variável t, com $0 < t < k$, existe $d = f(t)$ e d assume todas as medidas, em metro, do intervalo $]0, 2[$. Assim, concluímos que a função $d = f(t)$ é contínua em todo o seu domínio $]0, k[$.

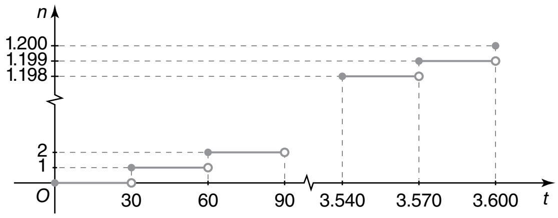
Outra explicação possível:
O gráfico da função $d = f(t)$ para $0 < t < k$ é uma linha sem interrupções; logo, a função $d = f(t)$ é contínua em todo o seu domínio $]0, k[$.

Outra explicação possível:
Para qualquer valor t_0, com $0 < t_0 < k$, temos que $\lim\limits_{x \to t_0} f(t) = f(t_0)$; logo, a função $d = f(t)$ é contínua em todo o seu domínio $]0, k[$.

28. a) Dividindo 34.995 por 30, obtemos 1.166,5. Logo, em 34.995 s, foram fabricadas 1.166 bolas.

b) Dividindo 36.000 por 30, obtemos 1.200. Logo, em 36.000 s, foram fabricadas 1.200 bolas.

c) A função pode ser representada por $n(t) = \frac{t}{30}$, cujo domínio é [0, 36.000] e o conjunto imagem é formado por todos os números naturais menores que 1.201. Assim, o gráfico dessa função é:



Essa função não é contínua, pois, por exemplo, $\lim\limits_{x \to 30^-} n(t) \neq \lim\limits_{x \to 30^+} n(t)$.

29. a) $\lim\limits_{x \to 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6} = \lim\limits_{x \to 6} \frac{(x - 6)(x + 6)}{x - 6} = \lim\limits_{x \to 6} (x + 6) = 6 + 6 = 12$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{5}{3}} \frac{9x^2 - 25}{3x - 5} = \lim\limits_{x \to \frac{5}{3}} \frac{(3x - 5)(3x + 5)}{3x - 5} = \lim\limits_{x \to \frac{5}{3}} (3x + 5) = 3 \cdot \frac{5}{3} + 5 = 5 + 5 = 10$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x - 2)}{x - 5} = \lim\limits_{x \to 5} (x - 2) = 5 - 2 = 3$

d) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1} = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)}{2x + 1} = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{(2x + 1)(x - 1)}{2x + 1} = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} (x - 1) =$

$= -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$

f) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x + 3}{x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} 1 = 1$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2(x - 2) + 1(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 1)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x^2 + 1)}{(x + 2)} =$

$= \frac{(2^2 + 1)}{(2 + 2)} = \frac{4 + 1}{4} = \frac{5}{4}$

h) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{|x| - 5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{|x|^2 - 25}{|x| - 5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{(|x| + 5)(|x| - 5)}{|x| - 5} = \lim\limits_{x \to 5} (|x| + 5) = |5| + 5 = 10$

i) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)} = \lim\limits_{x \to 4} (\sqrt{x} + 2) = \sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + x} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } x + \cos x}{1 + \text{tg } x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } x + \cos x}{1 + \frac{\text{sen } x}{\cos x}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } x + \cos x}{\frac{\cos x + \text{sen } x}{\cos x}} =$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[(\text{sen } x + \cos x) \cdot \frac{\cos x}{(\cos x + \text{sen } x)}\right] = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

l) Lembrando que

$\text{sen}(a) + \text{sen}(b) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a - b}{2}\right)$, temos:

$\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{\text{sen } 2x} = \lim\limits_{x \to \pi} \frac{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3x + x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x - x}{2}\right)}{\text{sen } 2x} =$

$= \lim\limits_{x \to \pi} \frac{2 \cdot \text{sen}(2x) \cdot \cos(x)}{\text{sen } 2x} = \lim\limits_{x \to \pi} 2\cos(x) = 2\cos(\pi) = 2 \cdot (-1) = -2$

m) Lembrando que

$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a + b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a - b}{2}\right)$, temos:

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x + \cos 3x}{\cos x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{5x + 3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x - 3x}{2}\right)}{\cos x} =$

$= 2\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(2\pi) = 2 \cdot 1 = 2$

n) Consideremos as fórmulas de transformação em produto:

- $\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\text{sen}(a) - \text{sen}(b) = 2 \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Assim:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\text{sen } 3x - \text{sen } x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{3x-x}{2}\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \cdot \text{sen}(2x) \cdot \text{sen}(x)}{2 \cdot \cos(2x) \cdot \text{sen}(x)} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[-\frac{\text{sen}(2x)}{\cos(2x)}\right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [-\text{tg}(2x)] = -\text{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\text{tg}\,\pi = 0$$

o) Lembremos que:

- $\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$
- $\text{sen } x = \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Assim:

$$1 + \text{sen } x = \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \left[\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$$

Pela fórmula de adição de arcos:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

Portanto:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \text{sen } x}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left[\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) + \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$$

30. a) $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)(x - 2)} = \frac{1}{(\sqrt{1} + 1)(1 - 2)} = \frac{1}{(1 + 1)(-1)} = -\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \to 2} \left(\frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x+2} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt{x-1} + 1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{x - 1 - 1}{x + 2 - 4} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x-1} + 1}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x-1} + 1} = \frac{\sqrt{2+2} + 2}{\sqrt{2-1} + 1} = \frac{2 + 2}{1 + 1} = 2$$

c) $$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-4} - \sqrt{2x-9}}{\sqrt{x+4} - 3} = \lim_{x \to 5} \left(\frac{\sqrt{x-4} - \sqrt{2x-9}}{\sqrt{x+4} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x+4} + 3} \cdot \frac{\sqrt{x-4} + \sqrt{2x-9}}{\sqrt{x-4} + \sqrt{2x-9}}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 5} \left(\frac{x - 4 - (2x - 9)}{x + 4 - 9} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x-4} + \sqrt{2x-9}}\right) = \lim_{x \to 5} \left(-\frac{x - 5}{x - 5} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x-4} + \sqrt{2x-9}}\right) =$$

$$= -1 \cdot \lim_{x \to 5} \left(\frac{\sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x-4} + \sqrt{2x-9}}\right) = -\frac{\sqrt{9} + 3}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -3$$

d) $$\lim_{x \to 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(x+9)}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)(x + 9)}{\sqrt{x} - 3} =$$

$$= \lim_{x \to 9} (\sqrt{x} + 3)(x + 9) = (\sqrt{9} + 3)(9 + 9) = (3 + 3)(18) = 6 \cdot 18 = 108$$

e) $$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt[4]{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt[4]{x} - 1)(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt[4]{x} - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1) = (\sqrt[4]{1} + 1)(\sqrt{1} + 1) = (1 + 1)(1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4$$

f) $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{16 - x}{2 - \sqrt[4]{x}} = \lim\limits_{x \to 16} \dfrac{(4 - \sqrt{x})(4 + \sqrt{x})}{2 - \sqrt[4]{x}} = \lim\limits_{x \to 16} \dfrac{(2 - \sqrt[4]{x})(2 + \sqrt[4]{x})(2 + \sqrt{x})}{2 - \sqrt[4]{x}} =$

$= \lim\limits_{x \to 16} (2 + \sqrt[4]{x})(2 + \sqrt{x}) = (2 + \sqrt[4]{16})(2 + \sqrt{16}) = (2 + 2) \cdot (2 + 4) = 4 \cdot 6 = 24$

g) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 4)}{\sqrt[3]{x} - 2} =$

$= \lim\limits_{x \to 8} (\sqrt[3]{x^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 4) = \sqrt[3]{8^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{8} + 4 = 4 + 2 \cdot 2 + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$

h) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{(-1)^2} - \sqrt[3]{-1} + 1)} =$

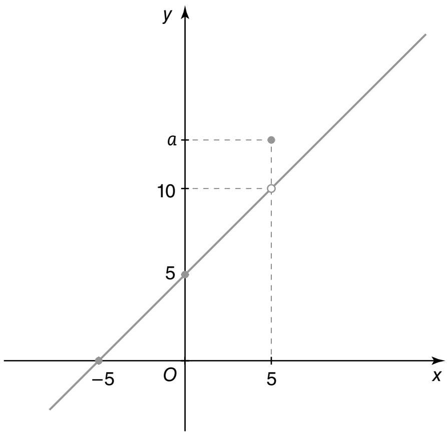
$= \dfrac{1}{(1 + 1 + 1)} = \dfrac{1}{3}$

31. a) Vamos resolver esse problema de dois modos diferentes.

