OBJETIVO

ITA
Matemática

5

MÓDULO 17

Radiciações e Equações

1. Mostre que
$\sqrt{31 + 8\sqrt{15}} + \sqrt{31 - 8\sqrt{15}}$ é múltiplo de 4.

2.

a) Escreva $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ como uma soma de radicais simples.

b) Escreva $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}$ como uma diferença de radicais simples.

3. O valor de k para que uma das raízes da equação $x^2 - kx + 18 = 0$ seja $\sqrt{19 + 6\sqrt{10}} - \sqrt{19 - 6\sqrt{10}}$ é:

a) 7 b) 9 c) 12 d) 15 e) 19

4. Se **a** e **b** (a > b) são as raízes da equação $x^2 - \sqrt{9 + 6\sqrt{2}} \,.\, x + 3\sqrt{2} = 0$, então:

a) $a \,.\, b = \sqrt{3}$ b) $a^2 + b^2 = 3$

c) $a^2 - b^2 = 3$ d) $a + b = \sqrt{5}$

e) $a - b = 2$

5. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $(a + b + c)x^2 - (2a + b + c)x + a = 0$, sabendo-se que $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$.

MÓDULO 18

Equações

1. Sejam **a**, **b** e **c** números reais não-nulos. Se 1 é raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$, assinale a afirmação falsa:

a) $a + b + c = 0$ b) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

c) $b^2 \geq 4ac$ d) a outra raiz é c

e) uma das anteriores é falsa.

2. Resolver, em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o sistema

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x + xy + y = 19 \end{cases}$$

3. A soma e o produto das raízes positivas da equação $(x^2 + 2x - 12)^2 - 9x^3 + 108x = 0$ são respectivamente iguais a:

a) 8 e 12 b) 10 e 24 c) 12 e 16
d) 18 e 36 e) 16 e 24

4. As equações $x^3 - 19x + a = 0$ e $x^3 - 28x + a + 18 = 0$ têm uma raiz comum. Determinar o conjunto-verdade de cada uma delas.

MÓDULO 19

Equações

1. **(ITA)** – Dada a equação
$x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$, em que m é uma constante real, considere as seguintes afirmações:

I. Se $m \in]-6,6[$, então existe apenas uma raiz real.
II. Se $m = -6$ ou $m = +6$, então existe raiz com multiplicidade 2.
III. $\forall m \in R$, todas as raízes são reais.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I b) II c) III
d) II e III e) I e II

2. **(ITA)** – Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que

a) $x \in]0, 2[$.

b) x é racional.

c) $\sqrt{2x}$ é irracional.

d) x^2 é irracional.

e) $x \in]2; 3[$.

3. **(IME)** – Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + (m - 15)x + m = 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são números inteiros, determine o conjunto de valores possíveis para m.

4. Se **m** e **n** são raízes reais estritamente positivas da equação $x^2 - bx + 1 = 0$, então é falso afirmar que:

a) $b \geq 2$

b) $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geq 2$

c) $0 < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 2$

d) $(m + n) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = b^2 \geq 4$

e) uma das anteriores é falsa.

5. **(ITA)** – O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é

a) 2499. b) 2501. c) 2500.

d) 3600. e) 4900.

MÓDULO 20

Equações

1. **(ITA)** – Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos

$$(x + a)^3 - (x + b)^3.$$

Neste caso, $\left| a + |b| - c \right|$ é igual a

a) 104. b) 114. c) 124. d) 134. e) 144.

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação

$$|x|^{\frac{6}{5}} - 26 \,.\, |x|^{\frac{3}{5}} - 27 = 0$$

3. **(EPUSP)** – Sendo a a hipotenusa, b e c os catetos de um triângulo retângulo, a equação $a^2x^2 - b^2x - c^2 = 0$:

a) tem uma raiz igual a – 1 e outra entre 0 e 1;
b) tem raízes imaginárias;
c) tem uma raiz igual a 1 e outra entre 0 e –1;
d) não admite raízes racionais;
e) nenhuma das respostas anteriores.

4. Determine os valores de **a** para que as equações $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 + x + a = 0$ tenha pelo menos uma raiz em comum.

5. Para que valores de a, b e c inteiros o polinômio $(x - a)(x - 10) + 1$ pode ser fatorado como o produto de $(x + b)(x + c)$?

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 17

1. O valor de $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}$ é:

a) 1 b) $\sqrt{6}$ c) 3 d) 7 e) $\sqrt{12}$

2. A soma $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$ vale:

a) $\sqrt{100} - \sqrt{2}$ b) 9 c) $10 + \sqrt{2}$
d) $9 + \sqrt{2}$ e) $\sqrt{2} - \sqrt{99}$

3. Obter uma equação do 2º grau, de coeficientes inteiros, cujas raízes sejam o quadrado das raízes da equação $5x^2 - 7x + 1 = 0$.

■ MÓDULO 18

1. As raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, aumentadas de uma unidade, são raízes da equação $x^2 - px + 2pq = 0$. Determine **p**, **q** e o conjunto-verdade de cada equação.

2. As equações $x^3 - px + 2q = 0$ e $x^3 - qx + 2p = 0$, com $p \neq q$, têm uma raiz comum. Determine esta raiz e a soma $p + q$.

3. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação
$(x^2 - 3x + 18)^2 - 14x^3 + 90x^2 - 252x = 0$.

