EXTENSIVO 2021.2

MATEMÁTICA PARA EEAR

GEOMETRIA PLANA IV

Prof. Victor So

AULA 05

21 DE OUTUBRO DE 2020

Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá,

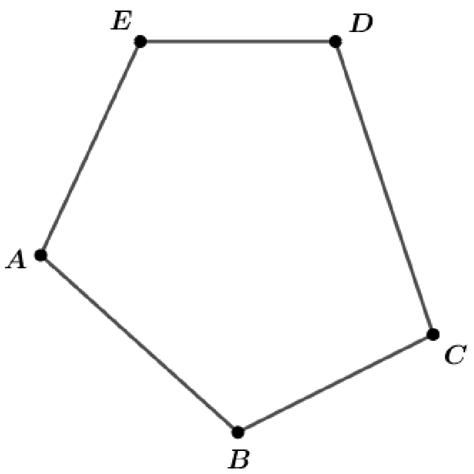
Vamos finalizar o estudo da geometria plana. Nessa aula, veremos os conceitos de polígonos e áreas de figuras planas. As provas militares adoram cobrar questões envolvendo áreas geométricas. Devido à alta taxa de incidência dos tópicos dessa aula, resolveremos muitos exercícios para fixar esse conteúdo.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

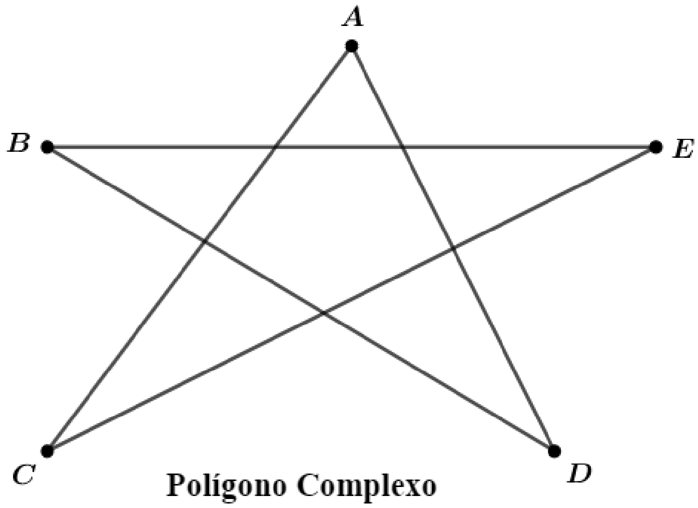
1. POLÍGONOS

Polígonos são figuras geométricas planas e fechadas que são formadas por segmentos de retas chamados de lados. A condição de um polígono é $n \geq 3$, sendo n seu número de lados.

Podemos ter polígonos simples ou complexos. Os polígonos são simples quando seus lados não se cruzam, caso contrário, eles são complexos. Veja:

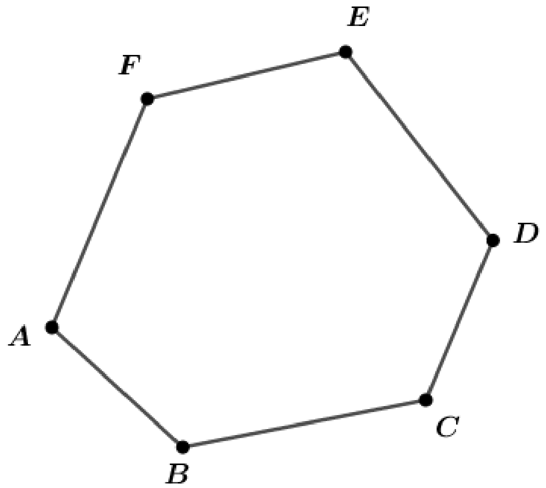


Polígono Simples

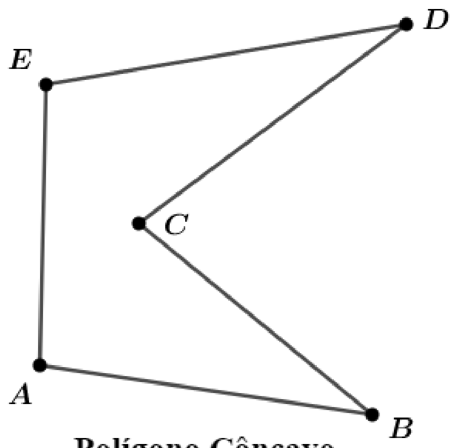


Polígono Complexo

Polígonos também podem ser convexos ou côncavos.



Polígono Convexo



Polígono Côncavo

1.1. POLÍGONOS SIMPLES CONVEXOS

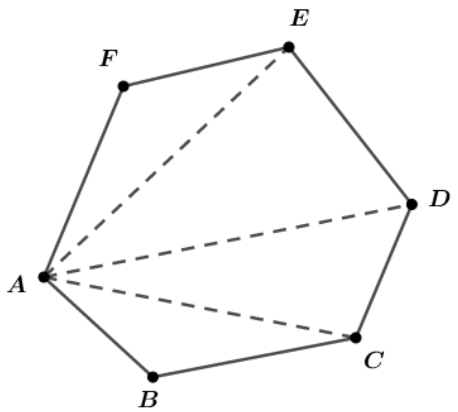
1.1.1. CLASSIFICAÇÃO

Um polígono recebe as seguintes denominações dependendo do seu número de lados:

Número de Lados	Nome do Polígono	Número de Lados	Nome do Polígono
3	Triângulo	**9**	Eneágono
4	Quadrado	**10**	Decágono
5	Pentágono	**11**	Undecágono
6	Hexágono	**12**	Dodecágono
7	Heptágono	**15**	Pentadecágono
8	Octógono	**20**	Icoságono

1.1.2. NÚMERO DE DIAGONAIS

A diagonal de um polígono convexo é o segmento de reta que liga dois vértices não adjacentes. Exemplo:



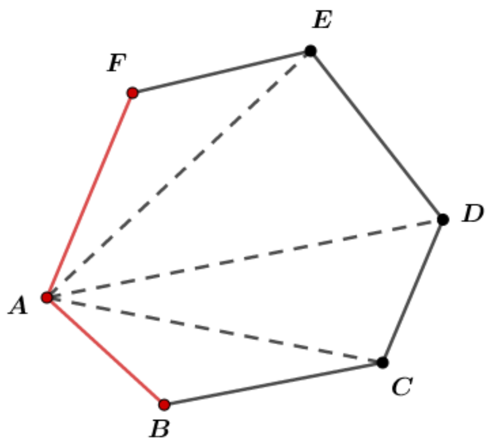
$\overline{AE}, \overline{AD}, \overline{AC}$ são as diagonais do polígono acima. Note que para o vértice A, os vértices B e F são adjacentes.

Podemos calcular o número de diagonais de um polígono de n lados. Seja d esse número, então, sua fórmula é dada por:

$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Demonstração:

Em um polígono de n lados, temos n vértices. Então, o número de diagonais que partem de um vértice é igual a $n-3$, pois devemos descontar os vértices adjacentes e o próprio vértice, veja o exemplo:



Nesse caso, temos 6 lados e 6 vértices. O número de diagonais que partem do vértice A é igual a $6-3=3$ (nessa contagem, desconsideramos os vértices A, B e F).

Então, se queremos calcular o número total de diagonais de um polígono de n lados, devemos contar o número de diagonais que podem ser formados em cada vértice. Sabemos que cada vértice possui $n-3$ diagonais, assim, considerando todos os vértices do polígono, temos $n(n-3)$ diagonais. Mas, nesse número, estamos contando duas vezes as diagonais, no exemplo acima, temos a diagonal que parte do vértice A e termina no vértice E e a diagonal que parte de E e termina em A. Portanto, devemos dividir $n(n-3)$ por 2:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

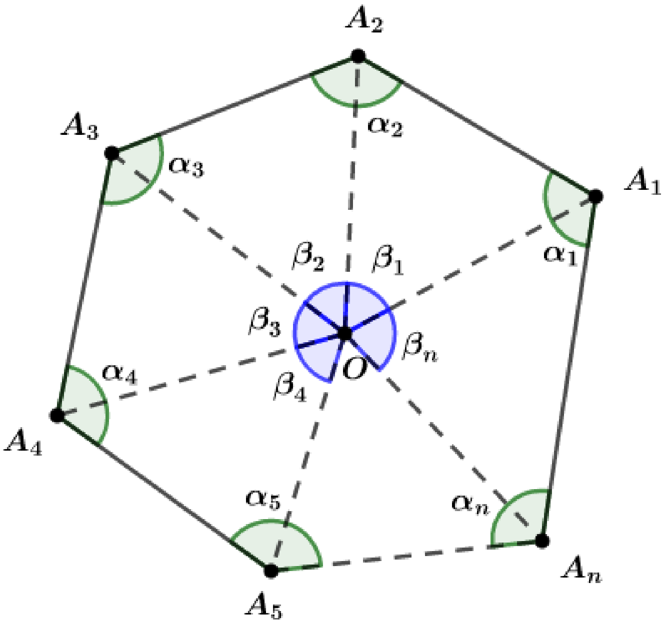
1.1.3. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS

Seja P_n um polígono convexo de n lados, então, se S_i é a soma dos seus ângulos internos e S_e é a soma dos seus ângulos externos, temos:

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{S_i = (n-2)\cdot 180°} \\ \boldsymbol{S_e = 360°} \end{array}}$$

Demonstração:

Vamos demonstrar a soma dos ângulos internos. Seja $A_1A_2A_3 \dots A_N$ um polígono convexo de n lados, tomando O o ponto no interior do polígono e ligando esse ponto a cada vértice:



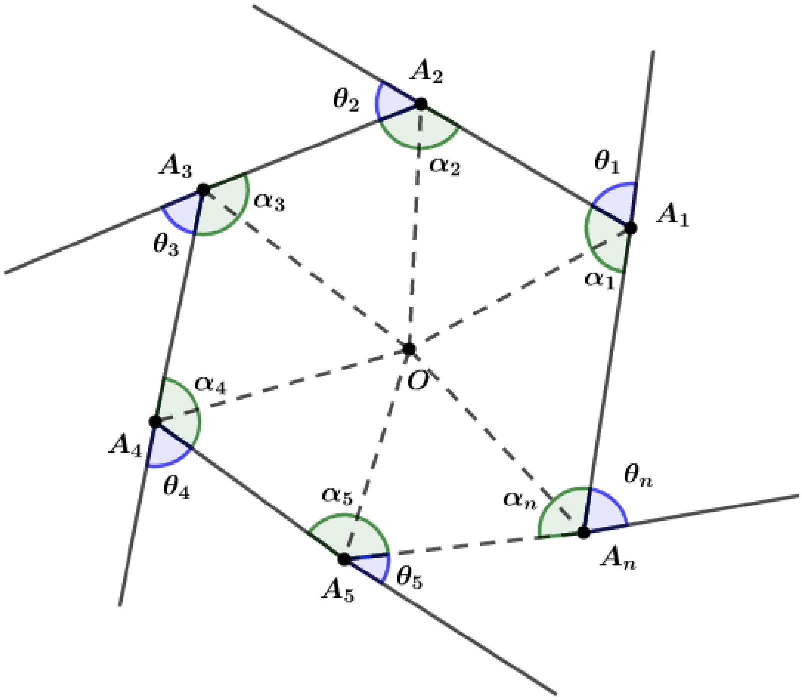
Perceba que temos n triângulos: $\Delta A_1A_2O, \Delta A_2A_3O, \Delta A_3A_4O, \Delta A_5A_5O, \dots, \Delta A_nA_1O$.

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então, a soma dos ângulos internos do polígono é dada pela soma dos ângulos internos dos n triângulos subtraído do ângulo central:

$$\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}_{S_i} + \underbrace{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n}_{360°} = n \cdot 180°$$

$$S_i = 180° \cdot n - 180° \cdot 2 \Rightarrow S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Para provar a fórmula da soma dos ângulos externos, podemos usar a propriedade de ângulos suplementares. Então, para cada vértice, temos:



$$\alpha_1 + \theta_1 = 180°$$

$$\alpha_2 + \theta_2 = 180°$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n + \theta_n = 180°$$

Somando-se cada expressão acima:

$$\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}_{S_i} + \underbrace{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n}_{S_e} = n \cdot 180°$$

$$S_i + S_e = n \cdot 180°$$

Substituindo S_i:

$$(n-2) \cdot 180° + S_e = n \cdot 180° \Rightarrow S_e = 360°$$

1.2. POLÍGONOS REGULARES

1.2.1. DEFINIÇÃO

Um polígono é considerado regular se ele for equilátero e equiângulo. Por exemplo, um triângulo equilátero possui todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos congruentes, logo, ele é um polígono regular.

1.2.2. FÓRMULA DOS ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS

Podemos deduzir a fórmula dos ângulos internos e externos do polígono regular usando a fórmula de S_i e S_e. Seja α_i o ângulo interno do polígono regular, então:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha \Rightarrow \underbrace{n \cdot \alpha}_{S_i} = (n-2) \cdot 180°$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180°}$$

Analogamente para o ângulo externo θ_i:

$$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta \Rightarrow \underbrace{n \cdot \theta}_{S_e} = 360°$$

$$\therefore \boldsymbol{\theta = \frac{360°}{n}}$$

1.2.3. PROPRIEDADES

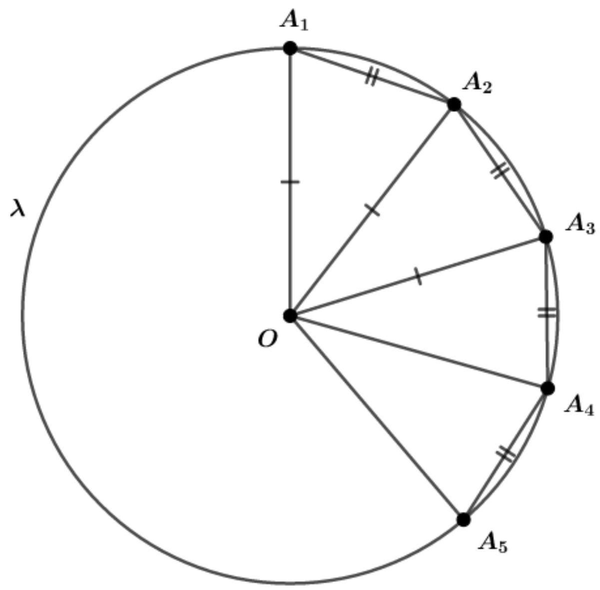
P1) Todo polígono regular é inscritível.

P2) Todo polígono regular é circunscritível.

P3) Ângulo Central

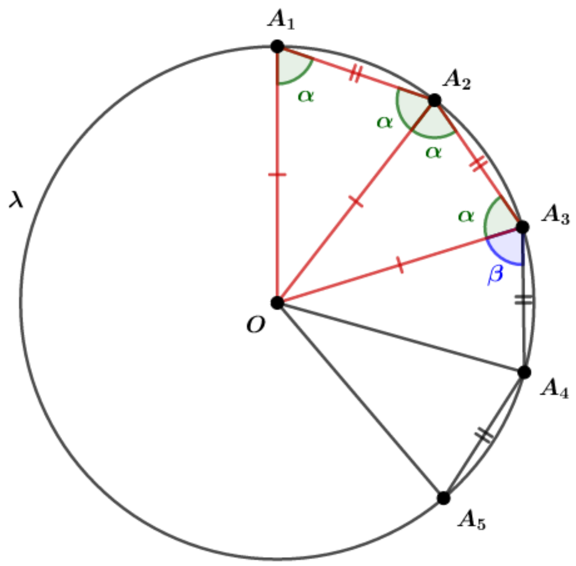
Demonstrações:

P1) Seja $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ um polígono convexo regular, então, tomando os pontos A_1, A_2, A_3, podemos desenhar uma circunferência λ que passa por esses pontos, vamos provar que $A_4 \in \lambda$:



Como $A_1, A_2, A_3 \in \lambda$, temos $OA_1 = OA_2 = OA_3$. O polígono é regular, então, $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$.

Sabemos que os ângulos internos de um polígono regular são congruentes, assim, analisando os triângulos isósceles A_1OA_2 e A_2OA_3, temos:

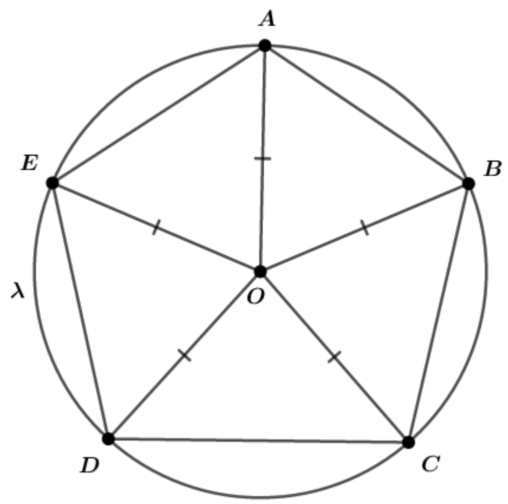


Como os ângulos internos do polígono são congruentes, temos $\alpha = \beta$. Observe os triângulos A_2OA_3 e A_3OA_4, note que $A_2A_3 = A_3A_4$, OA_3 é um lado comum e $\alpha = \beta$, logo, podemos aplicar o critério de congruência LAL:

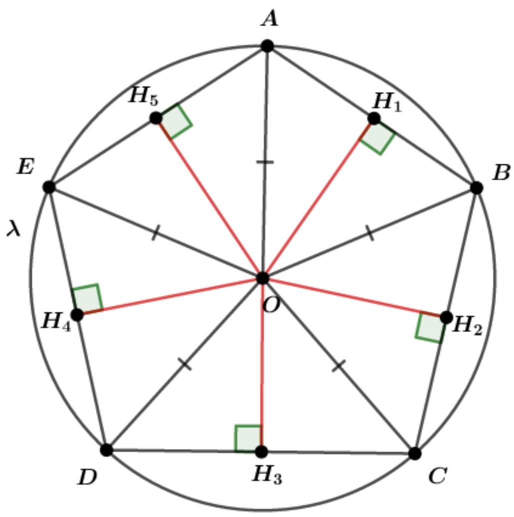
$$\Delta A_2OA_3 \equiv \Delta A_3OA_4$$

Dessa forma, temos $OA_2 = OA_4$. Logo, $A_4 \in \lambda$. De modo análogo, podemos provar para os outros vértices do polígono regular. Portanto, qualquer polígono convexo regular é inscritível.

P2) Sem perda de generalidade, vamos usar o pentágono regular $ABCDE$. Sendo regular, ele é inscritível, logo:



Os triângulos isósceles OAB, OBC, OCD, ODE, OEA são congruentes, então, a altura desses triângulos são congruentes:



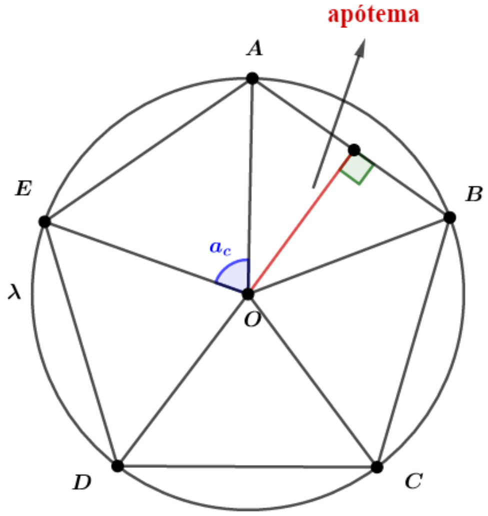
Como a medida dos segmentos são congruentes, temos $OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4 = OH_5$, então, O é o centro de uma outra circunferência. Vamos chamá-la de λ'.

Sabendo que esses segmentos são perpendiculares às suas respectivas bases, temos que os lados do polígono tangenciam a circunferência λ', logo, ele é circunscritível.

P3) Vimos que qualquer polígono regular é inscritível e cirscunscritível. Um polígono regular de n lados possui n triângulos isósceles e seus vértices são o centro O das circunferências e os vértices consecutivos do polígono regular. Chamamos de ângulo central o ângulo do vértice O de cada triângulo isósceles e seu valor é igual a:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

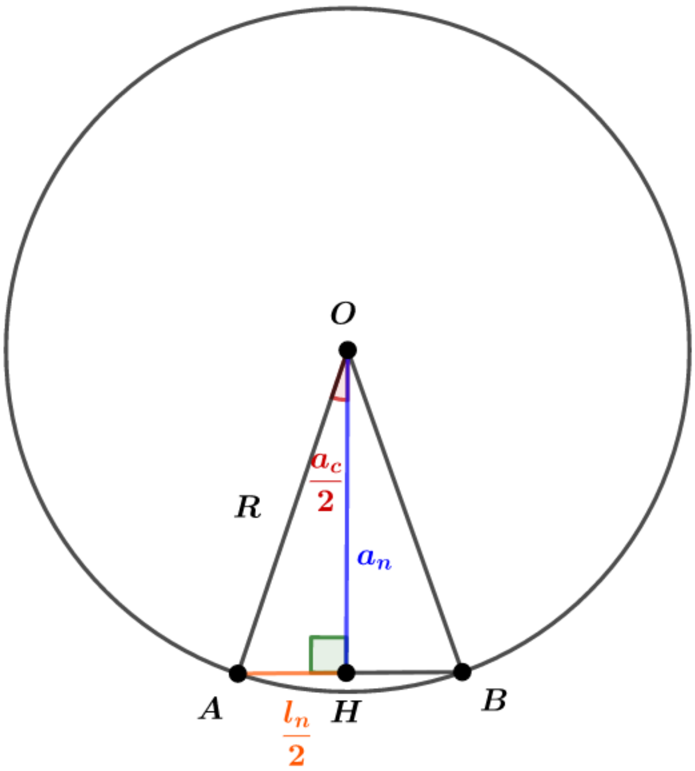
Chamamos de apótema de um polígono regular a altura de cada um desses triângulos isósceles:



1.2.4. CÁLCULO DO LADO E APÓTEMA DO POLÍGONO REGULAR

Vamos deduzir a fórmula geral do lado e apótema do polígono regular em função do raio da circunferência circunscrita e do ângulo central:

Para um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio R, sendo a_n o apótema e l_n o lado do polígono, temos:



$\overline{AB}$ é um dos lados do polígono regular de n lados.

Sabemos que o ângulo central é dado por:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

Usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo OAH, temos:

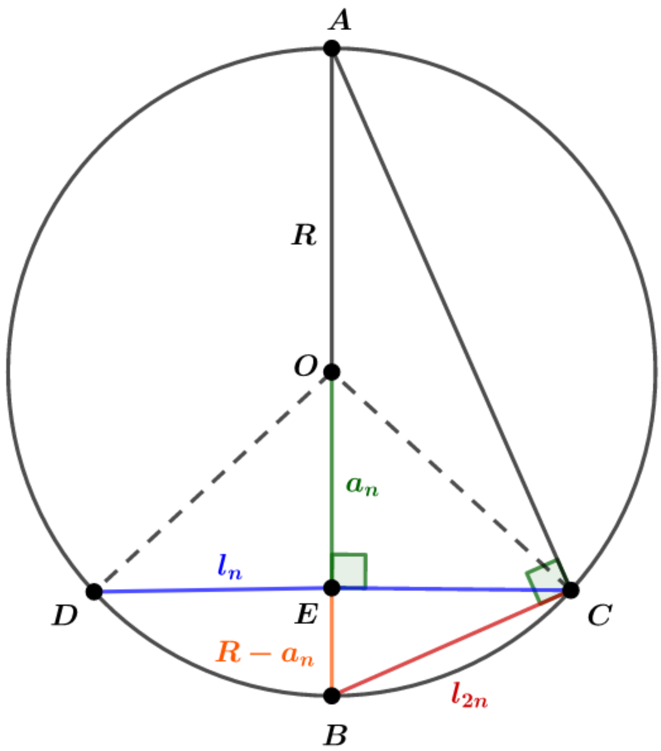
$$sen\left(\frac{a_c}{2}\right) = \frac{\frac{l_n}{2}}{R} \Rightarrow \boldsymbol{l_n = 2Rsen\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{a_c}{2}\right) = \frac{a_n}{R} \Rightarrow \boldsymbol{a_n = R\cos\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

Podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo OAH e encontrar a_n em função de l_n e R:

$$R^2 = a_n^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \Rightarrow \boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

Também é possível deduzir a fórmula do lado de um polígono regular de $2n$ lados em função do raio R e do lado l_n do polígono regular de n lados. Veja a figura:



l_n e a_n é o lado e o apótema do polígono regular de n lados, respectivamente. Note que $\Delta CEB \sim \Delta ACB$:

$$\Delta CEB \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{CB}{EB} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow \frac{l_{2n}}{R - a_n} = \frac{2R}{l_{2n}} \Rightarrow (l_{2n})^2 = 2R(R - a_n) \ \ (I)$$

Escrevendo a_n em função de l_n e R, temos:

$$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}$$

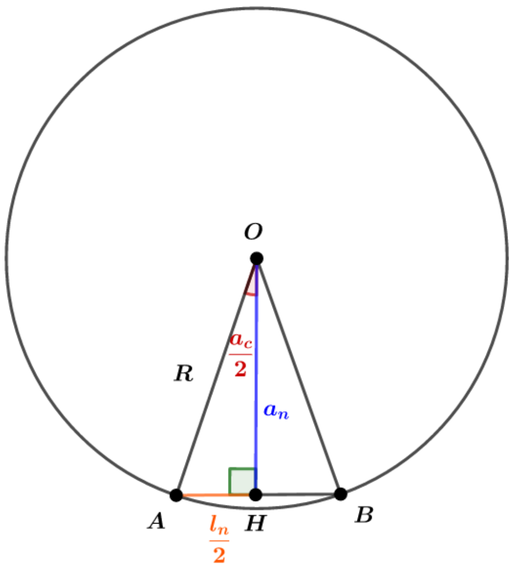
Substituindo em (I):

$$(l_{2n})^2 = 2R\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{l_{2n} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2}\right)}}$$

1.2.5. COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Vimos que o lado de um polígono regular de n lados é dado por:



$$l_n = 2Rsen\left(\frac{180°}{n}\right)$$

O perímetro desse polígono é igual a:

$$p_n = n \cdot 2R \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Se tomarmos n um número que tende ao infinito, o perímetro desse polígono se aproxima ao comprimento da circunferência circunscrita a ele. Então, aplicando o limite, temos:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(2R \cdot n \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)\right) \Rightarrow C = 2R\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}_{\pi} \Rightarrow C = 2\pi R$$

Não veremos a explicação para o limite resultar em π. Apenas saiba que o comprimento de uma circunferência é dado por:

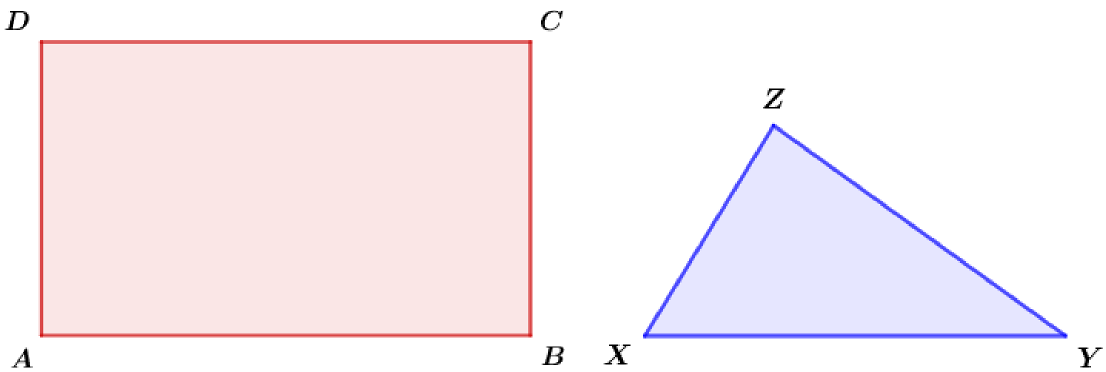
$\boxed{\boldsymbol{C = 2\pi R}}$

2. ÁREA DE FIGURAS PLANAS

2.1. DEFINIÇÃO

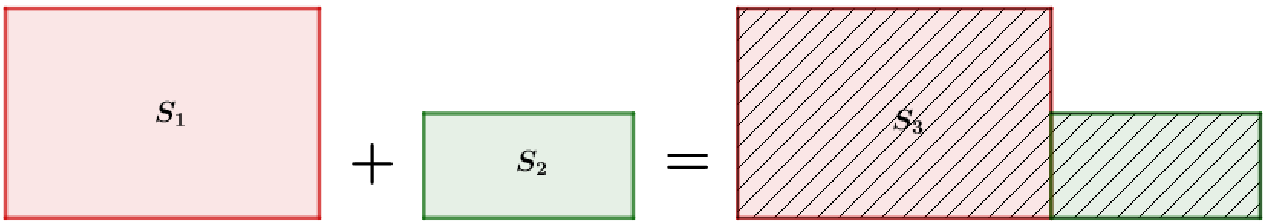
LEITURA OBRIGATÓRIA

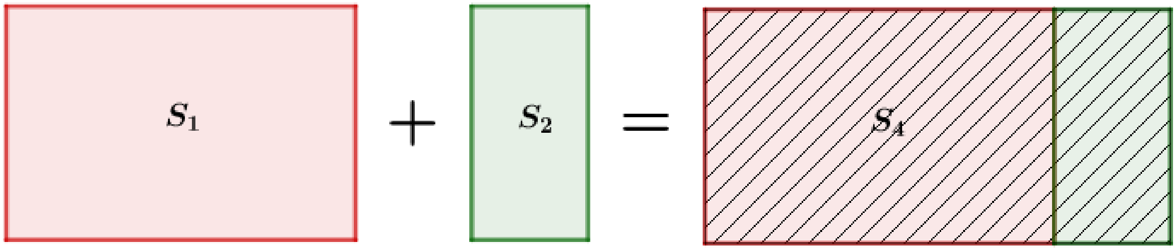
Vamos estudar um dos temas mais explorados em geometria plana pelas provas militares, o cálculo de áreas de figuras planas. Estudamos até agora as formas geométricas, as medidas dos ângulos e os comprimentos dos segmentos das figuras planas. O estudo da área dessas figuras envolve o conceito de extensão. Compare as figuras abaixo e diga qual possui maior extensão.



Supondo que as duas figuras possuem as mesmas unidades de medida, podemos dizer que o quadrilátero $ABCD$ possui maior extensão que o triângulo XYZ. Quando fazemos esse tipo de comparação, estamos comparando as áreas dessas figuras.

Duas figuras são ditas equivalentes quando possuem a mesma extensão, independentemente de suas formas. Se juntarmos dois quadriláteros de áreas A_1 e A_2 para formar uma outra figura de área A_3, podemos afirmar que esta possui área igual à soma das duas primeiras:





Usualmente, usamos as letras maiúsculas S ou A para simbolizar a área das figuras. Nos exemplos acima, perceba que $S_3 = S_1 + S_2$ e $S_4 = S_1 + S_2$, logo, podemos afirmar que as figuras de áreas S_3 e S_4 são equivalentes.

Dizemos que área é um número real positivo associado a uma superfície limitada. A unidade de medida usual da área é o m^2 (metro quadrado).

Vamos estudar dois teoremas importantes para formar nossa base no estudo da área de figuras planas. Esses teoremas serão usados para deduzir todas as fórmulas das áreas que podem ser cobradas na prova.

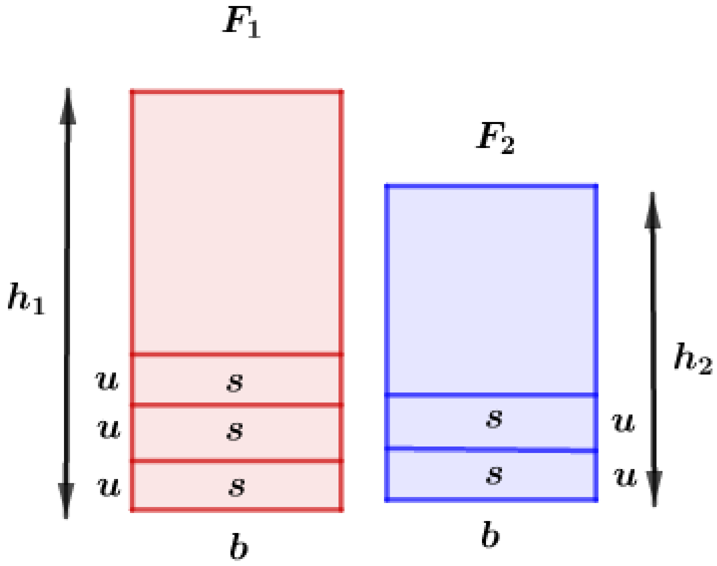
2.2. TEOREMAS

2.2.1. TEOREMA 1

A razão entre as áreas de dois retângulos que possuem uma dimensão congruente é igual à razão entre as dimensões não congruentes.

Demonstração:

Considere os dois retângulos abaixo de bases congruentes:



O teorema afirma que:

$$\frac{\boldsymbol{A_1}}{\boldsymbol{A_2}} = \frac{\boldsymbol{h_1}}{\boldsymbol{h_2}}$$

Onde A_1 e A_2 são as áreas dos retângulos F_1 e F_2, respectivamente. Para demonstrar essa propriedade, devemos considerar dois casos possíveis:

Caso 1) h_1 e h_2 são comensuráveis

Como h_1 e h_2 são comensuráveis, então, existe um número $u \in \mathbb{R}_+^*$ que cabe um número inteiro de vezes em h_1 e h_2. Sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$ múltiplos de h_1 e h_2, respectivamente, então, podemos escrever:

$$\begin{matrix} h_1 = mu \\ h_2 = nu \end{matrix} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{m}{n} \quad (I)$$

Seja s a área dos pequenos retângulos de cada retângulo de base b e altura u dos retângulos acima. Para o retângulo F_1, temos que m retângulos de área s cabem em F_1, logo:

$A_1 = ms$

Analogamente para F_2:

$$A_2 = ns$$

A razão entre as áreas é dada por:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{ms}{ns} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{m}{n} \quad (II)$$

Assim, das relações (I) e (II), encontramos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

Caso 2) h_1 e h_2 não são comensuráveis

Nesse caso, não podemos escrever h_1 e h_2 como múltiplos de uma mesma unidade de medida u. Tomando $u \in \mathbb{R}_+^*$ tal que:

$$h_2 = nu$$

Sendo h_1 e h_2 incomensuráveis, temos para $m \in \mathbb{N}^*$:

$$mu < h_1 < (m+1)u$$

Dividindo a desigualdade acima por nu:

$$\frac{mu}{nu} < \frac{h_1}{nu} < \frac{(m+1)u}{nu} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m+1}{n}$$

Como u é um submúltiplo arbitrário de h_2, podemos escolher u tão pequeno quanto se queira tal que m será um número tão grande que mu e $(m+1)u$ convergem para h_1. Dessa forma, encontramos:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{m}{n}$$

Procedendo de modo análogo para a área, encontramos:

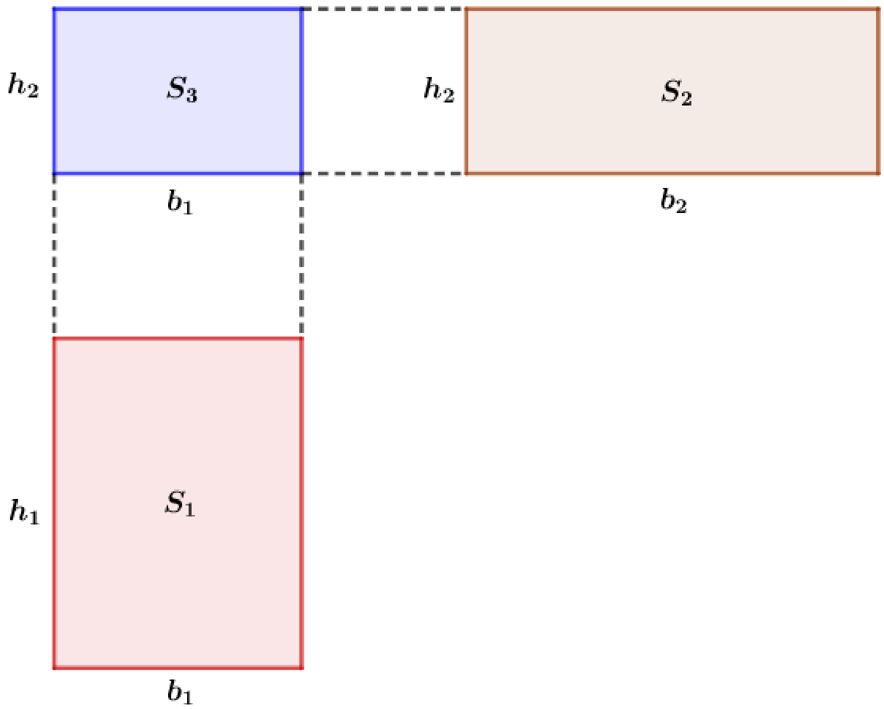
$$\begin{matrix} ms < A_1 < (m+1)s \\ A_2 = ns \end{matrix} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{A_1}{A_2} < \frac{m+1}{n} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

2.2.2. TEOREMA 2

A razão entre a área de dois retângulos é igual à razão entre os produtos de suas dimensões.

Demonstração:

Considere os três retângulos abaixo:



Usando o teorema 1, podemos escrever:

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{h_1}{h_2} \quad (I)$$

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (II)$$

Multiplicando as razões (I) e (II), temos:

$$\frac{S_1}{\cancel{S_3}} \cdot \frac{\cancel{S_3}}{S_2} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{b_1}{b_2}$$

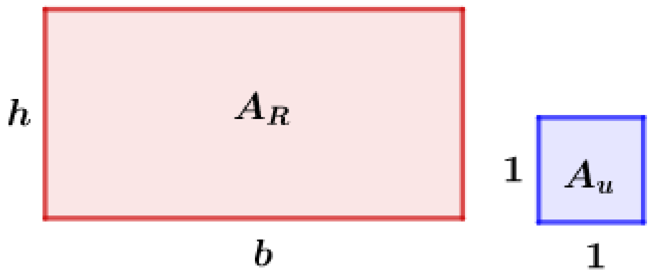
$$\therefore \boldsymbol{\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1 b_1}{h_2 b_2}}$$

2.3. ÁREA DE POLÍGONOS

Com base no teorema 2, vamos deduzir as fórmulas das áreas dos principais polígonos.