1º modo: resolução gráfica

- Para $x \neq 5$, temos $\dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = \dfrac{(x + 5)(x - 5)}{x - 5} = x + 5$

  Logo, a parte do gráfico de f obtida para $x \neq 5$ é a reta de equação $y = x + 5$ com exceção do ponto (5, 10).
- A parte do gráfico de f obtida para $x = 5$ é o ponto (5, a).
  Uma possibilidade para o gráfico de f é aquela em que o ponto (5, a) está acima do ponto (5, 10), isto é:



Nessa possibilidade, a função é descontínua em $x = 5$, pois, considerando no eixo Oy uma vizinhança $]p, q[$ de a, com $p > 10$, não existe no eixo Ox vizinhança reduzida de 5, $\overline{V}(5)$, tal que todo x de $\overline{V}(5)$ tenha imagem em $]p, q[$, através de f.

Raciocinando analogamente sobre a possibilidade de o ponto (5, a) estar abaixo do ponto (5, 10), concluímos também que a função é descontínua em $x = 5$.

Resta, portanto, analisar a última possibilidade, que é a de o ponto (5, a) coincidir com o ponto (5, 10). Nesse caso, o gráfico de f é uma reta e, portanto, sua equação é polinomial; logo, f é contínua em $x = 5$, pois toda função polinomial é contínua.

Concluímos, então, que f é contínua em $x = 5$ se, e somente se, $a = 10$.

2º modo: resolução algébrica

A função f é contínua em $x = 5$ se, e somente se:

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = f(5)$

Como o cálculo do limite de $f(x)$ para x tendendo a 5 estuda a variação de x em vizinhanças reduzidas de 5 e, portanto, $x \neq 5$, esse limite é igual ao limite de $\dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ para x tendendo a 5, isto é:

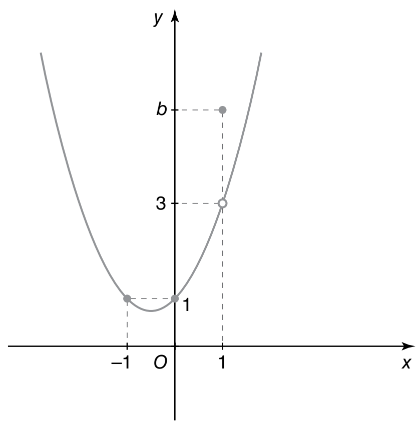
$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x + 5)(x - 5)}{x - 5} = \lim\limits_{x \to 5} (x + 5) = 5 + 5 = 10$

Concluímos, então, que f é contínua em $x = 5$ se, e somente se, $f(5) = 10$, ou seja, $a = 10$.

b) Vamos resolver esse problema de dois modos diferentes.

1º modo: resolução gráfica

- Para $x \neq 1$, temos $\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} =$
  $= x^2 + x + 1$
  Logo, a parte do gráfico de g obtida para $x \neq 1$ é a parábola de equação $y = x^2 + x + 1$ com exceção do ponto (1, 3).
- A parte do gráfico de g obtida para $x = 1$ é o ponto $(1, b)$.
  Uma possibilidade para o gráfico de g é aquela em que o ponto $(1, b)$ está acima do ponto (1, 3), isto é:



Nessa possibilidade, a função é descontínua em $x = 1$, pois, considerando no eixo Oy uma vizinhança $]p, q[$ de b, com $p > 3$, não existe no eixo Ox vizinhança reduzida de 1, $\overline{V}(1)$, tal que todo x de $\overline{V}(1)$ tenha imagem em $]p, q[$, através de g.

Raciocinando analogamente sobre a possibilidade de o ponto $(1, b)$ estar abaixo do ponto (1, 3), concluímos também que a função é descontínua em $x = 1$.

Resta, portanto, analisar a última possibilidade, que é a de o ponto $(1, b)$ coincidir com o ponto (1, 3). Nesse caso, o gráfico de g é uma parábola e, portanto, sua equação é polinomial; logo, g é contínua em $x = 1$, pois toda função polinomial é contínua.

Concluímos, então, que g é contínua em $x = 1$ se, e somente se, $b = 3$.

2º modo: resolução algébrica

A função g é contínua em $x = 1$ se, e somente se: $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1)$

Como o cálculo do limite de $g(x)$ para x tendendo a 1 estuda a variação de x em vizinhanças reduzidas de 1 e, portanto, $x \neq 1$, esse limite é igual ao limite de $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ para x tendendo a 1, isto é:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 5} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

Concluímos, então, que g é contínua em $x = 1$ se, e somente se, $g(1) = 3$, ou seja, $b = 3$.

32. a) A função f é contínua em $x = 9$ se, e somente se: $\lim\limits_{x \to 9} f(x) = f(9)$

Como o cálculo do limite de $f(x)$ para x tendendo a 9 estuda a variação de x em vizinhanças reduzidas de 9 e, portanto, $x \neq 9$, esse limite é igual ao limite de $\frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ para x tendendo a 9, isto é:

$$\lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim_{x \to 9} (\sqrt{x}+3) = \sqrt{9} + 3 = 6$$

Concluímos, então, que f é contínua em $x = 9$ se, e somente se, $f(9) = 6$, ou seja, $a = 6$.

b) A função g é contínua em $x = 8$ se, e somente se: $\lim\limits_{x \to 8} g(x) = g(8)$

Como o cálculo do limite de $g(x)$ para x tendendo a 8 estuda a variação de x em vizinhanças reduzidas de 8 e, portanto, $x \neq 8$, esse limite é igual ao limite de $\frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$ para x tendendo a 8, isto é:

$$\lim_{x \to 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{x \to 8} \frac{(x-8)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4\right]}{(\sqrt[3]{x}-2)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4\right]} =$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{(x-8)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4\right]}{x-8} =$$

$$= \lim_{x \to 8} \left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4\right] = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4 = 12$$

Concluímos, então, que g é contínua em $x = 8$ se, e somente se, $g(8) = 12$, ou seja, $b = 12$.

33. a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4}{4} \cdot \frac{\text{sen } 4x}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{4}{1} \cdot \frac{\text{sen } 4x}{4x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4}{1} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{4x} =$

$= 4 \cdot 1 = 4$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5 \text{ sen } 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{10 \text{ sen } 2x}{2x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} 10 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{2x} = 10 \cdot 1 = 10$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{3} \cdot \frac{\text{sen } 3x}{2x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\text{sen } 3x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{2} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{3x} =$

$= \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$

e) Fazendo $x - \frac{\pi}{7} = t$, temos $t \to \frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{7} = 0$ quando $x \to \frac{\pi}{7}$. Logo:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{7}} \frac{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{7}\right)}{x - \frac{\pi}{7}} = \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$$

f) Fazendo $4x - \frac{\pi}{5} = t$, temos $t \to \frac{4\pi}{20} - \frac{\pi}{5} = 0$ quando $x \to \frac{\pi}{20}$. Logo:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{20}} \frac{\text{sen}\left(4x - \frac{\pi}{5}\right)}{4x - \frac{\pi}{5}} = \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$$

g) $\lim_{x \to \frac{\pi}{15}} \dfrac{\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)}{x - \frac{\pi}{15}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{15}} \dfrac{3}{3} \cdot \dfrac{\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)}{x - \frac{\pi}{15}} =$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{15}} 3 \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{15}} \dfrac{\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)}{3x - \frac{\pi}{5}} =$

$= 3 \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{15}} \dfrac{\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)}{3x - \frac{\pi}{5}}$

Fazendo $3x - \frac{\pi}{5} = t$, temos $t \to \frac{3\pi}{15} - \frac{\pi}{5} = 0$ quando $x \to \frac{\pi}{15}$. Logo:

$\lim_{x \to \frac{\pi}{15}} \dfrac{\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)}{x - \frac{\pi}{15}} = 3 \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{15}} \dfrac{\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)}{x - \frac{\pi}{15}} =$

$= 3 \cdot \lim_{t \to 0} \dfrac{\text{sen } t}{t} = 3 \cdot 1 = 3$

h) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{\text{sen } 6x} = \dfrac{\lim_{x \to 0} \text{sen } 4x}{\lim_{x \to 0} \text{sen } 6x} = \dfrac{\lim_{x \to 0} \frac{4x}{4x} \cdot \text{sen } 4x}{\lim_{x \to 0} \frac{6x}{6x} \cdot \text{sen } 6x} =$

$= \dfrac{\lim_{x \to 0} 4x \cdot \frac{\text{sen } 4x}{4x}}{\lim_{x \to 0} 6x \cdot \frac{\text{sen } 6x}{6x}} = \dfrac{\lim_{x \to 0} 4x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{4x}}{\lim_{x \to 0} 6x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 6x}{6x}} =$

$= \dfrac{\lim_{x \to 0} 4x \cdot 1}{\lim_{x \to 0} 6x \cdot 1} = \lim_{x \to 0} \dfrac{4x}{6x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{4}{6} = \dfrac{4}{6}$

i) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\frac{\text{sen } x}{x}} = \dfrac{\lim_{x \to 0} 1}{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

j) Como $\frac{\pi}{2} - x$ é o ângulo complementar de x, temos $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$.