■ MÓDULO 19

1. **(ITA)** – Sabendo-se que as soluções da equação $|x|^2 - |x| - 6 = 0$ são raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$, pode-se afirmar que:

a) $a = 1$ e $b = 6$ b) $a = 0$ e $b = -6$
c) $a = 1$ e $b = -6$ d) $a = 0$ e $b = -9$
e) não existem **a** e **b** tais que $x^2 - ax + b = 0$ contenha as raízes da equação dada.

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\dfrac{x+a}{x-a} + \dfrac{x+b}{x-b} = 2$, sabendo-se que $\{a; b\} \subset \mathbb{R}^*$ e $a \neq b$. Mostre que o inverso da raiz é a média aritmética dos inversos de **a** e **b**.

■ MÓDULO 20

1. **(EPUSP)** – Os trinômios $y = ax^2 + bx + c$ tais que $a + b + c = 0$:
a) tem em comum o ponto do eixo x;
b) tem em comum o ponto do eixo y;
c) tem em comum a origem;
d) não tem ponto em comum;
e) Nada disso.

2. A soma dos quadrados com a soma dos cubos das raízes da equação $x^2 - 3x + 5 = 0$ é:
a) 18 b) 19 c) 20 d) – 18 e) – 19

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 17

1) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}} = x \Rightarrow \sqrt{6 + x} = x$ e $x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$ e $x > 0 \Rightarrow x = 3$

Resposta: C

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} = \dfrac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{1})} \cdot \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{1})}{(\sqrt{2}-\sqrt{1})} = \sqrt{2} - \sqrt{1}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \cdot \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

De forma análoga

$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})} \cdot \dfrac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})} =$

$= \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

Assim

$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \ldots +$

$+ \dfrac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \ldots +$

$+ \sqrt{100} - \sqrt{99} = \sqrt{100} - \sqrt{1} = 9$

Resposta: B

3) Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação

$5x^2 - 7x + 1 = 0$, as raízes da nova equação serão x_1^2 e x_2^2.

$S = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 . x_2 =$

$= \left(-\frac{-7}{5}\right)^2 - 2 . \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{39}{25}$

$P = x_1^2 . x_2^2 = (x_1 . x_2)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{25}\right)$

Uma equação nestas condições é

$x^2 - \frac{39}{25} x + \frac{1}{25} = 0$; outra é $25x^2 - 39x + 1 = 0$.

■ MÓDULO 18

1) Sendo x_1 e x_2 as raízes da primeira equação, e $(x_1 + 1)$ e $(x_2 + 1)$ as raízes da segunda equação, tem-se:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 . x_2 = q \\ (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = p \\ (x_1 + 1) . (x_2 + 1) = 2pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 . x_2 = q \\ p = 1 \\ q - p + 1 = 2pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = 0 \end{cases}$$

As equações são $x^2 + x = 0$ e $x^2 - x = 0$, cujos conjuntos-verdade são, respectivamente,
$V_1 = \{-1; 0\}$ e $V_2 = \{0; 1\}$

2) Sendo α a raiz comum das equações
$x^3 - px + 2q = 0$ e $x^3 - qx + 2p = 0$, tem-se:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^3 - p\alpha + 2q = 0 \\ \alpha^3 - q\alpha + 2p = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (p - q)\ \alpha = 2q - 2p \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -2}$, pois $p \neq q$

Substituindo em uma das equações, tem-se:

$(-2)^3 - q\ (-2) + 2p = 0 \Rightarrow \boxed{p + q = 4}$

3) $(x^2 - 3x + 18)^2 - 14x^3 + 90x^2 - 252x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 18)^2 - 14x(x^2 + 18) + 90x^2 = 0.$
Fazendo $x^2 + 18 = y$, temos
$(y - 3x)^2 - 14xy + 90x^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^2 - 6xy + 9x^2 - 14xy + 90x^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^2 - 20xy + 99x^2 = 0 \Leftrightarrow y = 9x$ ou $y = 11x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 18 = 9x$ ou $x^2 + 18 = 11x \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$ ou
$x^2 - 11x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 3, x = 6$ ou $x = 9$
Resposta: $V = \{2; 3; 6; 9\}$

■ MÓDULO 19

1) $|x|^2 - |x| - 6 = 0 \Leftrightarrow |x| = -2$ ou
$|x| = 3 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 3$
$S = (-3) + 3 = a \Leftrightarrow a = 0$
$P = (-3) . 3 = b \Leftrightarrow b = -9$
Resposta: D

2) $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x + b}{x - b} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + a)\ (x - b) + (x + b)\ (x - a) = 2(x - a)\ (x - b)$ e
$x - a \neq 0$ e $x - b \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ax + bx = 2ab$ e $x \neq a$ e $x \neq b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2ab}{a + b} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{a + b}{2ab} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$ cqd.

■ MÓDULO 20

1) RESOLUÇÃO 1:
1 é raiz do trinômio, pois
$y = a . 1^2 + b . 1 + c = a + b + c = 0.$

A outra raiz é $\frac{c}{a}$. Assim, o gráficos que representam os trinômios passa pelo ponto (1; 0) do eixo x.
Resposta: A

RESOLUÇÃO 2:
Sendo $a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$
$y = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx - a - b =$
$= a(x^2 - 1) + b(x - 1) = a(x + 1)(x - 1) + b(x - 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = (x - 1) . (ax + a + b)$
O ponto (1; 0) pertence aos gráficos dos trinômios, pois $y = (1 - 1) . (a . 1 + a + b) = 0$, para quaisquer valores de a e b.
Resposta: A

2) Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação, temos:
$x_1 + x_2 = 3$ e $x_1 . x_2 = 5$
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (3)^2 - 2 . 5 = -1$
$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) . (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$
$= (3) . (-1 - 5) = -18$
Resposta: D