2.3.1. RETÂNGULO

Para calcular a área do retângulo, vamos adotar como área unitária um quadrado de lado 1. Seja A_u a área desse quadrado e A_R a área do retângulo de base b e altura h, sabendo que $A_u = 1$, temos:



Aplicando o teorema 2:

$$\frac{A_R}{A_u} = \frac{b \cdot h}{1 \cdot 1} \Rightarrow \frac{A_R}{1} = b \cdot h$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_R = b \cdot h}}$$

Portanto, a área de um retângulo é dada pelo produto entre sua base e sua altura.

FIQUE ATENTO!

Ao calcular área de figuras planas, precisamos nos atentar a um detalhe. Veja a questão abaixo:

Calcule a área de um retângulo de base e altura medindo $5\ cm$ e $10\ cm$, respectivamente.

Essa questão nos fornece a unidade de medida em centímetros. Quando calculamos a área dessa figura, precisamos também incluir a unidade de medida:

$$A_R = b \cdot h \Rightarrow A_R = (5\ cm) \cdot (10\ cm) \Rightarrow A_R = 50\ cm^2$$

Caso a questão forneça os dados em diferentes unidades de medida, temos que convertê-los na mesma unidade. Veja:

Calcule a área do retângulo de base e altura medindo $5\ cm$ e $10\ km$, respectivamente.

Nessa questão, não podemos multiplicar diretamente a base a altura, pois ambas estão em diferentes unidades de medida (cm e km). Antes, devemos igualar as unidades. Vamos converter o quilômetro em centímetro:

$$10\ km = 10 \cdot 10^3\ m = 10 \cdot 10^3 \cdot 10^2\ cm = 10^6\ cm$$

Agora, podemos calcular a área:

$$A_R = (5\ cm) \cdot (10^6\ cm) \Rightarrow A_R = 5 \cdot 10^6\ cm^2$$

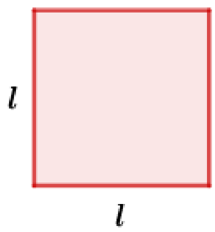
Esse detalhe pode tirar alguns pontos da sua prova, então, atenção na hora de ler a questão!

A tabela abaixo fornece as principais conversões de unidades de medida, vamos adotar como unidade padrão o metro:

Unidade de medida	Símbolo	Unidade equivalente
Milímetro	mm	10^{-3} m
Centímetro	cm	10^{-2} m
Quilômetro	km	10^3 m

2.3.2. QUADRADO

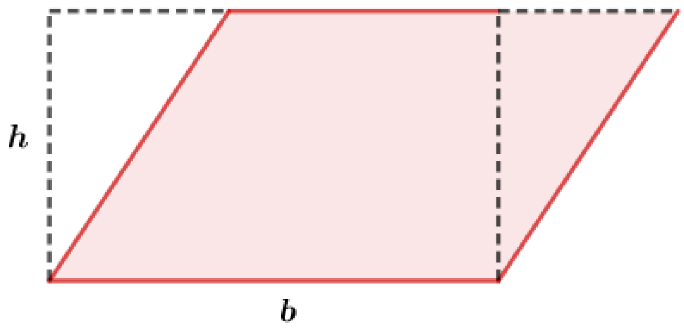
Esse é um caso particular de retângulo. Como o quadrado possui lados congruentes, a sua altura e base possuem as mesmas medidas. Para um quadrado de lado l:



$$\boxed{A_Q = l^2}$$

2.3.3. Paralelogramo

O paralelogramo pode ser visto como um retângulo inclinado, veja:

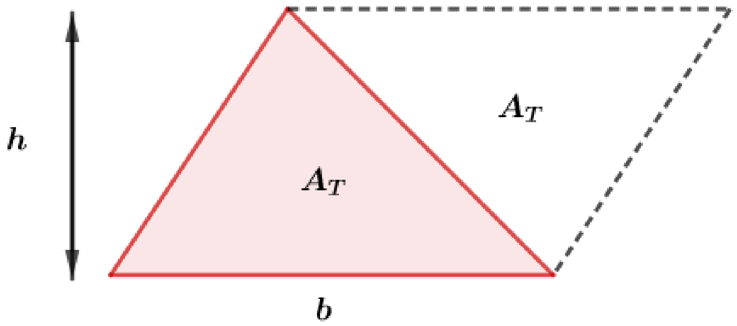


A área do paralelogramo de altura h e base b é equivalente à área de um retângulo de altura h e base b, logo:

$$\boxed{A_P = b \cdot h}$$

2.3.4. TRIÂNGULO

A área de um triângulo é igual à metade da área de um paralelogramo de altura h e base b. Seja A_T a área de um triângulo de base b e altura h:



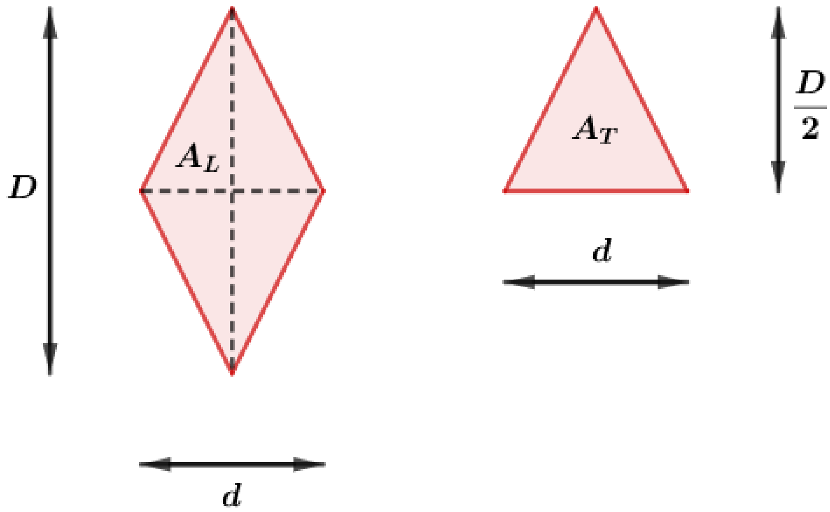
Analisando a figura, podemos ver que:

$$2A_T = b \cdot h$$

$$\boxed{A_T = \frac{b \cdot h}{2}}$$

2.3.5. LOSANGO

A área de um losango de diagonal maior D e diagonal menor d é igual à 2 vezes a área de um triângulo de base d e altura $D/2$:

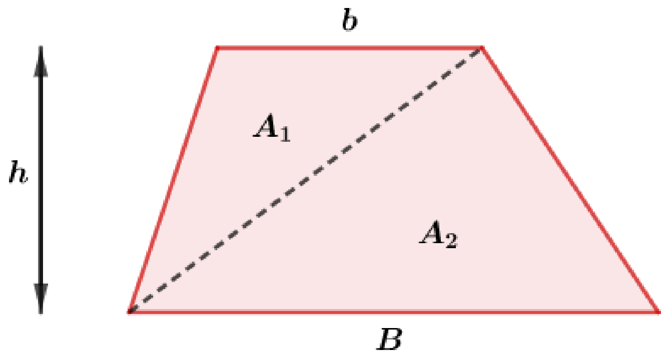


$$A_L = 2A_T \Rightarrow A_L = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_L = \frac{d \cdot D}{2}}}$$

2.3.6. TRAPÉZIO

Para calcular a área de um trapézio de base menor b e base maior B e altura h, podemos dividi-lo em 2 triângulos de altura h e bases b e B:



$$A_{Tr} = A_1 + A_2 \Rightarrow A_{Tr} = \frac{b \cdot h}{2} + \frac{B \cdot h}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{Tr} = \frac{(b + B) \cdot h}{2}}}$$

2.3.7. POLÍGONO Regular

Dado um polígono regular de n lados, sendo:

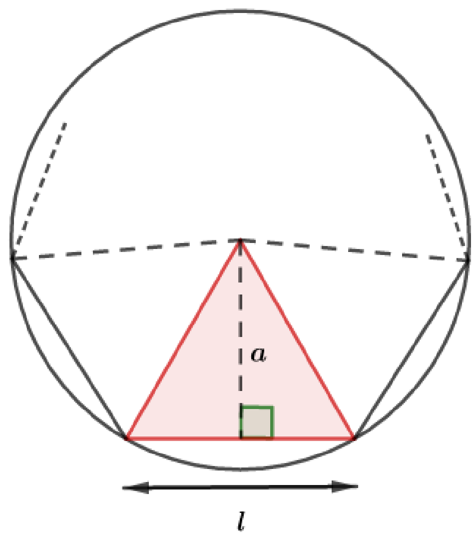
a – medida do apótema

l – medida do lado

n – número de lados

p – semiperímetro do polígono

Esse polígono pode ser dividido em n triângulos congruentes de base l e altura a:



A área desse polígono é dada por:

$$A_{Pol} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$$

O perímetro desse polígono é igual a:

$$2p = n \cdot l$$

Assim, substituindo a identidade acima na expressão da área do polígono, encontramos:

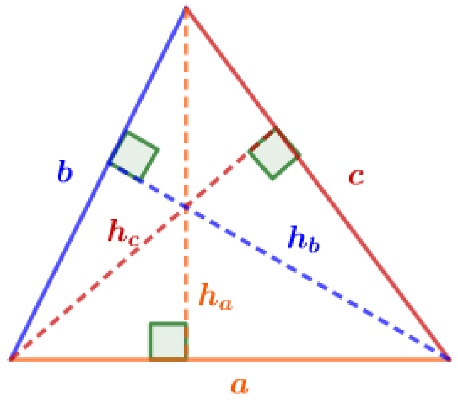
$$A_{Pol} = \frac{2p \cdot a}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{Pol} = p \cdot a}}$$

2.3.8. OUTRAS EXPRESSÕES PARA ÁREA DO TRIÂNGULO

Dependendo dos dados da questão, podemos calcular a área do triângulo de outras formas. Vamos explorar as possibilidades:

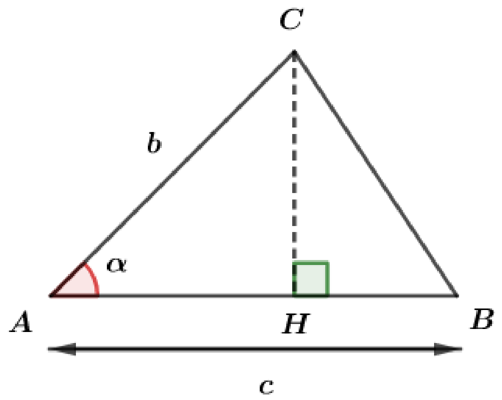
1) Dados um dos lados e a respectiva altura



Seja S a área do triângulo, como vimos anteriormente, a área do triângulo em função do lado e da respectiva altura é dada por:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

2) Dados dois lados e um ângulo compreendido entre eles



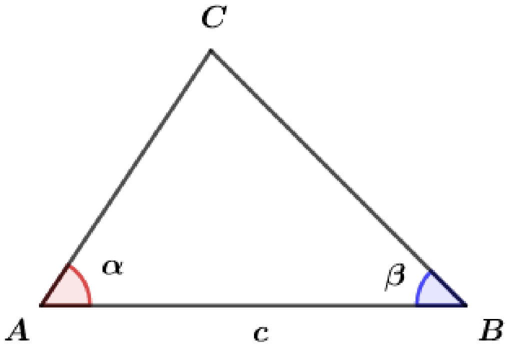
Temos a base do triângulo, precisamos calcular a altura CH:

$$CH = b \cdot sen\alpha$$

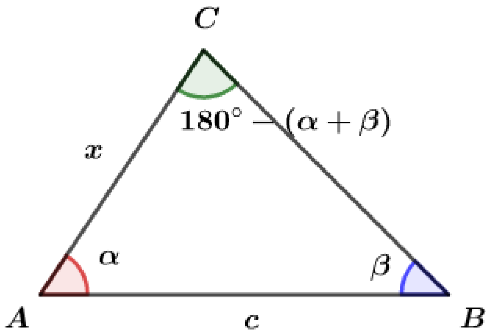
A área é dada por:

$$S = \frac{b \cdot c \cdot sen\alpha}{2}$$

3) Dados um lado e dois ângulos adjacentes



Nesse caso, procedemos chamando um lado de x, escolhendo o lado AC, temos:



A área desse triângulo é dada por:

$$S = \frac{x \cdot c \cdot sen\alpha}{2}$$

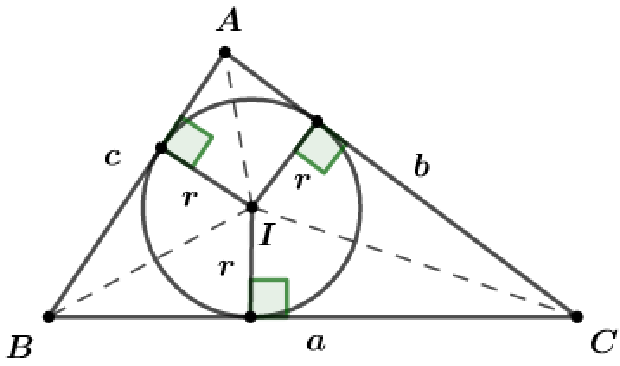
Podemos encontrar o valor de x usando a lei dos senos:

$$\frac{x}{sen\beta} = \frac{c}{sen\big(180° - (\alpha + \beta)\big)} \Rightarrow \frac{x}{sen\beta} = \frac{c}{sen(\alpha + \beta)} \Rightarrow x = \frac{c \cdot sen\beta}{sen(\alpha + \beta)}$$

Substituindo na expressão da área, encontramos:

$$\boldsymbol{S = \frac{c^2 \cdot sen\alpha \cdot sen\beta}{2 \cdot sen(\alpha + \beta)}}$$

4) Dados os lados e o raio da circunferência inscrita

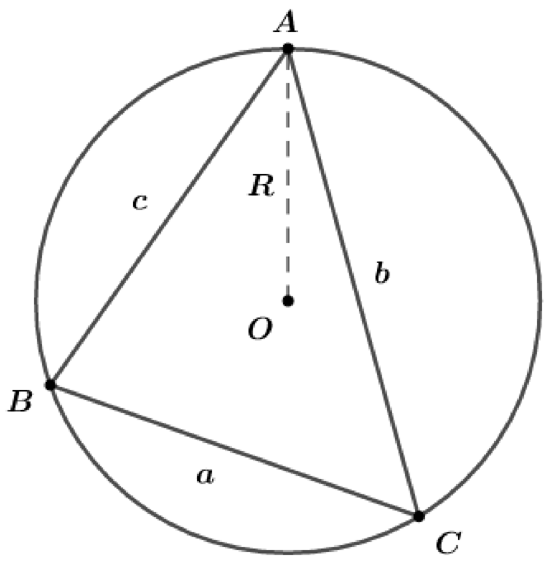


No triângulo acima, temos três triângulos cujas bases são os lados do triângulo ABC e a altura é r:

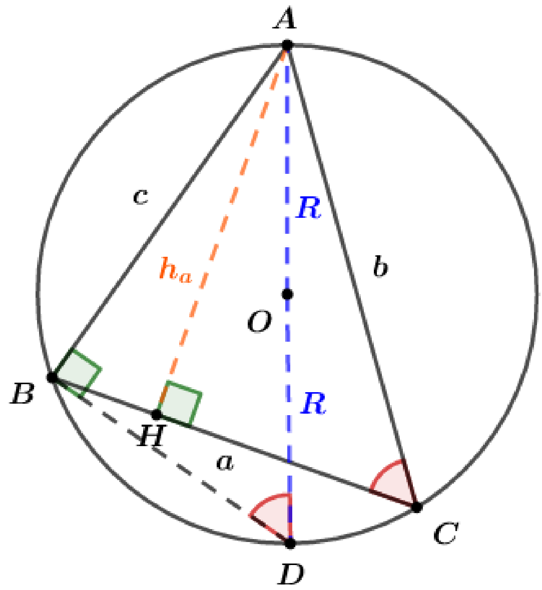
$$S = S_{ABI} + S_{ACI} + S_{BCI} \Rightarrow S = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} \Rightarrow S = \underbrace{\frac{(a+b+c)}{2}}_{p} \cdot r$$

$$\boldsymbol{S = p \cdot r}$$

5) Dados os lados e o raio da circunferência circunscrita



Vamos usar a propriedade do arco capaz e tomar o lado BC como base, então, temos:



Note que os triângulos AHC e ABD são semelhantes, pois ambos são retângulos e $\widehat{D} \equiv \hat{C}$. Assim, podemos escrever:

$$\Delta AHC \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{b}{h_a} = \frac{2R}{c} \Rightarrow h_a = \frac{bc}{2R}$$

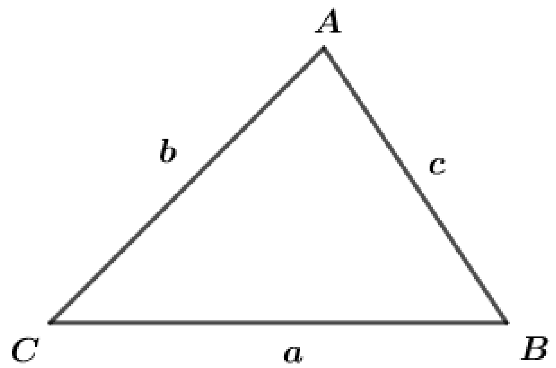
A área é dada por:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{abc}{4R}}$$

6) Fórmula de Heron

A fórmula de Heron é útil quando a questão nos dá apenas os lados do triângulo.



Sabemos que a área do triângulo pode ser dada por:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Vimos no capítulo de cálculo de cevianas do triângulo que h_a pode ser escrita em função dos lados e do semiperímetro do triângulo:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

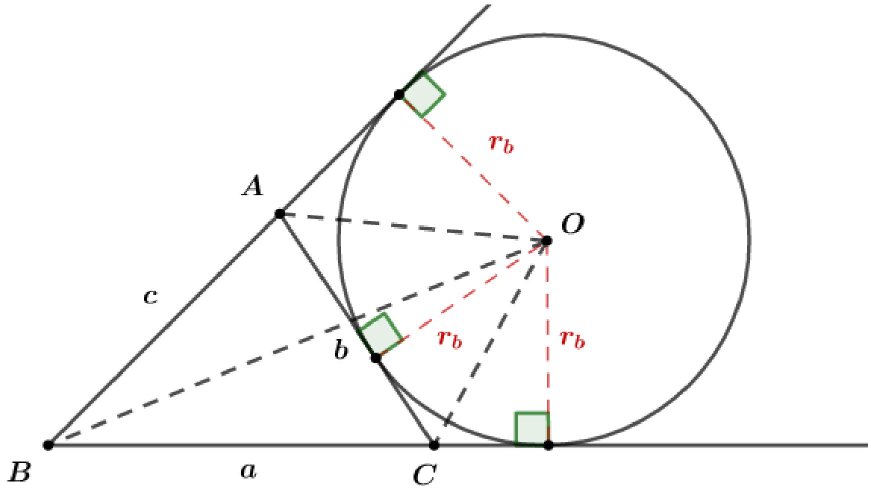
Substituindo essa identidade na expressão da área, encontramos:

$$S = \frac{a \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2}$$

$$\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Essa fórmula é conhecida como fórmula de Heron.

7) Dados um lado e o raio da circunferência ex-inscrita ao mesmo lado



Podemos calcular a área do triângulo ABC através do quadrilátero $ABCO$, veja:

$$S_{ABCO} = S_{ABO} + S_{CBO} \Rightarrow S_{ABCO} = \frac{c \cdot r_b}{2} + \frac{a \cdot r_b}{2}$$

$$S_{ABCO} = S_{ABC} + S_{AOC} \Rightarrow S_{ABCO} = S + \frac{b \cdot r_b}{2}$$

Igualando as duas identidades, encontramos:

$$\frac{c \cdot r_b}{2} + \frac{a \cdot r_b}{2} = S + \frac{b \cdot r_b}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\underbrace{(a - b + c)}_{2p-2b} \cdot r_b$$

$$\boldsymbol{S = (p - b) \cdot r_b}$$

Para as circunferências ex-inscritas aos outros lados, podemos provar analogamente que:

$$\boldsymbol{S = (p - a) \cdot r_a}$$

$$\boldsymbol{S = (p - c) \cdot r_c}$$

8) Dados o raio da circunferência inscrita e os raios das circunferências ex-inscritas a cada lado

Nesse caso, a questão dá apenas os raios r, r_a, r_b, r_c. Vimos nos itens anteriores que a área do triângulo pode ser dada pelas seguintes fórmulas abaixo:

$$S = p \cdot r \Rightarrow p = \frac{S}{r}$$

$$S = (p - a) \cdot r_a \Rightarrow p - a = \frac{S}{r_a}$$

$$S = (p - b) \cdot r_b \Rightarrow p - b = \frac{S}{r_b}$$

$$S = (p - c) \cdot r_c \Rightarrow p - c = \frac{S}{r_c}$$

Substituindo esses valores na fórmula de Heron, encontramos:

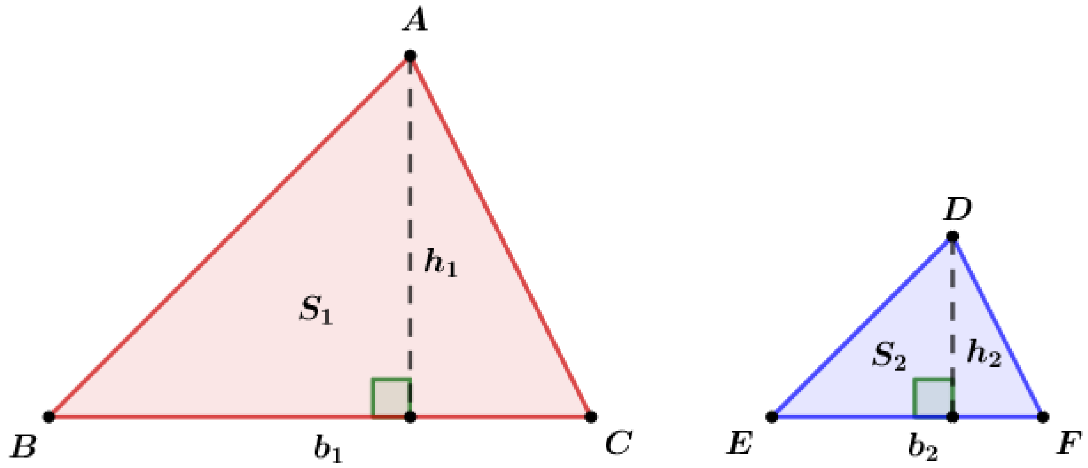
$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$S = \sqrt{\frac{S}{r} \cdot \frac{S}{r_a} \cdot \frac{S}{r_b} \cdot \frac{S}{r_c}} \Rightarrow S \cdot \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} = \underbrace{\sqrt{S^4}}_{S^2}$$

$$\boldsymbol{S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}$$

2.3.9. RELAÇÃO MÉTRICA ENTRE ÁREAS

Para figuras geométricas semelhantes, podemos encontrar uma relação para suas áreas. Considere os triângulos ABC e DEF semelhantes abaixo:



Como $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, temos:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{b_1}{b_2} = K\ (razão\ de\ proporção)$$

A área de cada triângulo é dada por:

$$S_1 = \frac{b_1 \cdot h_1}{2}$$

$$S_2 = \frac{b_2 \cdot h_2}{2}$$

Dividindo as áreas, encontramos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{b_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{b_2 \cdot h_2}{2}} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = K \cdot K$$

$$\boldsymbol{\frac{S_1}{S_2} = K^2}$$

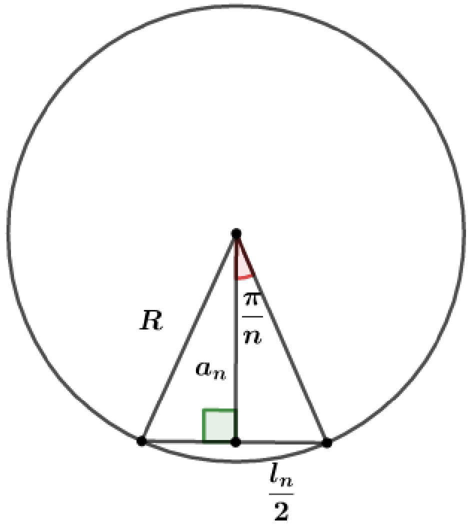
Portanto, a razão entre as áreas de figuras semelhantes é o valor da razão de proporção elevado ao quadrado.

Vimos para o caso de triângulos semelhantes. Saiba que essa razão é válida para quaisquer figuras planas semelhantes.

2.4. ÁREA DE CÍRCULOS

2.4.1. DEDUÇÃO DA FÓRMULA

Para calcular a área do círculo, podemos usar a área do polígono regular de n lados:



l_n é o lado do polígono de n lados e a_n é seu apótema. A área do polígono é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot a_n \cdot l_n}{2}$$

Podemos escrever $l_n/2$ em função do ângulo central:

$$tg\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{l_n}{2}}{a_n} \Rightarrow \frac{l_n}{2} = a_n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Substituindo na fórmula de S_n:

$$S_n = n \cdot a_n^2 \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Note que se n tender ao infinito, a área do polígono de n lados se aproxima da área da circunferência circunscrita a ele e o apótema se aproxima do raio dessa circunferência. Se S_C é a área da circunferência de raio R, podemos escrever:

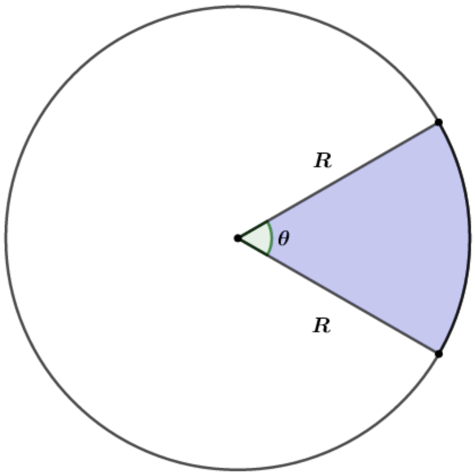
$$S_n = n \cdot a_n^2 \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow S_C = \lim_{n\to\infty} n \cdot R^2 \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow S_C = R^2 \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}_{\pi}$$

$$\boldsymbol{S_C = \pi \cdot R^2}$$

2.4.2. PARTES DO CÍRCULO

Para finalizar o assunto de áreas de círculos, vamos aprender alguns termos que podem ser cobrados na prova a respeito das áreas das partes dos círculos:

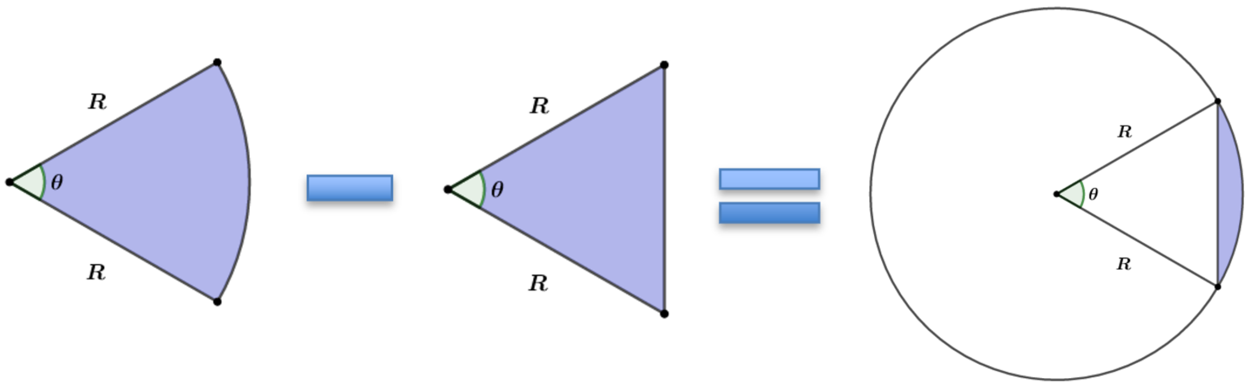
1) Setor circular



Setor circular é uma fatia do círculo. Sua área é dada pela proporção:

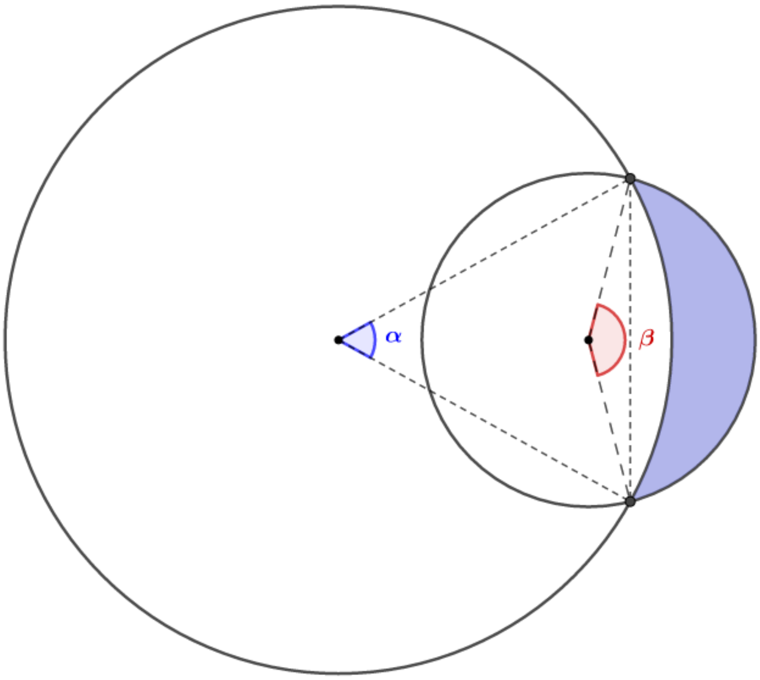
$$S = \underbrace{\frac{\theta}{2\pi}}_{fatia\ do\ círculo} \cdot \pi R^2 \Rightarrow S = \frac{\theta R^2}{2}$$

2) Segmento circular



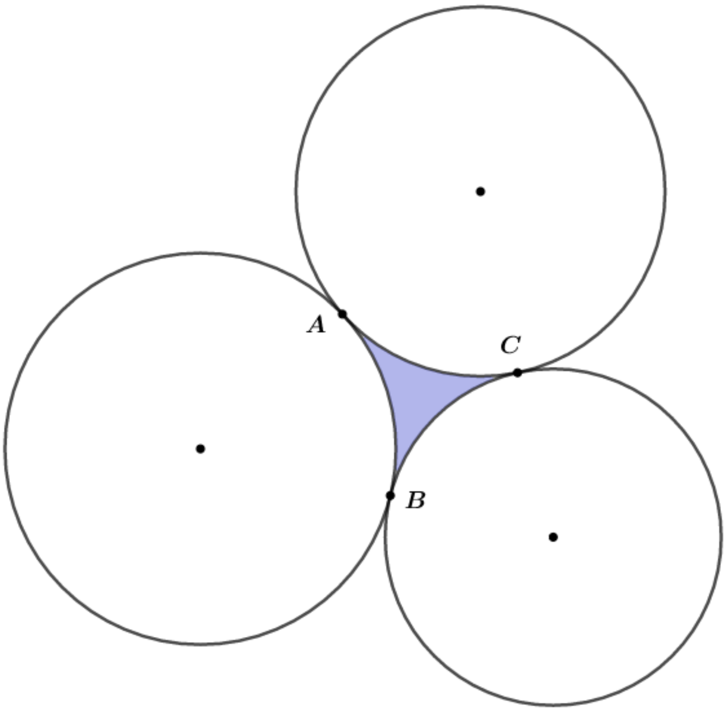
Segmento circular é a região delimitada pelo círculo e pelo triângulo isósceles cujo vértice é o centro do círculo e seu ângulo é θ. Dessa forma, a área é dada pela diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo isósceles.

3) Lúnula



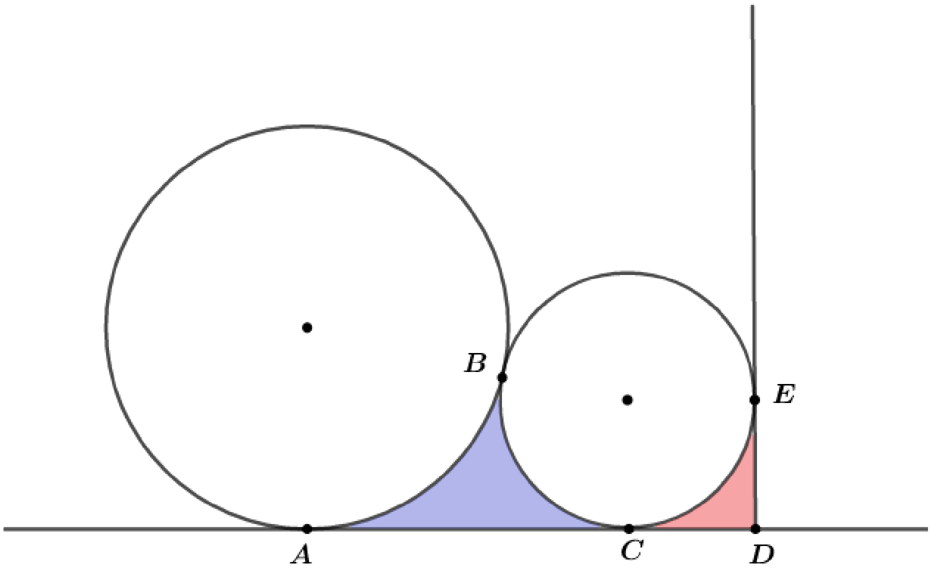
Lúnula é a região do círculo menor localizada na parte externa do círculo maior.

4) Triângulo Curvilíneo



Triângulo curvilíneo é o triângulo ABC cujos lados são todos curvos.

5) Triângulo Mistilíneo



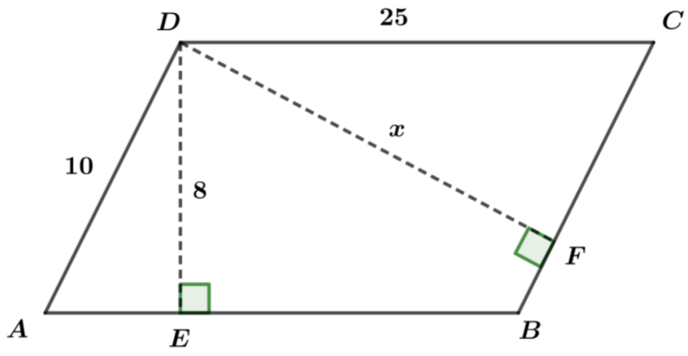
Um triângulo é mistilíneo quando possui um ou dois lados curvos. Os triângulos ABC e CDE representados acima são mistilíneos.