Logo:

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{8x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{8x} =$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{8} \cdot \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} =$

$= \dfrac{1}{8} \cdot 1 = \dfrac{1}{8}$

k) Fazendo $3x - \frac{\pi}{2} = t$, temos $t \to \frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = 0$ quando $x \to \frac{\pi}{6}$.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos 3x}{3x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)}{3x - \frac{\pi}{2}} =$

$= \lim_{t \to 0} \dfrac{\text{sen } t}{t} = 1$

l) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{4x - 2\pi} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{4\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} =$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{4} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{4} \cdot 1 = \dfrac{1}{4}$

m) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\text{sen } x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\text{sen } x - \text{sen } \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} =$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2 \,\text{sen}\left(\frac{x - \frac{\pi}{6}}{2}\right) \cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{6}}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} =$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\text{sen}\left(\frac{x - \frac{\pi}{6}}{2}\right) \cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{6}}{2}\right)}{\frac{x - \frac{\pi}{6}}{2}} =$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\text{sen}\left(\frac{x - \frac{\pi}{6}}{2}\right)}{\frac{x - \frac{\pi}{6}}{2}} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \cos\left(\dfrac{x + \frac{\pi}{6}}{2}\right) =$

$= 1 \cdot \cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2}\right) = \cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

34. a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } 4x}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{x \cdot \cos 4x} =$

$= \lim_{x \to 0} \left[\dfrac{4}{4} \cdot \dfrac{\text{sen } 4x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos 4x}\right] =$

$= \lim_{x \to 0} 4 \cdot \dfrac{\text{sen } 4x}{4x} \cdot \dfrac{1}{\cos 4x} =$

$= \lim_{x \to 0} 4 \cdot \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{4x} \cdot \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos 4x} =$

$= 4 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{\cos(4 \cdot 0)} = 4 \cdot \dfrac{1}{\cos(0)} = 4 \cdot 1 = 4$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } 8x}{\text{tg } 5x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{8x}{8x} \cdot \frac{\text{sen } 8x}{\cos 8x}}{\frac{5x}{5x} \cdot \frac{\text{sen } 5x}{\cos 5x}} =$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{8x}{\cos 8x} \cdot \frac{\text{sen } 8x}{8x}}{\frac{5x}{\cos 5x} \cdot \frac{\text{sen } 5x}{5x}} =$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{8x}{\cos 8x}}{\frac{5x}{\cos 5x}} \cdot \dfrac{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 8x}{8x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x}} =$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{8x}{\cos 8x} \cdot \dfrac{\cos 5x}{5x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{8}{\cos 8x} \cdot \dfrac{\cos 5x}{5} =$

$= \dfrac{8}{\cos(8 \cdot 0)} \cdot \dfrac{\cos(5 \cdot 0)}{5} =$

$= \dfrac{8}{\cos(0)} \cdot \dfrac{\cos(0)}{5} = \dfrac{8}{1} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{8}{5}$

c) $\lim_{x \to 0} x \text{ cotg } x = \lim_{x \to 0} x \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x} \cos x =$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x} \cdot \lim_{x \to 0} \cos x = 1 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$

d) $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{1 - \cos x}{2\pi - x} = \lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{\cos 2\pi - \cos x}{2\pi - x} =$

$= \lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{-2\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi + x}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{2\pi - x}{2}\right)}{2\pi - x} =$

$= \lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{-\text{sen}\left(\dfrac{2\pi + x}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{2\pi - x}{2}\right)}{\dfrac{2\pi - x}{2}} =$

$= \lim\limits_{x \to 2\pi} \left[-\text{sen}\left(\dfrac{2\pi + x}{2}\right)\right] \cdot \lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{\text{sen}\left(\dfrac{2\pi - x}{2}\right)}{\dfrac{2\pi - x}{2}} =$

$= \left[-\text{sen}\left(\dfrac{2\pi + 2\pi}{2}\right)\right] \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^4 x}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen}\, x}{x}\right)^4 = 1^4 = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^4 x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen}^4 x}{x^4} \cdot x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^4 x}{x^4} \cdot \lim\limits_{x \to 0} x = 1 \cdot 0 = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 \dfrac{x}{3}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 \dfrac{x}{3}}{9 \cdot \dfrac{x^2}{9}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{9} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, \dfrac{x}{3}}{\dfrac{x}{3}} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, \dfrac{x}{3}}{\dfrac{x}{3}} =$

$= \dfrac{1}{9} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{1}{9}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 0 - \cos x}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\text{sen}\left(-\dfrac{x}{2}\right)}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{4 \cdot \dfrac{x^2}{4}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{4} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{4} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos^2 x}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x - \cos^2 x}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\text{sen}^2 x}{x^2} =$

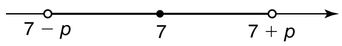
$= \lim\limits_{x \to 0} (-1) \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} =$

$= -1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. a) Verdadeira.
O intervalo $]7 - p, 7 + p[$ está definido em torno de 7, e 7 pertence a esse intervalo.

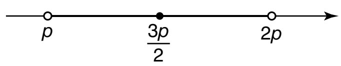


Portanto, o intervalo $]7 - p, 7 + p[$ é uma vizinhança completa de 7.

b) Falsa.
Para $]a - 2, a + 3[$ ser uma vizinhança completa de 5, devemos ter:
$a - 2 < 5 < a + 3$
Com isso, $a - 2 < 5$ e $a + 3 > 5$, ou seja, $a < 7$ e $a > 2$.
Logo, $2 < a < 7$.

c) Verdadeira.
Para $]a - 2, b + 4[$ ser uma vizinhança completa de 3, devemos ter:
$a - 2 < 3 < b + 4$
Com isso, $a - 2 < 3$ e $b + 4 > 3$, ou seja, $a < 5$ e $b > -1$.

d) Verdadeira.
Vejamos uma representação geométrica:



Notemos que $\dfrac{3p}{2}$ é o ponto médio do intervalo $]p, 2p[$.
Portanto, $]p, 2p[$ é uma vizinhança completa de $\dfrac{3p}{2}$.

e) Falsa.
Para que um intervalo seja uma vizinhança reduzida de um número a, esse intervalo deve apresentar valores menores e valores maiores que a e, portanto, o número a não pode ser uma das extremidades do intervalo. Veja que $[5, 8[- \{5\} =]5, 8[$ não possui elementos menores que 5.

f) Verdadeira.
Para que um conjunto seja uma vizinhança do número 0, esse conjunto deverá apresentar valores menores que 0, que são números negativos, e valores maiores que 0, que são números positivos.

g) Verdadeira.
Por exemplo, sejam:
$a = 2, V(a) = V(2) =]1, 3[$
$b = 6, V(b) = V(6) =]5, 7[$
Observe que:
$V(2) \cap V(6) = \varnothing$

h) Verdadeira.
Provemos por redução ao absurdo que $a = b$ (anexamos a negação da tese à hipótese e chegamos a uma contradição).
Hipótese: $\overline{V}(a) \cap \overline{V}(b) \neq \varnothing$
Tese: $a = b$
Negação da tese: $a < b$ ou $b < a$.

Vamos demonstrar somente o caso em que $a < b$ (o caso em que $a > b$ pode ser demonstrado de maneira semelhante).

Se $a < b$, então, $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Assim, quaisquer vizinhanças reduzidas $\overline{V}(a)$ e $\overline{V}(b)$, com $\overline{V}(a) = \left]p, \frac{a+b}{2}\right[$ e $\overline{V}(b) = \left]\frac{a+b}{2}, q\right[$, com $p < a$ e $q > b$, são tais que $\overline{V}(a) \cap \overline{V}(b) = \varnothing$, o que contraria a hipótese, segundo a qual $\overline{V}(a) \cap \overline{V}(b) \neq \varnothing$. Logo, a não pode ser menor que b.

De maneira análoga, prova-se que b não pode ser menor que a.

Conclui-se, então, que $a = b$.

i) Falsa.

Sejam: $a = 2$, $\overline{V}(a) = \overline{V}(2) =]1, 3[- \{2\}$, $b = 6$ e $\overline{V}(b) = \overline{V}(6) =]2, 7[- \{6\}$

Para esses valores, temos:

$\overline{V}(a) \cap \overline{V}(b) =]2, 3[$

$\therefore\ \overline{V}(a) \cap \overline{V}(b) \neq \varnothing$

Note que $\frac{a+b}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$, que não pertence à vizinhança $\overline{V}(2)$.

