Exercícios Dissertativos

1. (2000)

a) Esboce, para x real, o gráfico da função $f(x) = |x-2| + |2x+1| - x - 6$. O símbolo $|a|$ indica o valor absoluto de um número real a e é definido por $|a| = a$, se $a \geq 0$ e $|a| = -a$, se $a < 0$.

b) Para que valores reais de x, $f(x) > 2x + 2$.

---

2. (2004)

Seja $m \geq 0$ um número real e sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ e $g(x) = mx + 2m$.

a) Esboçar no plano cartesiano representado ao lado, os gráficos de f e g quando $m = \frac{1}{4}$ e $m = 1$.

b) Determinar as raízes de $f(x) = g(x)$ quando $m = \frac{1}{2}$.

c) Determinar, em função de m, o número de raízes da equação $f(x) = g(x)$.

---

3. (2005)

Seja $f(x) = ax^2 + (1-a)x + 1$, onde a é um número real diferente de zero.

Determine os valores de a para os quais as raízes da equação $f(x) = 0$ são reais e o número $x = 3$ pertence ao intervalo fechado compreendido entre as raízes.

---

4. (2006)

Uma função f satisfaz a identidade $f(ax) = af(x)$ para todos os números reais a e x. Além disso, sabe-se que $f(4) = 2$. Considere ainda a função $g(x) = f(x-1) + 1$ para todo o número real x.

a) Calcule $g(3)$

b) Determine $f(x)$, para todo x real.

c) Resolva a equação $g(x) = 8$.

---

5. (2007)

a) represente, no sistema de coordenadas desenhado na folha de respostas ao lado, os gráficos das funções $f(x) = |4 - x^2|$ e $g(x) = \frac{x+7}{2}$

b) Resolva a inequação $|4 - x^2| \leq \frac{x+7}{2}$

6. (2009)

Para cada número real m, considere a função quadrática $f(x) = x^2 + mx + 2$.

Nessas condições:

a) Determine em função de m, as coordenadas do vértice da parábola de equação $y = f(x)$.

b) Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais a imagem de f contém o conjunto $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$.

c) Determine o valor de m para o qual a imagem de f é igual ao conjunto $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$ e, além disso, f é crescente no conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

d) Encontre, para a função determinada pelo valor de m do item c) e para cada $y \geq 2$, o único valor de $x \geq 0$ tal que $f(x) = y$

---

7. (2010)

Determine a solução (x, y), $y > 1$, para o sistema de equações

$$\begin{cases} \log_y(9x - 35) = 6 \\ \log_{3y}(27x - 81) = 3 \end{cases}$$

---

8. (2011)

Determine o conjunto de todos os números reais x para os quais vale a desigualdade

$$|\log_{16}\left(1 - x^2\right) - \log_4(1 - x)| < \frac{1}{2}$$

---

9. (2012)

Determine para quais valores reais de x é verdadeira a desigualdade

$$|x^2 - 10x + 21| \leq |3x - 15|$$

---

10. (2014) Dados m e n inteiros, considere a função f definida por

$$f(x) = 2 - \frac{m}{x + n}$$

para $x \neq -n$.

(a) No caso em que *m=n=2*, mostre que a igualdade $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ se verifica.

(b) No caso em que *m=n=2*, ache as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados.

(c) No caso em que *m=n=2*, esboce a parte do gráfico de f em que $x > -2$, levando em conta as informações obtidas nos itens (a) e (b). Utilize o par de eixos dado na página de respostas.

(d) Existe um par de inteiros $(m, n) \neq (2, 2)$ tal que a condição $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ continue sendo satisfeita?

---

11. (2015) Resolva as inequações:

(a) $x^3 - x^2 - 6x > 0$;

(b) $log_2(x^3 - x^2 - 6x) \leq 2$.

---

12. (2015) A função f está definida da seguinte maneira: para cada inteiro **ímpar** n,

$$f(x) = \begin{cases} x - (n-1), \text{ se } n-1 \leq x \leq n \\ n+1-x, \text{ se } n \leq x \leq n+1 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico f para $0 \leq x \leq 6$.

(b) Encontre os valores de x, $0 \leq x \leq 6$, tais que $f(x) = \dfrac{1}{5}$.

---

13. (2016) Considere as funções f e g definidas por

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\log_2(x-1) \\ g(x) &= \log_2\left(1 - \frac{x}{4}\right) \end{aligned}$$

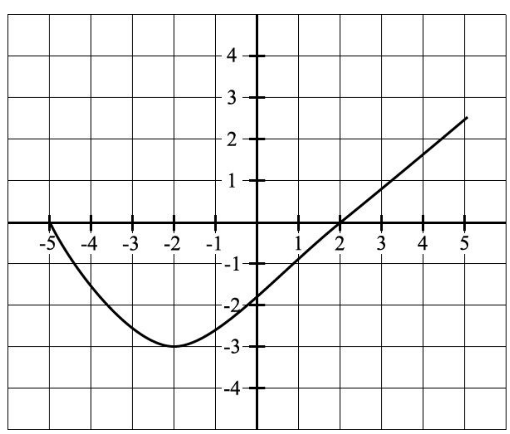
a) Calcule $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(2)$, $f(3)$, $g(-4)$, $g(0)$ e $g(2)$.

b) Encontre x, $1 < x < 4$, tal que $f(x) = g(x)$.

c) Levando em conta os resultados dos itens a) e b), esboce os gráficos de f e de g no sistema cartesiano impresso na página de resposta.

---

14. (2016) A figura abaixo representa o gráfico de uma função $f : [-5, 5]$. Note que $f(-5) = f(2) = 0$. A restrição de f ao intervalo $[-5, 0]$ tem como gráfico parte de uma parábola com vértice no ponto $(-2, -3)$: restrita ao intervalo $[0, 5]$, f tem como gráfico um segmento de reta.



a) Calcule $f(-1)$ e $f(3)$.
Usando os sistemas de eixos da folha de respostas, esboce

b) o gráfico de $g(x) = |f(x)|$, $x \in [-5, 5]$;

c) o gráfico de $h(x) = f(|x|)$, $x \in [-5, 5]$;