3. LISTA DE QUESTÕES

LISTA DE QUESTÕES

1. (EEAR/2021)

A figura, se ABCD é um paralelogramo, então o valor de x é



a) 18

b) 20

c) 22

d) 24

2. (EEAR/2021)

A diferença entre as medidas de um ângulo interno de um dodecágono regular e de um ângulo interno de um octógono também regular é

a) $15°$

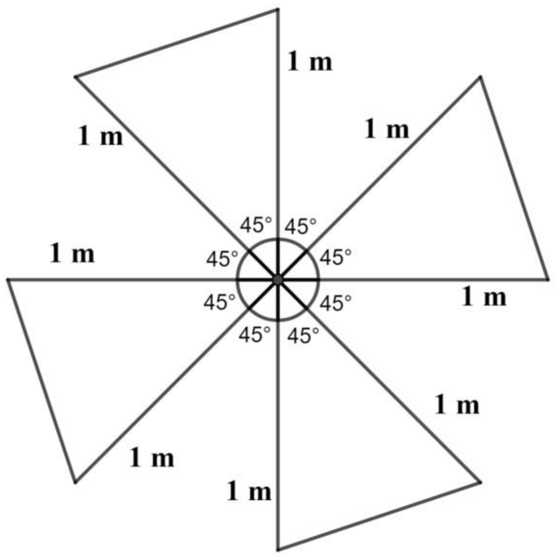
b) $25°$

c) $30°$

d) $40°$

3. (EEAR/2021)

A figura representa a parte de um móvel de um cata-vento (4 hélices triangulares planas). Se o material utilizado para a confecção dessas hélices custa R$ 300,00 o m^2, e considerando $\sqrt{2} = 1,4$, o custo dessas peças, em R$, foi de



a) 280

b) 340

c) 420

d) 560

4. (ESA/2019)

Em um triângulo equilátero ABC inscreve-se um quadrado MNOP de área 3m². Sabe-se que o lado MN está contido em AC, o ponto P pertence a AB e o ponto O pertence a BC. Nessas condições, a área, em m², do triângulo ABC mede:

a) $\frac{7\sqrt{3}+6}{4}$

b) $\frac{7\sqrt{3}+6}{4}$

c) $\frac{7\sqrt{3}+12}{4}$

d) $\frac{21\sqrt{3}+18}{2}$

e) $\frac{21\sqrt{3}+36}{4}$

5. (ESA/2016)

A área do triângulo equilátero cuja altura mede $6\ cm$ é:

a) $12\sqrt{3}\ cm^2$

b) $4\sqrt{3}\ cm^2$

c) $24\sqrt{3}\ cm^2$

d) $144\ cm^2$

e) $6\sqrt{3}\ cm^2$

6. (ESA/2014)

Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de diâmetro $4\ cm$. O perímetro desse hexágono, em cm, é

a) $4.$

b) $8.$

c) $24.$

d) $6.$

e) $12.$

7. (ESA/2009)

As diagonais de um losango medem $48\ cm$ e $33\ cm$. Se a medida da diagonal maior diminuir $4\ cm$, então, para que a área permaneça a mesma, deve-se aumentar a medida da diagonal menor de:

a) $3\ cm$

b) $5\ cm$

c) $6\ cm$

d) $8\ cm$

e) $9\ cm$

8. (ESA/2007)

Se um polígono regular é tal que a medida de um ângulo interno é o triplo da medida do ângulo externo, o número de lados desse polígono é:

a) 12

b) 9

c) 6

d) 4

e) 8

9. (ESA/2007)

Considere um polígono regular $ABCDEF$ ... .Sabe-se que as mediatrizes dos lados AB e CD formam um ângulo de $20°$ e sua região correspondente contém os vértices B e C do polígono. Assim sendo, quantas diagonais deste polígono passam pelo centro, dado que o seu número de vértices é maior que seis?

a) 17

b) 15

c) 16

d) 18

e) 14

10. (ESA/2007)

Aumentando-se os lados a e b de um retângulo de 15% e 20%, respectivamente. a área do retângulo é aumentada em:

a) $3,8\%$

b) 4%

c) 38%

d) 35%

e) $3,5\%$

11. (ESA/2006)

Em um triângulo ABC tem-se $AB = 10\ cm$ e $AC = 12\ cm$. O incentro I e o baricentro G estão em uma mesma paralela a BC. A medida do lado BC é igual a:

a) 10

b) 5

c) 12

d) 6

e) 11

12. (ESA/2006)

Um trabalhador gasta 5 horas para limpar um terreno circular de $8\ m$ de raio. Ele cobra $R\$4,00$ por hora de trabalho. Para limpar um terreno circular de $24\ m$ de raio, o trabalhador cobrará, em reais:

a) 40

b) 180

c) 60

d) 120

e) 80

13. (ESA/2006)

As bases de um trapézio medem $19\ m$ e $9\ m$ e os lados não paralelos, $6\ m$ e $8\ m$. A área desse trapézio, em dm^2 é:

a) 6072

b) 6270

c) 6027

d) 6702

e) 6720

14. (ESA/2006)

Um triângulo ABC tem área de $60\ cm^2$ e está circunscrito a uma circunferência com $5\ cm$ de raio. Nestas condições a área do triângulo equilátero que tem o mesmo perímetro que o triângulo ABC é, em cm^2:

a) $20\sqrt{3}$

b) $15\sqrt{3}$

c) $12\sqrt{3}$

d) $16\sqrt{3}$

e) $5\sqrt{3}$

15. (ESA/2006)

Se aumentarmos a medida do raio r de um círculo em 15%, obteremos um outro círculo de raio R. O aumento da área, em termos percentuais, foi de:

a) $32,25$

b) $32,52$

c) $3,252$

d) $3,225$

e) $3,522$

16. (ESA/2006)

Três circunferências de raio $2r$, $3r$ e $10r$ são tais que cada uma delas tangencia exteriormente as outras duas. O triângulo cujos vértices são os centros dessas circunferências tem área de:

a) $36r^2$

b) $18r^2$

c) $10r^2$

d) $20r^2$

e) $30r^2$

17. (ESA/2006)

Os lados de um triângulo medem, em centímetros, $2\sqrt{2}, \sqrt{6}$ e $\sqrt{14}$. Podemos afirmar que a área desse triângulo, em cm², é igual a metade de:

a) $4\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{7}$

c) $4\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{3}$

e) $\sqrt{7}$

18. (ESA/2005)

Considere duas circunferências de raios iguais a 2 tal que, sobrepostas, cada uma passa pelo centro da outra. A área da região comum a ambas é:

a) $\frac{8\pi}{3}+2\sqrt{3}$

b) $4\pi-\sqrt{3}$

c) $\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$

d) $4\pi-2\sqrt{3}$

e) $\frac{8\pi}{3}-\sqrt{3}$

19. (ESA/2005)

A área de um círculo inscrito em um triângulo retângulo de lados 9, 12 e 15 é:

a) 9π

b) 4π

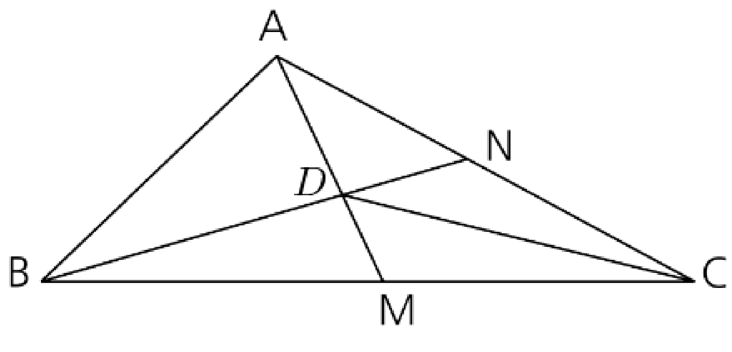
c) π

d) 16π

e) 25π

20. (ESA/2005)

No triângulo ABC abaixo, se M e N são pontos médios e a área do triângulo DMC é 1dm², então a área, em dm², do triângulo ABD é:



a) 2,5

b) 1,5

c) 3

d) 2

e) 1,9

21. (ESA/2004)

Um festival de música lotou uma praça semicircular de 200m de diâmetro. Admitindo-se uma ocupação média de 3 pessoas por m², qual é o número mais aproximado de pessoas presentes? (adote $\pi = 3,14$)

a) 22340

b) 33330

c) 42340

d) 16880

e) 47100

22. (ESA/2004)

Um triângulo ABC tem área igual a 75cm². Os pontos D, E, F e G dividem o lado AC em 5 partes congruentes: $AD = DE = EF = FG = GC$. Desse modo, a área do triângulo BDF é:

a) 20cm²

b) 30cm²

c) 40cm²

d) 50cm²

e) 55cm²

23. (EEAR/2019)

Um trapézio tem $12\ cm$ de base média e $7\ cm$ de altura. A área desse quadrilátero é____ cm^2.

a) 13

b) 19

c) 44

d) 84

24. (EEAR/2019)

A área de um hexágono regular inscrito em um círculo de $\sqrt{6}\ cm$ de raio é ____$\sqrt{3}\ cm^2$

a) 6

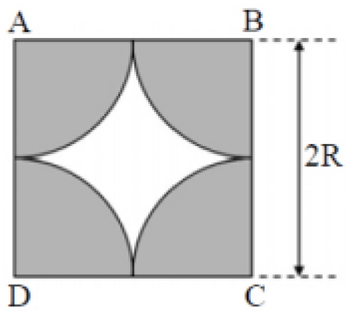
b) 9

c) 12

d) 15

25. (EEAR/2018)

Na figura, os arcos que limitam a região sombreada são arcos de circunferências de raio R e centrados nos vértices do quadrado ABCD. Se o lado do quadrado mede 2R e considerando $\pi = 3$, então a razão entre a área sombreada e a área branca é



a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) 2

d) 3

26. (EEAR/2018)

A metade da medida do ângulo interno de um octógono regular, em graus, é

a) $67,5°$

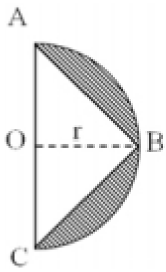
b) $78,6°$

c) $120°$

d) $85°$

27. (EEAR/2017)

Na figura, O é o centro do semicírculo de raio $r = 2\ cm$.



Se A, B e C são pontos do semicírculo e vértices do triângulo isósceles, a área hachurada é____cm^2. **(use** $\pi = 3,14$**)**

a) 2,26

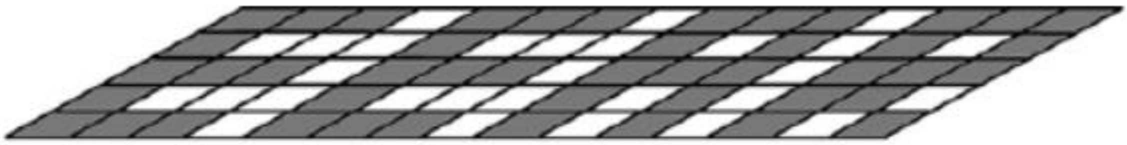
b) 2,28

c) 7,54

d) 7,56

28. (EEAR/2017)

A malha da figura abaixo é formada por losangos cujas diagonais medem 0, 50 cm e 2, 00 cm. A área hachurada é de ______cm^2



a) 20

b) 22

c) 23

d) 25

29. (EEAR/2017)

Ao somar o número de diagonais e o número de lados de um dodecágono obtém-se

a) 66

b) 56

c) 44

d) 42

30. (EEAR/2017)

O polígono regular cujo ângulo externo mede $24°$ tem lados.

a) 20

b) 15

c) 10

d) 5

31. (EEAR/2016)

O lado, o perímetro e a área de um triângulo equilátero, nesta ordem, são termos de uma Progressão Geométrica. Assim, a medida da altura desse triângulo equilátero é _____ unidades de comprimento.

a) $12\sqrt{3}$

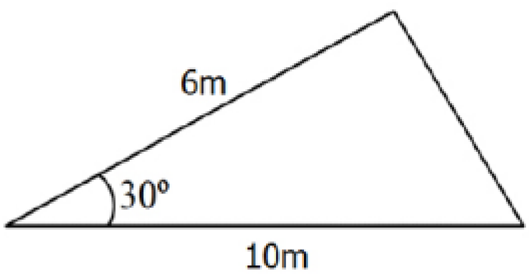
b) $6\sqrt{3}$

c) 3

d) 18

32. (EEAR/2016)

Assinale a alternativa que representa, corretamente, a área do triângulo esboçado na figura abaixo.



a) $15\ m^2$

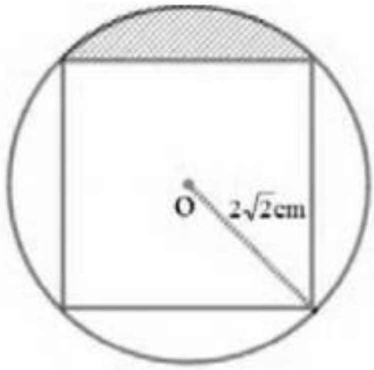
b) $30\sqrt{2}\ m^2$

c) $15\sqrt{3}\ m^2$

d) $30\sqrt{3}\ m^2$

33. (EEAR/2016)

A figura abaixo apresenta um quadrado inscrito em um círculo de raio $2\sqrt{2}\ cm$ e centro O



Considerando $\pi = 3$, a área da região hachurada é igual a ______cm^2

a) 2

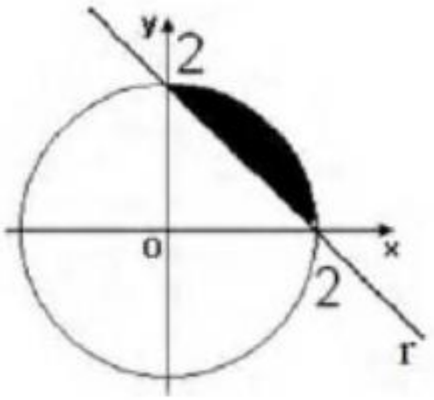
b) 8

c) 16

d) 24

34. (EEAR/2016)

A figura abaixo ilustra um círculo com centro em O, origem do plano cartesiano, e uma reta r.



Considerando tal figura, a área da região sombreada corresponde a

a) $2\pi - 4$

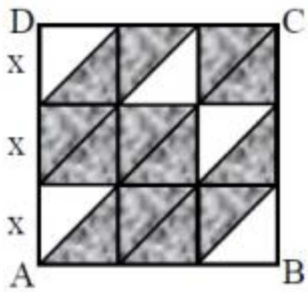
b) $2\pi - 2$

c) $\pi - 4$

d) $\pi - 2$

35. (EEAR/2015)

Na figura, ABCD é um quadrado formado por pequenos quadrados de lado x divididos por uma de suas diagonais.



Assim, a área sombreada, em função de x é

a) $\frac{15x^2}{2}$

b) $\frac{13x^2}{2}$

c) $5,5x^2$

d) $3,5x^2$

36. (EEAR/2015)

Considere um quadrado de diagonal $5\sqrt{2}\ m$ **e um losango de diagonais** $6\ m$ **e** $4\ m$**. Assim, a razão entre as áreas do quadrado e do losango é aproximadamente igual a**

a) 3,5

b) 3,0

c) 2,5

d) 2,1

37. (EEAR/2015)

Em um pedaço de papel de formato quadrado foi desenhado um círculo de raio $10\ cm$. Se o papel tem $20\ cm$ de lado e considerando $\pi = 3,14$, a área do papel, em cm^2, não ocupada pelo círculo é igual a

a) 82

b) 86

c) 92

d) 96

38. (EEAR/2015)

Um triângulo isósceles de base $10\ cm$ e perímetro $36\ cm$ tem ______ cm^2 de área

a) 75

b) 72

c) 60

d) 58

39. (EEAR/2015)

Se um dos ângulos internos de um pentágono mede $100°$, então a soma dos outros ângulos internos desse polígono é

a) $110°$

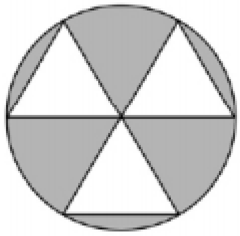
b) $220°$

c) $380°$

d) $440°$

40. (EEAR/2014)

A figura é formada por um círculo de raio $R = 4\ cm$ e três triângulos equiláteros de lados congruentes ao raio do círculo.



Os triângulos têm apenas um ponto de intersecção entre si e dois vértices na circunferência. A área hachurada, em cm^2, é

a) $6\pi - 12\sqrt{3}$

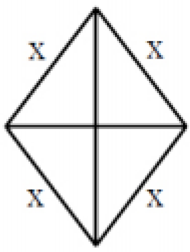
b) $16\pi - 6\sqrt{3}$

c) $12\pi - 8\sqrt{3}$

d) $16\pi - 12\sqrt{3}$

41. (EEAR/2014)

A área de um losango é $24\ cm^2$. Se uma das diagonais desse losango mede $6\ cm$, o lado dele, em cm, mede



a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

42. (EEAR/2014)

Em uma circunferência de raio $r = 6\ cm$, a área de um setor circular de $30°$ é ______$\pi\ cm^2$.

a) 3

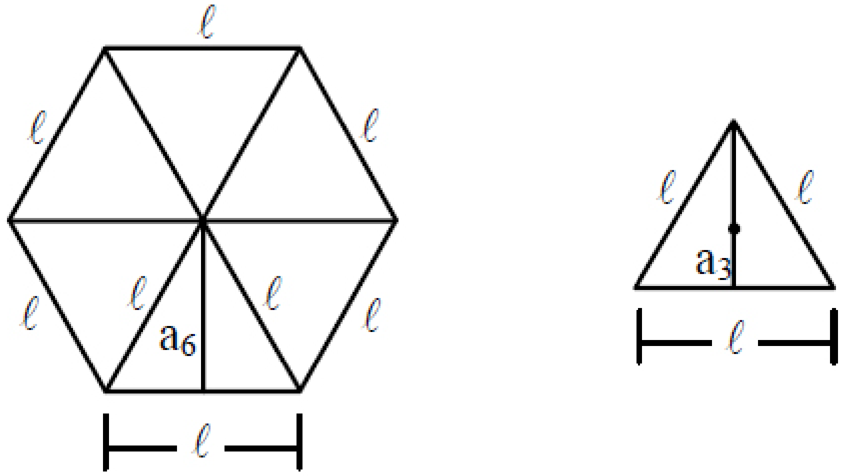
b) 4

c) 5

d) 6

43. (EEAR/2014)

Sejam um hexágono regular e um triângulo equilátero, ambos de lado l. A razão entre os apótemas do hexágono e do triângulo é



a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

44. (EEAR/2013)

Se A é o número de diagonais de um icoságono e B o número de diagonais de um decágono, então $A - B$ é igual:

a) 85

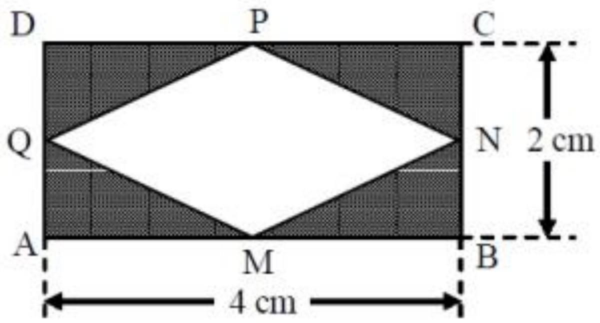
b) 135

c) 165

d) 175

45. (EEAR/2013)

Considere o retângulo ABCD, e os pontos médios dos seus lados M, N, P e Q.



Unindo esses pontos médios, conforme a figura, pode-se concluir que a área hachurada, em cm^2, é

a) 8

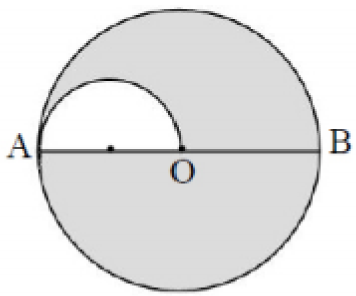
b) 4

c) $4\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2}$

46. (EEAR/2013)

Na figura, $AB = 8\ cm$ é o diâmetro do círculo de centro O e AO é o diâmetro do semicírculo.



Assim, a área sombreada dessa figura é ______$\pi\ cm^2$.

a) 14

b) 13

c) 11

d) 10

47. (EEAR/2013)

A razão r entre o apótema e o lado de um hexágono regular é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3}$

48. (EEAR/2011)

Os números que expressam as medidas, em cm ou em cm^2, do lado, da superfície e do perímetro de um quadrado, dados nessa ordem, formam uma P.A. O lado desse quadrado, em cm, mede

a) $\frac{5}{2}$

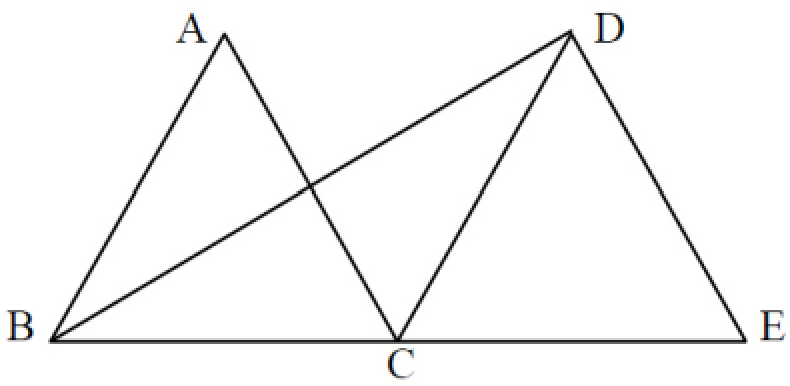
b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{2}$

49. (EEAR/2011)

Na figura, $\overline{BC}$ e $\overline{CE}$ são segmentos colineares de $4\ cm$ cada um.



Se os triângulos ABC e DCE são equiláteros, a área do triângulo BDE é

a) $4\sqrt{3}$

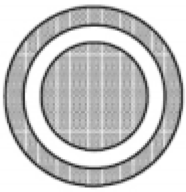
b) $6\sqrt{3}$

c) $8\sqrt{3}$

d) $10\sqrt{3}$

50. (EEAR/2011)

Considere a figura composta de três círculos concêntricos de raios medindo, respectivamente, $5\ cm$, $4\ cm$ e $3\ cm$. A área, em cm^2, da parte hachurada é



a) 9π

b) 16π

c) 18π

d) 24π

51. (EEAR/2011)

Um polígono convexo ABCD é tal que apenas dois de seus lados são paralelos entre si e os outros dois lados são congruentes. Dessa forma, pode-se dizer que ABCD é um

a) losango.

b) paralelogramo.

c) trapézio isósceles.

d) trapézio retângulo.

52. (EEAR/2011)

Um quadrado e um triângulo equilátero estão inscritos em uma circunferência de raio R. A razão entre as medidas dos apótemas do quadrado e do triângulo é

a) $\sqrt{2}$

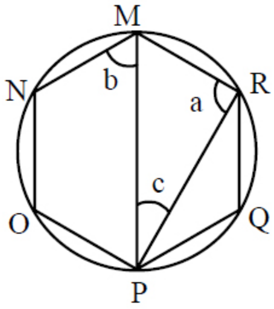
b) $\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{2}$

53. (EEAR/2011)

Se $MNOPQR$ é um hexágono regular inscrito na circunferência, então $a + b - c$ é igual a



a) $150°$.

b) $120°$.

c) $100°$.

d) $90°$.

54. (EEAR/2010)

Seja um retângulo de comprimento c e largura l. Aumentando-se o comprimento em $\frac{1}{10}$ do seu valor, para que a área não se altere, a sua largura deverá ser igual a

a) $\frac{1}{10}l$

b) $\frac{10}{11}l$

c) $\frac{9}{11}l$

d) $\frac{9}{10}l$

55. (EEAR/2010)

Um setor circular, cujo arco mede $15\ cm$, tem $30\ cm^2$ de área. A medida do raio desse setor, em cm, é

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

56. (EEAR/2009)

A área de um setor circular de $30°$ e raio 6 cm, em cm^2, é, aproximadamente,

a) $7,48$

b) $7,65$

c) $8,34$

d) $9,42$

57. (EEAR/2009)

O perímetro de um losango é $20\ cm$. Se sua diagonal maior tem o dobro da medida da menor, então sua área, em cm^2, é

a) 35

b) 30

c) 25

d) 20

58. (EEAR/2009)

Com 4 palitos de mesmo comprimento, forma-se um quadrado com $x\ cm^2$ de área e $y\ cm$ de perímetro. Se $x - y = 0$, o comprimento de cada palito, em cm, é

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

59. (EEAR/2009)

Um triângulo de $40\sqrt{2}\ cm^2$ de área tem dois de seus lados medindo $10\ cm$ e $16\ cm$. A medida do ângulo agudo formado por esses lados é

a) $70°$

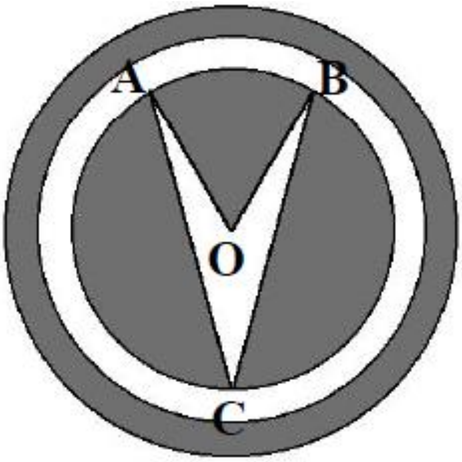
b) $60°$

c) $45°$

d) $30°$

60. (EEAR/2009)

No logotipo, OA, OB e OC são raios da menor das três circunferências concêntricas. A região acinzentada desse logotipo é composta de



a) dois setores circulares, duas coroas circulares e dois segmentos circulares.

b) um setor circular, uma coroa circular e dois segmentos circulares.

c) um setor circular, duas coroas circulares e um segmento circular.

d) dois setores circulares, uma coroa circular e um segmento circular.

61. (EEAR/2008)

O lado de um eneágono regular mede $2,5cm$. O perímetro desse polígono, em cm, é

a) 15.

b) 20.

c) 22,5.

d) 27,5.

62. (EEAR/2008)

Em um polígono regular, a medida de um ângulo interno é o triplo da medida de um ângulo externo. Esse polígono é o:

a) hexágono.

b) octógono.

c) eneágono.

d) decágono.

63. (EEAR/2008)

Se $S = 6L\ cm^2$ é a área de um quadrado de lado $L\ cm$, o valor de L é

a) 3

b) 6

c) 9

d) 12

64. (EEAR/2007)

Dois círculos concêntricos têm $4\ m$ e $6\ m$ de raio. A área da coroa circular por eles determinada, em m^2, é

a) 2π

b) 10π

c) 20π

d) 52π

65. (EEAR/2007)

Os lados de um triângulo medem $7\ cm$, $8\ cm$ e $9\ cm$. A área desse triângulo, em cm^2, é

a) $12\sqrt{3}$

b) $12\sqrt{5}$

c) $8\sqrt{2}$

d) $8\sqrt{3}$

66. (EEAR/2007)

S_6 e S_3 são, respectivamente, as áreas do hexágono regular e do triângulo equilátero, ambos inscritos na mesma circunferência. Nessas condições, a relação verdadeira é

a) $S_6 = S_3$

b) $S_6 = 3S_3$

c) $S_6 = 2S_3$

d) $S_3 = 2S_6$

67. (EEAR/2007)

Um triângulo isósceles tem perímetro igual a $36\ cm$ e altura relativa à base medindo $12\ cm$. A área desse triângulo, em cm^2, é

a) 60

b) 56

c) 48

d) 40

68. (EEAR/2007)

As medidas da diagonal menor e do perímetro de um losango são, respectivamente, $36\ cm$ e $120\ cm$. A área desse losango, em cm^2, é

a) 864

b) 728

c) 600

d) 548

69. (EEAR/2007)

A casa de João tem um quintal retangular de $30\ m$ por $20\ m$. Se ele usar 30% da área do quintal para fazer uma horta também retangular, de $10\ m$ de comprimento, então a largura desta horta, em m, será

a) 18

b) 15

c) 12

d) 11

70. (EEAR/2007)

Um trapézio isósceles tem bases medindo $12\ cm$ e $20\ cm$. Se a medida de um de seus lados oblíquos é $5\ cm$, então sua área, em cm^2, é

a) 25

b) 39

c) 48

d) 54

71. (EEAR/2007)

Dois polígonos convexos têm o número de lados expresso por n e por $n + 3$. Sabendo que um polígono tem 18 diagonais a mais que o outro, o valor de n é:

a) 10.

b) 8.

c) 6.

d) 4.

72. (EEAR/2006)

A razão entre as medidas dos apótemas do quadrado inscrito e do quadrado circunscrito numa circunferência de raio R é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) 2

d) $2\sqrt{3}$

73. (EEAR/2006)

Um hexágono regular $ABCDEF$, de $30\sqrt{3}\ cm$ de perímetro, está inscrito em um círculo de raio R. A medida de sua diagonal AC, em cm, é

a) $5\sqrt{3}$

b) 5

c) $15\sqrt{3}$

d) 15

74. (EEAR/2006)

Sejam $A, B\ e\ C$ três polígonos convexos. Se C tem 3 lados a mais que B, e este tem 3 lados a mais que A, e a soma das medidas dos ângulos internos dos três polígonos é 3240, então o número de diagonais de C é

a) 46.

b) 44.

c) 42.

d) 40.

75. (EEAR/2006)

Um quadrado e um losango têm o mesmo perímetro. Se as diagonais do losango estão entre si como 3 para 5, então a razão entre a área do quadrado e a do losango é

a) $\frac{17}{15}$

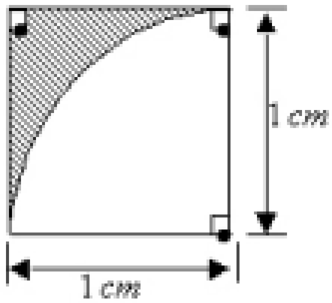
b) $\frac{13}{15}$

c) $\frac{17}{13}$

d) $\frac{11}{13}$

76. (EEAR/2006)

A área da região hachurada, em cm^2, é



a) $\frac{4-\pi}{4}$

b) $1-\frac{\pi}{2}$

c) $\frac{1-\pi}{4}$

d) $\pi-1$

77. (EEAR/2006)

A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 10 cm e o raio da circunferência nele inscrita mede 1 cm. A soma das medidas dos catetos desse triângulo é, em cm,

a) 10

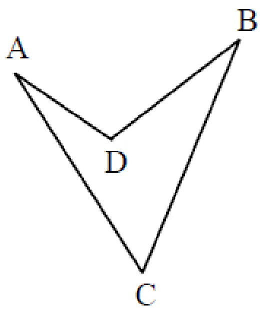
b) 12

c) 14

d) 16

78. (EEAR/2005)

Na figura, $B\widehat{C}A$ e $C\hat{A}D$, $A\widehat{D}B$ medem, respectivamente, $60°, 30°$ e $110°$. A medida de $D\widehat{B}C$ é:



a) $15°$

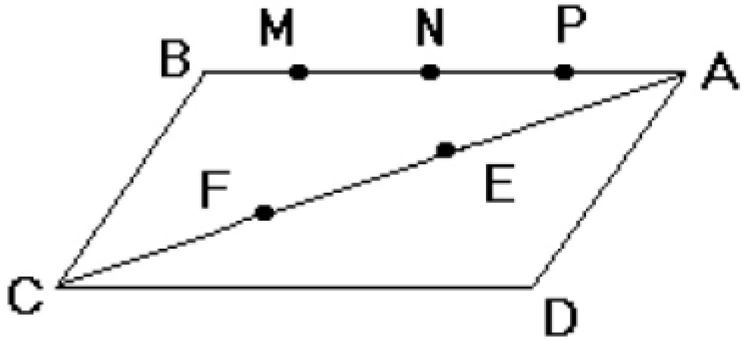
b) $20°$

c) $25°$

d) $30°$

79. (EEAR/2005)

Na figura, os pontos M, N e P dividem o lado $\overline{AB}$ do paralelogramo $ABCD$ em 4 partes iguais, e os pontos E e F dividem a diagonal $\overline{AC}$ em 3 partes iguais. A área do triângulo APE é uma fração da área do paralelogramo $ABCD$, equivalente a



a) $\frac{1}{12}$

b) $\frac{1}{16}$

c) $\frac{1}{20}$

d) $\frac{1}{24}$

80. (EEAR/2005)

Um círculo é tal que a medida de seu raio é igual aos $\frac{4}{7}$ da medida do comprimento de um setor circular que ele contém. Se a área desse setor é igual a $\frac{63}{8}\pi\ cm^2$, então a área do círculo, em cm^2, é

a) 9π

b) $9\pi^2$

c) 6π

d) $6\pi^2$

81. (EEAR/2004)

Em um triângulo equilátero de $12\sqrt{3}\,m$ de perímetro, a soma das medidas dos raios das circunferências inscrita e circunscrita a esse triângulo, em m, é

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

82. (EEAR/2004)

A medida, em m, do apótema do hexágono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede $4\sqrt{2}\,m$ é

a) $4\sqrt{3}$.

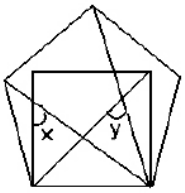
b) $2\sqrt{2}$.

c) $4\sqrt{6}$.

d) $2\sqrt{6}$.

83. (EEAR/2004)

Na figura, tem-se um pentágono regular e um quadrado. O valor de $x + y$ é:



a) $126°$

b) $102°$

c) $117°$

d) $114°$

84. (EEAR/2004)

As diagonais de um paralelogramo medem $10\,m$ e $20\,m$ e formam entre si um ângulo de $60°$. A área desse paralelogramo, em m^2, é

a) 200

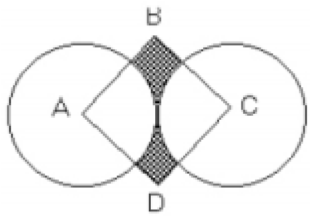
b) 100

c) $50\sqrt{3}$

d) $25\sqrt{3}$

85. (EEAR/2004)

Na figura, A e C são os centros de duas circunferências tangentes, e $ABCD$ é um quadrado de área igual a $50\ cm^2$.



A área da região sombreada é, em cm^2

a) $\frac{25(\pi-2)}{2}$

b) $\frac{25(4-\pi)}{2}$

c) $25(4-\pi)$

d) $25(\pi-2)$

86. (EEAR/2004)

Os lados de um paralelogramo medem 4 cm e 1 cm, e um ângulo formado por eles é de $60°$. A área desse paralelogramo, em cm^2, é

a) 2

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $2\sqrt{3}$

87. (EEAR/2004)

Num triângulo retângulo, as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa medem 6 cm e 24 cm. A área desse triângulo mede, em cm^2,

a) 180

b) $37\sqrt{11}$

c) 72

d) $36\sqrt{17}$

88. (EEAR/2003)

Observe:

I. É sempre possível construir um polígono regular de n lados, para $n > 3$.

II. Triângulo é, em todos os possíveis casos, inscritível em uma circunferência.

III. Um ângulo central $\widehat{a}_c$ de um polígono regular de n lados inscritos em uma circunferência mede $\frac{(n-2)180}{n}$

IV. Sempre é possível construir uma circunferência que passa pelos n vértices de um polígono qualquer.

Quantas das assertivas acima são falsas?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

89. (EEAR/2003)

As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de $24°$. O número de diagonais desse polígono é:

a) 70

b) 80

c) 90

d) 100

90. (EEAR/2003)

Um triângulo escaleno está inscrito num semicírculo de $10\ cm$ de diâmetro, que é o maior lado do triângulo. Se as medidas dos lados menores do triângulo são tais que uma é o dobro da outra, então a diferença entre as áreas do semicírculo e do triângulo, em cm^2, é

a) $\frac{25\pi-40}{2}$

b) $\frac{25\pi-30}{2}$

c) $\frac{25\pi-20}{2}$

d) $\frac{25\pi-50}{2}$

91. (EEAR/2003)

A, B e P são pontos distintos de uma circunferência de centro O e raio r. Se $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência, e a medida do ângulo $P\hat{A}B$, em radianos, é α, então a área da região limitada pelo ângulo $P\hat{A}B$ e o arco PB é igual a

a) $r\left(\alpha + r\frac{sen(\alpha)}{2}\right)$

b) $r^2\left(\alpha + \frac{sen(\alpha)}{2}\right)$

c) $r\left(\alpha + r\frac{sen(2\alpha)}{2}\right)$

d) $r^2\left(\alpha + \frac{sen(2\alpha)}{2}\right)$

92. (EEAR/2003)

Num retângulo $ABCD$, os vértices A, B, C e D são consecutivos. Marcam-se na base $\overline{AB}$, a partir de A, três pontos, E, F e G, de modo que eles assinalem, respectivamente, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$ da base $\overline{AB}$. A razão entre as áreas do triângulo CEF e do retângulo $ABCD$ é

a) $\frac{1}{4}$

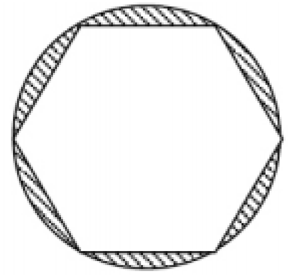
b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{10}$

93. (EEAR/2003)

Na figura, o lado do hexágono regular inscrito no círculo mede 4 cm.



A área da região hachurada da figura é, em cm^2:

a) $8\pi\sqrt{3}$

b) $\pi - 4\sqrt{3}$

c) $8(2\pi - 3\sqrt{3})$

d) $16(\pi - 2\sqrt{2})$

94. (EEAR/2003)

Um retângulo tem área T. Se aumentarmos a medida da sua base em 20%, e diminuirmos a medida da sua altura em 20%, obteremos um novo retângulo cuja área é igual a

a) T

b) 0,96T

c) 1,04T

d) 1,025T

95. (EEAR/2003)

O perímetro de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência é 54 cm. A área de um quadrado inscrito nessa mesma circunferência é, em cm^2,

a) 36

b) 72

c) 216

d) 288

96. (EEAR/2003)

Em um trapézio, os lados paralelos medem $16\ cm$ e $44\ cm$, e os lados não-paralelos, $17\ cm$ e $25\ cm$. A área do trapézio, em cm^2, é

a) 250

b) 350

c) 450

d) 550

97. (EEAR/2003)

Seja o triângulo PMN de lados $\overline{PM} = 6\ cm$, $\overline{MN} = 8\ cm$ e $\overline{PN} = 10\ cm$. Unindo-se os pontos médios de seus três lados obtemos o triângulo ABC. A área, em cm^2, do triângulo ABC é

a) 4

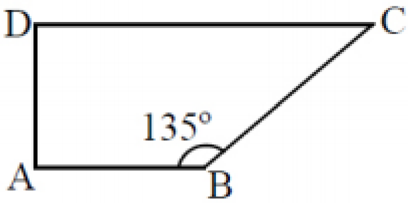
b) 6

c) 12

d) 20

98. (EEAR/2003)

A figura representa um trapézio retângulo com $\overline{AB} = \overline{AD}$, base menor igual a $3\ cm$ e $\overline{BC}$ é lado de um quadrado.



A área desse quadrado, em cm^2, é

a) 9

b) 18

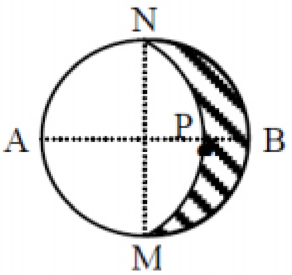
c) 24

d) 36

99. (EEAR/2003)

Na figura abaixo, $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são diâmetros perpendiculares de um círculo de raio $2\ cm$.

Traça-se o arco MPN de centro A e raio $\overline{AM}$. A área da região tracejada, em cm^2, é



a) 2

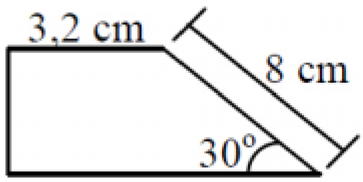
b) 4

c) 2π

d) $\pi + 4$

100. (EEAR/2003)

A área do trapézio retângulo (fig. Abaixo), em cm^2, é igual a (obs: utilize $\sqrt{3} = 1,7$)



a) 20.00

b) 26,40

c) 34,68

d) 40,80

101. (EEAR/2003)

Em uma circunferência estão inscritos um triângulo equilátero e um hexágono regular. O apótema do triângulo somado com o apótema do hexágono dá $12(\sqrt{3} + 1)\ cm$. O lado do triângulo, em cm, mede

a) $12\sqrt{3}$

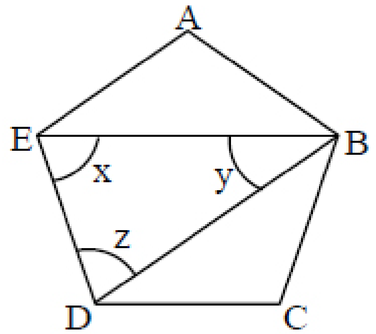
b) $16\sqrt{3}$

c) $20\sqrt{3}$

d) $24\sqrt{3}$

102. (EEAR/2002)

Na figura abaixo, $ABCDE$ é um pentágono regular.