2. **a)** Os extremos da vizinhança completa e simétrica, de raio 3, do número real 7 são os números $(7 - 3)$ e $(7 + 3)$; logo, essa vizinhança é $]4, 10[$.

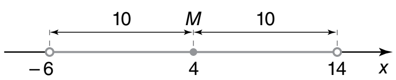
b) A inequação da alternativa **II** representa a vizinhança descrita no item **a**, pois:

$|x - 7| < 3 \Rightarrow -3 < x - 7 < 3$

$\therefore\ -3 + 7 < x < 3 + 7 \Rightarrow 4 < x < 10$

Ou seja, o conjunto solução S dessa inequação, no universo $\mathbb{R}$, é dado por: $S =]4, 10[$

c) Os extremos da vizinhança completa e simétrica, de raio 10, do número real 4 são os números $(4 - 10)$ e $(4 + 10)$; logo, essa vizinhança é $]-6, 14[$. Representando-a no eixo real, observamos que o ponto M de abscissa 4 é o ponto médio do segmento que a representa:



A distância de qualquer ponto P dessa vizinhança ao ponto médio M é menor que 10; assim, indicando por x a abscissa de P, temos:

$|x - 4| < 10$

3. A vizinhança reduzida e simétrica de raio r do número real a, é representada pela inequação:

$0 < |x - a| < r$

Portanto, a vizinhança reduzida e simétrica de raio 6 do número real 2, é:

$0 < |x - 2| < 6$

Alternativa **a**.

4. Temos que $6 \in]6 - a, 6 + a[$, para qualquer número positivo a.

Supondo que existisse outro número $6 + k$, com $k > 0$, pertencente a todas essas vizinhanças, deveríamos ter $k < a$, para qualquer número positivo a.

Essa suposição nos conduz a um absurdo, pois para $a = k$ teríamos $K < k$. Analogamente, teríamos um absurdo ao supor que existisse outro número $6 - k$, com $k > 0$, pertencente a todas essas vizinhanças.

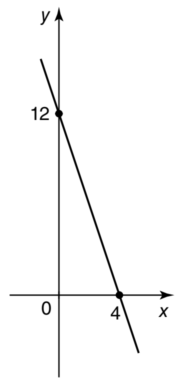
Concluímos, então, que 6 é o único número pertencente a todas as vizinhanças da forma $]6 - a, 6 + a[$, com $a > 0$. Logo, a intersecção de todas elas é o conjunto $\{6\}$.

5. De acordo com a justificativa do exercício anterior, temos que a intersecção de todas as vizinhanças simétricas $]4 - a, 4 + a[$, com $a > 0$, é o conjunto $\{4\}$. Assim, se considerarmos as vizinhanças simétricas reduzidas de 4, isto é, $]4 - a, 4 + a[- \{4\}$, com $a > 0$, teremos como intersecção de todas elas o conjunto vazio.

6. **a)** Para $x = 0$, temos $f(0) = 12$;

Para $f(x) = 0$, temos $x = 4$.

Logo, o gráfico de f é:



$\lim\limits_{x \to 0} (-3x + 12) = \lim\limits_{x \to 0} (-3x) + \lim\limits_{x \to 0} 12 =$

$= -3 \cdot 0 + 12 = -0 + 12 = 12$

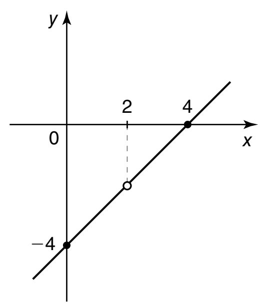
b) Simplificando a fração, temos:

$\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} = x - 4$, para x diferente de 2.

Para $x = 0$, temos $f(0) = -4$;

Para $f(x) = 0$, temos $x = 4$.

Logo, o gráfico de f é:



$\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{(x-2) \cdot (x-4)}{(x-2)}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 2} (x - 4) = \lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 4 = 2 - 4 = -2$

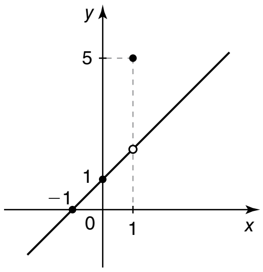
c) Simplificando a primeira expressão da função, temos:

$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$, para x diferente de 1.

Assim:

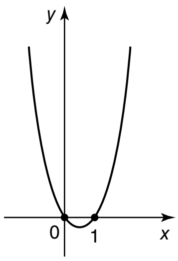
$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \neq 1 \\ 5, \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

Para $x = 0$, temos $f(0) = 1$;
Para $f(x) = 0$, temos $x = -1$.
Logo, o gráfico de f é:



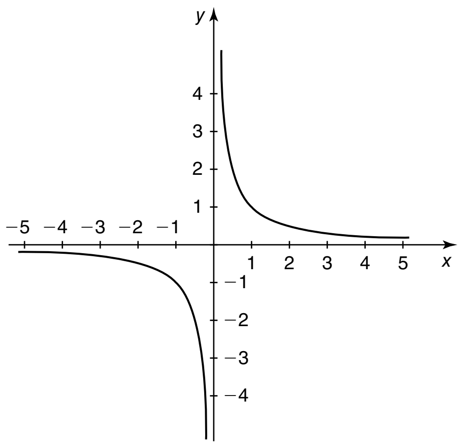
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{(x - 1)}\right) =$$
$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 1 = 1 + 1 = 2$$

d) Como o coeficiente do x^2 é positivo a concavidade do gráfico é para cima.
Encontrando as raízes, temos:
$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$
$\therefore\ x = 0$ ou $x = 1$
As coordenadas do vértice são:
$$x_v = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}$$
$$y_v = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$
Logo, o gráfico de f é:



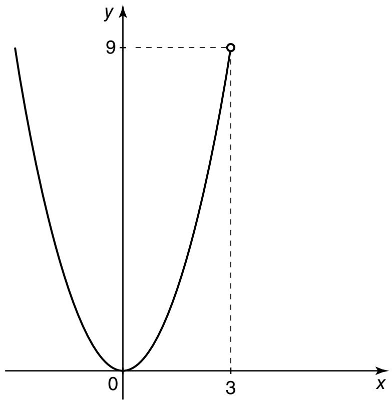
$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x) = \lim_{x \to 2} x^2 - \lim_{x \to 2} x =$$
$$= 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

e)

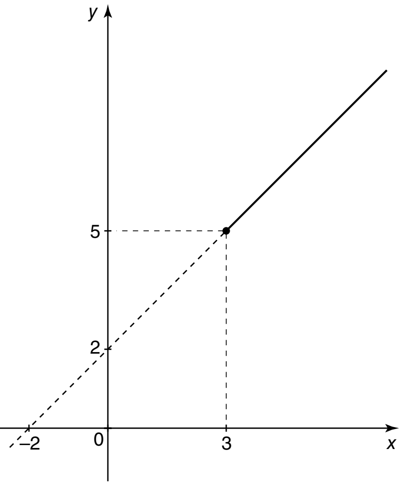


$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\lim_{x \to 2} 1}{\lim_{x \to 2} x} = \frac{1}{2}$$

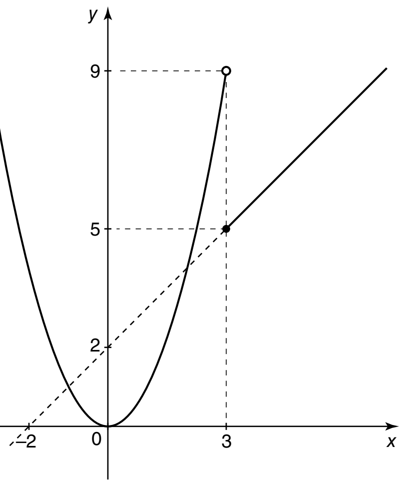
f) Para $x < 3$, temos:



Para $x \geqslant 3$, temos:



Portanto, o gráfico de f é:

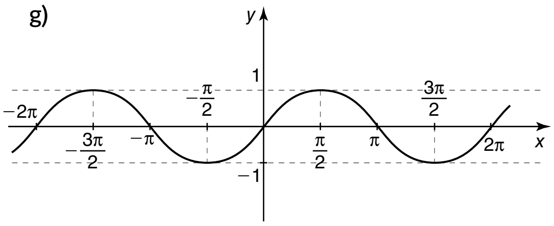


I) No eixo Ox, quando nos aproximamos do ponto de abscissa 3 pela direita, ou seja, quando fazemos x tender a 3 por valores maiores que 3, $f(x)$ aproxima-se de 5 ou, ainda, $f(x)$ tende a 5.