As medidas dos ângulos x, y e z, em graus, são, respectivamente

a) $36°; 36°; 72°$

b) $72°; 36°; 72°$

c) $72°; 36°; 36°$

d) $36°; 72°$; **36°**

103. (EEAR/2002)

A soma dos ângulos internos e dos ângulos externos de um polígono regular vale $1800°$. O número de diagonais desse polígono é

a) $25.$

b) $35.$

c) $45.$

d) $55.$

104. (EEAR/2002)

Coloque V ou F conforme as afirmações sejam verdadeiras ou falsas:

( ) Dois ângulos adjacentes são suplementares.

( ) Dois ângulos que têm o mesmo complemento são congruentes.

( ) Dois ângulos suplementares são adjacentes.

( ) Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles.

( ) Um triângulo retângulo é escaleno.

Assinale a sequência correta.

a) F – V – F – V – V

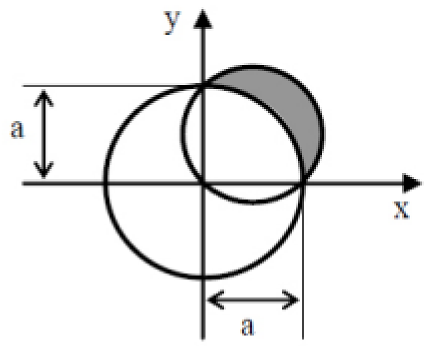
b) F – V – V – V – F

c) F – V – F – V – F

d) F – F – V – V – F

105. (EEAR/2002)

Na figura, considere o segmento $a = 2m$



A área da superfície sombreada é, em m^2, igual a

a) 2π

b) 4π

c) 2

d) 4

106. (EEAR/2002)

Num triângulo ABC têm-se $\overline{AB} = 2\ cm, B\widehat{A}C = 30°$ e $A\widehat{C}B = 45°$. A área do triângulo ABC, em cm^2, vale

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

107. (EEAR/2002)

A área de um retângulo, cujas diagonais medem $20\ m$ cada uma e formam entre si um ângulo de $60°$, em m^2, é

a) 100

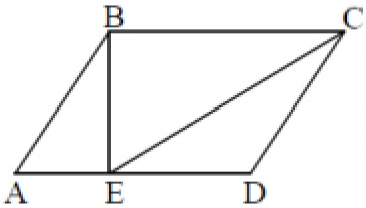
b) 200

c) $100\sqrt{3}$

d) $200\sqrt{3}$

108. (EEAR/2002)

No paralelogramo $ABCD$, tem-se que $\overline{BE} \perp \overline{AD}$; $\overline{BE} = 5\ cm$, $\overline{BC} = 12\ cm$ e $\overline{AE} = 4\ cm$.



A área do triângulo EDC, em cm^2 , é

a) 48

b) 30

c) 24

d) 20

109. (EEAR/2002)

Dado um quadrado de diagonal igual $\sqrt{2}\ cm$. Sobre cada lado do quadrado se constrói externamente um triângulo equilátero de lado igual ao do quadrado. A área da figura toda, assim obtida, é ____cm^2.

a) $2\sqrt{3}$

b) $1+\sqrt{3}$

c) $1+2\sqrt{3}$

d) $2+4\sqrt{3}$

110. (EEAR/2002)

A área, em cm^2, de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência cujo comprimento é de $8\pi\sqrt{3}\ cm$ é

a) $36\sqrt{3}$

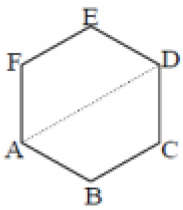
b) $64\sqrt{3}$

c) $72\sqrt{3}$

d) $144\sqrt{3}$

111. (EEAR/2002)

Dado o hexágono regular $ABCDEF$, a área do quadrilátero $ABCD$, em cm^2, sabendo-se que AB mede $6\ cm$, é



a) 54

b) $54\sqrt{3}$

c) $18\sqrt{3}$

d) $27\sqrt{3}$

112. (EEAR/2002)

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo regular é de $720°$. Sabendo-se que o seu lado mede $4\ cm$ e que ele está inscrito numa circunferência, então a área desse polígono, em cm^2, é

a) $6\sqrt{3}$

b) $12\sqrt{3}$

c) $18\sqrt{3}$

d) $24\sqrt{3}$

113. (EEAR/2002)

Se de um retângulo de perímetro 4 e dimensões x e $y, x < y$, retira-se um quadrado de lado x, então a área remanescente em função de x é

a) $1 - 2x$

b) $2x - 2x^2$

c) $x - 2x^2$

d) $2x - 4x^2$

114. (EEAR/2002)

A área de um triângulo de perímetro $54\ m$ circunscrito a um círculo de $25\pi\ m^2$, em m^2, é

a) 125

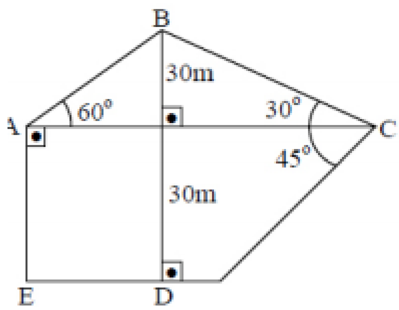
b) 130

c) 135

d) 140

115. (EEAR/2002)

Feito o levantamento de um terreno pentagonal, foram determinados os dados indicados na figura a seguir.



A área do terreno, em

a) 450

b) $450(4\sqrt{3}-1)$

c) 900

d) $900(3\sqrt{3}-2)$

116. (EEAR/2001)

Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmativas:

1^{a}: Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles.

2^{a}: Um triângulo isósceles pode ser retângulo.

3^{a}: Um triângulo isósceles não pode ser equilátero.

Assinale a alternativa correta:

a) Todas são falsas.

b) Todas são verdadeiras.

c) A 2^{a} é verdadeira e a 3^{a} é falsa.

d) A 1^{a} é falsa e a 3^{a} é verdadeira.

117. (EEAR/2001)

Se em um triângulo retângulo um dos catetos mede $2\sqrt{5}\ cm$ e a altura relativa à hipotenusa mede $\sqrt{2}\ cm$, então a área desse triângulo, em cm^2, é

a) $\frac{10}{3}$

b) $\frac{20}{3}$

c) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

d) $2\sqrt{10}$

118. (EEAR/2001)

De um pedaço quadrado de metal corta-se uma peça circular de diâmetro máximo, e desta corta-se outro quadrado de lado máximo. O material desperdiçado tem

a) $\frac{1}{4}$ **da área do quadrado original**

b) $\frac{1}{2}$ **da área do quadrado original**

c) $\frac{1}{2}$ **da área da peça circular**

d) $\frac{1}{4}$ **da área da peça circular**

119. (EEAR/2001)

Se a área da coroa circular definida por dois círculos concêntricos de raios r e $R, r < R$, é igual a área do círculo menor, então a razão $\frac{R}{r}$ é igual a:

a) 1

b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $2\sqrt{2}$

120. (EEAR/2001)

Um círculo de raio r e um retângulo de base b são equivalentes. Então, a altura do retângulo é:

a) $\sqrt{\pi r}$

b) $\pi r^2 b$

c) $\frac{\pi r^2}{b}$

d) $\frac{\pi r^2}{b^2}$

121. (EEAR/2001)

Um segmento AB, de $6\ metros$, é diâmetro de uma circunferência de centro O. Sendo C um ponto dessa circunferência, tal que a medida do ângulo $A\hat{B}C$ seja $30°$, a medida da superfície limitada pelas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e pelo arco AC, em metros quadrados, é:

a) $\frac{3}{4}(2\pi + 3\sqrt{3})$

b) $\frac{3}{2}(\pi + \sqrt{3})$

c) $\frac{9\pi\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

122. (EEAR/2001)

Se o raio de um círculo for aumentado de 100%, sua área aumentará de:

a) 100%

b) 200%

c) 300%

d) 400%

123. (EEAR/2001)

Em um círculo de $3\ cm$ de raio, a área e o perímetro de um setor circular de $60°$ (sessenta graus) são, respectivamente, em cm^2 e cm:

a) $1,5\pi$ e $(\pi + 6)$

b) $1,5\pi$ e π

c) π e $(\pi + 6)$

d) 6π e π

124. (EEAR/2001)

A soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono convexo é $3600°$. O número de diagonais desse polígono é um número:

a) par divisível por 15.

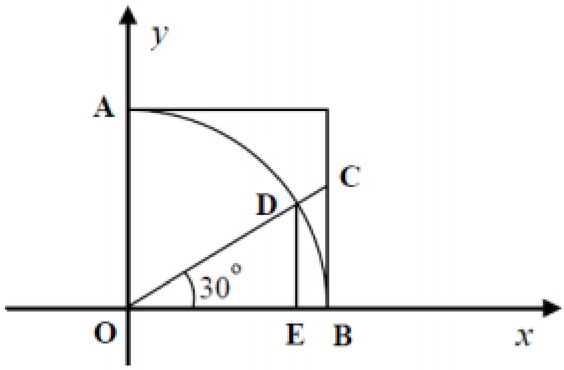
b) par maior que 150.

c) ímpar múltiplo de 19.

d) ímpar primo.

125. (EEAR/2000)

Na figura, AB é um arco de circunferência de centro O e de raio $1\ cm$. A área do trapézio retângulo $BCDE$, em cm^2, é



a) $\frac{\sqrt{3}}{24}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{18}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{12}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

126. (EEAR/2000)

Consideremos um triângulo retângulo que simultaneamente está circunscrito à circunferência C_1 e inscrito na circunferência C_2. Sabendo-se que a soma dos comprimentos dos catetos do triângulo é $k\ cm$, então, a soma dos comprimentos dessas duas circunferências, em cm, é

a) $\frac{4k\pi}{3}$

b) $\frac{2k\pi}{3}$

c) $k\pi$

d) $2k\pi$

3.1. GABARITO

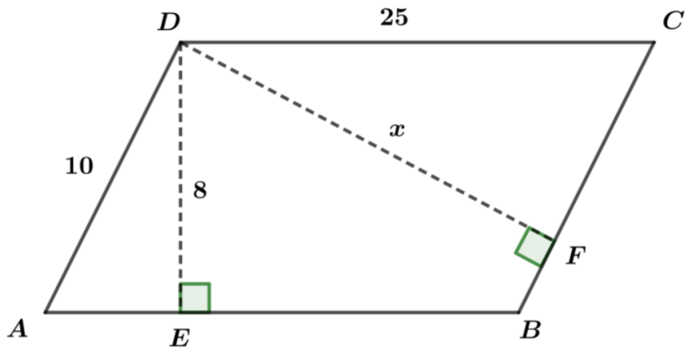
1. b
2. a
3. c
4. c
5. a
6. e
7. a
8. e
9. d
10. c
11. e
12. b
13. e
14. d
15. a
16. e
17. a
18. c

19. a
20. d
21. e
22. b
23. d
24. b
25. d
26. a
27. b
28. c
29. a
30. b
31. d
32. a
33. a
34. d
35. b
36. d
37. b
38. c
39. d
40. d
41. b
42. a
43. b
44. b
45. b
46. a
47. a
48. a
49. c
50. c
51. c
52. a
53. b
54. b
55. a
56. d
57. d
58. b
59. c
60. b
61. c
62. b
63. b
64. c
65. b
66. c
67. a
68. a
69. a
70. c
71. d
72. a
73. d
74. b
75. a
76. a
77. b
78. b
79. d
80. b
81. b
82. d
83. c
84. c
85. b
86. d
87. a
88. b
89. c
90. a
91. d
92. c
93. c
94. b
95. c
96. c
97. b
98. b
99. b
100. b
101. d .
102. b
103. b
104. c
105. c
106. a
107. c
108. d
109. b
110. a
111. d
112. d
113. b
114. c
115. b
116. c
117. a
118. b
119. b
120. c
121. a
122. c
123. a
124. b
125. a
126. c

4. LISTA DE QUESTÕES COMENTADAS

1. (EEAR/2021)

A figura, se ABCD é um paralelogramo, então o valor de x é



a) 18

b) 20

c) 22

d) 24

Comentários

Podemos calcular a área do paralelogramo de duas formas diferentes:

$$A = AD \cdot DF = CD \cdot DE$$

$$10x = 25 \cdot 8$$

$$10x = 200$$

$$x = 20$$

Gabarito: B

---

2. (EEAR/2021)

A diferença entre as medidas de um ângulo interno de um dodecágono regular e de um ângulo interno de um octógono também regular é

a) $15°$

b) $25°$

c) $30°$

d) $40°$

Comentários

O ângulo interno de um polígono regular é dado por:

$$a_i = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

Para o dodecágono, temos $n = 12$:

$$a_{12} = \frac{(12-2)\cdot 180°}{12} = \frac{1800°}{12} = 150°$$

Para o octógono, temos $n = 8$:

$$a_8 = \frac{(8-2)\cdot 180°}{8} = \frac{6\cdot 180°}{8} = 135°$$

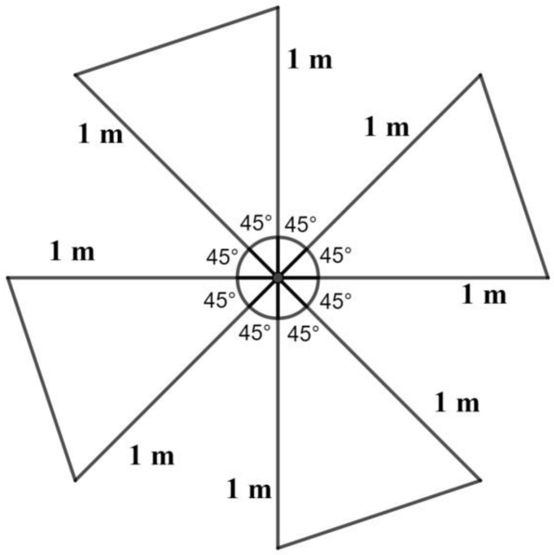
Portanto, $a_{12} - a_8 = 15°$.

Gabarito: A

---

3. (EEAR/2021)

A figura representa a parte de um móvel de um cata-vento (4 hélices triangulares planas). Se o material utilizado para a confecção dessas hélices custa R$ 300,00 o m^2, e considerando $\sqrt{2} = 1,4$, o custo dessas peças, em R$, foi de



a) 280

b) 340

c) 420

d) 560

Comentários

Note que os triângulos da figura são isósceles. Podemos calcular as áreas de cada triângulo dessa forma:

$$A = \frac{1 \cdot 1 \cdot sen45°}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Como são 4 triângulos:

$$A_T = 4A = \sqrt{2} = 1{,}4\, m^2$$

O preço por m^2 é R$ 300,00, logo:

$$C_T = 300 \cdot 1{,}4 = 420$$

Gabarito: C

---

4. (ESA/2019)

Em um triângulo equilátero ABC inscreve-se um quadrado MNOP de área 3m². Sabe-se que o lado MN está contido em AC, o ponto P pertence a AB e o ponto O pertence a BC. Nessas condições, a área, em m², do triângulo ABC mede:

a) $\frac{7\sqrt{3}+6}{4}$

b) $\frac{7\sqrt{3}+6}{4}$

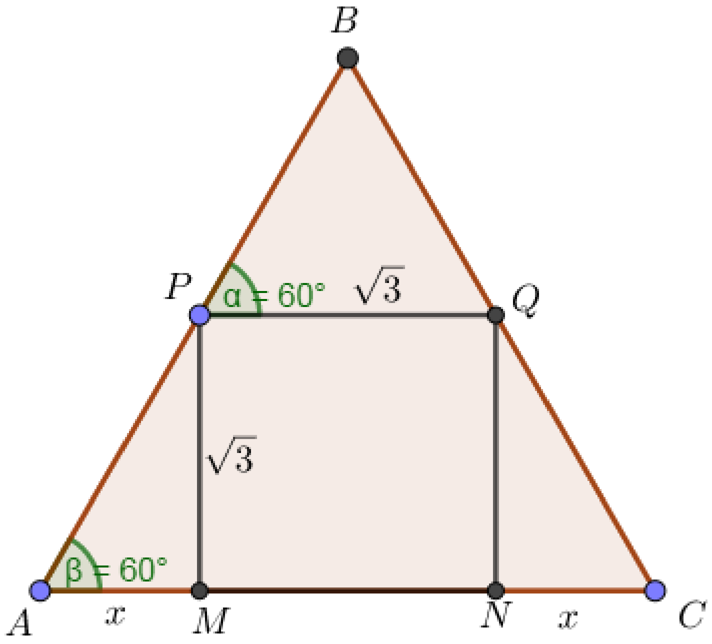
c) $\frac{7\sqrt{3}+12}{4}$

d) $\frac{21\sqrt{3}+18}{2}$

e) $\frac{21\sqrt{3}+36}{4}$

Comentários

Se a área do quadrado inscrito é 3, então seu lado é $l = \sqrt{3}$. Fazendo o desenho do problema.



Como BPQ é também equilátero de lado $\sqrt{3}$, sua altura então mede:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

Portanto a altura de ABC relativa a AC é:

$$H = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \sqrt{3} + h = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2} \Rightarrow AC = 2 + \sqrt{3}$$

Assim, a área do triângulo, portanto, é:

$$[ABC] = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(7 + 4\sqrt{3})\sqrt{3}}{4} = \frac{7\sqrt{3} + 12}{4}$$

Gabarito: "c".

---

5. (ESA/2016)

A área do triângulo equilátero cuja altura mede $6\ cm$ é:

a) $12\sqrt{3}\ cm^2$

b) $4\sqrt{3}\ cm^2$

c) $24\sqrt{3}\ cm^2$

d) $144\ cm^2$

e) $6\sqrt{3}\ cm^2$

Comentário:

Aplicação direta de fórmulas. Sendo l o lado e h a altura e A a área do triângulo, temos:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}; h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h^2 = l^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow h^2 = A \cdot \sqrt{3} \therefore A = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$$

Logo,

$$A = \frac{(6\ cm)^2\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}\ cm^2$$

Gabarito: "a".

---

6. (ESA/2014)

Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de diâmetro $4\ cm$. O perímetro desse hexágono, em cm, é

a) 4.

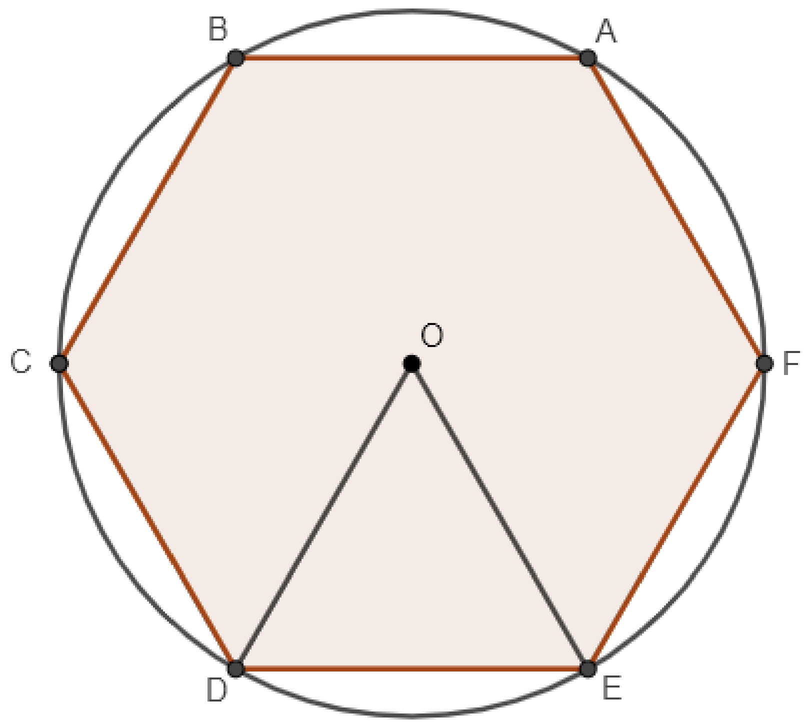
b) 8.

c) 24.

d) 6.

e) 12.

Comentário:



Sendo $r = \frac{4\,cm}{2} = 2\,cm$ o raio da circunferência, o lado l do hexágono também vale $l = 2\,cm$, pois:

$$D\hat{O}E = \frac{360°}{6} = 60°$$

ΔDOE isósceles de base DE, pois $OD = OE = r$. Logo, $E\hat{D}O = D\hat{E}O = \alpha$. A soma dos ângulos internos de ΔDOE é, então, $180° = 2\alpha + 60° \Rightarrow \alpha = 60° \Rightarrow \Delta DOE$ é equilátero $\therefore l = r$.

Assim, o perímetro do hexágono é $6l = 6r = 3 \cdot 2r = 3 \cdot 4\,cm = 12\,cm$.

Gabarito: "e".

---

7. (ESA/2009)

As diagonais de um losango medem $48\,cm$ e $33\,cm$. Se a medida da diagonal maior diminuir $4\,cm$, então, para que a área permaneça a mesma, deve-se aumentar a medida da diagonal menor de:

a) $3\,cm$

b) $5\,cm$

c) $6\,cm$

d) $8\,cm$

e) $9\ cm$

Comentário:

Se D e d são as diagonais maior e menor de um losango, respectivamente, então a área vale

$$\frac{D \cdot d}{2}$$

Logo, sendo D' e d' as novas medidas das diagonais, temos:

$$D = 48 \Rightarrow D' = 48 - 4 = 44\ cm$$

Áreas iguais $\Rightarrow \frac{D \cdot d}{2} = \frac{D' \cdot d'}{2} \Rightarrow 48 \cdot 33 = 44 \cdot d' \therefore d' = 36$

Portanto, a diagonal menor aumentou $d' - d = 36 - 33 = 3\ cm$.

Gabarito: "a".

---

8. (ESA/2007)

Se um polígono regular é tal que a medida de um ângulo interno é o triplo da medida do ângulo externo, o número de lados desse polígono é:

a) 12

b) 9

c) 6

d) 4

e) 8

Comentário:

Seja n o número de lados do polígono regular em questão. Temos que o ângulo interno α_n e o externo β_n medem:

$$\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

$$\beta_n = \frac{360°}{n}$$

Fazendo $\alpha_n = 3\beta_n$, obtemos:

$$3 = \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\frac{n-2}{n} \cdot 180°}{\frac{360°}{n}} = \frac{n-2}{2} \therefore n = 8$$

Gabarito: “e”.

---

9. (ESA/2007)

Considere um polígono regular $ABCDEF$ ... .Sabe-se que as mediatrizes dos lados AB e CD formam um ângulo de $20°$ e sua região correspondente contém os vértices B e C do polígono. Assim sendo, quantas diagonais deste polígono passam pelo centro, dado que o seu número de vértices é maior que seis?

a) 17

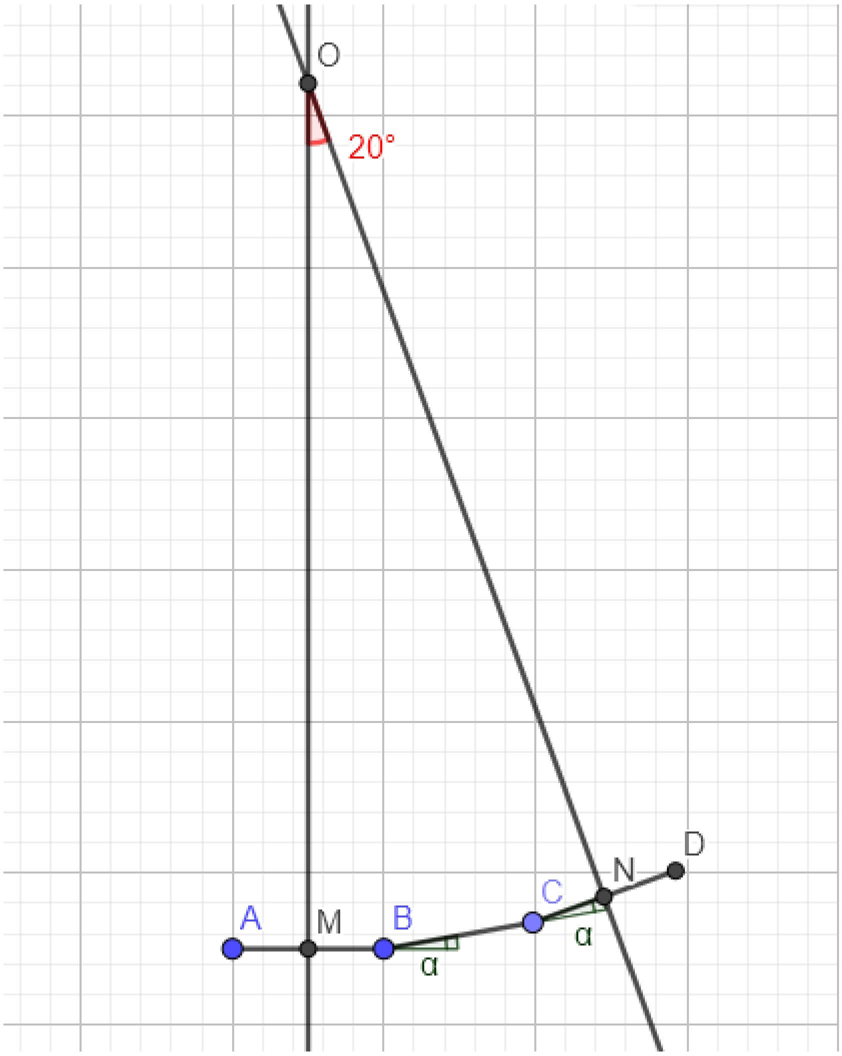
b) 15

c) 16

d) 18

e) 14

Comentário:



Seja α o ângulo externo do polígono em questão. Perceba, pela imagem acima, que devemos ter $2\alpha = 20°$. Uma maneira fácil de enxergar isso é a seguinte: Pensa que você é uma formiga que está no ponto A e quer chegar no ponto D, andando pelos lados do polígono. Você vai ter que virar à esquerda duas vezes, fazendo uma curva de $10°$ a cada vez. Uma outra maneira de perceber isso é que o ângulo $M\hat{O}N$ vale

$$M\hat{O}N = 20° = M\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}N = \frac{360°}{2n} + \frac{360°}{n} + \frac{360°}{2n} = \frac{\alpha}{2} + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 2\alpha,$$

Sendo n o número de lados do polígono. Portanto, temos:

$$\alpha = \frac{360°}{n} = 10° \therefore n = 36.$$

Como o número de lados do polígono regular n é par, a única diagonal, partindo de um dado vértice, é a que vai ao vértice diametralmente oposto. Portanto, como o número de pares de vértices é

$$\frac{36}{2} = 18,$$

temos que há 18 diagonais que passam pelo centro.

Gabarito: "d".

---

10. (ESA/2007)

Aumentando-se os lados a e b de um retângulo de 15% e 20%, respectivamente. a área do retângulo é aumentada em:

a) $3,8\%$

b) 4%

c) 38%

d) 35%

e) $3,5\%$

Comentário:

Sejam A e B os lados do novo retângulo, s e S as áreas do retângulo antigo e do novo retângulo, respectivamente. Temos:

$$\frac{S}{s} = \frac{AB}{ab} = \left(\frac{A}{a}\right) \cdot \left(\frac{B}{b}\right) = (1 + 15\%) \cdot (1 + 20\%) = 1{,}15 \cdot 1{,}20 = 1{,}38 = 1 + 38\%$$

$\therefore$ A área do retângulo aumentou em 38%.

Gabarito: "c".

---

11. (ESA/2006)

Em um triângulo ABC tem-se $AB = 10\ cm$ e $AC = 12\ cm$. O incentro I e o baricentro G estão em uma mesma paralela a BC. A medida do lado BC é igual a:

a) 10

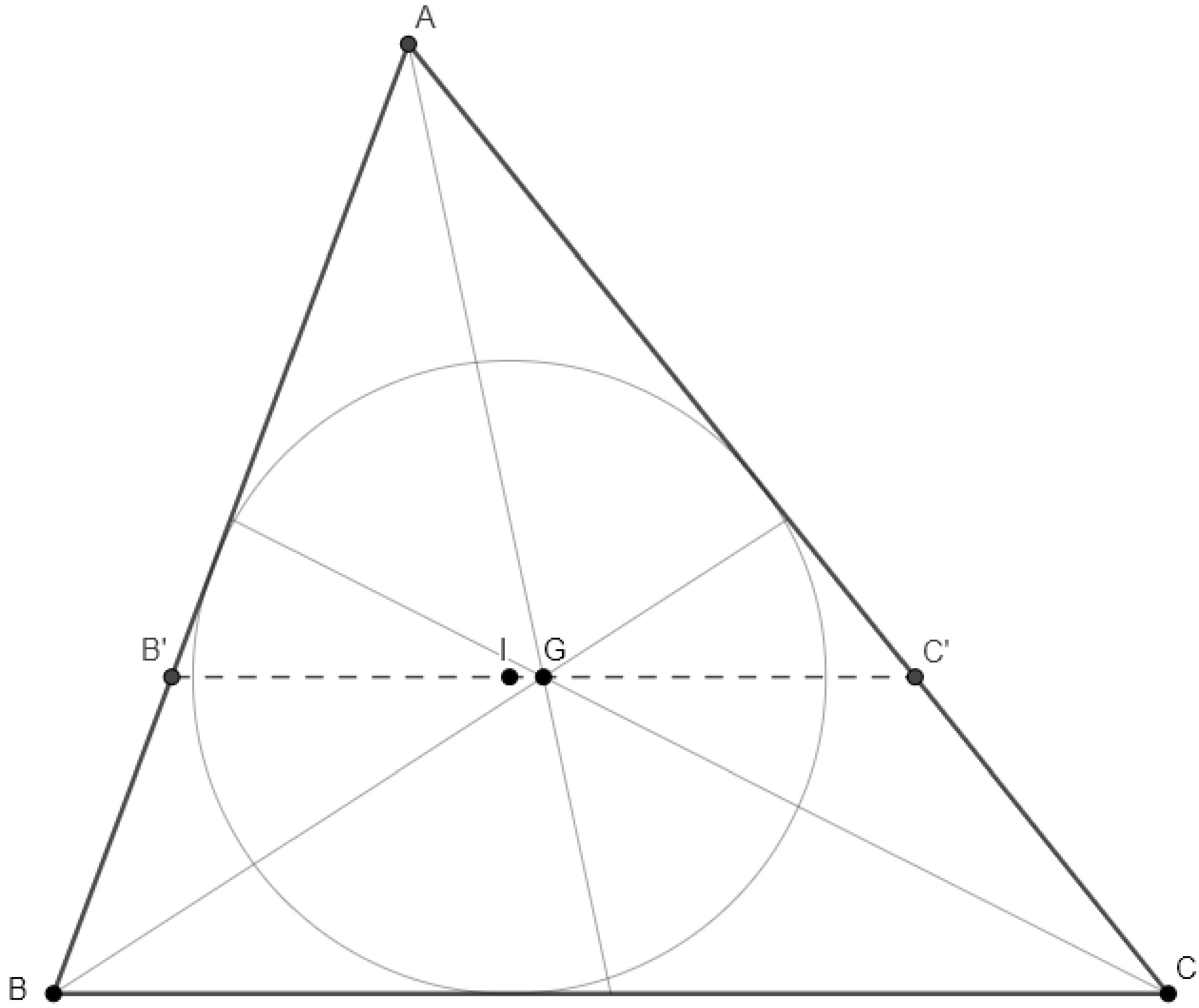
b) 5

c) 12

d) 6

e) 11

Comentário:



Como o incentro I e o baricentro G estão sobre a reta $B'C'$ paralela ao lado BC, temos que a altura h de G em relação ao lado BC é igual à altura de I em relação ao lado BC, que por sua vez vale r, o raio da circunferência inscrita, cujo centro é o incentro I, isto é, temos $h = r$. Além disso, como em qualquer triângulo ABC a área de um triângulo formado por dois vértices com o baricentro vale um terço da área do triângulo maior, temos que, representando a área de um triângulo com [colchetes], temos:

$$[GBC] = \frac{1}{3} \cdot [ABC]$$

$$[GBC] = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h$$

$$[ABC] = p \cdot r$$

$$p = \frac{(AB + BC + CA)}{2}$$

Nas fórmulas acima, p é o semiperímetro de ΔABC. Juntando as fórmulas, obtemos:

$$[GBC] = \frac{1}{3} \cdot [ABC] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = \frac{1}{3} \cdot p \cdot r \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot BC \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \frac{(AB + BC + CA)}{2} \cdot r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow BC = \frac{1}{3} \cdot (AB + BC + CA) \Leftrightarrow 3 \cdot BC = AB + BC + CA \Leftrightarrow BC = \frac{AB + AC}{2} = \frac{10 + 12}{2}$$

$$\therefore BC = 11$$

Gabarito: "e".

---

12. (ESA/2006)

Um trabalhador gasta 5 horas para limpar um terreno circular de $8\ m$ de raio. Ele cobra $R\$4,00$ por hora de trabalho. Para limpar um terreno circular de $24\ m$ de raio, o trabalhador cobrará, em reais:

a) 40

b) 180

c) 60

d) 120

e) 80

Comentário:

Como o preço é proporcional ao tempo de serviço e o tempo de serviço é proporcional à área, temos que calcular a proporção entre as áreas dos terrenos. Temos que o círculo de $24\ m$ é x vezes maior que o de $8\ m$ em área, sendo x igual a:

$$x = \frac{\pi \cdot (24\ m)^2}{\pi \cdot (8\ m)^2} = \left(\frac{24}{8}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Assim, o trabalhador levará 9 vezes mais tempo, isto é, gastará $5 \cdot 9 = 45$ horas para limpar o terreno circular de $24\ m$ de raio. Assim, cobrará

$$\left(\frac{R\$4{,}00}{hora}\right) \cdot 45\ horas = R\$180{,}00.$$

Gabarito: "b".

---

13. (ESA/2006)

As bases de um trapézio medem $19\ m$ e $9\ m$ e os lados não paralelos, $6\ m$ e $8\ m$. A área desse trapézio, em dm^2 é:

a) 6072

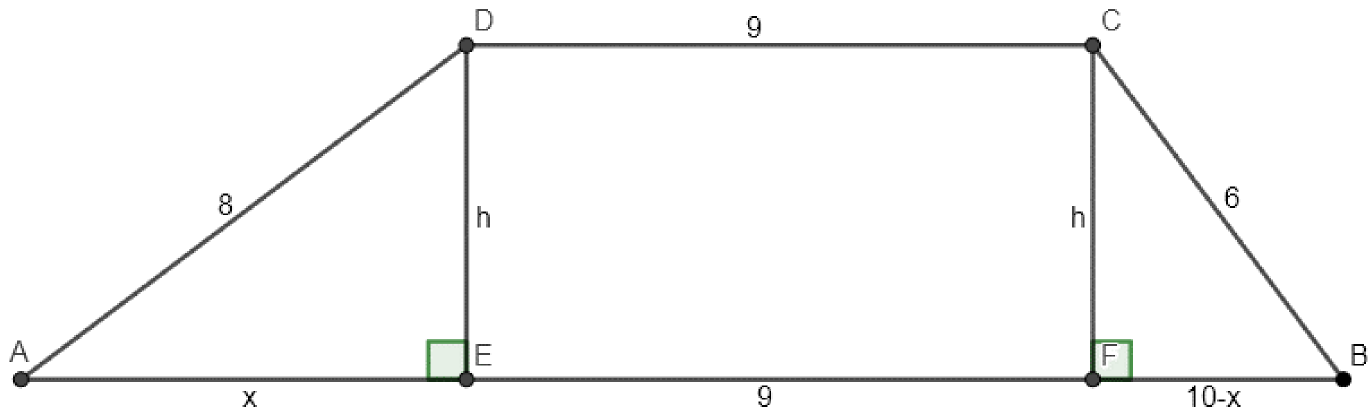
b) 6270

c) 6027

d) 6702

e) 6720

Comentário:



Pelo teorema de Pitágoras, nos triângulos ΔAED e ΔBFC, temos:

$$\Delta AED \Rightarrow x^2 + h^2 = 8^2$$

$$\Delta BFC \Rightarrow (10 - x)^2 + h^2 = 6^2$$

Subtraindo as duas equações acima:

$$x^2 - (10 - x)^2 = 8^2 - 6^2$$

Usando o produto notável $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$10 \cdot (2x - 10) = 14 \cdot 2 \therefore x = \frac{32}{5}$$

Voltando à primeira equação:

$$h^2 = 8^2 - x^2 = 8^2 - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = 8^2 - \left(8 \cdot \frac{4}{5}\right)^2 = 8^2 - 8^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 8^2\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) = 8^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\therefore h = 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5}$$

Portanto, temos que a área do trapézio vale:

$$A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h = \frac{(19 + 9)}{2} \cdot \frac{24}{5} = \frac{672}{10} m^2 = \frac{672}{10} m^2 \cdot \left(\frac{100\ dm^2}{1\ m^2}\right)$$

$$\therefore A = 6720\ dm^2.$$

Gabarito: "e".

---

14. (ESA/2006)

Um triângulo ABC tem área de $60\ cm^2$ e está circunscrito a uma circunferência com $5\ cm$ de raio. Nestas condições a área do triângulo equilátero que tem o mesmo perímetro que o triângulo ABC é, em cm^2:

a) $20\sqrt{3}$

b) $15\sqrt{3}$

c) $12\sqrt{3}$

d) $16\sqrt{3}$

e) $5\sqrt{3}$

Comentário:

Como o triângulo ΔABC está circunscrito à circunferência, então a circunferência é a circunferência inscrita ao triângulo ΔABC. Sendo $r = 5\ cm$ o raio da circunferência, S a área do triângulo ABC e p o seu semiperímetro, temos:

$$S = p \cdot r \therefore p = \frac{S}{r} = \frac{60\ cm^2}{5\ cm} = 12\ cm \therefore 2p = AB + BC + CA = 24\ cm.$$

Logo, um triângulo equilátero de lado l com o mesmo perímetro que o triângulo ABC seria tal que

$$3l = 24\ cm \therefore l = 8\ cm.$$

A área A do triângulo equilátero seria, portanto,

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(8\ cm)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\ cm^2.$$

Gabarito: "d".

---

15. (ESA/2006)

Se aumentarmos a medida do raio r de um círculo em 15%, obteremos um outro círculo de raio R. O aumento da área, em termos percentuais, foi de:

a) $32,25$

b) $32,52$

c) $3,252$

d) $3,225$

e) $3,522$

Comentário:

Sejam a a área do círculo de raio r e A a área do círculo de raio R. Temos:

$$R = r \cdot (1 + 15\%) = 1{,}15 \cdot r$$

$$A = \pi R^2 = \pi(1{,}15 \cdot r)^2 = \pi r^2 \cdot (1{,}15)^2 = a \cdot (1{,}15)^2$$

$\therefore A = a \cdot 1{,}3225 = a \cdot (1 + 32{,}25\%) \therefore$ O aumento percentual foi de $32{,}25\%$.

Gabarito: "a".

---

16. (ESA/2006)

Três circunferências de raio $2r$, $3r$ e $10r$ são tais que cada uma delas tangencia exteriormente as outras duas. O triângulo cujos vértices são os centros dessas circunferências tem área de:

a) $36r^2$

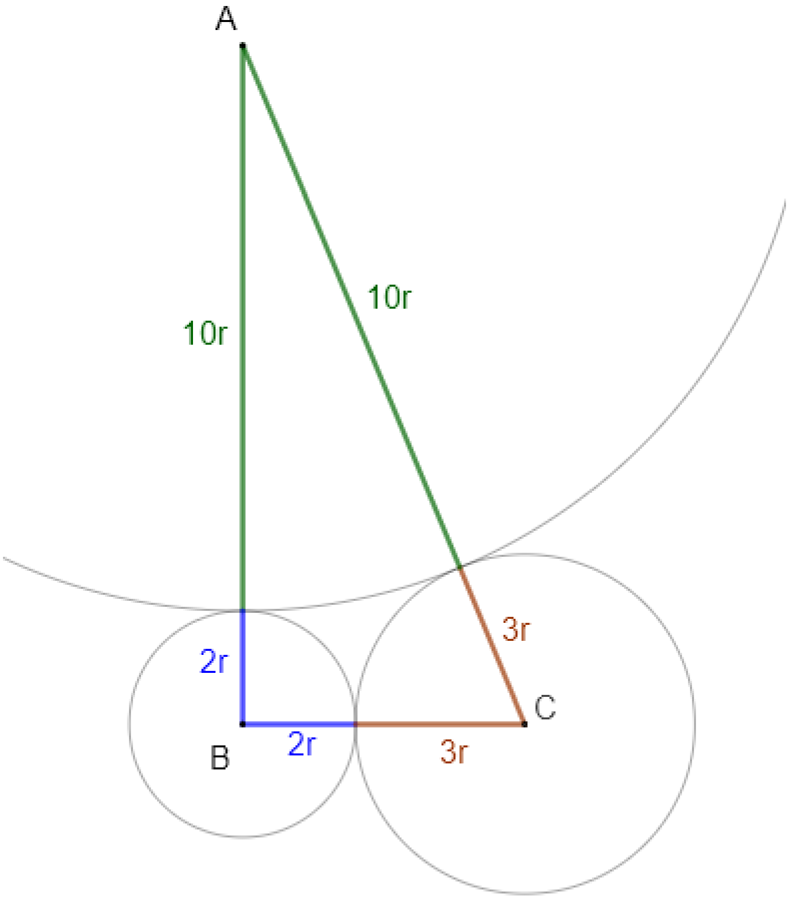
b) $18r^2$

c) $10r^2$

d) $20r^2$

e) $30r^2$

Comentário:



Podemos usar a fórmula de Heron. Denotando por A a área do triângulo ΔABC, por a, b, c os lados $BC, AC\ e\ AB$, respectivamente e por $p = \frac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro, temos que:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$a = 2r + 3r = 5r, b = 10r + 3r = 13r, c = 10r + 2r = 12r \Rightarrow p = \frac{5r + 13r + 12r}{2} = 15r$$

$$\therefore A = \sqrt{15r \cdot (15r - 5r) \cdot (15r - 13r) \cdot (15r - 12r)} = \sqrt{15r \cdot 10r \cdot 2r \cdot 3r} = \sqrt{900r^4} = 30r^2$$

Isso resolve a questão, mas o estudante atento poderia ganhar tempo percebendo que

$$b^2 = (13r)^2 = 169r^2 = 144r^2 + 25r^2 = (12r)^2 + (5r)^2 = c^2 + a^2 \therefore b^2 = c^2 + a^2$$

Ou seja, o triângulo ΔABC satisfaz o teorema de Pitágoras. Portanto, deve ser retângulo em B. Logo,

$$A = \frac{1}{2}(cateto_1) \cdot (cateto_2) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c = \frac{1}{2} \cdot (5r) \cdot (12r) = 30r^2$$

Gabarito: "e".

---

17. (ESA/2006)

Os lados de um triângulo medem, em centímetros, $2\sqrt{2}, \sqrt{6}$ e $\sqrt{14}$. Podemos afirmar que a área desse triângulo, em cm², é igual a metade de:

a) $4\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{7}$

c) $4\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{3}$

e) $\sqrt{7}$

Comentários

Analisando bem esses lados: $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$. Portanto, são $\sqrt{8}, \sqrt{6}\ e\ \sqrt{14}$. Mas veja que $8 + 6 = 14$, ou seja:

$$\left(\sqrt{14}\right)^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2$$

Assim, vemos que o triângulo só pode ser retângulo, de catetos $\sqrt{8}$ e $\sqrt{6}$ e hipotenusa $\sqrt{14}$. Assim, sua área é:

$$A = \sqrt{8} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{48}}{2} = \frac{\sqrt{16 \cdot 3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

Assim, A é a metade de $4\sqrt{3}$.

Gabarito: "a".

---

18. (ESA/2005)

Considere duas circunferências de raios iguais a 2 tal que, sobrepostas, cada uma passa pelo centro da outra. A área da região comum a ambas é:

a) $\frac{8\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

b) $4\pi - \sqrt{3}$

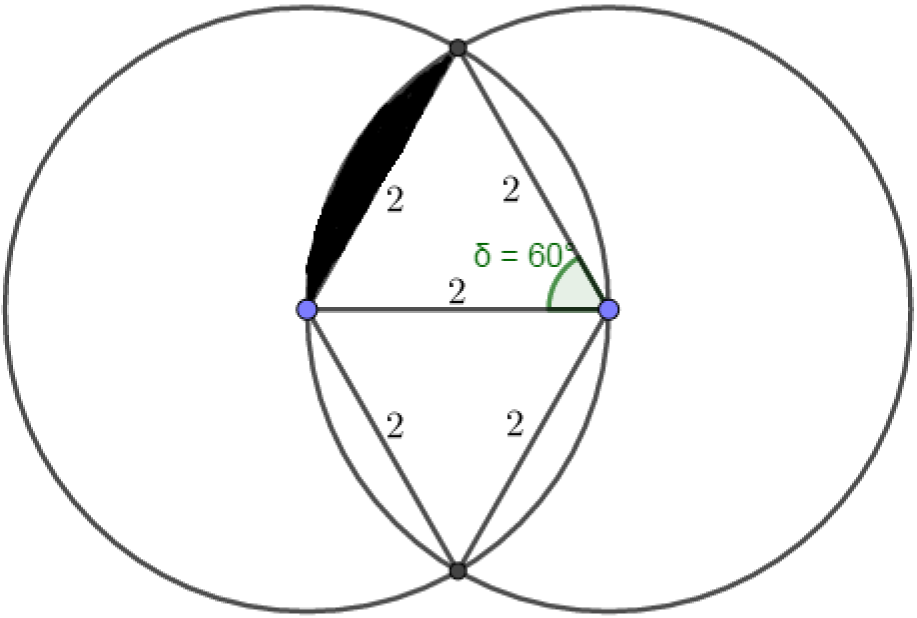
c) $\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

d) $4\pi - 2\sqrt{3}$

e) $\frac{8\pi}{3} - \sqrt{3}$

Comentários

Fazendo o desenho dessas duas circunferências:



Portanto, veja que a área em comum é igual à área desses dois triângulos equiláteros de lado 2, somada com 4 vezes essa área pintada de preto acima. Para calcular a área em preto, basta pegar a área do setor circular de 60° e subtrair a área do setor circular. Assim, a área desejada A é:

$$A = 4 \cdot \underbrace{(A_{setor} - A_t)}_{Área\ preta} + 2 \cdot A_t = 4 \cdot \left(\frac{\pi 2^2}{6} - \frac{2^2\sqrt{3}}{4}\right) + 2 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

Gabarito: “c”.

---

19. (ESA/2005)

A área de um círculo inscrito em um triângulo retângulo de lados 9, 12 e 15 é:

a) 9π

b) 4π

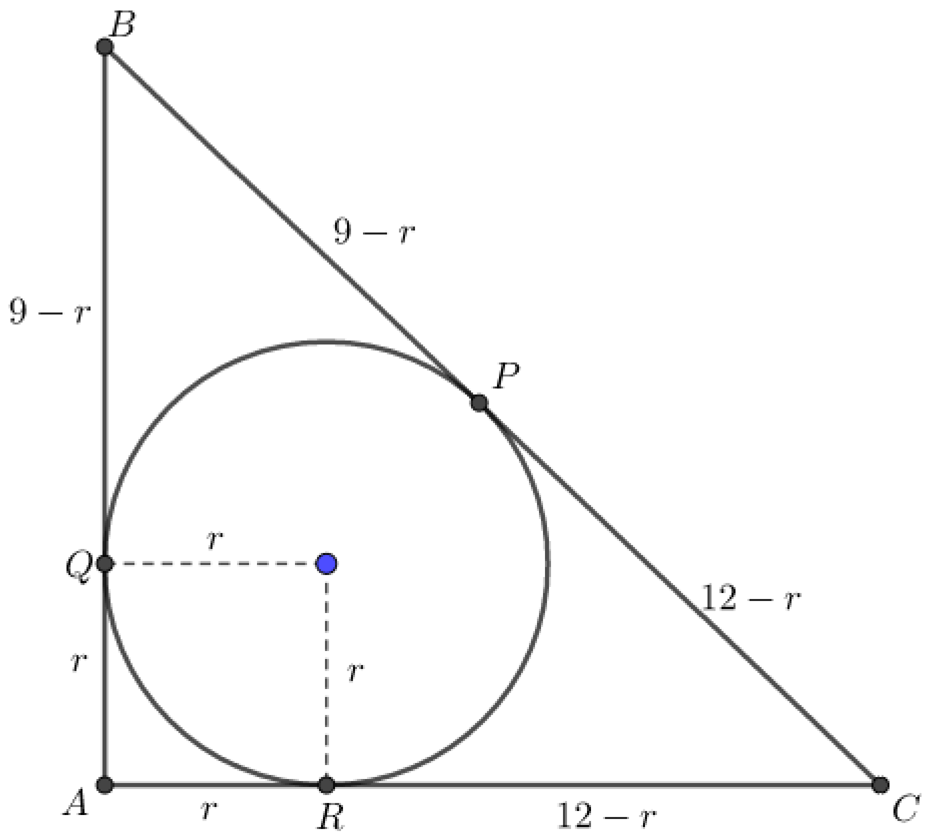
c) π

d) 16π

e) 25π

Comentários

Fazendo o desenho desse círculo inscrito no triângulo, e usando o fato de que segmentos tangentes à circunferência por um ponto externo em comum são iguais (Teorema do Bico) então:



Portanto, como Q, P, R são pontos de tangência, então $AQ = AR = r$, como $AB = 9$ então $BQ = BP = 9 - r$ e, por fim, $CP = CR = 12 - r$. Entretanto, foi dito no enunciado que o maior lado é 15. Portanto:

$$(9 - r) + (12 - r) = 15 \Rightarrow 21 - 2r = 15 \Rightarrow 2r = 6 \Rightarrow r = 3$$

Portanto, sua área é:

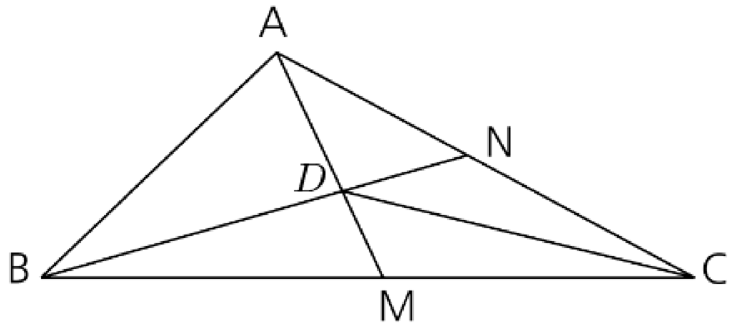
$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 9 = 9\pi$$

Gabarito: “a”.

---

20. (ESA/2005)

No triângulo ABC abaixo, se M e N são pontos médios e a área do triângulo DMC é 1dm², então a área, em dm², do triângulo ABD é:



a) 2,5

b) 1,5

c) 3

d) 2

e) 1,9

Comentários

Como M é ponto médio, as áreas dos triângulos $BDM\ e\ DMC$ são iguais (mesma base e mesma altura relativa a base). Portanto:

$$[BDM] = 1\ dm^2$$

Como N é ponto médio, então $AM\ e\ BN$ são medianas e se cruzam no baricentro. Lembrando que o baricentro divide as medianas na razão de 2 para 1, então:

$$\frac{AD}{DM} = \frac{2}{1}$$

Portanto, a razão entre as áreas de BAD e BDM, considerando que h seja a altura de B com relação à reta AM, então:

$$\frac{[BAD]}{[BDM]} = \frac{AD \cdot \frac{h}{2}}{DM \cdot \frac{h}{2}} = \frac{AD}{DM}$$

Mas pela relação acima:

$$\frac{[BAD]}{[BDM]} = 2 \Rightarrow [BAD] = 2 \cdot [BDM] = 2\ dm^2$$

Gabarito: “d”

---

21. (ESA/2004)

Um festival de música lotou uma praça semicircular de 200m de diâmetro. Admitindo-se uma ocupação média de 3 pessoas por m², qual é o número mais aproximado de pessoas presentes? (adote $\pi = 3,14$)

a) 22340

b) 33330

c) 42340

d) 16880

e) 47100

Comentários

O diâmetro é $2R = 200 \Rightarrow R = 100$. Portanto a área do semicírculo é metade da área de um círculo de raio 100:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi 100^2}{2} = 5000\pi = 15700\, m^2$$

Assim, se temos 3 pessoas por m², então teremos, em média:

$$15700 \cdot 3 = 47100\, pessoas$$

Gabarito: "e".

---

22. (ESA/2004)

Um triângulo ABC tem área igual a 75cm². Os pontos D, E, F e G dividem o lado AC em 5 partes congruentes: $AD = DE = EF = FG = GC$. Desse modo, a área do triângulo BDF é:

a) 20cm²

b) 30cm²

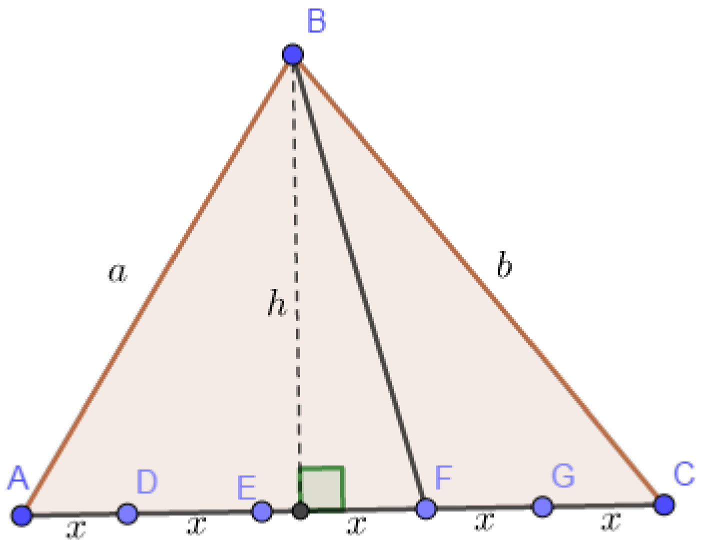
c) 40cm²

d) 50cm²

e) 55cm²

Comentários

Construindo o triângulo ABC e marcando os pontos dados:



Veja que a área do ABC é 75m². Portanto:

$$[ABC] = 75 = AC \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow 75 = \frac{5xh}{2} \Rightarrow xh = 30\ cm^2$$

Agora, analisando a área pedida:

$$[BDF] = DF \cdot \frac{h}{2} = 2x \cdot \frac{h}{2} = xh = 30\ cm^2$$

Gabarito: “b”.

---

23. (EEAR/2019)

Um trapézio tem $12\ cm$ de base média e $7\ cm$ de altura. A área desse quadrilátero é____ cm^2.

a) 13

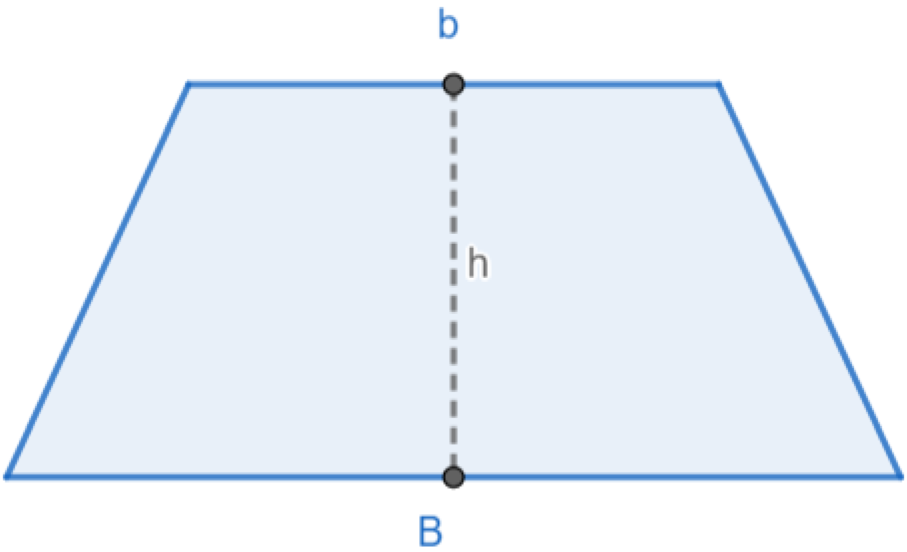
b) 19

c) 44

d) 84

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



A área do trapézio é dada por

$$\boldsymbol{A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(B+b)}{2}\cdot h}$$

Mas a altura vale $\boldsymbol{7\ cm}$ e a base média corresponde a média aritmética entre as bases do trapézio.

$$\boldsymbol{\frac{B+b}{2} = 12\ cm}$$

$$\boldsymbol{A = 12\cdot 7 = 84\ cm^2}$$

Gabarito: "d"

---

24. (EEAR/2019)

A área de um hexágono regular inscrito em um círculo de $\sqrt{6}\ cm$ de raio é _____$\sqrt{3}\ cm^2$

a) 6

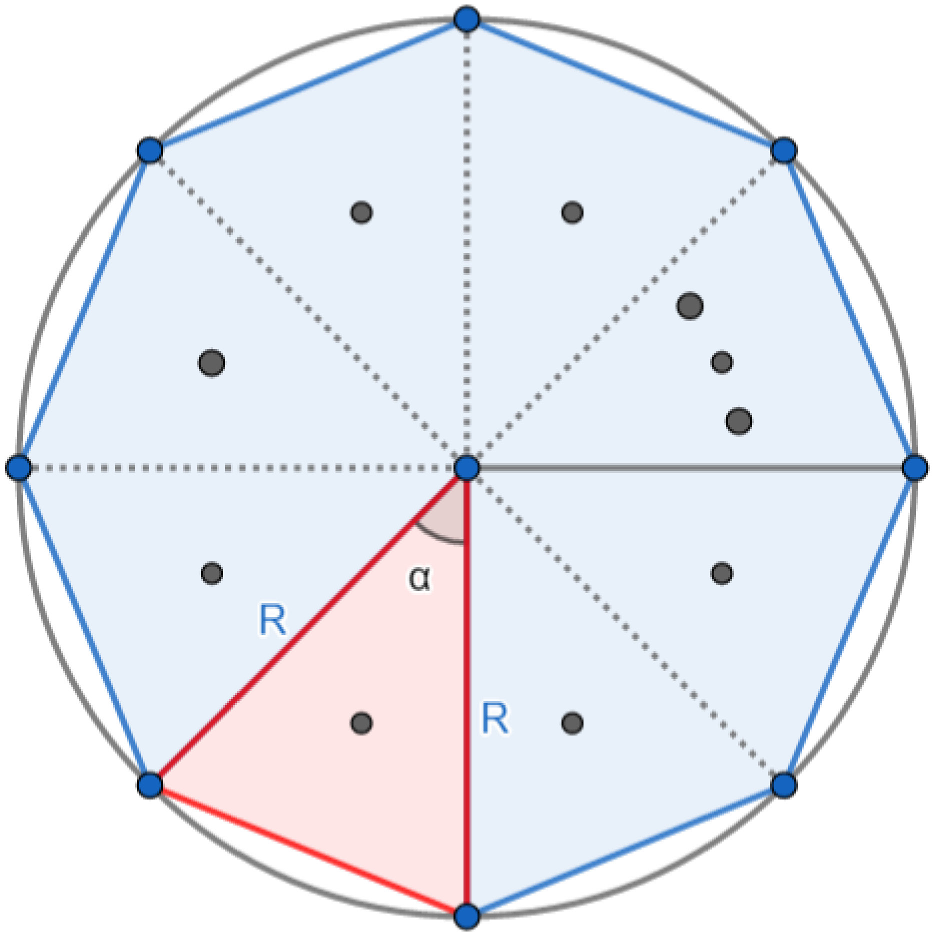
b) 9

c) 12

d) 15

Comentários

Primeiramente iremos generalizar para qualquer polígono regular



Considere um polígono regular de $\boldsymbol{n}$ lados inscrito numa circunferência de raio $\boldsymbol{R}$. Podemos calcular a área do polígono dividindo-o em $\boldsymbol{n}$ triângulos congruentes dois a dois.

Cada triângulo será isósceles e possuirá ângulo central medindo $\frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}$ e lados congruentes medindo $\boldsymbol{R}$.

A área de cada triângulo pode ser calculada utilizando a medida de 2 lados e seno do ângulo central, conforme $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{sen}\left(\frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}\right)$

Porém a área do polígono corresponde a área de $\boldsymbol{n}$ triângulos desde mesma área, portanto:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{sen}\left(\frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{sen}\left(\frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}\right)$$

Aplicando para um hexágono regular ($\boldsymbol{n} = \mathbf{6}$) inscrito numa circunferência de raio $\sqrt{\mathbf{6}}$.

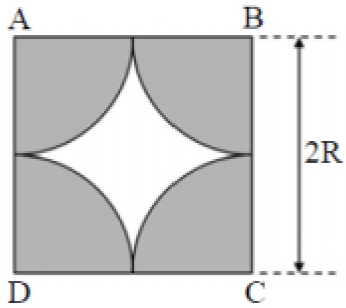
$$\boldsymbol{S} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot (\mathbf{6}) \cdot \left(\sqrt{\mathbf{6}}\right)^{\mathbf{2}} \boldsymbol{sen}\left(\frac{\mathbf{360°}}{\mathbf{6}}\right) = \mathbf{18} \cdot \boldsymbol{sen}(\mathbf{60°}) = \mathbf{18} \cdot \left(\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right) = \mathbf{9}\sqrt{\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{S} = \mathbf{9}\sqrt{\mathbf{3}}$$

Gabarito: "b"

25. (EEAR/2018)

Na figura, os arcos que limitam a região sombreada são arcos de circunferências de raio R e centrados nos vértices do quadrado ABCD. Se o lado do quadrado mede 2R e considerando $\pi = 3$, então a razão entre a área sombreada e a área branca é



a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) 2

d) 3

Comentários

Perceba que a cada arco corresponde a um arco de $90°$ de uma circunferência de raio R, logo cada arco corresponde a $\frac{1}{4}$ de circunferência. Como a figura possui 4 arcos, então toda a região sombreada tem a área de uma circunferência de raio R completa.

$$A_S = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi R^2 = \pi R^2$$

A área branca é a simples diferença entre a área de um quadrado de lado $2R$ e a área sombreada

$$A_B = (2R)^2 - \pi R^2 = (4 - \pi)R^2$$

A razão pedida corresponde a:

$$\frac{A_S}{A_B} = \frac{\pi R^2}{(4-\pi)R^2} = \frac{\pi}{(4-\pi)} \quad , mas\ \pi = 3, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{A_S}{A_B} = \frac{3}{(4-3)} = \frac{3}{1} = 3$$

Gabarito: "d"

26. (EEAR/2018)

A metade da medida do ângulo interno de um octógono regular, em graus, é

a) $67,5°$

b) $78,6°$

c) $120°$

d) $85°$

Comentários

Sabe-se que soma dos ângulos internos de qualquer polígono de n lados seque a relação:

$$S_n = (n-2)\cdot 180°$$

Como se trata de um polígono regular, tem se n ângulos iguais. Portanto cada ângulo é:

$$a_i = \frac{S_n}{n} = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

Para um octógono temos:

$$a_8 = \frac{6\cdot 180°}{8} = 135°$$

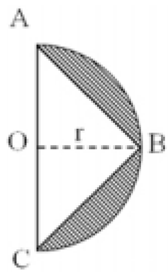
A metade de a_8,ou seja, metade de 135° é 67,5°

Gabarito: "a"

---

27. (EEAR/2017)

Na figura, O é o centro do semicírculo de raio $r = 2\ cm$.



Se A, B e C são pontos do semicírculo e vértices do triângulo isósceles, a área hachurada é____cm^2. (use $\pi = 3,14$)

a) 2,26

b) 2,28

c) 7,54

d) 7,56

Comentários

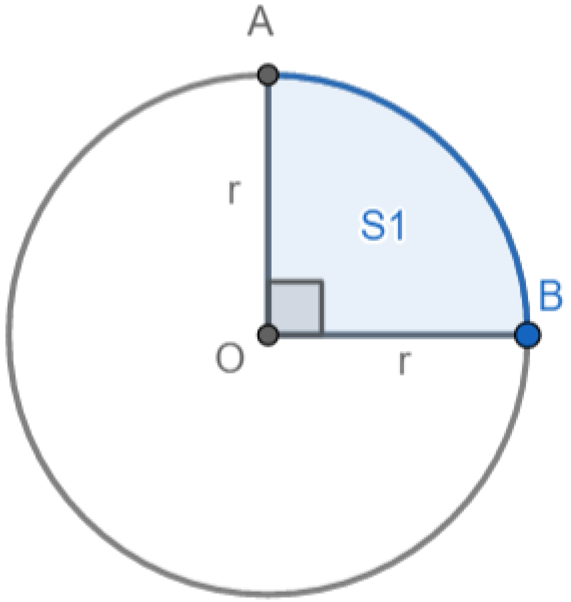
Primeiramente atente-se para os seguintes fatos:

1 - $\overline{AC}$ é diâmetro da circunferência, portanto o ângulo $A\hat{B}C$ é reto.

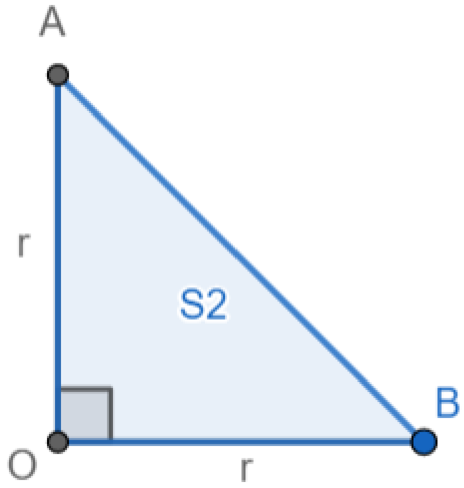
2 - Segundo o enunciado ABC é isósceles, e, considerando o fato 1, conclui-se que $B\hat{A}C = A\hat{C}B = 45°$.

3 - $\overline{AO} = \overline{BO} = r$, logo o triângulo AOB é isósceles, e considerando o fato 2, conclui-se que ele é isósceles retângulo, pois $B\hat{A}C = B\hat{A}O = 45°$.

Agora perceba que o setor da circunferência definido por AOB possui área $S_1 = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2$, pois trata-se de $\frac{1}{4}$ de circunferência.

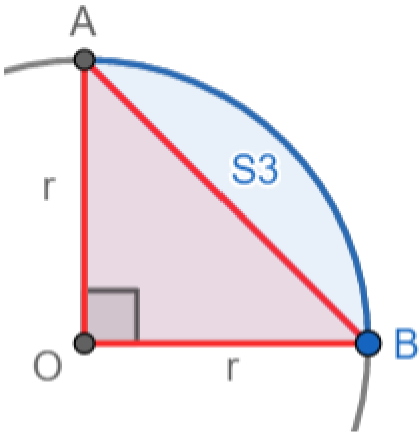


A área definida pelo triângulo AOB possui área $S_2 = \frac{1}{2} \cdot r^2$



A área da hachura limitada por $\overline{AB}$ é a diferença entre S_1 e S_2

$$S_3 = S_1 - S_2 = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$



Porém o total de área hachurada é o dobro da área S_3 pois corresponde a hachura definida por $\overline{AB}$ e por $\overline{BC}$

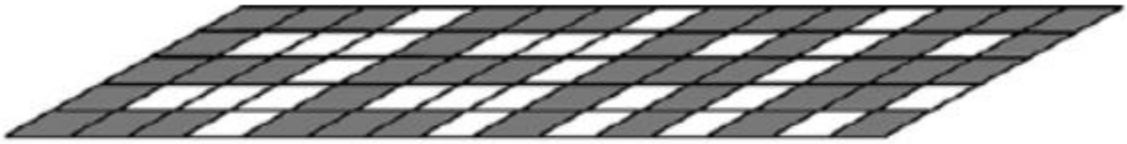
$$S = 2S_3 = 2 \cdot \frac{1}{2}r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = r^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$S = (2)^2 \cdot \left(\frac{3,14}{2} - 1\right) = 4 \cdot (1,57 - 1) = 4 \cdot 0,57 = 2,28\ cm^2$$

Gabarito: "b"

28. (EEAR/2017)

A malha da figura abaixo é formada por losangos cujas diagonais medem 0, 50 cm e 2, 00 cm. A área hachurada é de _______cm^2



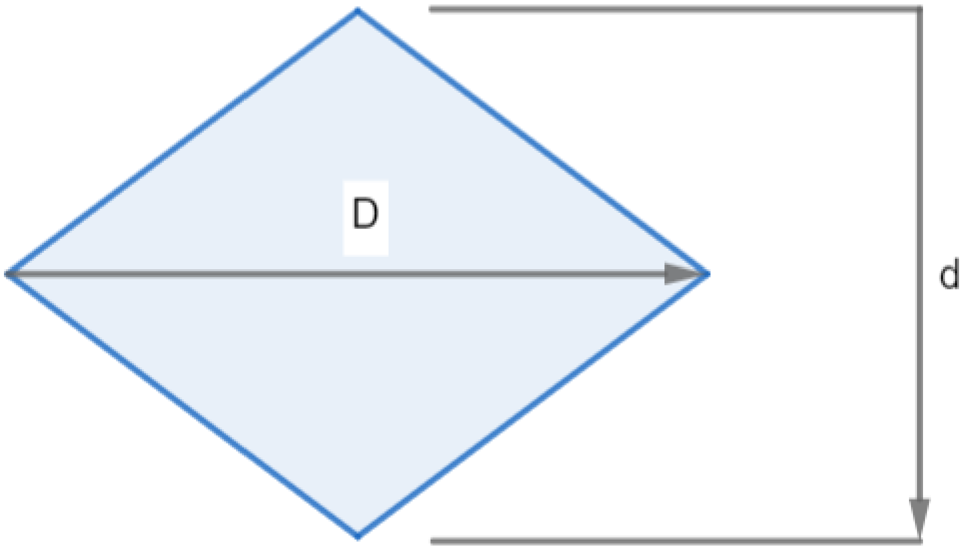
a) 20

b) 22

c) 23

d) 25

Comentários



A área do losango é dada por:

$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$S' = \frac{0,5 \cdot 2}{2} = 0,5\ cm^2$$

Agora basta contar quantos losangos hachurados a figura possui.

São 46 losangos, então a área total é:

$$S = 46 \cdot 0,5 = 23\ cm^2$$

Gabarito: "c"

---

29. (EEAR/2017)

Ao somar o número de diagonais e o número de lados de um dodecágono obtém-se

a) 66

b) 56

c) 44

d) 42

Comentários

O número total de diagonais de qualquer polígono com mais de 3 lados é encontrado pela relação:

$$D_n = \frac{(n-3)n}{2}$$

Assim temos que o número de diagonais de dodecágono é:

$$D_{10} = \frac{(12-3)12}{2} = 54$$

Assim temos que a soma do número de diagonais e o número de lados de um dodecágono é:

$$D_{12} + 12 = 54 + 12 = 66$$

Gabarito: “a”

---

30. (EEAR/2017)

O polígono regular cujo ângulo externo mede $24°$ tem lados.

a) 20

b) 15

c) 10

d) 5

Comentários

Sabemos que para o cálculo do ângulo externo de um polígono regular tem-se a seguinte relação:

$$a_e = \frac{360°}{n}$$

Onde n é a quantidade de lados do polígono. Logo:

$$24° = \frac{360°}{n}$$

$$n = 15$$

Gabarito: "b"

---

31. (EEAR/2016)

O lado, o perímetro e a área de um triângulo equilátero, nesta ordem, são termos de uma Progressão Geométrica. Assim, a medida da altura desse triângulo equilátero é _____ unidades de comprimento.

a) $12\sqrt{3}$

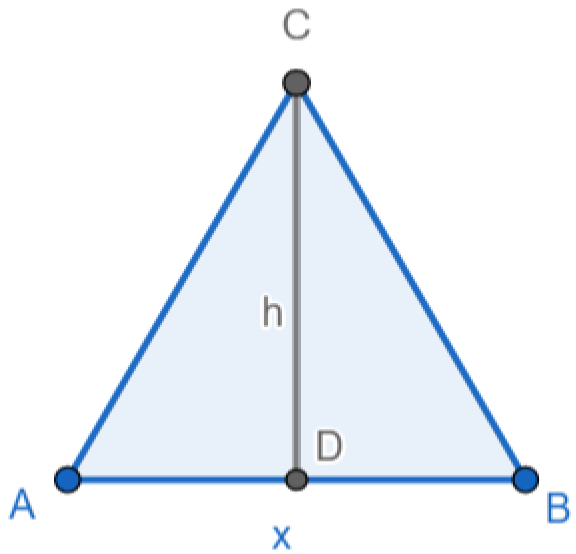
b) $6\sqrt{3}$

c) 3

d) 18

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



O lado mede $\boldsymbol{l = x}$, o perímetro mede $\boldsymbol{P = 3x}$ e a área mede $\boldsymbol{A = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot sen(60°) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}}$

Queremos descobrir a altura do triângulo $\boldsymbol{h = x \cdot sen(60°) = \frac{x\sqrt{3}}{2}}$

Conforme dado no enunciado, as medidas estão em P.G, Logo a razão ordenadamente entre dois a dois é igual.

$$\boldsymbol{\frac{P}{l} = \frac{A}{P}}$$

$$\Rightarrow \quad P^2 = A \cdot l$$

$$\Rightarrow \quad (3x)^2 = \left(\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot (x)$$

$$\Rightarrow \quad 9x^2 = \frac{x^3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 18x^2 = \frac{x^3\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad 18 = \frac{x\sqrt{3}}{2} = h$$

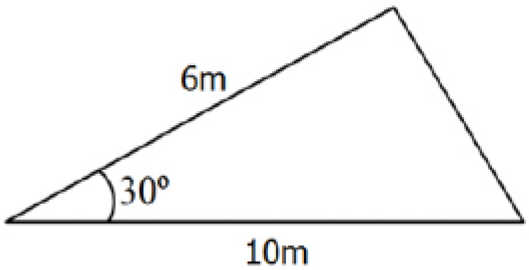
$$h = 18\ unidades\ de\ comprimento$$

Gabarito: "d"

---

32. (EEAR/2016)

Assinale a alternativa que representa, corretamente, a área do triângulo esboçado na figura abaixo.



a) $15\ m^2$

b) $30\sqrt{2}\ m^2$

c) $15\sqrt{3}\ m^2$

d) $30\sqrt{3}\ m^2$

Comentários

A área de um triângulo pode ser calculada utilizando a medida de 2 lados e o seno do ângulo central, conforme

$$A = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot sen(\alpha)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (10) \cdot (6) \cdot sen(30°) = 15$$

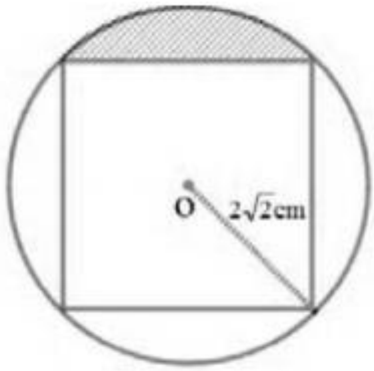
$$A = 15\ m^2$$

Gabarito: "a"

---

33. (EEAR/2016)

A figura abaixo apresenta um quadrado inscrito em um círculo de raio $2\sqrt{2}\ cm$ e centro O



Considerando $\pi = 3$, a área da região hachurada é igual a ______cm^2

a) 2

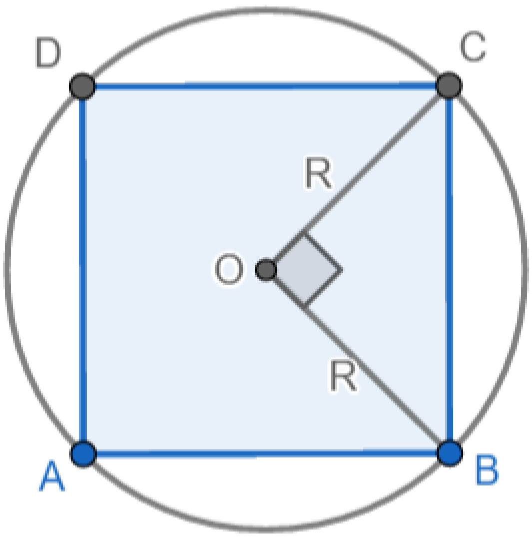
b) 8

c) 16

d) 24

Comentários

Perceba que o quadrado divide a circunferência em 4 partes iguais. Logo, o ângulo central definido por cada aresta do quadrado é de $\frac{\mathbf{360°}}{\mathbf{4}} = \mathbf{90°}$.