II) No eixo Ox, quando nos aproximamos do ponto de abscissa 3 pela esquerda, ou seja, quando fazemos x tender a 3 por valores menores que 3, $f(x)$ aproxima-se de 9 ou, ainda, $f(x)$ tende a 9.

Por I e II, constatamos que, quando x tende a 3 pela direita e pela esquerda, $f(x)$ tende a dois valores diferentes. Por isso, não existe $\lim_{x \to 3} f(x)$.

g)



$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

7. Os gráficos das funções f e g são representados nas figuras 1 e 2, respectivamente:

Figura 1

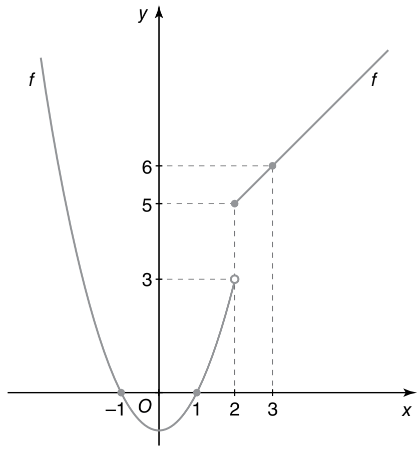
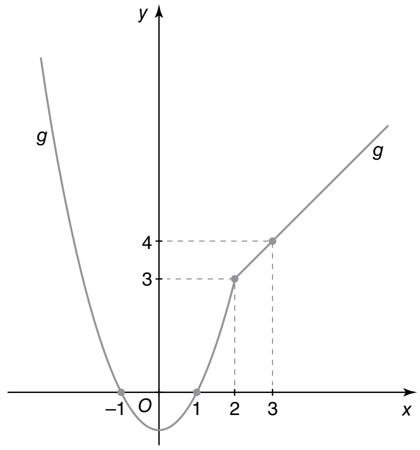


Figura 2



Assim, respondemos aos itens:

a) V, pois, para x tendendo a 2 pela direita, $f(x)$ tende a 5.

b) F, pois, para x tendendo a 2 pela esquerda, $f(x)$ tende a 3.

c) F, pois, $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$.

d) V, pois, para x tendendo a 2 pela direita, $g(x)$ tende a 3.

e) F, pois, para x tendendo a 2 pela esquerda, $g(x)$ tende a 3.

f) V, pois, $\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^-} g(x)$.

8. **a)** $\lim_{x \to 2} x = 2$

b) $\lim_{x \to 3} (x^2 + x) = \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} x =$

$= \left(\lim_{x \to 3} x\right)^2 + \lim_{x \to 3} x = (3)^2 + 3 = 9 + 3 = 12$

c) $\lim_{x \to 2} (x^3 + 6) = \lim_{x \to 2} x^3 + \lim_{x \to 2} 6 =$

$= \left(\lim_{x \to 2} x\right)^3 + 6 = (2)^3 + 6 = 8 + 6 = 14$

d) $\lim_{x \to -1} (x^3 + x^2 - x + 7) =$

$= \lim_{x \to -1} x^3 + \lim_{x \to -1} x^2 - \lim_{x \to -1} x + \lim_{x \to -1} 7 =$

$= \left(\lim_{x \to -1} x\right)^3 + \left(\lim_{x \to -1} x\right)^2 - (-1) + 7 =$

$= (-1)^3 + (-1)^2 + 8 = -1 + 1 + 8 = 8$

e) $\lim_{x \to -2} (2x^3 + 4x^2 - 5) =$

$= \lim_{x \to -2} 2x^3 + \lim_{x \to -2} 4x^2 - \lim_{x \to -2} 5 =$

$= 2 \cdot \lim_{x \to -2} x^3 + 4 \cdot \lim_{x \to -2} x^2 - 5 =$

$= 2 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 - 5 =$

$= 2 \cdot (-8) + 4 \cdot 4 - 5 = -5$

f) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3}{2 + x^2} = \frac{\lim_{x \to 3} x^3}{\lim_{x \to 3} (2 + x^2)} = \frac{\left(\lim_{x \to 3} x\right)^3}{\lim_{x \to 3} 2 + \lim_{x \to 3} x^2} =$

$= \frac{3^3}{2 + \left(\lim_{x \to 3} x\right)^2} = \frac{27}{2 + (3)^2} = \frac{27}{11}$

9. $\lim_{x \to 5} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to 5} g(f(x)) = g\left[\lim_{x \to 5} f(x)\right] =$

$= g(10) = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot 10}{20}\right) + \cos\left(\frac{\pi \cdot 10}{20}\right) =$

$= 1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 1 + 0 = 2$

10. **a)** falsa, pois:

$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = \left(\lim_{x \to 1^-} x\right)^2 = 1^2 = 1 \neq 3$

b) falsa, pois:

$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1$

Como calculado no item **a**, $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 1$

$\therefore \lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^-} g(x)$

c) falsa, pois:

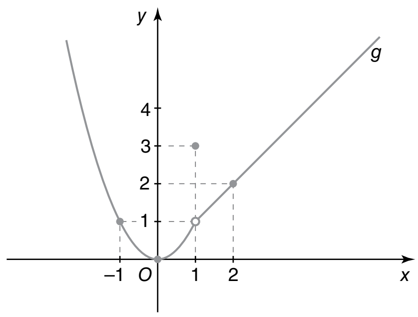
$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 1} g(x) = 1$

E $g(1) = 3$

$\therefore \lim_{x \to 1^-} g(x) \neq g(1)$

d) Falsa, pois, como visto no item **d**, $\lim_{x \to 1^-} g(x) \neq g(1)$; logo, g não é contínua em $x = 1$.

e) Verdadeira, pois, o gráfico da função g é:



Assim, observamos que:

- o gráfico de g, correspondente aos valores de x do intervalo aberto $I_1 =]1, +\infty[$ é uma linha sem interrupções; logo, g é contínua em I_1;
- o gráfico de g, correspondente aos valores de x do intervalo aberto $I_2 =]-\infty, 1[$ é uma linha sem interrupções; logo, g é contínua em I_2.

Logo, g é contínua no conjunto reunião desses intervalos, $I_1 \cup I_2$, ou seja, g é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$.
Alternativa **e**.

11. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{\cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} 3}{\lim\limits_{x \to 0} \cos x} = \dfrac{3}{\cos\left(\lim\limits_{x \to 0} x\right)} =$

$= \dfrac{3}{\cos(0)} = \dfrac{3}{1} = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^3 + 2x)(x^2 - 2x + 1)(x + 3)}{(x^2 + 1)(x + 2)} =$

$= \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 2x) \cdot \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x + 1) \cdot \lim\limits_{x \to 2} (x + 3)}{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) \cdot \lim\limits_{x \to 2} (x + 2)} =$

$= \dfrac{(2^3 + 2 \cdot 2) \cdot (2^2 - 2 \cdot 2 + 1) \cdot (2 + 3)}{(2^2 + 1) \cdot (2 + 2)} =$

$= \dfrac{(8 + 4) \cdot (4 - 4 + 1) \cdot (2 + 3)}{(4 + 1) \cdot (2 + 2)} = \dfrac{(12) \cdot (1) \cdot (5)}{(5) \cdot (4)} = 3$

c) $\lim\limits_{x \to -2} (3x^2 + 5x)^8 = \left(\lim\limits_{x \to -2} (3x^2 + 5x)\right)^8 =$

$= (3 \cdot (-2)^2 + 5(-2))^8 = (3 \cdot 4 - 10)^8 =$

$= (12 - 10)^8 = (2)^8 = 256$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos^6(x) = \left(\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos(x)\right)^6 = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^6 =$

$= \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = \dfrac{8}{64} = \dfrac{1}{8}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{2x^3 - x} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 2} (2x^3 - x)} = \sqrt{2 \cdot 2^3 - 2} =$

$= \sqrt{2 \cdot 8 - 2} = \sqrt{16 - 2} = \sqrt{14}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} |x^5 - 2x + 2| = \left|\lim\limits_{x \to 1} (x^5 - 2x + 2)\right| =$

$= |1^5 - 2 \cdot 1 + 2| = |1 - 2 + 2| = 1$

g) $\lim\limits_{x \to 2} 5^x = 5^2 = 25$

h) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{12}} (\operatorname{sen} x \cdot \cos x) = \left(\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{12}} \operatorname{sen} x\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{12}} \cos x\right) =$

$= \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Sendo $\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen}(a) \cdot \cos(a)$, temos:

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{12}} (\operatorname{sen} x \cdot \cos x) = 2 \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)}{2} =$

$= \dfrac{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{12}\right)}{2} =$