Conforme já realizado na questão 68 desta mesma lista, a área hachurada corresponde a diferença da área do setor circular definido pelo ângulo central de $\mathbf{90°}$ e do triângulo retângulo isósceles de lado R.

$$S = \frac{1}{4} \cdot \pi R^2 - \frac{1}{2} \cdot R^2 = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) =$$

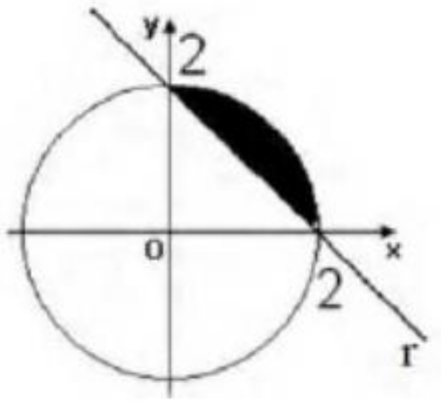
$$S = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Gabarito: "a"

---

34. (EEAR/2016)

A figura abaixo ilustra um círculo com centro em O, origem do plano cartesiano, e uma reta r.



Considerando tal figura, a área da região sombreada corresponde a

a) $2\pi - 4$

b) $2\pi - 2$

c) $\pi - 4$

d) $\pi - 2$

Comentários

Percebe-se que a circunferência possui raio 2. E, conforme o já feito nas questões 68 e 71, o valor da área sombreada corresponde a diferença da área do setor circular definido pelo ângulo central de $\mathbf{90}°$ e do triângulo retângulo isósceles de lado 2.

$$S = \frac{1}{4} \cdot \pi R^2 - \frac{1}{2} \cdot R^2 = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) =$$

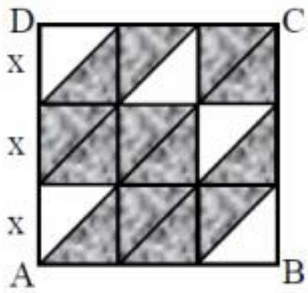
$$S = \frac{1}{2}(2)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{(\pi - 2)}{2} = \pi - 2$$

Gabarito: "d"

---

35. (EEAR/2015)

Na figura, ABCD é um quadrado formado por pequenos quadrados de lado x divididos por uma de suas diagonais.



Assim, a área sombreada, em função de x é

a) $\frac{15x^2}{2}$

b) $\frac{13x^2}{2}$

c) $5,5x^2$

d) $3,5x^2$

Comentários

É fácil ver que a área de cada triângulo mede $\boldsymbol{S_1 = \frac{1}{2} \cdot x^2}$

A área da zona sombreada é $\boldsymbol{n}$ vezes a área de cada triângulo, sendo $\boldsymbol{n}$ o numero de triângulos escuros na figura. Contando um a um o número de triângulos escuros, chegamos que são um total de 13. Logo, a área sombreada total pode ser dada por:

$$\boldsymbol{S = 13 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{13x^2}{2}}$$

Gabarito: "b"

36. (EEAR/2015)

Considere um quadrado de diagonal $5\sqrt{2}\ m$ e um losango de diagonais $6\ m$ e $4\ m$. Assim, a razão entre as áreas do quadrado e do losango é aproximadamente igual a

a) 3,5

b) 3,0

c) 2,5

d) 2,1

Comentários

Sabemos que um quadrado de lado $\boldsymbol{x}$ possui diagonal de comprimento $\boldsymbol{x\sqrt{2}}$, é fácil ver isso pelo teorema de Pitágoras.

Sendo assim, o lado do quadrado citado no enunciado é $\boldsymbol{5\ m}$, logo, sua área é

$$\boldsymbol{S_Q = 5 \cdot 5 = 25\ m^2}$$

Já vimos também que a área de um losango é dada por:

$$\boldsymbol{S_L = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\ m^2}$$

A razão pedida pode-se então ser calculada

$$\boldsymbol{\frac{S_Q}{S_L} = \frac{25}{12} \approx 2,1}$$

Gabarito: "d"

---

37. (EEAR/2015)

Em um pedaço de papel de formato quadrado foi desenhado um círculo de raio $10\ cm$. Se o papel tem $20\ cm$ de lado e considerando $\pi = 3,14$, a área do papel, em cm^2, não ocupada pelo círculo é igual a

a) 82

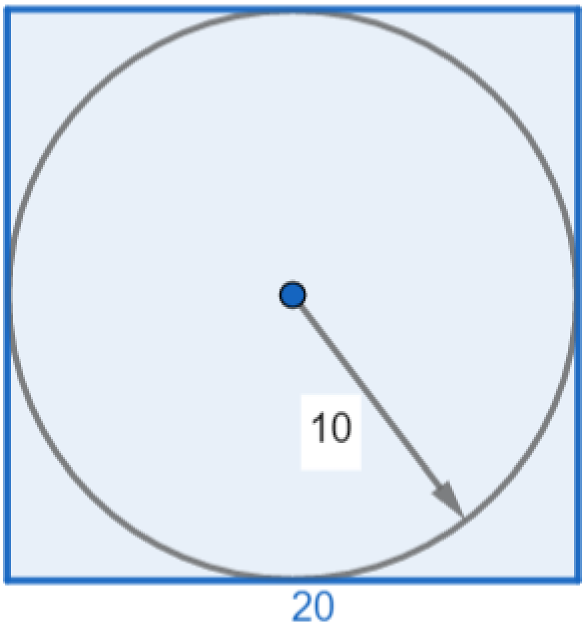
b) 86

c) 92

d) 96

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Queremos a diferença entre a área do quadrado e a área da circunferência.

$$\begin{cases} S_Q = (20)^2 \\ S_C = \pi(10)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_Q = 400 \\ S_C = 100 \cdot 3,14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad S_Q - S_C = 400 - 314 = 86\ cm^2$$

Gabarito: "b"

---

38. (EEAR/2015)

Um triângulo isósceles de base $10\ cm$ e perímetro $36\ cm$ tem ______ cm^2 de área

a) 75

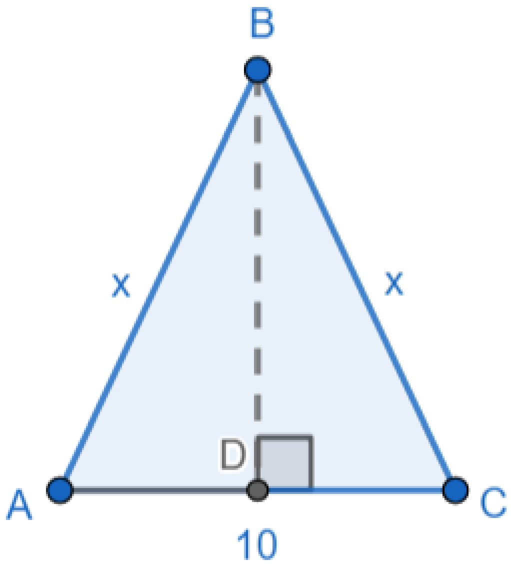
b) 72

c) 60

d) 58

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Equacionando:

$$10 + x + x = 36$$

$$\Rightarrow \quad x = 13$$

Tendo em vista que o triângulo ABC é isósceles, sabemos que o ponto D intercepta o lado $\overline{AC}$ em seu ponto médio. Logo, $\overline{AD} = \overline{CD} = 5\ cm$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, descobrimos que $\overline{BD} = 12\ cm$

Agora podemos calcular a área do triângulo:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60\ cm^2$$

Gabarito: "c"

---

39. (EEAR/2015)

Se um dos ângulos internos de um pentágono mede $100°$, então a soma dos outros ângulos internos desse polígono é

a) $110°$

b) $220°$

c) $380°$

d) $440°$

Comentários

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo segue a relação:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Portanto para um pentágono temos:

$$S_5 = 3 \cdot 180° = 540°$$

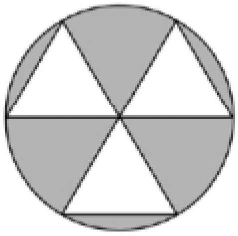
Assim temos que se um ângulo é $100°$, a soma dos restantes é $540° - 100° = 440°$

Gabarito: "d"

---

40. (EEAR/2014)

A figura é formada por um círculo de raio $R = 4\,cm$ e três triângulos equiláteros de lados congruentes ao raio do círculo.



Os triângulos têm apenas um ponto de intersecção entre si e dois vértices na circunferência. A área hachurada, em cm^2, é

a) $6\pi - 12\sqrt{3}$

b) $16\pi - 6\sqrt{3}$

c) $12\pi - 8\sqrt{3}$

d) $16\pi - 12\sqrt{3}$

Comentários

À primeira vista esta questão parece bastante complicada. Porém, com uma observação mais atenta, percebe-se que o cálculo da área do hachurada nada mais é que a diferença entre a área de uma circunferência de raio $\boldsymbol{R}$ e três triângulos equiláteros de lado $\boldsymbol{R}$.

$$\boldsymbol{S_C = \pi R^2} \quad (\acute{A}\boldsymbol{rea\ da\ circunferencia\ de\ raio\ R})$$

$$\boldsymbol{S_T = \frac{\sqrt{3} \cdot R^2}{4}} \quad (\acute{A}\boldsymbol{rea\ do\ tri}\hat{a}\boldsymbol{ngulo\ equil}\acute{a}\boldsymbol{tero\ de\ lado\ R})$$

Calculando a área hachurada, obtemos:

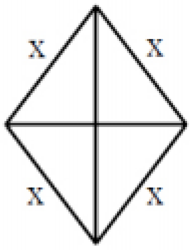
$$S = S_C - 3 \cdot S_T = \pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \pi(4)^2 - \frac{3\sqrt{3}(4)^2}{4} = 16\pi - 12\sqrt{3}$$

$$S = 16\pi - 12\sqrt{3}$$

Gabarito: "d"

41. (EEAR/2014)

A área de um losango é $24\ cm^2$. Se uma das diagonais desse losango mede $6\ cm$, o lado dele, em cm, mede



a) 4

b) 5

c) 6

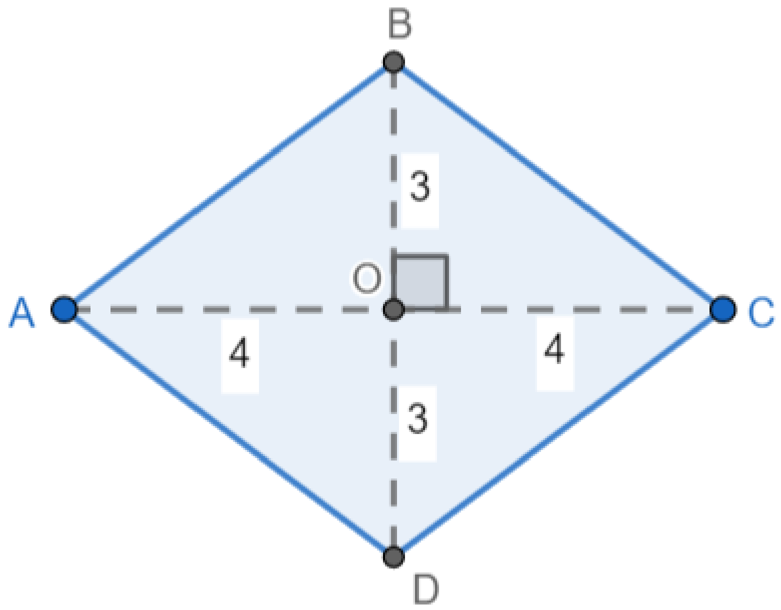
d) 7

Comentários

Sabemos que a área de um losango vale:

$$S = \frac{D \cdot d}{2} \quad \Rightarrow \quad 24 = \frac{D \cdot 6}{2} \quad \Rightarrow \quad D = 8\ cm$$

Mas sabemos que pelas propriedades do losango, as diagonais bissectam-se perpendicularmente.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AOB, obtemos que $\overline{AB} = 5\ cm$

$$x = 5\ cm$$

Gabarito: "b"

---

42. (EEAR/2014)

Em uma circunferência de raio $r = 6\ cm$, a área de um setor circular de $30°$ é ______$\pi\ cm^2$.

a) 3

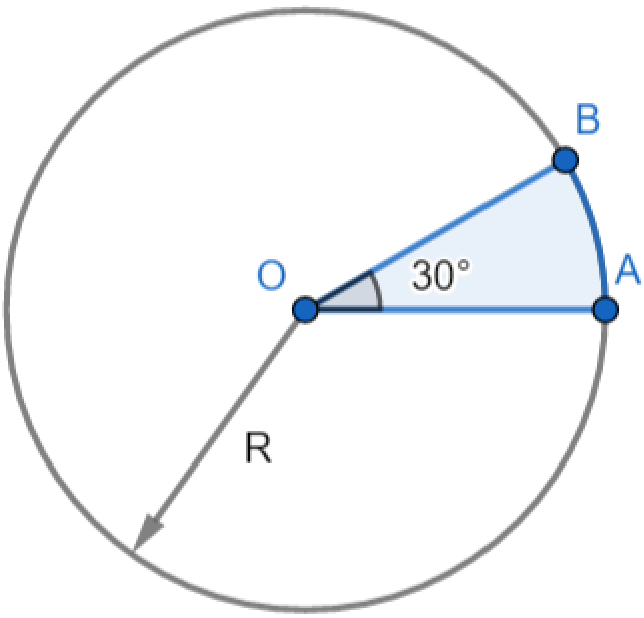
b) 4

c) 5

d) 6

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



O ângulo central e a área são diretamente proporcionais, logo, tomaremos uma área conhecida para um ângulo conhecido e faremos a proporção:

$$\frac{\pi R^2}{360°} = \frac{A}{30°}$$

$$A = \frac{30}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{12} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{12} \cdot \pi (6)^2 = \frac{36}{12}\pi = 3\pi$$

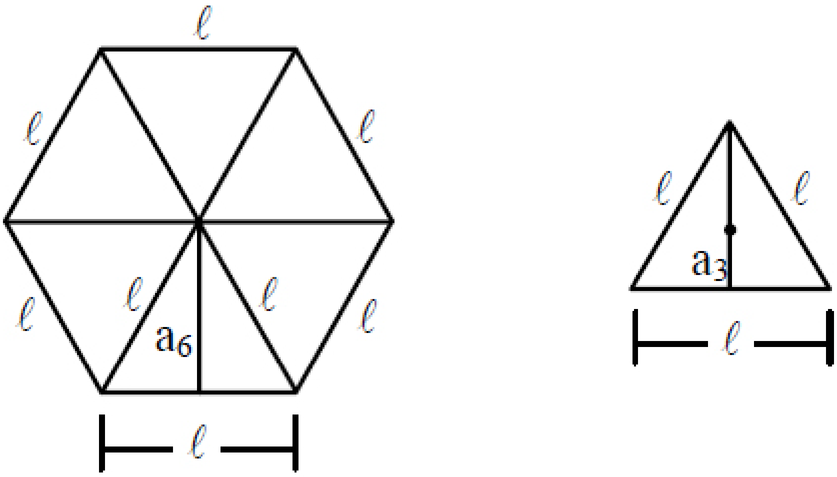
$$A = 3 \cdot \pi$$

Gabarito: “a”

---

43. (EEAR/2014)

Sejam um hexágono regular e um triângulo equilátero, ambos de lado l. A razão entre os apótemas do hexágono e do triângulo é



a) 4

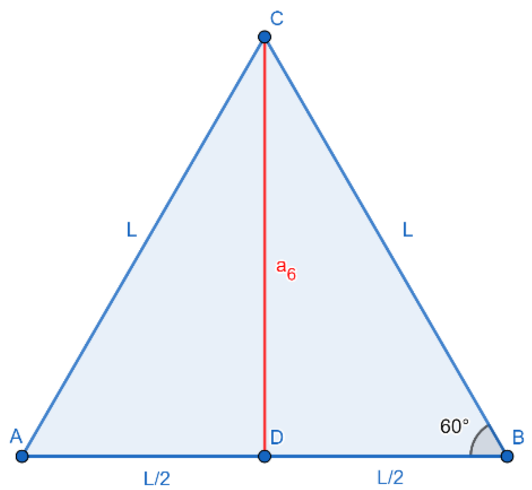
b) 3

c) 2

d) 1

Comentários

Perceba que o hexágono é formado por 6 triângulos equiláteros, isolando um dos triângulos, temos a figura a seguir:

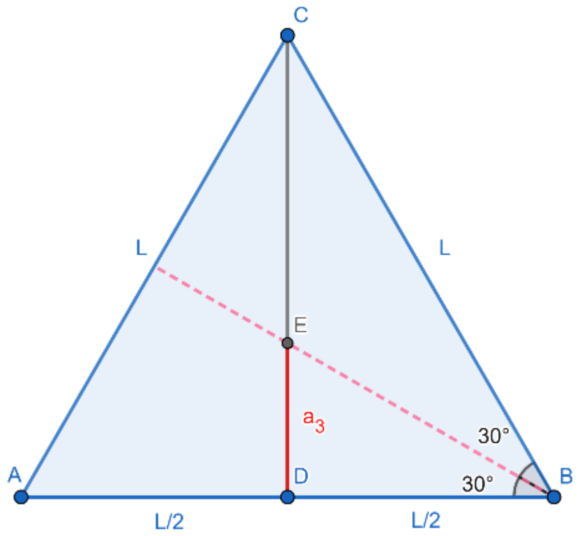


Observe no ΔDBC a relação trigonométrica:

$$\frac{a_6}{\frac{L}{2}} = tg(60°)$$

$$a_6 = tg(60°) \cdot \frac{L}{2}$$

Perceba a figura a seguir do triângulo equilátero:



Temos no ΔDBE a relação trigonométrica:

$$\frac{a_3}{\frac{L}{2}} = tg(30°)$$

$$a_3 = tg(30°) \cdot \frac{L}{2}$$

Assim, descobrimos a relação entre a_6 e a_3

$$\frac{a_6}{a_3} = \frac{tg(60°) \cdot \frac{L}{2}}{tg(30°) \cdot \frac{L}{2}} = \frac{tg(60°)}{tg(30°)} = 3$$

Gabarito: "b"

---

44. (EEAR/2013)

Se A é o número de diagonais de um icoságono e B o número de diagonais de um decágono, então $A - B$ é igual:

a) 85

b) 135

c) 165

d) 175

Comentários

O número total de diagonais de qualquer polígono com mais de 3 é encontrado pela relação:

$$D_n = \frac{(n-3)n}{2}$$

Logo, temos no icoságono um total de $D_{20} = \frac{(20-3)20}{2} = 17 \cdot 10 = 170$ e no decágono um total de $D_{10} = \frac{(10-3)10}{2} = 7 \cdot 5 = 35$

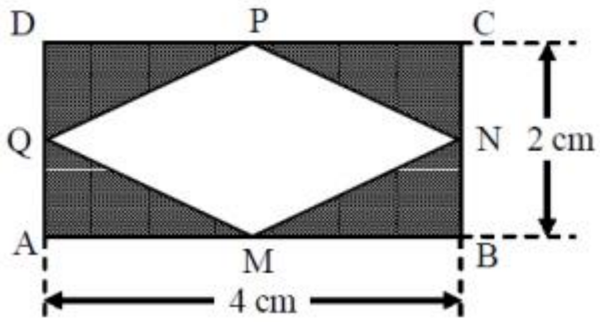
Portanto, $D_{20} - D_{10} = 135$.

Gabarito: "b"

---

45. (EEAR/2013)

Considere o retângulo ABCD, e os pontos médios dos seus lados M, N, P e Q.



Unindo esses pontos médios, conforme a figura, pode-se concluir que a área hachurada, em cm^2, é

a) 8

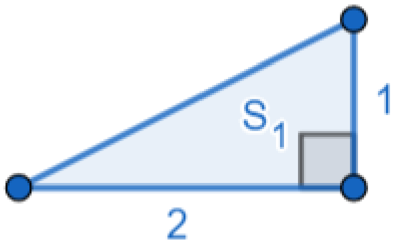
b) 4

c) $4\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2}$

Comentários

Perceba que cada triângulo hachurado é um triângulo retângulo de catetos de $\mathbf{1}$ e $\mathbf{2}\ \boldsymbol{cm}$.



$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1\ cm^2$$

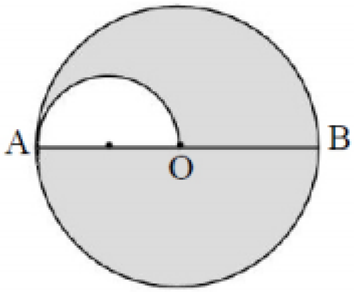
Existem quatro áreas hachuradas idênticas. Logo,

$$S = 4 \cdot S_1 = 4 \cdot 1 = 4\ cm^2$$

Gabarito: "b"

46. (EEAR/2013)

Na figura, $AB = 8\ cm$ é o diâmetro do círculo de centro O e AO é o diâmetro do semicírculo.



Assim, a área sombreada dessa figura é ______$\pi\ cm^2$.

a) 14

b) 13

c) 11

d) 10

Comentários

A área sombreada é a diferença entre a área de uma circunferência de diâmetro $8\ cm$ e uma semicircunferência de diâmetro $4\ cm$.

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (8)^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi (4)^2}{4} = 16\pi - 2\pi = 14\pi$$

$$S = 14 \cdot \pi$$

Gabarito: "a"

47. (EEAR/2013)

A razão r entre o apótema e o lado de um hexágono regular é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

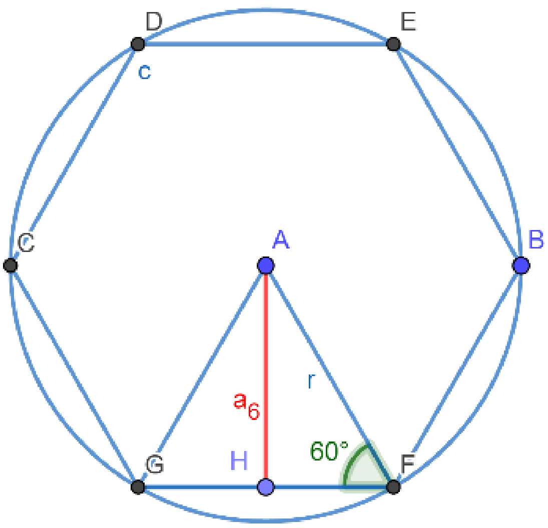
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Perceba que no triângulo equilátero ΔAGF do hexágono conseguimos encontrar a relação:

$$sen(60°) = \frac{a_6}{r}$$

Onde a_6 é o apótema do hexágono e r é o lado do hexágono.

Temos, portanto, que

$$\frac{a_6}{r} = sen(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: "a"

---

48. (EEAR/2011)

Os números que expressam as medidas, em cm ou em cm^2, do lado, da superfície e do perímetro de um quadrado, dados nessa ordem, formam uma P.A. O lado desse quadrado, em cm, mede

a) $\frac{5}{2}$

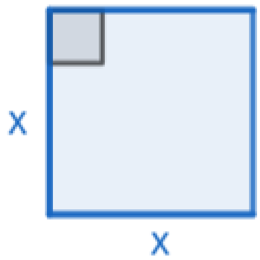
b) $\frac{5}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{2}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Lado: $\boldsymbol{L = x}$; Superfície: $\boldsymbol{S = x^2}$; Perímetro $\boldsymbol{P = 4x}$;

Conforme dado no enunciado, as medidas estão em P.A, Logo a diferença ordenadamente entre dois a dois é igual.

$$\boldsymbol{S - L = P - S}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow 2S = P + L}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow 2 \cdot x^2 = 4x + \ x = 5x}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow x = 0\ (não\ convém)\ ou\ x = \frac{5}{2}}$$

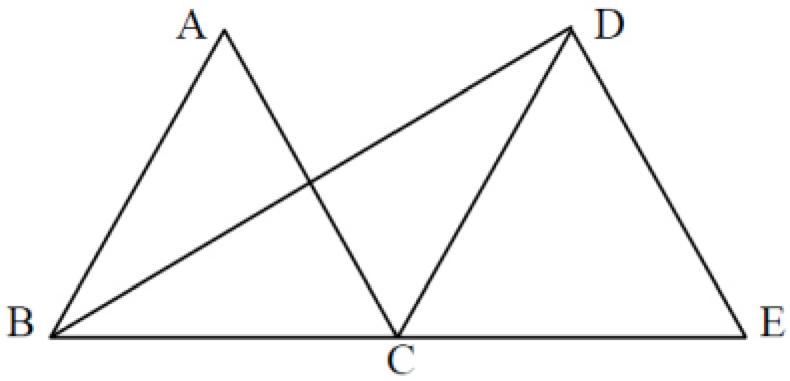
$$\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$$

Gabarito: “a”

---

49. (EEAR/2011)

Na figura, $\overline{BC}$ e $\overline{CE}$ são segmentos colineares de $4\ cm$ cada um.



Se os triângulos ABC e DCE são equiláteros, a área do triângulo BDE é

a) $4\sqrt{3}$

b) $6\sqrt{3}$

c) $8\sqrt{3}$

d) $10\sqrt{3}$

Comentários

Obs: Não se assuste com a complexidade da construção. Muitas das vezes temos que apenas recorrer ao básico da definição para resolver o problema.

A definição mais simples da área de um triângulo é:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot B \cdot h}$$

Sendo, $\boldsymbol{B}$ – base e $\boldsymbol{h}$ - altura

O valor de $\boldsymbol{B}$ é apenas a soma dos seguimentos $\boldsymbol{\overline{BC} + \overline{CE} = 4 + 4 = 8\ cm}$

O valor da altura também é muito fácil de se obter, pois trata-se da altura do ponto $\boldsymbol{D}$ em relação a base $\boldsymbol{\overline{CE}}$, que coincide com a altura do triângulo equilátero. Logo,

$$\boldsymbol{h = (4) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ cm}$$

Posto isso,

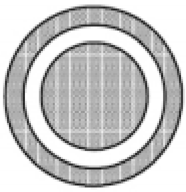
$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot (8) \cdot \left(2\sqrt{3}\right) = 8\sqrt{3}\ cm^2}$$

Gabarito: “c”

---

50. (EEAR/2011)

Considere a figura composta de três círculos concêntricos de raios medindo, respectivamente, $5\ cm$, $4\ cm$ e $3\ cm$. A área, em cm^2, da parte hachurada é



a) 9π

b) 16π

c) 18π

d) 24π

Comentários

$$S = S_1 - S_2 + S_3$$

Sendo $S_1 = \pi {R_1}^2$, $S_2 = \pi {R_2}^2$ e $S_3 = \pi {R_3}^2$ e $R_1 = 5\ cm$; $R_2 = 4\ cm$; $R_3 = 3\ cm$

$$S = \pi(5)^2 - \pi(4)^2 + \pi(3)^2 = \pi \cdot (25 - 16 + 9) = 18\pi$$

$$S = 18\pi$$

Gabarito: “c”

---

51. (EEAR/2011)

Um polígono convexo ABCD é tal que apenas dois de seus lados são paralelos entre si e os outros dois lados são congruentes. Dessa forma, pode-se dizer que ABCD é um

a) losango.

b) paralelogramo.

c) trapézio isósceles.

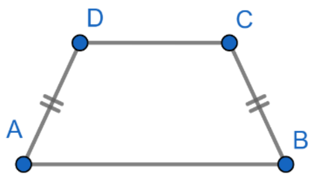
d) trapézio retângulo.

Comentários

De acordo com o enunciado, supomos:

$$\begin{cases} Supondo\ \overline{AB}\ e\ \overline{CD}\ \ os\ lados\ paralelos \\ Logo\ \overline{AD}\ e\ \overline{BC}\ são\ os\ lados\ congruentes \end{cases}$$

Temos então a seguinte figura:



Independente do comprimento do lado $\overline{AB}$ ou do lado $\overline{CD}$ haverá simetria nos lados $\overline{AD}$ *e* $\overline{BC}$ se mantem, portanto forma-se um trapézio isósceles.

Gabarito: "c"

---

52. (EEAR/2011)

Um quadrado e um triângulo equilátero estão inscritos em uma circunferência de raio R. A razão entre as medidas dos apótemas do quadrado e do triângulo é

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{2}$

Comentário

O apótema de um quadrado mede a metade de seu lado. Sendo a_4 o apótema e L o lado, a relação entre L e R é $2R = L\sqrt{2}$, porque a diagonal do quadrado é um diâmetro da circunferência. Portanto:

$$a_4 = \frac{L}{2} = \frac{L\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2R}{2\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

O apótema de um triângulo equilátero mede $1/3$ da sua altura, e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede $2/3$ dessa altura. Portanto,

$$a_3 = \frac{1}{3}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}h = \frac{R}{2}$$

Logo:

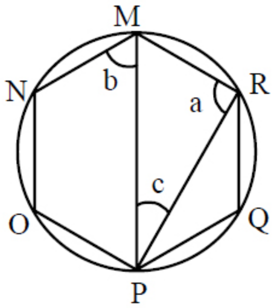
$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R}{2}} = \sqrt{2}.$$

Gabarito: "a"

---

53. (EEAR/2011)

Se $MNOPQR$ é um hexágono regular inscrito na circunferência, então $a + b - c$ é igual a



a) $150°$.

b) $120°$.

c) $100°$.

d) $90°$.

Comentário:

O triângulo RMP é retângulo em R pois MP é um diâmetro da circunferência. Logo $a = 90°$.

O ângulo $b = PMN$ é congruente ao ângulo MPQ, por simetria. Logo $b - c = MPQ - MPR = RPQ$.

Portanto $a + b - c = 90° + RPQ$ e basta calcular esse último ângulo. Temos que RPQ é um ângulo da base de um triângulo isósceles de ângulo diferente igual a RQP, um dos ângulos internos do hexágono regular. Logo,

$$RQP = \frac{(6-2)\cdot 180°}{6} = 120° \Rightarrow RPQ = \frac{1}{2}\cdot(180° - RQP) = \frac{1}{2}\cdot(180° - 120°) = 30°.$$

Portanto,

$$a + b - c = 90° + RPQ = 90° + 30° = 120°.$$

Gabarito: "b"

---

54. (EEAR/2010)

Seja um retângulo de comprimento c e largura l. Aumentando-se o comprimento em $\frac{1}{10}$ do seu valor, para que a área não se altere, a sua largura deverá ser igual a

a) $\frac{1}{10}l$

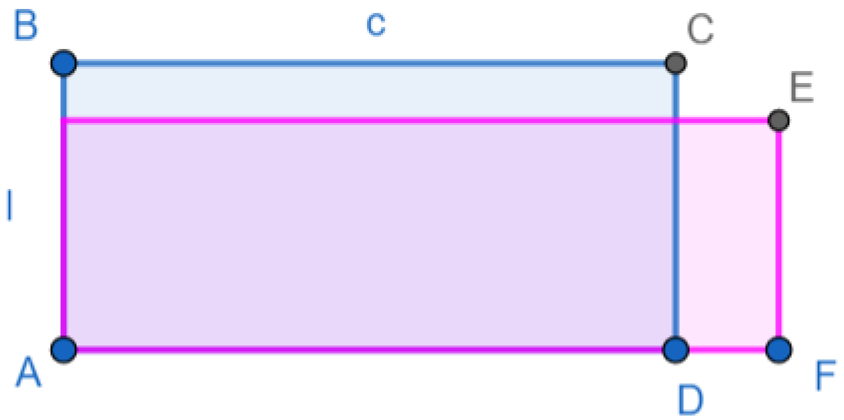
b) $\frac{10}{11}l$

c) $\frac{9}{11}l$

d) $\frac{9}{10}l$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Segundo o enunciado: $\overline{AF} = \overline{AD} + \frac{1}{10} \cdot \overline{AD} = \frac{11}{10} \cdot \overline{AD} = \frac{11}{10}c$

Mas a área de mantém constante, então:

$$S = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AF} \cdot \overline{EF}$$

$$l \cdot c = \frac{11}{10}c \cdot \overline{EF}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{EF} = \frac{10}{11}l$$

Gabarito: "b"

---

55. (EEAR/2010)

Um setor circular, cujo arco mede $15\ cm$, tem $30\ cm^2$ de área. A medida do raio desse setor, em cm, é

a) 4

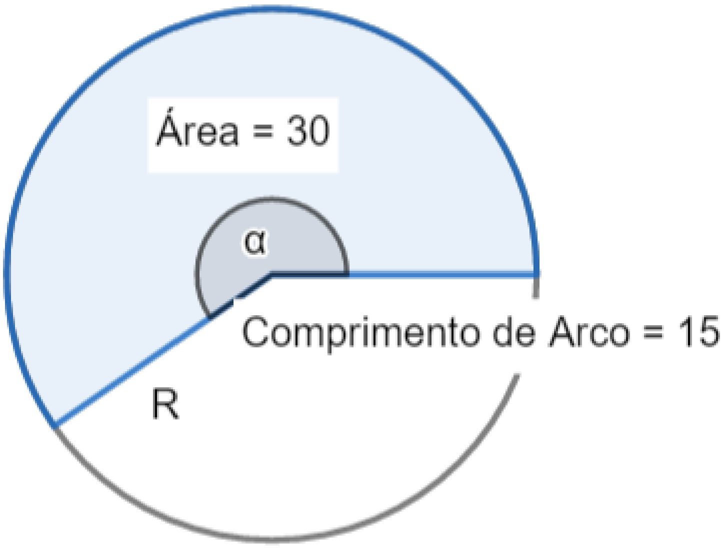
b) 6

c) 8

d) 10

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Primeiramente iremos descobrir o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ em radianos que produz um arco de $\mathbf{15}\ \boldsymbol{cm}$

$$\boldsymbol{\alpha \cdot R = 15 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{15}{R}} \qquad\qquad \mathbf{eq.1}$$

Fazendo a proporção entre ângulo (em radiano) e área do setor circular, conforme já feito na questão 80.

$$\boldsymbol{\frac{\pi R^2}{2\pi} = \frac{30}{\alpha}}$$

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{60}{R^2}} \qquad\qquad \boldsymbol{eq.2}$$

Igualando $\boldsymbol{eq.1}$ com $\boldsymbol{eq.2}$, obtemos:

$$\boldsymbol{\frac{15}{R} = \frac{60}{R^2} \quad \Rightarrow \quad R = 4\ cm}$$

Gabarito: “a”

---

56. (EEAR/2009)

A área de um setor circular de $30°$ e raio 6 cm, em cm^2, é, aproximadamente,

a) $7,48$

b) $7,65$

c) $8,34$

d) $9,42$

Comentários

Obs: usaremos $\boldsymbol{\pi = 3,14}$

O ângulo de $\mathbf{30°}$ equivale a 1/12 de volta completa. Portanto a área do setor definido por $\mathbf{30°}$ também seguirá a mesma proporção:

$$\frac{30°}{360°} = \frac{1}{12} = \frac{A}{\pi R^2}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\pi R^2}{12} = \frac{(3,14)(6)^2}{12} = 9,42\ cm^2$$

Gabarito: "d"

---

57. (EEAR/2009)

O perímetro de um losango é $20\ cm$. Se sua diagonal maior tem o dobro da medida da menor, então sua área, em cm^2, é

a) 35

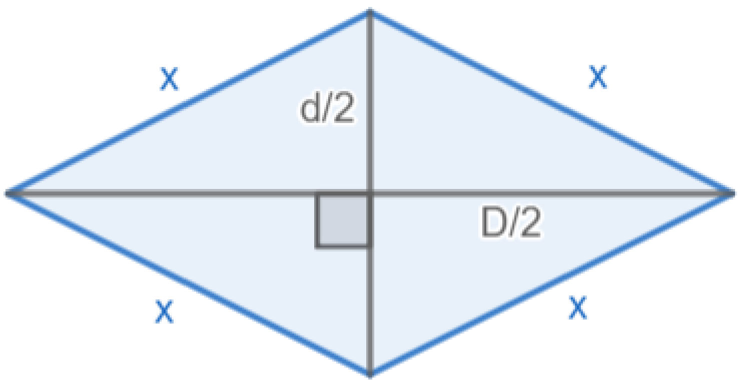
b) 30

c) 25

d) 20

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Equacionando o problema e já levando em consideração as propriedade de perímetro e área do losango:

$$P = 4x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 5\ cm$$

$$(5)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{2d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}d^2$$

$$\Rightarrow \quad d = 2\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad D = 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 20\ cm^2$$

Gabarito: "d"

---

58. (EEAR/2009)

Com 4 palitos de mesmo comprimento, forma-se um quadrado com $x\ cm^2$ de área e $y\ cm$ de perímetro. Se $x - y = 0$, o comprimento de cada palito, em cm, é

a) 2

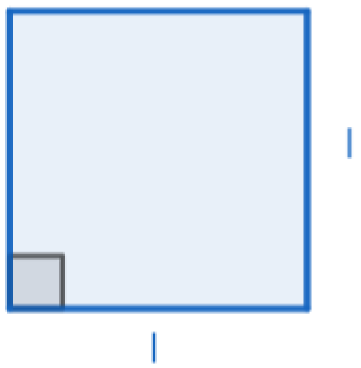
b) 4

c) 6

d) 8

Comentários

Seja l o comprimento de cada palito, consequentemente o comprimento do lado do quadrado:



$$A_Q = l^2 = x \quad \text{e} \quad P = 4l = y$$

Segundo o enunciado:

$$x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad l^2 - 4l = 0 \quad \Rightarrow \quad l \cdot (l - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad l = 4 \text{ ou } l = 0 \ (não\ convém)$$

$$l = 4\ cm$$

Gabarito: "b"

59. (EEAR/2009)

Um triângulo de $40\sqrt{2}\ cm^2$ de área tem dois de seus lados medindo $10\ cm$ e $16\ cm$. A medida do ângulo agudo formado por esses lados é

a) $70°$

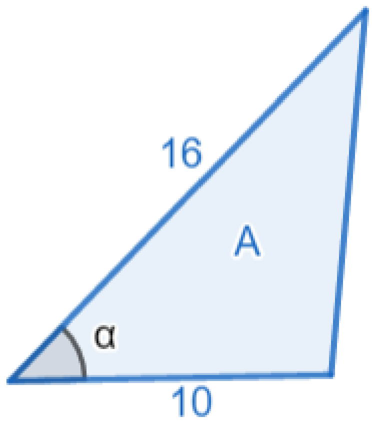
b) $60°$

c) $45°$

d) $30°$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



A área de um triângulo pode ser obtida segundo:

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} \cdot m \cdot n \cdot sen\ \alpha}$$

Com $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ sendo medidas de lados consecutivos e $\boldsymbol{\alpha}$ a medida do ângulo entre eles

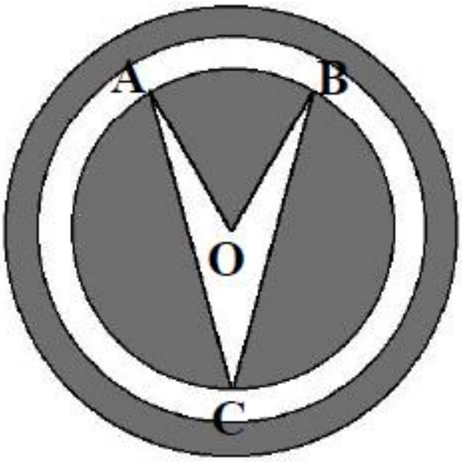
$$\boldsymbol{40\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot (10) \cdot (16) \cdot sen\ \alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{sen\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 45°}$$

Gabarito: "c"

60. (EEAR/2009)

No logotipo, OA, OB e OC são raios da menor das três circunferências concêntricas. A região acinzentada desse logotipo é composta de



a) dois setores circulares, duas coroas circulares e dois segmentos circulares.