$= \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{8}} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

Sendo $\cos(2a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)$, temos:

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{8}} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \cos\left(2 \cdot \dfrac{\pi}{8}\right) =$

$= \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{12}} \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)}$

Sendo $\operatorname{tg}(2a) = \dfrac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$, temos:

$\lim\limits_{x \to \frac{5\pi}{12}} \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)} =$

$= \operatorname{tg}\left(2 \cdot \dfrac{5\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

12. a) A função f é contínua em $x = 1$ se, e somente se:
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$
Como o cálculo do limite de $f(x)$ para x tendendo a 1 estuda a variação de x em vizinhanças reduzidas de 1 e, portanto, $x \neq 1$, esse limite é igual ao limite de $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ para x tendendo a 1, isto é:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{x - 1} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = 2\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = 3$

Concluímos, então, que f é contínua em $x = 1$ se, e somente se, $f(1) = 3$, ou seja, $a = 3$.

b) A função g é contínua em $x = -2$ se, e somente se:
$\lim\limits_{x \to -2} g(x) = g(-2)$
Como o cálculo do limite de $g(x)$ para x tendendo a -2 estuda a variação de x em vizinhanças reduzidas de -2 e, portanto, $x \neq -2$, esse limite é igual ao limite de $\dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$ para x tendendo a -2, isto é:

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 2x + 4) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 = 12$

Concluímos, então, que g é contínua em $x = -2$ se, e somente se, $g(-2) = 12$, ou seja, $b = 12$.

13. Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, pois no cálculo desse limite consideramos apenas valores de x diferentes de zero:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{0^2} = 0$

Para f não ser contínua em $x = 0$, devemos ter $f(0) \neq \lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Assim, concluímos que o conjunto S dos possíveis valores de k de modo que a função f seja descontínua em $x = 0$ é:
$S = \{k \in \mathbb{R} \mid k \neq 0\}$

14. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 \cdot \operatorname{sen} 3x}{5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{3} \cdot \dfrac{4 \cdot \operatorname{sen} 3x}{5x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{12}{5} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{12}{5} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = \dfrac{12}{5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x}{\text{sen } 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\text{sen } 5x}{6x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{5}{5} \cdot \dfrac{\text{sen } 5x}{6x}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{\text{sen } 5x}{5x}} = \dfrac{1}{\dfrac{5}{6} \cdot 1} = 1 \cdot \dfrac{6}{5} = \dfrac{6}{5}$

c) Como $\dfrac{\pi}{2} - x$ é o ângulo complementar de x, temos $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$.

Logo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{7\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{7 \cdot \text{sen } x}{4x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{7}{4} \cdot \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{7}{4} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{7}{4}$$

d) O complementar de $\dfrac{\pi}{18} - x$ é:

$y = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{18} - x\right) = \dfrac{9\pi - \pi}{18} + x = \dfrac{8\pi}{18} +$

$+ x = \dfrac{4\pi}{9} + x$

Portanto, $\cos\left(\dfrac{\pi}{18} - x\right) = \text{sen}\left(\dfrac{4\pi}{9} + x\right)$.

Assim:

$$\lim_{x \to -\frac{4\pi}{9}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right)}{x + \frac{4\pi}{9}} = \lim_{x \to -\frac{4\pi}{9}} \frac{\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9} + x\right)}{\frac{4\pi}{9} + x} =$$

$$= \lim_{x \to -\frac{4\pi}{9}} \frac{\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9} + x\right)}{\frac{4\pi}{9} + x}$$

Fazendo $\dfrac{4\pi}{9} + x = t$, quando $x \to -\dfrac{4\pi}{9}$, temos $t \to \dfrac{4\pi}{9} - \dfrac{4\pi}{9} = 0$. Logo:

$$\lim_{x \to -\frac{4\pi}{9}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right)}{x + \frac{4\pi}{9}} = \lim_{x \to -\frac{4\pi}{9}} \frac{\text{sen}\left(\frac{4\pi}{9} + x\right)}{\frac{4\pi}{9} + x} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$$

e) Como $\text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$, temos:

$\text{sen } x \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{5}\right) \cdot \cos(x) = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{5}\right)$

Assim:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{5}} \frac{\text{sen } x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot \cos(x)}{5x - \pi} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{5}} \frac{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)}{5x - \pi} = \lim_{x \to \frac{\pi}{5}} \frac{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)}{5\left(x - \frac{\pi}{5}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{5}} \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{5}} \frac{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{5}\right)}$$

Fazendo $x - \dfrac{\pi}{5} = t$, temos $t \to \dfrac{\pi}{5} - \dfrac{\pi}{5} = 0$ quando $x \to \dfrac{\pi}{5}$. Logo:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{5}} \frac{\text{sen } x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot \cos(x)}{5x - \pi} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{5}} \frac{1}{5} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

f) Lembrando que $\text{sen}(a) - \text{sen}(b) =$ $= 2 \cdot \cos\left(\dfrac{a + b}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\dfrac{a - b}{2}\right)$:

$\text{sen } x - \dfrac{1}{2} = \text{sen } x - \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) =$

$= 2 \cdot \cos\left(\dfrac{x + \frac{\pi}{6}}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\dfrac{x - \frac{\pi}{6}}{2}\right) =$

$= 2 \cdot \cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{12}\right) \cdot \text{sen}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right)$

Logo:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{sen } x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \left[2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right] \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{2 \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}\right] =$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)} =$$

$$= \cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}$$

Fazendo $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{12} = t$, temos $t \to \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\pi}{12} = 0$ quando $x \to \dfrac{\pi}{6}$. Logo:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{sen } x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)}{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

g) Lembrando que $\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$:

$$\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$$

Assim:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

Fazendo $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} = t$, temos $t \to \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = 0$ quando $x \to \frac{\pi}{4}$. Logo:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[-2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right] \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}\right] =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[-2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right] \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{\frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}}\right] =$$

$$= -2 \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \text{sen}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} =$$

$$= -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

15. a) Como visto no exercício resolvido 28, temos $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

Assim:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-1 + \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1 - \cos x}{x}\right) = -1 \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x}\right) = 0$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^3\left(\frac{x}{5}\right)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{5}\right)}{x}\right)^3 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{5}{5} \cdot x}\right)^3 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5}}\right)^3 =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{5}\right)}{\frac{x}{5}}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 1^3 = \frac{1}{125}$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{tg } 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{\text{sen } 5x}{\cos 5x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos 5x \cdot x}{\text{sen } 5x} = \lim_{x \to 0} \cos 5x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen } 5x} =$$

$$= \cos 0 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{5}{5} \cdot x}{\text{sen } 5x} = 1 \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{5x}{\text{sen } 5x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{5x}{\text{sen } 5x} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

d) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{\text{tg } 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}}{\frac{\text{sen } 3x}{\cos 3x}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos 3x}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen } x}{\text{sen } 3x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x}{\cos x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos 0}{\cos 0} \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{3}{3} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{\text{sen } x}{\text{sen } 3x}\right) =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{3x}{\text{sen } 3x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{3}{\text{sen } 3x} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

e) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{\text{tg}^4 x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\text{tg } x}\right)^4 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x \cdot \cos x}{\text{sen } x}\right)^4 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\text{sen } x}\right)^4 \cdot \lim_{x \to 0} (\cos x)^4 = 1^4 \cdot 1^4 = 1$$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{\text{tg } 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 3x \cdot \text{sen } x}{\text{sen } 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos 3x \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } 3x}$

Conforme calculado no item **d**, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } 3x} = \frac{1}{3}$.

Assim:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{\text{tg } 3x} = \cos 0 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } 3x} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

g) Pela identidade $\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p - q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p + q}{2}\right)$, temos:

$$\text{sen } 4x - 1 = \text{sen } 4x - \text{sen } \frac{\pi}{2} = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Logo:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \frac{\text{sen } 4x - 1}{2x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \frac{2 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{2x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \frac{\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}{2x - \frac{\pi}{4}} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \left[2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 1 \cdot 2 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

h) Pela identidade $\cos p - \cos q = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p + q}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{p - q}{2}\right)$, temos:

$$\cos 4x - 1 = \cos 4x - \cos 0 = -2 \cdot \text{sen}\left(\frac{4x + 0}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{4x - 0}{2}\right) = -2 \text{ sen}^2 2x$$

Logo:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4x - 1}{2x - \pi} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \text{ sen}^2 2x}{2x - \pi} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } 2x}{2x - \pi} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (-2 \text{ sen } 2x) =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\text{sen } (2x - \pi)}{2x - \pi} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (-2 \text{ sen } 2x) = -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } (2x - \pi)}{2x - \pi} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (-2 \text{ sen } 2x) =$$

$$= -1 \cdot \left(-2 \text{ sen } \frac{2\pi}{2}\right) = 0$$

16. a) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{7}} \frac{\text{sen } x - \text{sen } \frac{\pi}{7}}{x - \frac{\pi}{7}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{7}} \frac{2 \text{ sen}\left(\frac{x - \frac{\pi}{7}}{2}\right) \cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{7}}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{7}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{7}} \cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{7}}{2}\right) \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{7}} \frac{\text{sen}\left(\frac{x - \frac{\pi}{7}}{2}\right)}{\frac{x - \frac{\pi}{7}}{2}} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7}}{2}\right) \cdot 1 = \cos \frac{\pi}{7} \approx 0{,}900969$$

b) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{9}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{9}}{x - \frac{\pi}{9}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{9}} \frac{-2 \text{ sen}\left(\frac{x + \frac{\pi}{9}}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{x - \frac{\pi}{9}}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{9}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{9}} \left[-\text{sen}\left(\frac{x + \frac{\pi}{9}}{2}\right)\right] \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{9}} \frac{\text{sen}\left(\frac{x - \frac{\pi}{9}}{2}\right)}{\frac{x - \frac{\pi}{9}}{2}} = -\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9}}{2}\right) \cdot 1 = -\text{sen } \frac{\pi}{9} = -0{,}342020$$

17. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sec x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\dfrac{1}{\cos x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\cos x - 1}{\cos x}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{(\cos x - 1)}{\cos x}\cdot\dfrac{(\cos x + 1)}{(\cos x + 1)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos^2 x - 1)}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{(\cos x + 1)}\cdot\dfrac{1}{x}$

Lembrando que $\text{sen}^2\, a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a - 1 = -\text{sen}^2\, a$, temos:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sec x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\text{sen}^2\, x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{(\cos x + 1)\cdot x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}\cdot\dfrac{-\text{sen}\, x}{\cos x(\cos x + 1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\text{sen}\, x}{\cos x(\cos x + 1)} =$

$= 1\cdot\dfrac{-\text{sen}\, 0}{\cos 0(\cos 0 + 1)} = \dfrac{0}{1(1+1)} = \dfrac{0}{2} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\cos x} - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1-\cos x}{\cos x}}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{(1-\cos x)}{\cos x}\cdot\dfrac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos^2 x)}{\cos x(1+\cos x)}\cdot\dfrac{1}{x^2}$

Lembrando que $\text{sen}^2\, a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\, a = 1 - \cos^2 a$, temos:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\, x}{(\cos x)(1+\cos x)}\cdot\dfrac{1}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(\cos x)(1+\cos x)}\cdot\dfrac{\text{sen}^2\, x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(\cos x)(1+\cos x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\, x}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(\cos x)(1+\cos x)}\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{(\cos 0)(1+\cos 0)}\cdot(1)^2 = \dfrac{1}{1(1+1)}\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

c) Lembrando que $\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2\, x$, temos:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1-2\,\text{sen}^2\, x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-1+2\,\text{sen}^2\, x}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\,\text{sen}^2\, x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cdot\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\, x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}\right)^2 = 2\cdot(1)^2 = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3x}{\sqrt{x+9}-3} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{3x}{3x}\cdot\dfrac{\text{sen}\, 3x}{\sqrt{x+9}-3}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{\text{sen}\, 3x}{3x}\cdot\dfrac{3x}{\sqrt{x+9}-3}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{x+9}-3} = 1\cdot\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{3x}{\left(\sqrt{x+9}-3\right)}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x\cdot\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x+9-9} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x\cdot\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} 3\cdot\left(\sqrt{x+9}+3\right) = 3\cdot\left(\sqrt{0+9}+3\right) = 3\cdot(3+3) = 18$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\, x - \text{sen}\, x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} - \text{sen}\, x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\text{sen}\, x - \text{sen}\, x\cdot\cos x}{\cos x}}{x^3} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left[\left(\dfrac{\text{sen}\, x - \text{sen}\, x\cdot\cos x}{\cos x}\right)\cdot\dfrac{1}{x^3}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{\text{sen}\, x\cdot(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{\text{sen}\, x}{x}\cdot\dfrac{(1-\cos x)}{x^2\cdot\cos x}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{(1-\cos x)}{x^2\cdot\cos x}\cdot\dfrac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}\right] = 1\cdot\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot\cos x}$

Lembrando que $\text{sen}^2\, a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\, a = 1 - \cos^2 a$:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\, x - \text{sen}\, x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\, x}{x^2\cdot\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\, x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} =$

$= \left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = (1)^2\cdot\dfrac{1}{\cos 0} = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{\text{sen } x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{\text{sen } x} - \dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x} - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{\text{sen } x} = 1 - \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 - 1 = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x \cdot \text{sen } x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - (1 - 2\,\text{sen}^2\, x)}{x \cdot \text{sen } x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - 1 + 2\,\text{sen}^2\, x}{x \cdot \text{sen } x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\,\text{sen}^2\, x}{x \cdot \text{sen } x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\,\text{sen } x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 2 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 2 \cdot 1 = 2$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 5x + \text{sen } 3x}{x \cdot \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen } 5x}{x \cdot \cos x} + \dfrac{\text{sen } 3x}{x \cdot \cos x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5}{5} \cdot \dfrac{\text{sen } 5x}{x \cdot \cos x} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{3} \cdot \dfrac{\text{sen } 3x}{x \cdot \cos x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{5}{\cos x} \cdot \dfrac{\text{sen } 5x}{5x} \right) + \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{3}{\cos x} \cdot \dfrac{\text{sen } 3x}{3x} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5}{\cos x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 5x}{5x} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{\cos x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{3x} = \dfrac{5}{\cos 0} \cdot 1 + \dfrac{3}{\cos 0} \cdot 1 = 5 + 3 = 8$

18. a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos x}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos x\right)}{x - \frac{\pi}{3}} =$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\left(-2\,\text{sen}\,\dfrac{\frac{\pi}{3} + x}{2} \cdot \text{sen}\,\dfrac{\frac{\pi}{3} - x}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} (-2) \cdot \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \text{sen}\,\dfrac{\frac{\pi}{3} + x}{2} \cdot \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\text{sen}\,\dfrac{\frac{\pi}{3} - x}{2}}{\dfrac{x - \frac{\pi}{3}}{2}} =$

$= -2 \cdot \text{sen}\,\dfrac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}}{2} \cdot 1 = -2 \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{3} \cdot 1 = -\sqrt{3}$

b) Fazendo a mudança de variável: arcsen $x = t$, obtemos sen $t = x$. Assim, se x tende a zero, temos que t tende a zero. Logo:

$$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\,\text{arcsen } x}{3x} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2t}{3\,\text{sen } t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{2}{3} \cdot \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\text{sen } t} = \dfrac{2}{3} \cdot 1 = \dfrac{2}{3}$$

Exercícios contextualizados

19. a) Temos que 2 m = 20 dm e 1 m = 10 dm. Assim, sendo h a medida, em decímetro, da altura atingida pela superfície da água em 1 hora, temos:

$20 \cdot 10 \cdot h = 1.200 \Rightarrow h = 6$

Logo, em t horas, a altura, em decímetro, atingida pela superfície da água é dada por $h(t) = 6t$.

b) A taxa média m de variação de h em relação a t, quando t varia de 0 a 2 horas, é dada por:

$m = \dfrac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \dfrac{6 \cdot 2 - 6 \cdot 0}{2 - 0} = 6$

Portanto a taxa média de variação é de 6 dm/h.

20. Sendo $f(t) = 21 \cdot \log_8 (t + 1)$, temos:

$t_1 = 3 \Rightarrow h(t_1) = h(3) = 21 \cdot \log_8 (3 + 1) = 21 \cdot \log_8 4$

$t_2 = 7 \Rightarrow h(t_2) = h(7) = 21 \cdot \log_8 (7 + 1) = 21 \cdot \log_8 8$

Assim, a taxa média de variação da altura em relação ao tempo no intervalo [3, 7] é:

$m = \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{21 \cdot \log_8 8 - 21 \cdot \log_8 4}{7 - 3} = \dfrac{21 \cdot (\log_8 8 - \log_8 4)}{4} = \dfrac{21 \cdot \log_8 \left(\frac{8}{4}\right)}{4} =$

$= \dfrac{21 \cdot (\log_8 2)}{4}$

Como $\log_8 2 = \dfrac{1}{3}$, temos:

$m = \dfrac{21}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$

Alternativa **c**.