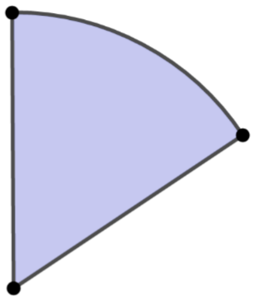
b) um setor circular, uma coroa circular e dois segmentos circulares.

c) um setor circular, duas coroas circulares e um segmento circular.

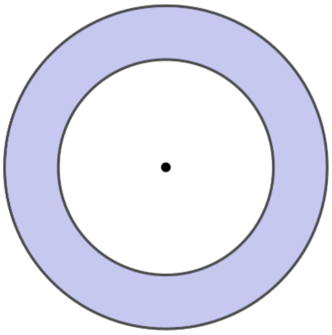
d) dois setores circulares, uma coroa circular e um segmento circular.

Comentário:

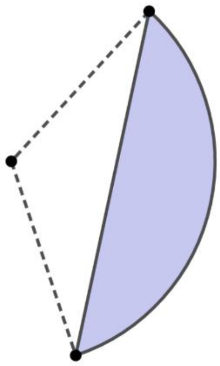
Setor circular tem formato de pizza. Há um na figura, na parte superior.



Coroa circular é o que se obtém ao se retirar de um círculo um círculo menor, concêntrico ao primeiro. Há uma na figura, na parte mais externa.



Segmento circular parece um semicírculo, mas o lado reto pode ser uma corda qualquer, não necessariamente um diâmetro. Há dois na figura, simétricos em relação à vertical.



Gabarito: "b"

---

61. (EEAR/2008)

O lado de um eneágono regular mede $2,5cm$. O perímetro desse polígono, em cm, é

a) 15.

b) 20.

c) 22,5.

d) 27,5.

Comentários

Sabemos que um eneágono é um polígono regular de nove lados iguais, como o perímetro é a soma dos lados, temos:

$$P = l + l + \cdots + l = 9l$$

$$P = 2{,}5 \cdot 9 = 22{,}5$$

Gabarito: "c"

---

62. (EEAR/2008)

Em um polígono regular, a medida de um ângulo interno é o triplo da medida de um ângulo externo. Esse polígono é o:

a) hexágono.

b) octógono.

c) eneágono.

d) decágono.

Comentários

Do enunciado retiramos que o ângulo interno S_i é o triplo do ângulo externo S_e:

$$S_i = 3S_e$$

Sabe-se que que quaisquer ângulos interno e externo de um mesmo vértice são sempre suplementares, portanto:

$$S_i + S_e = 180°$$

$$3S_e + S_e = 180°$$
$$4S_e = 180°$$
$$S_e = 45°$$

Sabemos que para todo polígono regular de n lados, a seguinte relação dos ângulos externos dos vértices é válida:

$$S_e = \frac{360°}{n}$$
$$45° = \frac{360°}{n}$$
$$\Rightarrow n = 8$$

Como $n = 8$, temos como figura regular um octógono.

Gabarito: "b"

---

63. (EEAR/2008)

Se $S = 6L\ cm^2$ é a área de um quadrado de lado $L\ cm$, o valor de L é

a) 3

b) 6

c) 9

d) 12

Comentários

O valor da área de um quadrado de lado L é obtido por:

$$A = L^2$$

Segundo o enunciado:

$$L^2 = 6L$$

$$\Rightarrow \quad L = 6\,cm \ \ ou\ L = 0\ (não\ convém)$$

Gabarito: “b”

---

64. (EEAR/2007)

Dois círculos concêntricos têm $4\ m$ e $6\ m$ de raio. A área da coroa circular por eles determinada, em m^2, é

a) 2π

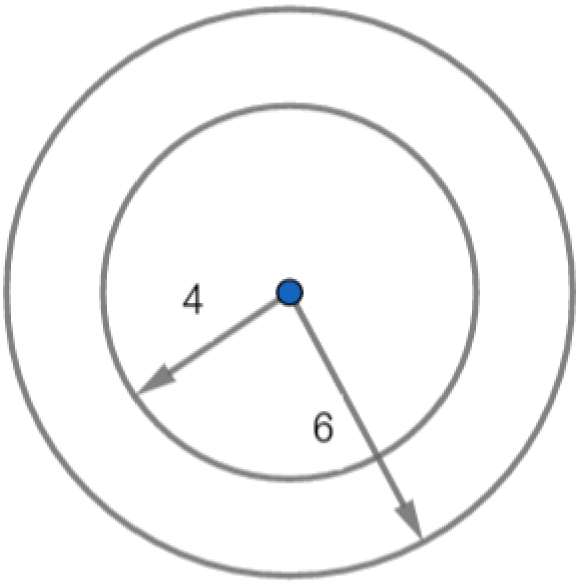
b) 10π

c) 20π

d) 52π

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



A área da coroa é definida pela diferença entre as áreas das duas circunferências

$$\boldsymbol{S = S_1 - S_2}$$

Com $\boldsymbol{S_1 = \pi R^2}$ e $\boldsymbol{S_2 = \pi r^2}$, com $\boldsymbol{R = 6\ m}$ e $\boldsymbol{r = 4\ m}$

$$\boldsymbol{S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot ((6)^2 - (4)^2) = \pi(36 - 16) = 20\pi}$$

$$\boldsymbol{S = 20\pi}$$

Gabarito: "c"

---

65. (EEAR/2007)

Os lados de um triângulo medem $7\ cm$, $8\ cm$ e $9\ cm$. A área desse triângulo, em cm^2, é

a) $12\sqrt{3}$

b) $12\sqrt{5}$

c) $8\sqrt{2}$

d) $8\sqrt{3}$

Comentários

Utilizando o Teorema de Heron:

$$\boldsymbol{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Em que $\boldsymbol{p}$ representa o semiperímetro de um triângulo de lados medindo $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

$$\boldsymbol{p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+9}{2} = 12}$$

$$\boldsymbol{A = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = 12\sqrt{5}}$$

$$\boldsymbol{A = 12\sqrt{5}}$$

Gabarito: "b"

---

66. (EEAR/2007)

S_6 e S_3 são, respectivamente, as áreas do hexágono regular e do triângulo equilátero, ambos inscritos na mesma circunferência. Nessas condições, a relação verdadeira é

a) $S_6 = S_3$

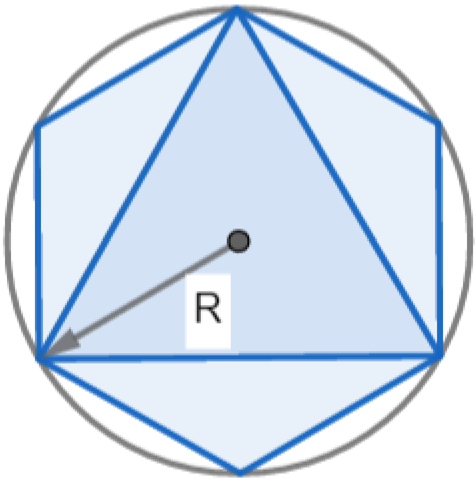
b) $S_6 = 3S_3$

c) $S_6 = 2S_3$

d) $S_3 = 2S_6$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Como demonstrado na Questão 66, a área de um Polígono Regular de n lados inscrito numa circunferência de raio R, é dado por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot R^2 sen\left(\frac{360°}{n}\right)$$

Logo:

$$S_6 = \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot R^2 sen\left(\frac{360°}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot R^2 sen\left(\frac{360°}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad S_6 = 2 \cdot S_3$$

Gabarito: "c"

---

67. (EEAR/2007)

Um triângulo isósceles tem perímetro igual a $36\ cm$ e altura relativa à base medindo $12\ cm$. A área desse triângulo, em cm^2, é

a) 60

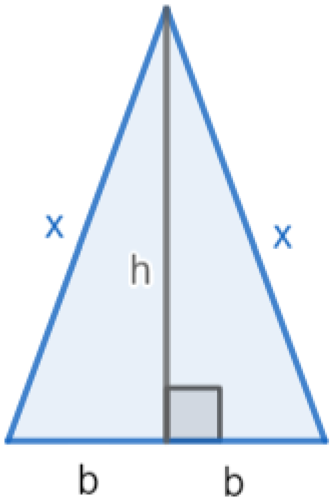
b) 56

c) 48

d) 40

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Equacionando o problema, obtemos:

$$\begin{cases} 2x + 2b = 36 \\ x^2 - b^2 = h^2 = (12)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + b = 18 \\ (x - b) \cdot (x + b) = 144 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (x - b) \cdot 18 = 144 \quad \Rightarrow \quad x - b = 8$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x + b = 18 \\ x - b = 8 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 18 - x \\ 2x = 26 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 18 - 13 = 5 \\ x = 13 \end{cases}$$

Logo, Base mede $B = 2 \cdot b = 2 \cdot 5 = 10\ cm$

E, por fim,

$$A = \frac{1}{2} \cdot B \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60\ cm^2$$

Gabarito: "a"

---

68. (EEAR/2007)

As medidas da diagonal menor e do perímetro de um losango são, respectivamente, $36\ cm$ e $120\ cm$. A área desse losango, em cm^2, é

a) 864

b) 728

c) 600

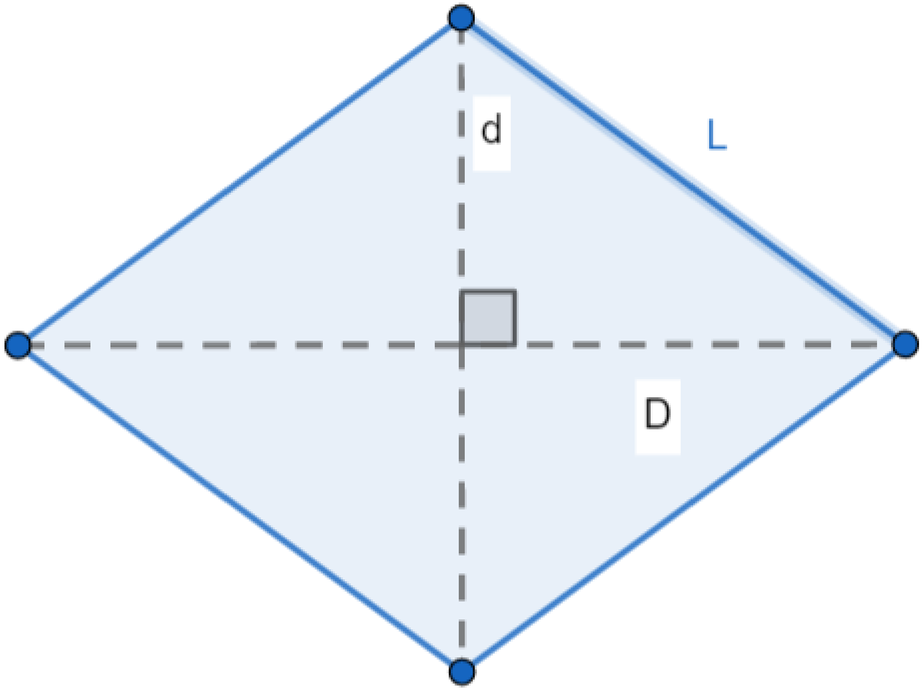
d) 548

Comentários

Podemos calcular o lado a partir do perímetro.

$$L = \frac{P}{4} = \frac{120}{4} = 30\ cm$$

Posto isso, temos a seguinte figura:



Aplicando o Teorema De Pitágoras, descobrimos que

$$\left(\frac{D}{2}\right) = 24 \quad \Rightarrow \quad D = 48\ cm$$

Calculemos a área do losango:

$$A = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d = \frac{1}{2} \cdot (48) \cdot (36) = 864\ cm^2$$

Gabarito: “a”

---

69. (EEAR/2007)

A casa de João tem um quintal retangular de $30\ m$ por $20\ m$. Se ele usar 30% da área do quintal para fazer uma horta também retangular, de $10\ m$ de comprimento, então a largura desta horta, em m, será

a) 18

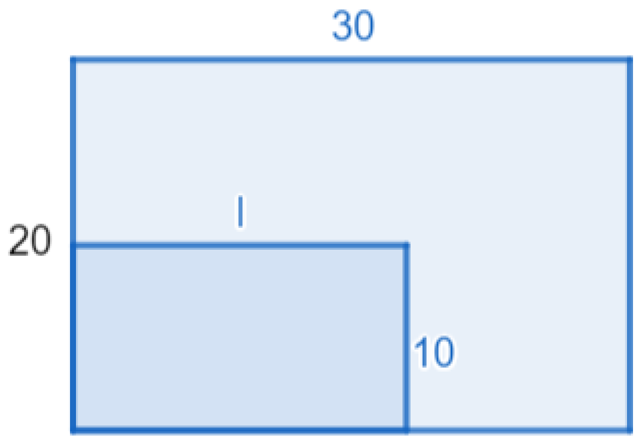
b) 15

c) 12

d) 11

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Sabemos que $\boldsymbol{S_2 = 0,3 \cdot S_1}$

$$\boldsymbol{S_1 = 30 \cdot 20 = 600\ m^2}$$

$$\boldsymbol{S_2 = 10 \cdot l}$$

$$\boldsymbol{10 \cdot l = 0,3 \cdot 600 \quad \Rightarrow \quad l = 18\ cm}$$

Gabarito: "a"

---

70. (EEAR/2007)

Um trapézio isósceles tem bases medindo $12\ cm$ e $20\ cm$. Se a medida de um de seus lados oblíquos é $5\ cm$, então sua área, em cm^2, é

a) 25

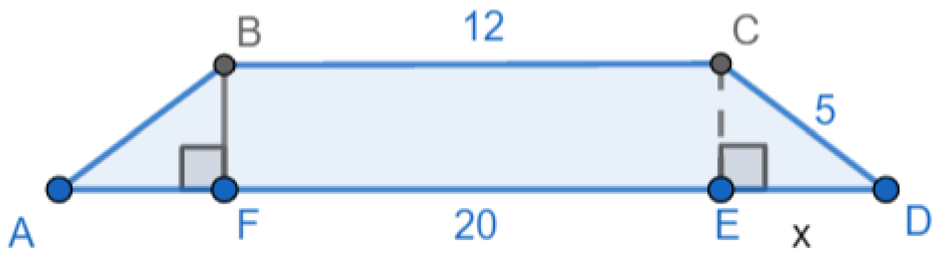
b) 39

c) 48

d) 54

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Como o trapézio é isósceles, então $\overline{AB} = \overline{CD} = 5\ cm$

Perceba que $\overline{AF} = \overline{DE} = x$ devido a simetria do trapézio isósceles, assim como

$\overline{EF} = \overline{BC} = 12$. Então

$$\overline{AF} + \overline{EF} + \overline{ED} = 20$$

$$2 \cdot x + 12 = 20$$

$$x = \overline{DE} = 4$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CDE obtemos que $\overline{CE} = 3\ cm$, mas $\overline{CE}$ representa a altura do trapézio.

Em posse disso, podemos calcular a área do trapézio. Seja $B = \overline{AD} = 20\ cm$, $b = \overline{BC} === 12\ cm$ e $h = \overline{CE} = 3\ cm$

$$A = \frac{(b + B)}{2} \cdot h = \frac{(12 + 20)}{2} \cdot (3) = 48\ cm^2$$

Gabarito: "c"

---

71. (EEAR/2007)

Dois polígonos convexos têm o número de lados expresso por n e por $n + 3$. Sabendo que um polígono tem 18 diagonais a mais que o outro, o valor de n é:

a) 10.

b) 8.

c) 6.

d) 4.

Comentários

O número total de diagonais de qualquer polígono com mais de 3 é encontrado pela relação:

$$D_n = \frac{(n-3)n}{2}$$

De acordo com o enunciado tem-se a equação:

$$D_{n+3} = D_n + 18$$

Logo, substituindo a relação de diagonais na equação, temos:

$$\frac{(n+3)n}{2} = \frac{(n-3)n}{2} + 18$$

$$(n+3)n = (n-3)n + 36$$

$$n^2 + 3n = n^2 - 3n + 36$$

$$6n = 36 \Longrightarrow n = 6$$

Gabarito: "d"

---

72. (EEAR/2006)

A razão entre as medidas dos apótemas do quadrado inscrito e do quadrado circunscrito numa circunferência de raio R é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) 2

d) $2\sqrt{3}$

Comentário:

O apótema de um quadrado qualquer é igual à metade do seu lado. Sendo a, A, l, L, as medidas do apótema do quadrado inscrito, do apótema do quadrado circunscrito, do lado do quadrado inscrito e do lado do quadrado circunscrito, respectivamente, temos:

$$L = 2R$$

$$l\sqrt{2} = 2R$$

Logo:

$$\frac{a}{A} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{L\sqrt{2}} = \frac{2R}{2R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \frac{a}{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Gabarito: “a”

---

73. (EEAR/2006)

Um hexágono regular $ABCDEF$, de $30\sqrt{3}\ cm$ de perímetro, está inscrito em um círculo de raio R. A medida de sua diagonal AC, em cm, é

a) $5\sqrt{3}$

b) 5

c) $15\sqrt{3}$

d) 15

Comentário:

O hexágono regular inscrito em uma circunferência tem a propriedade notável que a medida do seu lado L coincide com a medida do raio R da circunferência a ele circunscrita. Portanto, temos $6L = 6R = 30\sqrt{3}\ cm \Rightarrow L = R = 5\sqrt{3}\ cm$. Olhando para o triângulo ABC, temos que o ângulo $\hat{B}$ é um ângulo interno e, portanto, vale $\frac{180°\cdot(6-2)}{6} = 120°$ e o triângulo ABC é isósceles de base AC e lado comum L. Portanto, pela lei dos cossenos, $AC^2 = L^2 + L^2 - 2 \cdot L \cdot L \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC^2 = 2L^2 - 2L^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3L^2 \therefore AC = L\sqrt{3} = 15\ cm.$$

Gabarito: “d”

---

74. (EEAR/2006)

Sejam $A, B\ e\ C$ três polígonos convexos. Se C tem 3 lados a mais que B, e este tem 3 lados a mais que A, e a soma das medidas dos ângulos internos dos três polígonos é 3240, então o número de diagonais de C é

a) 46.

b) 44.

c) 42.

d) 40.

Comentários

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo segue a relação:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Supondo que o polígono A tem n lados, de acordo com o enunciado a soma de todos os ângulos internos é 3240

$$S_{i_A} + S_{i_B} + S_{i_C} = 3240°$$
$$(n-2) \cdot 180° + (n+3-2) \cdot 180° + (n+6-2) \cdot 180° = 3240°$$
$$(3n+3) \cdot 180° = 3240°$$
$$3(n+1) = 18$$
$$n+1 = 6$$
$$n = 5$$

Portanto o número de lados de C é $n + 6 = 11$

O número total de diagonais de qualquer polígono com mais de 3 é encontrado pela relação:

$$D_n = \frac{(n-3)n}{2}$$

Assim temos que o número de diagonais de C é:

$$D_{11} = \frac{(11-3)11}{2} = 44$$

Gabarito: "b"

---

75. (EEAR/2006)

Um quadrado e um losango têm o mesmo perímetro. Se as diagonais do losango estão entre si como 3 para 5, então a razão entre a área do quadrado e a do losango é

a) $\frac{17}{15}$

b) $\frac{13}{15}$

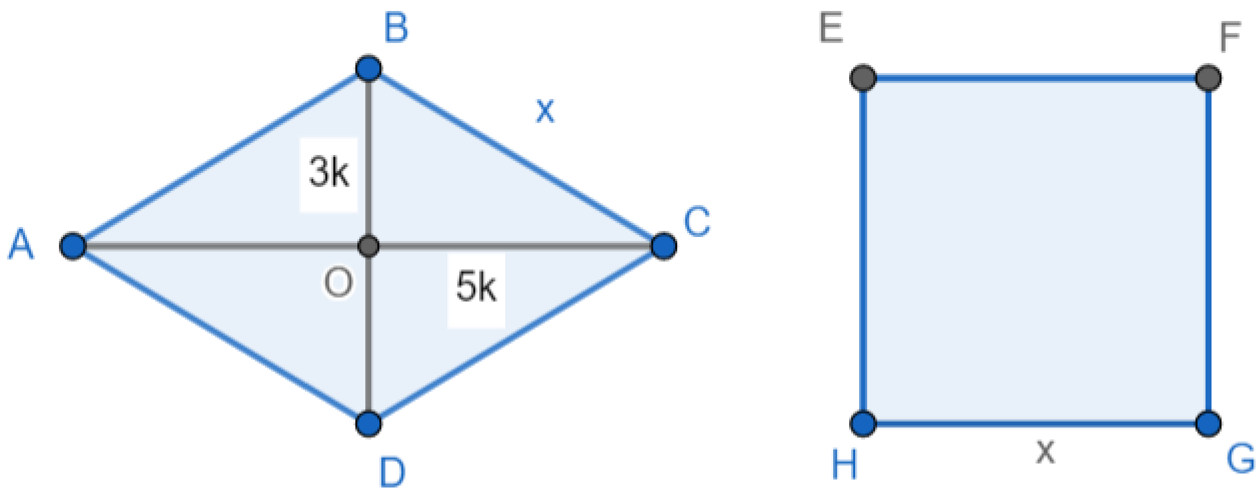
c) $\frac{17}{13}$

d) $\frac{11}{13}$

Comentários

Primeiramente podemos concluir que os lados do quadrado e do losango são iguais, pois o perímetro é o mesmo. Em seguida, devemos considerar a proporção das diagonais do losango de 3 para 5.

Sendo assim, temos a seguinte figura:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCO, obtemos:

$$(3k)^2 + (5k)^2 = x^2 = 9k^2 + 25k^2 = 34k^2 = x^2$$

$$k^2 = \frac{x^2}{34}$$

Sendo assim, a área do losango pode ser calculada

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot (10k) \cdot (6k) = 30 \cdot k^2 = 30 \cdot \frac{x^2}{34} = \frac{15x^2}{17}$$

E seja a área do quadrado

$$S_2 = x^2$$

Logo, a razão pedida é dada por:

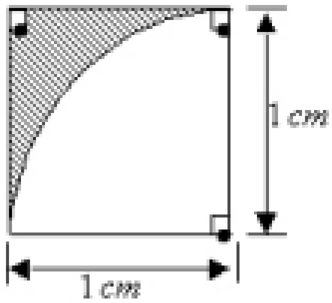
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{x^2}{\frac{15x^2}{17}} = \frac{17}{15}$$

Gabarito: "a"

---

76. (EEAR/2006)

A área da região hachurada, em cm^2, é



a) $\frac{4-\pi}{4}$

b) $1-\frac{\pi}{2}$

c) $\frac{1-\pi}{4}$

d) $\pi - 1$

Comentários

Trata-se da diferença entre um quadrado de lado $\mathbf{1\ cm}$ e um arco correspondente a $\frac{1}{4}$ de circunferência de raio $\mathbf{1\ cm}$.

Seja S_1 a área do quadrado, tal que

$$S_1 = L^2 = (1)^2 = 1\ cm^2$$

Seja S_2 a área do arco, tal que

$$S_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi (1)^2 = \frac{\pi}{4}\ cm^2$$

Portanto,

$$S = S_1 - S_2 = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}\ cm^2$$

Gabarito: "a"

---

77. (EEAR/2006)

A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 10 cm e o raio da circunferência nele inscrita mede 1 cm. A soma das medidas dos catetos desse triângulo é, em cm,

a) 10

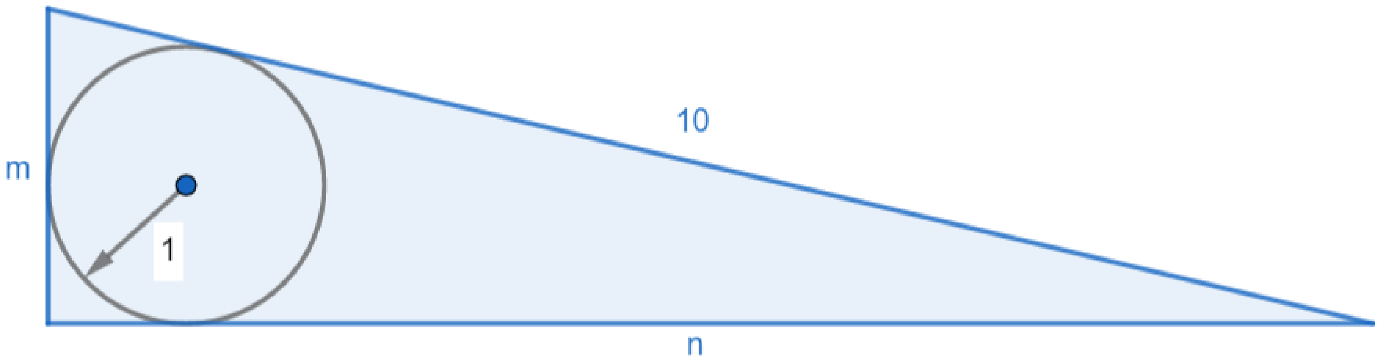
b) 12

c) 14

d) 16

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Iremos calcular o valor de $S = m + n$

Sabemos que o raio da circunferência inscrita é dado por:

$$r = \frac{A}{p}$$

em que $A - \acute{A}rea$ e $p - Semiper\acute{\imath}metro$ do triângulo. Logo:

$$r = \frac{A}{p} \Rightarrow 1 = \frac{\frac{m \cdot n}{2}}{\frac{m + n + 10}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad m + n = m \cdot n - 10$$

De Pitágoras, sabemos que $m^2 + n^2 = 10^2 = 100$.

Calculemos o valor de $(m + n)^2$

$$(m + n)^2 = m^2 + 2 \cdot m \cdot n + n^2 = 100 + 2 \cdot m \cdot n$$

$$\Rightarrow \quad (m + n)^2 = 100 + 2 \cdot m \cdot n$$

Chamemos a partir de agora $S = m + n$ e $P = m \cdot n$

$$\begin{cases} S = P - 10 \\ S^2 = 100 + 2 \cdot P \end{cases} \Rightarrow \quad S^2 = (P - 10)^2 = P^2 - 20P + 100 = 100 + 2P$$

$$\Rightarrow \quad P^2 - 20P = 2P \Rightarrow P(P - 22) = 0$$

$$P = 0(não\ convém) \qquad ou\ P = 22$$

Substituindo $P = 22$ em $S = P - 10$, obtemos $S = 22 - 10 = 12$

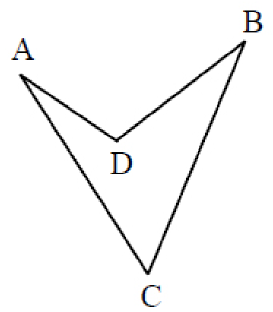
Ou seja:

$$m + n = 12$$

Gabarito: "b"

78. (EEAR/2005)

Na figura, $B\widehat{C}A$ e $C\hat{A}D$, $A\widehat{D}B$ medem, respectivamente, $60°$, $30°$ e $110°$. A medida de $D\hat{B}C$ é:



a) $15°$

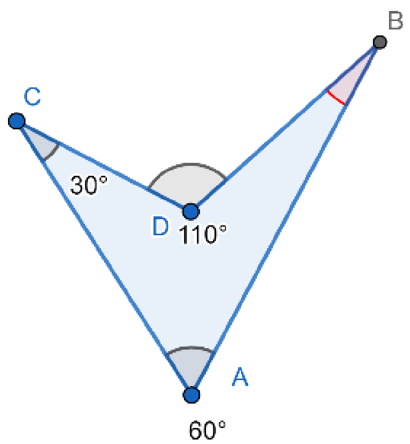
b) $20°$

c) $25°$

d) $30°$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Sabemos que para todo polígono de n vértices, a soma dos ângulos internos segue a relação:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Para um polígono de $n = 4$,temos:

$$S_4 = 2 \cdot 180° = 360$$

Para o vértice D temos o ângulo externo, mas sabemos que o ângulo interno é o replementar do externo:

$$\widehat{D}_i + \widehat{D}_e = 360° \Longrightarrow \widehat{D}_i = 360° - 110°$$
$$\widehat{D}_i = 250°$$

Pela soma de todos os ângulos internos, temos:

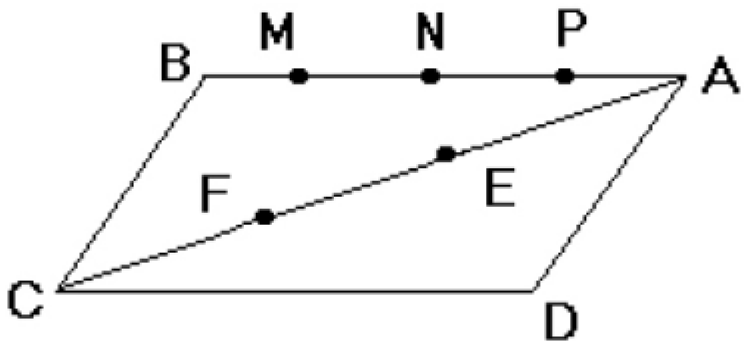
$$S_4 = 30° + 250° + 60° + D\hat{B}A = 360°$$
$$340° + D\hat{B}A = 360°$$
$$D\hat{B}A = 20°$$

Gabarito: "b"

---

79. (EEAR/2005)

Na figura, os pontos M, N e P dividem o lado $\overline{AB}$ do paralelogramo $ABCD$ em 4 partes iguais, e os pontos E e F dividem a diagonal $\overline{AC}$ em 3 partes iguais. A área do triângulo APE é uma fração da área do paralelogramo $ABCD$, equivalente a



a) $\frac{1}{12}$

b) $\frac{1}{16}$

c) $\frac{1}{20}$

d) $\frac{1}{24}$

Comentários

Seja $\boldsymbol{S}$ o valor da área do paralelogramo dado. É propriedade dos paralelogramos a congruência dos triângulos definidos por cada diagonal. Ou seja, os triângulos $\boldsymbol{ABC}$ e $\boldsymbol{ADC}$ são congruentes.

Logo, a área do triângulo $\boldsymbol{ABC}$ vale $\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{2}}$.

Usaremos agora o método do cálculo de área do triângulo através do seno, pois o ângulo $\boldsymbol{B\hat{A}C}$ se mantém.

Seja $\boldsymbol{S_1}$ área do triângulo $\boldsymbol{ABC}$

$$\boldsymbol{S_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} \cdot sen\,(B\hat{A}C\,)}$$

Seja $\boldsymbol{S_2}$ a área do triângulo $\boldsymbol{AEP}$, com $\boldsymbol{\overline{AP} = \frac{1}{4}\overline{AB}}$ e $\boldsymbol{\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AC}}$

$$\boldsymbol{S_2 = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AE}}{2} \cdot sen\left(B\hat{A}C\,\right) = \frac{\frac{1}{4}\overline{AB} \cdot \frac{1}{3}\overline{AC}}{2} \cdot sen\left(B\hat{A}C\,\right) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{12} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} \cdot sen\left(B\hat{A}C\,\right) = \frac{1}{12} \cdot S_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{S}{2} = \frac{1}{24}S}$$

$$\boldsymbol{S_2 = \frac{S}{24}}$$

Logo, a área de $\boldsymbol{AEP}$ equivale a $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{24}}$ da área do paralelogramo $\boldsymbol{ABCD}$

Gabarito: “d”

---

80. (EEAR/2005)

Um círculo é tal que a medida de seu raio é igual aos $\frac{4}{7}$ da medida do comprimento de um setor circular que ele contém. Se a área desse setor é igual a $\frac{63}{8}\pi\ cm^2$, então a área do círculo, em cm^2, é

a) 9π

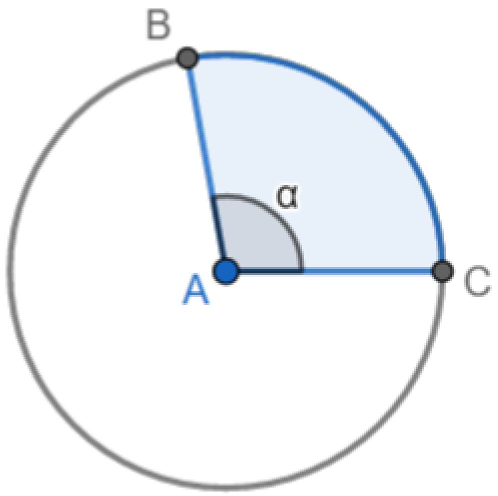
b) $9\pi^2$

c) 6π

d) $6\pi^2$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Seja R o raio da circunferência.

Área do setor: $\boldsymbol{S_{set}} = \frac{\boldsymbol{\alpha R^2}}{\boldsymbol{2}}$

Comprimento do arco BC: $\boldsymbol{L_{set} = \alpha \cdot R}$

De acordo com o enunciado, a medida do raio é $\frac{4}{7}$ da medida do arco BC. Logo:

$$\boldsymbol{R = \frac{4}{7} \cdot \alpha R \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{7}{4}}$$

Sabemos que $\boldsymbol{S_{set}} = \frac{\boldsymbol{63\pi}}{\boldsymbol{8}}$, então:

$$\boldsymbol{\frac{63\pi}{8} = \frac{\left(\frac{7}{4}\right)R^2}{2} \quad \Rightarrow \quad R^2 = 9\pi}$$

Sendo assim, a área da circunferência é dada por:

$$\boldsymbol{S = \pi R^2 = \pi \cdot (9\pi) = 9\pi^2}$$

Gabarito: “b”

---

81. (EEAR/2004)

Em um triângulo equilátero de $12\sqrt{3}\,m$ de perímetro, a soma das medidas dos raios das circunferências inscrita e circunscrita a esse triângulo, em m, é

a) $5.$

b) $6.$

c) $7.$

d) $8.$

Comentário:

Seja l o lado do triângulo equilátero, h sua altura, $2p$ o perímetro, S a área, r o raio da circunferência inscrita, R o raio da circunferência circunscrita. Podemos usar as seguintes fórmulas:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}; (altura\ do\ triângulo\ equilátero)$$

$$R = \frac{2}{3}h; (o\ circuncentro, nesse\ caso, também\ é\ baricentro)$$

$$2p = 3l; (perímetro\ do\ triângulo\ equilátero)$$

$$S = pr;$$

$$S = \frac{lh}{2}.$$

Portanto, conseguimos isolar R e r em função de l:

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{2p} = \frac{lh}{3l} = \frac{h}{3} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

Logo,

$$R + r = \frac{l\sqrt{3}}{3} + \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{3l\sqrt{3}}{6} = \frac{(2p)\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore R + r = \left(12\sqrt{3}\, m\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = 6\, m.$$

Gabarito: "b"

---

82. (EEAR/2004)

A medida, em m, do apótema do hexágono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede $4\sqrt{2}\ m$ é

a) $4\sqrt{3}.$

b) $2\sqrt{2}.$

c) $4\sqrt{6}$.

d) $2\sqrt{6}$.