21. a) A velocidade média v_m, em km/min, no intervalo de tempo de 0 a 3 minutos é dada por:

$v_m = \dfrac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = \dfrac{17 - 2}{3 - 0} = 5$

Ou seja: $v_m = 5$ km/min

b) A aceleração média a_m, em km/min², no intervalo de tempo de 0 a 3 minutos é dada por:

$$a_m = \frac{v(3) - v(0)}{3 - 0} = \frac{8 - 2}{3 - 0} = 2$$

Ou seja: $a_m = 2$ km/min²

c) A velocidade média V_M, em km/min, no intervalo de tempo de 1 a 3 minutos é dada por:

$$V_M = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} =$$

$$= \frac{3^2 + 2 \cdot 3 + 2 - (1^2 + 2 \cdot 1 + 2)}{3 - 1} = 6$$

Ou seja: $V_M = 6$ km/min

d) A equação do segmento de reta $\overline{CD}$ é $v(t) = 2t + 2$, com $0 \leqslant t \leqslant 3$. Assim, a aceleração média A_M no intervalo de tempo de 1 a 3 minutos é dada por:

$$A_M = \frac{v(3) - v(1)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot 3 + 2 - (2 \cdot 1 + 2)}{3 - 1} = 2$$

Ou seja: $A_M = 2$ km/min²

e) $$\lim_{t \to 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} =$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t^2 + 2t + 2 - (1^2 + 2 \cdot 1 + 2)}{t - 1} =$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{t^2 + 2t - 3}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{(t - 1)(t + 3)}{t - 1} =$$

$$= \lim_{t \to 1} (t + 3) = 1 + 3 = 4$$

Esse limite representa a velocidade instantânea do veículo no instante 1 min, ou seja, nesse instante, a velocidade do veículo era de 4 km/min.

f) $$\lim_{t \to 1} \frac{v(t) - v(1)}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{2t + 2 - (2 \cdot 1 + 2)}{t - 1} =$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{2t - 2}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{2(t - 1)}{t - 1} = 2$$

Esse limite representa a aceleração instantânea do veículo no instante 1 min, ou seja, nesse instante, a aceleração do veículo era de 2 km/min².

22. a) Sendo 0 e 10 os instantes, em minuto, em que se iniciou e se terminou o resfriamento da barra, respectivamente, temos que para qualquer valor da variável t, com $0 \leqslant t \leqslant 10$, existe $T = f(t)$ e T assume todas as medidas, em grau Celsius, do intervalo [40, 50]. Assim, concluímos que a função $T = f(t)$ é contínua em todo o seu domínio [0, 10].

Outra explicação possível:
O gráfico da função $T = f(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 10$ é uma linha sem interrupções; logo, a função $T = f(t)$ é contínua em todo o seu domínio [0, 10].

Outra explicação possível:
As condições seguintes garantem que a função $T = f(t)$ é contínua em todo o seu domínio [0, 10].

- Para qualquer valor t_0, com $0 < t_0 < 10$, temos que: $\lim\limits_{x \to t_0} f(t) = f(t_0)$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(t) = f(0)$
- $\lim\limits_{x \to 10^-} f(t) = f(10)$

b) Indicando por 0 o instante inicial do mês de janeiro e por 2 o instante final do mês de fevereiro, vamos indicar por $p = f(t)$ a função que expressa o preço do tomate, em real, em função do tempo, em mês.

Assim, temos que para qualquer valor da variável t, com $0 \leqslant t \leqslant 2$, existe $p = f(t)$, porém p não assume todos os preços de R$ 4,50 a R$ 4,80; por exemplo, p não assume o preço R$ 4,70.
Logo, a função p não é contínua em seu domínio [4,50; 4,80].

Pré-requisitos para o capítulo 10

1. a) Para $x = 1$, temos $y_A = 1^2 = 1$
Para $x = t$, temos $y_B = t^2$

b) O coeficiente angular m_{AB} da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é dado por:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{t^2 - 1}{t - 1} = \frac{(t + 1)(t - 1)}{t - 1} \Rightarrow$$

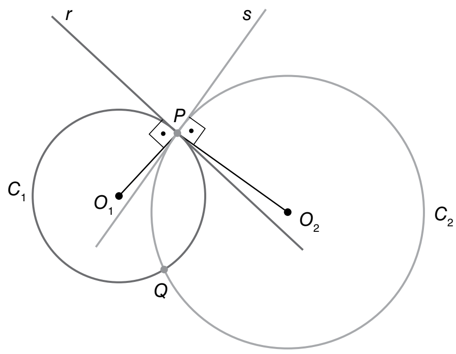
$$\Rightarrow m_{AB} = t + 1$$

c) $$\lim_{t \to 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 1}{t - 1} =$$

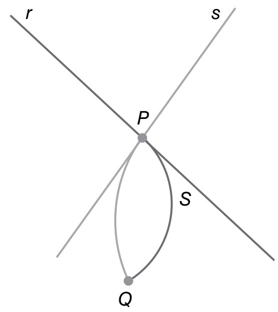
$$= \lim_{t \to 1} \frac{(t + 1)(t - 1)}{t - 1} = \lim_{t \to 1} (t + 1) = 1 + 1 = 2$$

d) Esse limite é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto de abscissa 1, isto é, no ponto A.

2. a) Sendo O_1 e O_2 os centros das circunferências C_1 e C_2, respectivamente, temos:



b) Não, porque o ponto P admitiria duas tangentes (o mesmo aconteceria com o ponto Q).



3. a) Indicando a lei de associação da função f por $y = 4x - 5$, obtemos a inversa de f do seguinte modo:

- permutamos x e y, obtendo: $x = 4y - 5$;
- isolamos y na equação anterior, obtendo: $y = \frac{x + 5}{4}$

Concluímos, então, que a inversa de f é a função:

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{4}$$

b) Indicando a lei de associação da função g por $y = \frac{2x+1}{x-4}$, obtemos a inversa de g do seguinte modo:

- permutamos x e y, obtendo: $x = \frac{2y+1}{y-4}$;
- isolamos y na equação anterior, obtendo: $y = \frac{4x+1}{x-2}$

Concluímos, então, que a inversa de g é a função: $g^{-1}(x) = \frac{4x+1}{x-2}$

4. a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2+1)^2 + 4(x^2+1) \Rightarrow (f \circ g)(x) = 2x^4 + 8x^2 + 6$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x^2+4x)^2 + 1 \Rightarrow (g \circ f)(x) = 4x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 1$

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. $v = \lim\limits_{t \to \sqrt{10}} \frac{S(t) - S(\sqrt{10})}{t - \sqrt{10}} = \lim\limits_{t \to \sqrt{10}} \frac{5t^2 - 50}{t - \sqrt{10}} = \lim\limits_{t \to \sqrt{10}} \frac{5(t^2 - 10)}{t - \sqrt{10}} = \lim\limits_{t \to \sqrt{10}} \frac{5(t + \sqrt{10})(t - \sqrt{10})}{t - \sqrt{10}} =$

$= \lim\limits_{t \to \sqrt{10}} 5(t + \sqrt{10}) = 5(\sqrt{10} + \sqrt{10}) = 10\sqrt{10}$

Ou seja, o carro atingiu a superfície do mar à velocidade de $10\sqrt{10}$ m/s ou, aproximadamente, 31,62 m/s.

2. A velocidade 31,62 m/s equivale a 113,832 km/h. Logo, o carro atingiu a superfície do mar à velocidade de 113,832 km/h, aproximadamente.

3. Dos estudos de Cinemática, temos:

$$\begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} & \text{(I)} \\ v = v_0 + at & \text{(II)} \end{cases}$$

em que o espaço inicial s_0 é 0 (zero), o espaço final s é 50 m, a velocidade inicial v_0 é 0 (zero) e a aceleração a é 10 m/s^2. Assim, de (I), obtemos:

$50 = 5t^2 \Rightarrow t = \sqrt{10}$

Ou seja, o tempo de queda do automóvel foi de $\sqrt{10}$ s.

Substituindo v_0, a e t por 0, 10 e $\sqrt{10}$, em (II), concluímos:

$v = 0 + 10\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$

Ou seja, a velocidade com que o carro atingiu a superfície do mar foi 31,62 m/s, aproximadamente.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: A resolução está errada, pois a propriedade $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$ pressupõe que existam e sejam finitos os limites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$; logo, não se pode aplicá-la se essas condições não estiverem asseguradas. Assim, pode existir e ser finito o limite $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ mesmo que não existam $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Resolução correta:

	0	
$f(x)$	$x + 5$	$5x$
$g(x)$	$5x$	$x + 5$
$f(x) + g(x)$	$6x + 5$	$6x + 5$

Assim, a função $h(x) = f(x) + g(x)$ é contínua em seu domínio $\mathbb{R}$ e pode ser representada por: $h(x) = 6x + 5$

Logo:

$\lim\limits_{x \to 0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to 0} (6x + 5) = 6 \cdot 0 + 5 = 5$