Comentário:

O lado L do hexágono coincide com o raio R da circunferência a ele circunscrita. Logo, em função de R, o apótema, que é igual à altura de um triângulo equilátero de lado L, vale

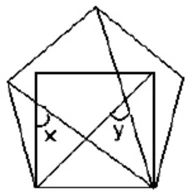
$$a = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{(4\sqrt{2}\, m)\cdot\sqrt{3}}{2} \therefore a = 2\sqrt{6}\, m.$$

Gabarito: "d"

---

83. (EEAR/2004)

Na figura, tem-se um pentágono regular e um quadrado. O valor de $x + y$ é:



a) $126°$

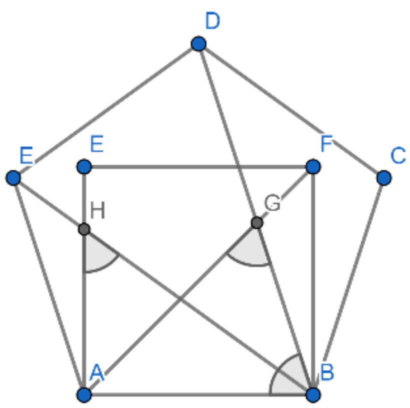
b) $102°$

c) $117°$

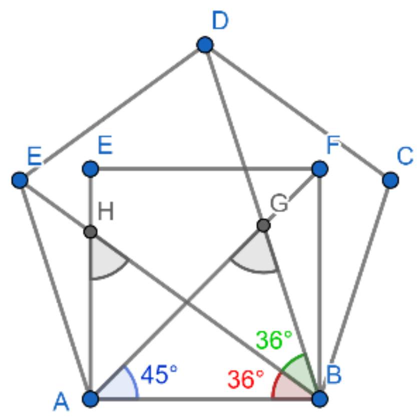
d) $114°$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Utilizando do fato do polígono regular ser um pentágono, obtemos os seguintes ângulos na figura a seguir:



Temos no triângulo ΔABH:

$$36° + 90° + A\widehat{H}B = 180°$$
$$A\widehat{H}B = 54°$$

Temos no triângulo ΔAGB:

$$36° + 36° + 45° + A\hat{G}B = 180°$$
$$A\hat{G}B = 63°$$

Portanto temos que $x + y = A\widehat{H}B + A\hat{G}B = 117°$

Gabarito: "c"

---

84. (EEAR/2004)

As diagonais de um paralelogramo medem $10\ m$ e $20\ m$ e formam entre si um ângulo de $60°$. A área desse paralelogramo, em m^2, é

a) 200

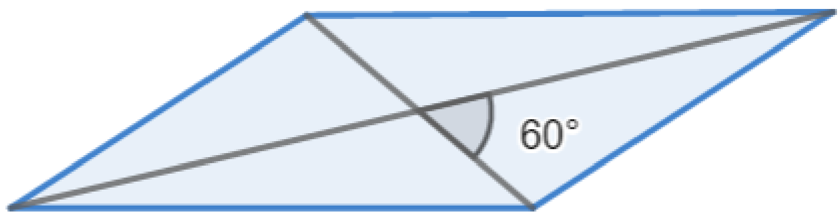
b) 100

c) $50\sqrt{3}$

d) $25\sqrt{3}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura



A área de um paralelogramo pode ser calculada a partir das diagonais e do ângulo formado por elas segundo:

$$S = \frac{D \cdot d \cdot sen\,(\alpha)}{2} = \frac{10 \cdot 20 \cdot sen(60°)}{2} = 100\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 50\sqrt{3}$$

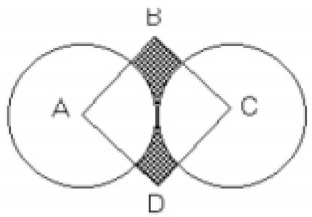
$$S = 50\sqrt{3}$$

Gabarito: “c”

---

85. (EEAR/2004)

Na figura, A e C são os centros de duas circunferências tangentes, e $ABCD$ é um quadrado de área igual a $50\ cm^2$.



A área da região sombreada é, em cm^2

a) $\frac{25(\pi-2)}{2}$

b) $\frac{25(4-\pi)}{2}$

c) $25(4-\pi)$

d) $25(\pi-2)$

Comentários

Seja L o lado do quadrado e r o raio da circunferência.

A área do quadrado é dada por: $S_1 = L^2 \quad \Rightarrow \quad 50 = L^2 \quad \Rightarrow \quad L = 5\sqrt{2}$

O diâmetro do quadrado mede $\sqrt{2}L = \sqrt{2} \cdot (5\sqrt{2}) = 10\ cm$

Da figura, depreende-se que AC é o diâmetro do quadrado, assim como AC mede a soma dos raios das circunferências. Consideraremos que ambas as circunferências possuem o mesmo raio. Logo: $\sqrt{2}L = 10 = 2r \quad \Rightarrow \quad r = 5\ cm$

A área hachurada corresponde a área do quadrado menos a área de duas seções de $\frac{1}{4}$ de circunferência.

$$S_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{4} \pi\ cm^2$$

Portanto:

$$S = S_1 - 2S_2 = 50 - 2 \cdot \frac{25}{4} \pi = 50\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{25(4-\pi)}{2}$$

Gabarito: "b"

---

86. (EEAR/2004)

Os lados de um paralelogramo medem 4 cm e 1 cm, e um ângulo formado por eles é de $60°$. A área desse paralelogramo, em cm^2, é

a) 2

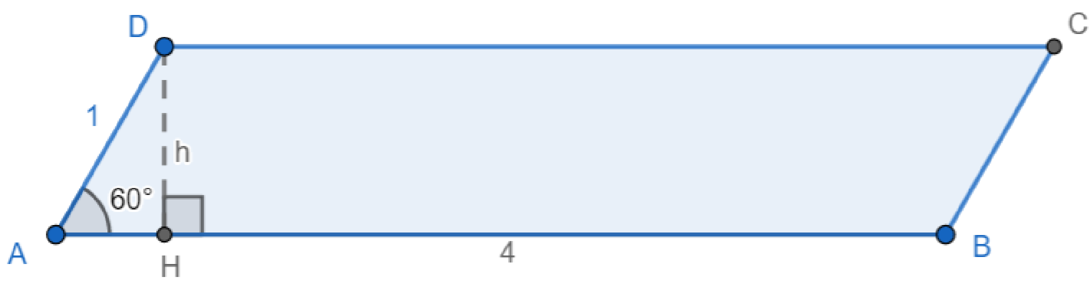
b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $2\sqrt{3}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Aplicando a definição de seno de $60°$ no triângulo ADH obtemos que $\overline{DH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo a área do paralelogramo é dada por:

$$S = B \cdot h = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Gabarito: "d"

87. (EEAR/2004)

Num triângulo retângulo, as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa medem 6 cm e 24 cm. A área desse triângulo mede, em cm^2,

a) 180

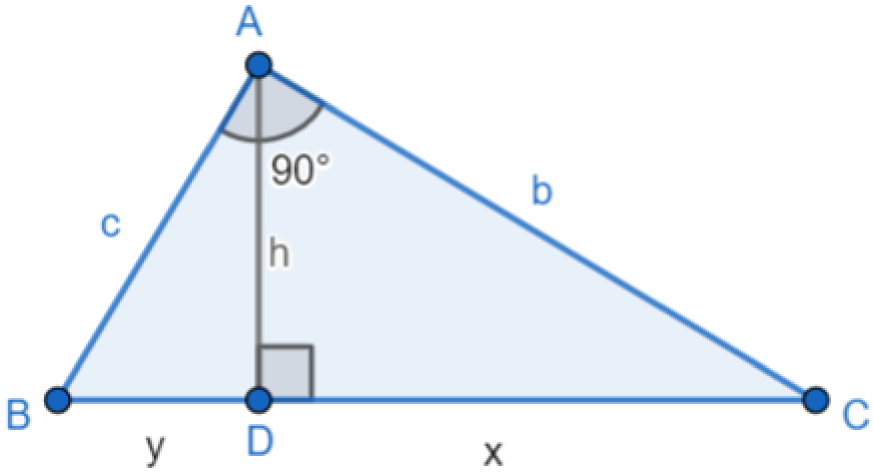
b) $37\sqrt{11}$

c) 72

d) $36\sqrt{17}$

Comentários

Conforme já feito na questão 29 desta mesma lista:



De Pitágoras, obtemos:

$$\begin{cases} h^2 = b^2 - x^2 \\ h^2 = c^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2 \cdot h^2 = b^2 + c^2 - x^2 - y^2$$

$$2 \cdot h^2 = a^2 - x^2 - y^2 = (x+y)^2 - x^2 - y^2$$

$$2 \cdot h^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 - x^2 - y^2 = 2 \cdot x \cdot y$$

$$h^2 = x \cdot y$$

Obs: É recomendável manter este resultado em mente.

Utilizando este resultado para obter a altura do triângulo:

$$\boldsymbol{h^2 = 6 \cdot 24 = 144}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{h = 12\ cm}$$

$$\boldsymbol{\overline{AB} = x + y = 6 + 24 = 30cm}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{Base \cdot altura}{2} = \frac{30 \cdot 12}{2} = 180\ cm^2}$$

Gabarito: "a"

---

88. (EEAR/2003)

Observe:

I. É sempre possível construir um polígono regular de n lados, para $n > 3$.

II. Triângulo é, em todos os possíveis casos, inscritível em uma circunferência.

III. Um ângulo central $\hat{a}_c$ de um polígono regular de n lados inscritos em uma circunferência mede $\frac{(n-2)180}{n}$

IV. Sempre é possível construir uma circunferência que passa pelos n vértices de um polígono qualquer.

Quantas das assertivas acima são falsas?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentários

I. (V) Pela construção do polígono é sempre possível fazê-lo com $n>3$ lados iguais

II. (V) Dado 3 pontos não colineares é possível construir uma circunferência, por essa mesma definição é possível construir um triângulo, portanto todo triângulo é inscritível.

III. (F) Um ângulo central $\hat{a}_c$ de um polígono regular de n lados inscritos em uma circunferência mede na realidade $\frac{360}{n}$, pois o ângulo central é dividido em n seções, a fórmula $\frac{(n-2)180}{n}$ revela o ângulo entre os lados do polígono

IV. (F) Só é possível se o polígono for inscritível

Gabarito: “b”

---

89. (EEAR/2003)

As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de $24°$. O número de diagonais desse polígono é:

a) 70

b) 80

c) 90

d) 100

Comentários

Sabemos que em polígonos regulares, a mediatriz dos lados sempre se encontram no centro da circunferência circunscrita ao polígono, desse modo se as mediatrizes se encontram com o ângulo de $24°$, indica que o ângulo interno do polígono é $24°$.

Portanto sabe-se que $A_I = \frac{360°}{n}$

$$24° = \frac{360°}{n}$$

$$n = 15$$

O número total de diagonais de qualquer polígono com mais de 3 é encontrado pela relação:

$$D_n = \frac{(n-3)n}{2}$$

Assim temos que o número de diagonais de C é:

$$D_{15} = \frac{(15-3)15}{2} = 90$$

Gabarito: “c”

---

90. (EEAR/2003)

Um triângulo escaleno está inscrito num semicírculo de $10\ cm$ de diâmetro, que é o maior lado do triângulo. Se as medidas dos lados menores do triângulo são tais que uma é o dobro da outra, então a diferença entre as áreas do semicírculo e do triângulo, em cm^2, é

a) $\frac{25\pi-40}{2}$

b) $\frac{25\pi-30}{2}$

c) $\frac{25\pi-20}{2}$

d) $\frac{25\pi-50}{2}$

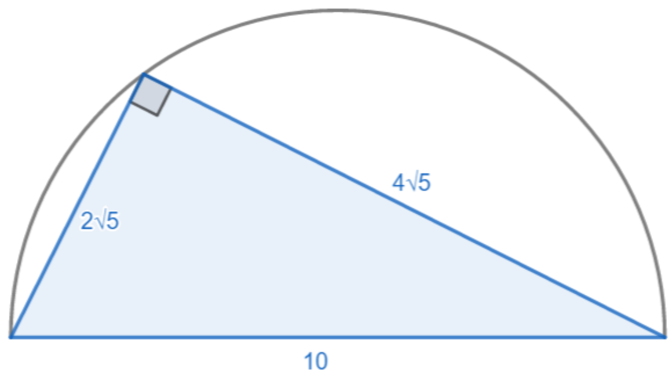
Comentários

Perceba que um dos lados do triângulo corresponde ao diâmetro da circunferência, logo, o ângulo oposto a este lado mede $90°$, o que o torna um triângulo retângulo.

Segundo o enunciado também sabemos que os valores dos catetos são da forma k e $2k$. Aplicando o Teorema De Pitágoras, obtemos:

$$(k)^2 + (2k)^2 = (10)^2 \quad \Rightarrow \quad 5k^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad k = 2\sqrt{5}$$

Posto isso, temos a seguinte figura:



Área do triângulo:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{5}\right) \cdot \left(4\sqrt{5}\right) = 20\ cm^2$$

Área do semicírculo

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{10}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}\pi\ cm^2$$

Portanto queremos

$$S = S_2 - S_1 = \frac{25}{2}\pi - 20 = \frac{25\pi - 40}{2}$$

Gabarito: "a"

---

91. (EEAR/2003)

A, B e P são pontos distintos de uma circunferência de centro O e raio r. Se $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência, e a medida do ângulo $P\hat{A}B$, em radianos, é α, então a área da região limitada pelo ângulo $P\hat{A}B$ e o arco PB é igual a

a) $r\left(\alpha + r\frac{sen(\alpha)}{2}\right)$

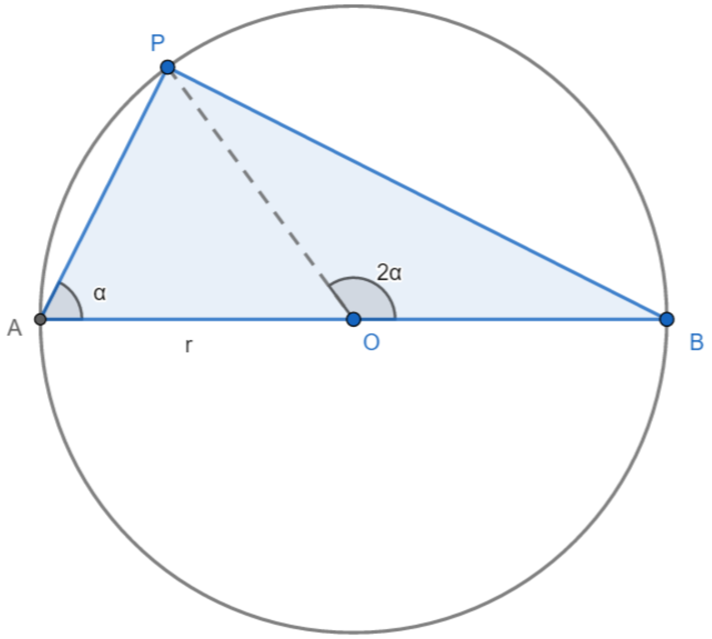
b) $r^2\left(\alpha + \frac{sen(\alpha)}{2}\right)$

c) $r\left(\alpha + r\frac{sen(2\alpha)}{2}\right)$

d) $r^2\left(\alpha + \frac{sen(2\alpha)}{2}\right)$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Perceba que queremos a área definida pelo triângulo $\boldsymbol{ABP}$ somada a área definida pelo arco $\overline{\boldsymbol{PB}}$.

Para facilitar a álgebra iremos calcular a área do setor $\boldsymbol{BOP}$ e somar a área do triângulo isósceles $\boldsymbol{AOP}$.

Perceba que o ângulo $\boldsymbol{B\hat{O}P = 2\alpha}$ pois decorre da definição de ângulo central,

E o ângulo $\boldsymbol{AOP = 180 - 2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{sen(180 - 2\alpha) = sen\ (2\alpha)}$.

Área do setor $\boldsymbol{BOP}$:

$$\boldsymbol{S_1 = 2\alpha \cdot \frac{1}{2} r^2 = \alpha r^2}$$

Área do triângulo AOP:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot sen(180 - 2\alpha) = \frac{r^2 sen(2\alpha)}{2}$$

Portanto:

$$S = S_1 + S_2 = \alpha r^2 + \frac{r^2 sen(2\alpha)}{2} = r^2 \left(\alpha + \frac{sen(2\alpha)}{2}\right)$$

Gabarito: "d"

---

92. (EEAR/2003)

Num retângulo $ABCD$, os vértices A, B, C e D são consecutivos. Marcam-se na base $\overline{AB}$, a partir de A, três pontos, E, F e G, de modo que eles assinalem, respectivamente, $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$ da base $\overline{AB}$. A razão entre as áreas do triângulo CEF e do retângulo $ABCD$ é

a) $\frac{1}{4}$

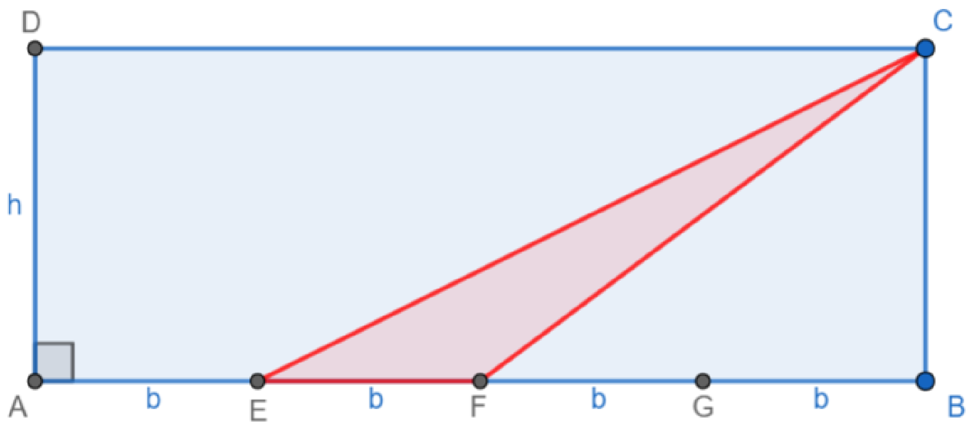
b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{10}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Seja S_1 a área do retângulo:

$$S_1 = B \cdot h = (4b) \cdot (h) = 4bh$$

Perceba que o triângulo possui a mesma altura do retângulo. Seja $\boldsymbol{S_2}$ a área do triângulo:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot B \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (b) \cdot (h) = \frac{bh}{2}$$

Logo,

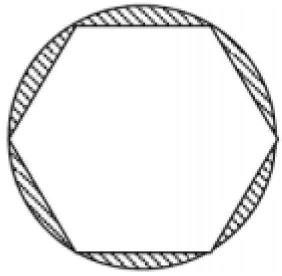
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{bh}{2}}{4bh} = \frac{1}{8}$$

Gabarito: “c”

---

93. (EEAR/2003)

Na figura, o lado do hexágono regular inscrito no círculo mede 4 cm.



A área da região hachurada da figura é, em cm^2:

a) $8\pi\sqrt{3}$

b) $\pi - 4\sqrt{3}$

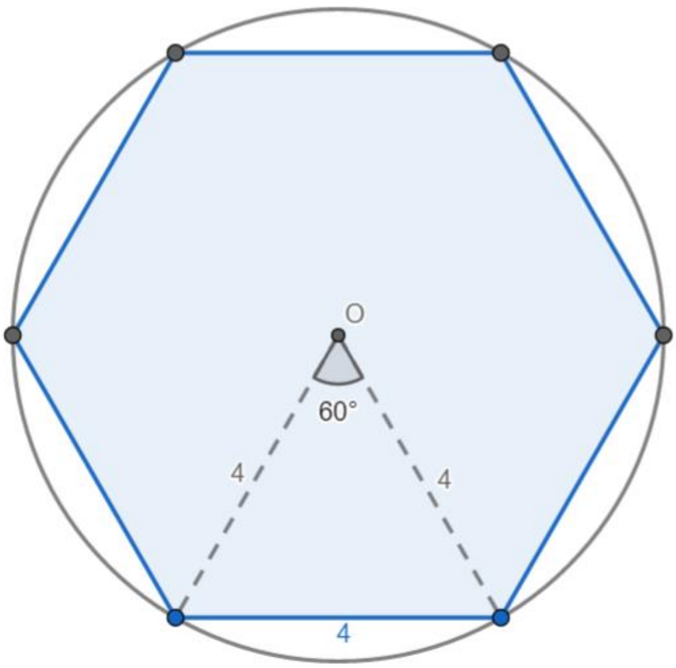
c) $8(2\pi - 3\sqrt{3})$

d) $16(\pi - 2\sqrt{2})$

Comentários

Lembre-se dos conceitos de ângulo central de polígonos regulares. O ângulo central do hexágono regular mede $\frac{360°}{6} = 60°$, portanto, os triângulos que compõem um hexágono são equiláteros. Logo, a distância dos vértices do hexágono até seu centro também medem $\boldsymbol{4\ cm}$, que equivale ao próprio raio da circunferência circunscrita.

Posto isso, temos a seguinte figura:



A área do hexágono regular inscrito é dada por

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot R^2 sen\left(\frac{360°}{n}\right) = S = \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot (4)^2 sen\left(\frac{360°}{6}\right) = 48 \cdot sen(60°) = 24\sqrt{3}$$

A área da circunferência é dada por

$$S_2 = \pi R^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$$

Portanto,

$$S = S_2 - S_1 = 16\pi - 24\sqrt{3} = 8(2\pi - 3\sqrt{3})$$

Gabarito: “c”

---

94. (EEAR/2003)

Um retângulo tem área T. Se aumentarmos a medida da sua base em 20%, e diminuirmos a medida da sua altura em 20%, obteremos um novo retângulo cuja área é igual a

a) T

b) 0,96T

c) 1,04T

d) 1,025T

Comentários

Seja $\boldsymbol{B}$ a base e $\boldsymbol{h}$ a altura do retângulo original. Seja $\boldsymbol{B}'$ a nova base e $\boldsymbol{h}'$ a nova altura do retângulo transformado.

Como a base aumenta 20% ela é a soma da base original com $\frac{20}{100}$ da mesma, logo:

$$B' = B + 0,2B = 1,2B$$

Como a altura diminui 20% ela é a diferença da altura original com $\frac{20}{100}$ da mesma, então:

$$h' = h - 0,2h = 0,8h$$

Segundo o enunciado:

$$B \cdot h = T$$

Seja $\boldsymbol{S}$ a área do retângulo transformado, então

$$S = B' \cdot h' = (1,2B) \cdot (0,8h) = 0,96(B \cdot h)$$

$$S = 0,96T$$

Gabarito: "b"

---

95. (EEAR/2003)

O perímetro de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência é 54 cm. A área de um quadrado inscrito nessa mesma circunferência é, em cm^2,

a) 36

b) 72

c) 216

d) 288

Comentários

Se o perímetro do triângulo equilátero mede $54\ cm$, então seu lado mede $L = \frac{54}{3} = 18\ cm$

A área de um triângulo equilátero de lado L é dada por $S_1 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(18)^2\sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}$

Usaremos agora nossos conhecimentos de polígonos regulares inscritos.

A área de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência também pode ser expressa em função do raio da mesma, conforme:

$$\boldsymbol{S_1 = (3) \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot sen\left(\frac{360°}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = 81\sqrt{3} \;\; \Rightarrow \;\; R^2 = 108}$$

Utilizando a mesma fórmula para descobrir a área do quadrado inscrito na circunferência obtemos:

$$\boldsymbol{S_2 = (4) \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot sen\left(\frac{360°}{4}\right) = 2 \cdot (108) \cdot sen(90°) = 216\, cm^2}$$

Gabarito: "c"

---

96. (EEAR/2003)

Em um trapézio, os lados paralelos medem $16\,cm$ e $44\,cm$, e os lados não-paralelos, $17\,cm$ e $25\,cm$. A área do trapézio, em cm^2, é

a) 250

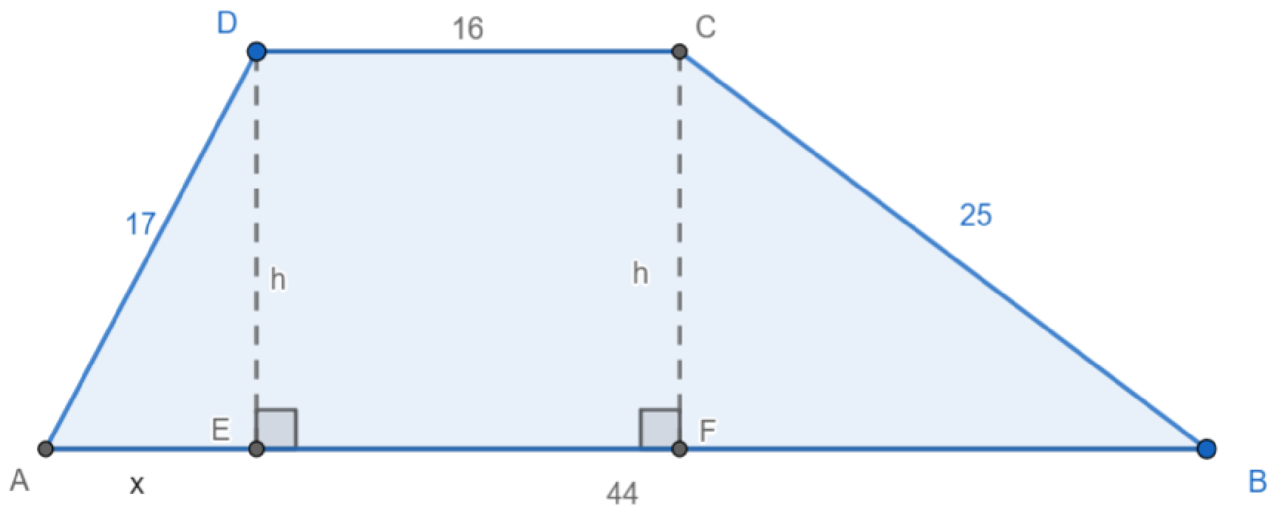
b) 350

c) 450

d) 550

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Perceba que $\overline{BF} = 44 - 16 - x = 28 - x$

Devemos primeiramente descobrir o valor de $\boldsymbol{h}$. Aplicando Pitágoras nos triângulos $\boldsymbol{ADE}$ e $\boldsymbol{BCF}$, temos:

$$\begin{cases} h^2 = (17)^2 - (x)^2 \\ h^2 = (25)^2 - (28 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 289 - x^2 = 625 - 784 + 56x - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = 8\ cm \quad \Rightarrow \quad h^2 = (17)^2 - (8)^2 = 225 \quad \Rightarrow \quad h = 15\ cm$$

Agora que temos a altura do trapézio obtemos que sua área vale:

$$S = \frac{44 + 16}{2} \cdot 15 = 450\ cm^2$$

Gabarito: "c"

---

97. (EEAR/2003)

Seja o triângulo PMN de lados $\overline{PM} = 6\ cm$, $\overline{MN} = 8\ cm$ e $\overline{PN} = 10\ cm$. Unindo-se os pontos médios de seus três lados obtemos o triângulo ABC. A área, em cm^2, do triângulo ABC é

a) 4

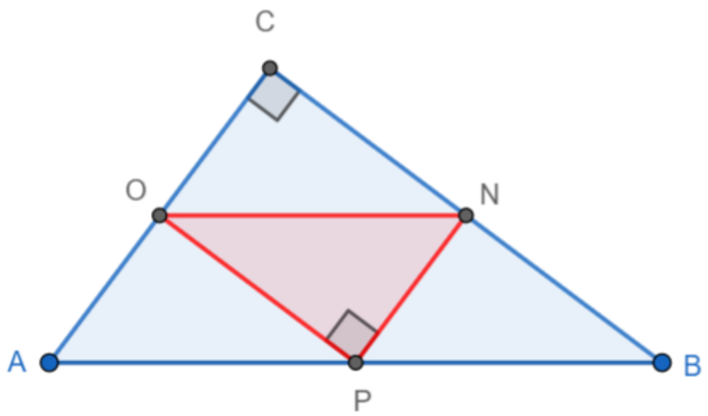
b) 6

c) 12

d) 20

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Como propriedade da construção, um triângulo construído de tal forma que seus vértices sejam pontos médios de outro triângulo é semelhante a este, e as medidas dos teus lados tem a metade das medidas do triângulo original. Ou seja, o triângulo $\boldsymbol{NOP}$ possui lados medindo $\boldsymbol{5\ cm}$, $\boldsymbol{4\ cm}$ e $\boldsymbol{3\ cm}$, o que caracteriza um Triângulo Pitagórico. Portanto, sua área mede:

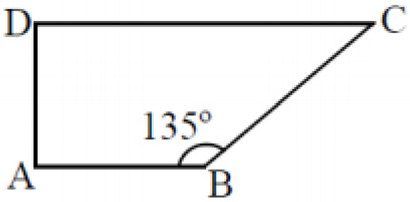
$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6\ cm^2$$

Gabarito: "b"

---

98. (EEAR/2003)

A figura representa um trapézio retângulo com $\overline{AB} = \overline{AD}$, base menor igual a $3\ cm$ e $\overline{BC}$ é lado de um quadrado.



A área desse quadrado, em cm^2, é

a) 9

b) 18

c) 24

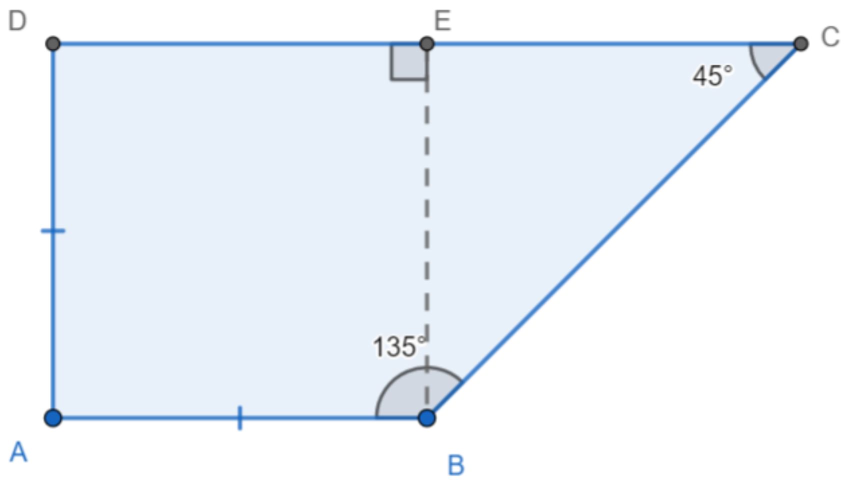
d) 36

Comentários

Como propriedade dos trapézios, o ângulo $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são suplementares.

Logo, $B\hat{C}D = 45°$.

Posto isso, temos a seguinte figura:



$$\overline{AD} = \overline{AB} = 3\ cm$$

Perceba que $\boldsymbol{ABED}$ forma um quadrado, então

$$\overline{BE} = \overline{AD} = 3\ cm$$

O triângulo $\boldsymbol{BCE}$ é isósceles, pois o ângulo $C\hat{B}E = 180° - 90° - 45° = 45°$. Logo,

$$\overline{EC} = \overline{BE} = 3\ cm$$

Sendo assim, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo $\boldsymbol{BCE}$, obtemos que

$$\overline{BC} = \sqrt{(\overline{BE})^2 + (\overline{EC})^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}$$

$$\overline{BC} = L = 3\sqrt{2}\ cm$$

Tal que $\boldsymbol{L}$ é lado de um quadrado. A área deste quadrado é $S = L^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18\ cm^2$

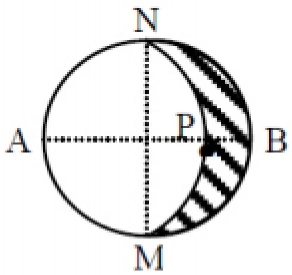
Gabarito: "b"

---

99. (EEAR/2003)

Na figura abaixo, $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são diâmetros perpendiculares de um círculo de raio $2\ cm$.

Traça-se o arco MPN de centro A e raio $\overline{AM}$. A área da região tracejada, em cm^2, é



a) 2

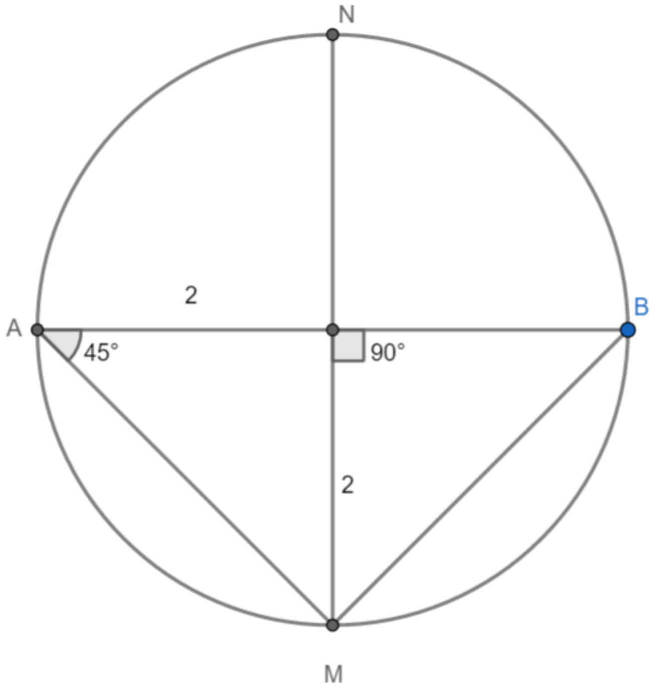
b) 4

c) 2π

d) $\pi + 4$

Comentários

Façamos primeiramente o estudo da figura a fim de se descobrir o valor da área a ser removida:



$\boldsymbol{M\hat{A}B = 45°}$ devido ao ângulo central de $\boldsymbol{90°}$ que demarca o arco $\boldsymbol{BM}$

Sendo assim, é fácil perceber que $\boldsymbol{\overline{AM} = 2\sqrt{2}}$

Perceba que haverá uma simetria em relação ao eixo $\boldsymbol{\overline{AB}}$, logo o ângulo $\boldsymbol{N\hat{A}B = 45°}$

Portanto a área definida pelo arco $\boldsymbol{MPN}$ que deve ser removida pode ser calculada como a diferença entre a área $\boldsymbol{S_1}$ de um setor circular de $\boldsymbol{90° = \frac{\pi}{2}}$ e raio $\boldsymbol{R = 2\sqrt{2}}$ e a área $\boldsymbol{S_2}$ do triângulo retângulo isósceles $\boldsymbol{MAN}$ de catetos medindo $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$.

$$\boldsymbol{S' = S_1 - S_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{2}\right) \cdot \left(2\sqrt{2}\right) = 2(\pi - 2)\ cm^2}$$

Agora calcularemos a área do setor de $\boldsymbol{90°}$ e raio $\boldsymbol{r = 2\ cm}$.

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot (\pi)r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi\ cm^2}$$

Portanto a área tracejada é dada por

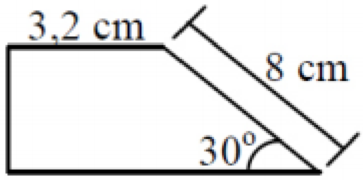
$$\boldsymbol{S - S' = 2\pi - 2(\pi - 2) = 4\ cm^2}$$

Gabarito: “b”

---

100. (EEAR/2003)

A área do trapézio retângulo (fig. abaixo), em cm^2, é igual a (obs: utilize $\sqrt{3} = 1,7$)



a) 20.00

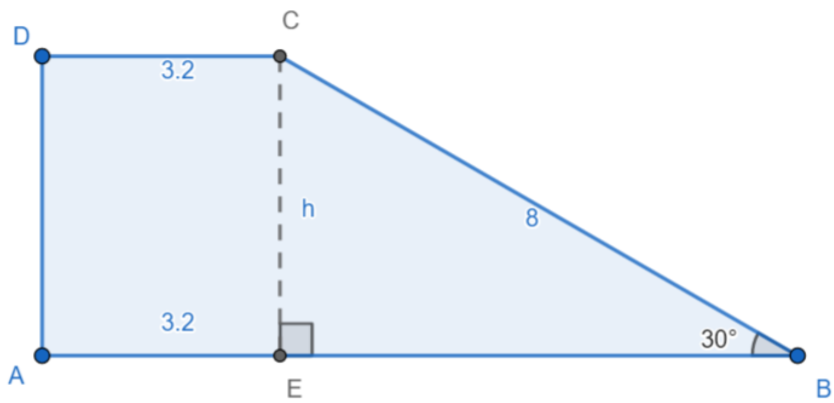
b) 26,40

c) 34,68

d) 40,80

Comentários

Observe a figura:



No triângulo $\boldsymbol{BCE}$ pode-se concluir, por meio da definição de seno de $\mathbf{30}°$, que $\overline{\boldsymbol{CE}} = \mathbf{4}\ \boldsymbol{cm}$ e que $\overline{\boldsymbol{EB}} = \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{cm}$.

Sendo assim a área desejada é a soma da área $\boldsymbol{S_1}$ de um retângulo de lados $\mathbf{3,2}\ \boldsymbol{cm}$ e $\mathbf{4}\ \boldsymbol{cm}$ e um triângulo de área $\boldsymbol{S_2}$ cuja base mede $\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{cm}$ e a altura $\mathbf{4}\ \boldsymbol{cm}$

$$\boldsymbol{S = S_1 + S_2 = (3,2) \cdot (4) + \frac{1}{2} \cdot \left(4\sqrt{3}\right) \cdot (4) = 12,8 + 8\sqrt{3} = 12,8 + 8 \cdot 1,7 = 26,4\ cm^2}$$

$$\boldsymbol{S = 26,4\ cm^2}$$

Gabarito: “b”

---

101. (EEAR/2003)

Em uma circunferência estão inscritos um triângulo equilátero e um hexágono regular. O apótema do triângulo somado com o apótema do hexágono dá $12(\sqrt{3}+1)\ cm$. O lado do triângulo, em cm, mede

a) $12\sqrt{3}$

b) $16\sqrt{3}$

c) $20\sqrt{3}$

d) $24\sqrt{3}$

Comentário:

O apótema de um n-ágono regular inscrito em uma circunferência de raio r é a altura do triângulo isósceles cuja base é um dos lados do n-ágono e cujo outro vértice é o centro da circunferência. Para o triângulo, o apótema vale $a_T = \frac{r}{2}$, pois o centro da circunferência é o baricentro do triângulo, que divide a sua altura em uma razão $1:2$, sendo 1 correspondente ao apótema e 2 correspondente ao raio r. Para o hexágono, o apótema vale $a_H = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, pois é a altura de um triângulo equilátero de lado $r = L_H$, o lado do hexágono. Assim, temos

$$12(\sqrt{3}+1) = \frac{r}{2} + \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{3}+1) \Rightarrow r = 24.$$

Seja L_T lado do triângulo. Então sua altura vale, por um lado, $H_T = \frac{3r}{2}$ e por outro, $H_T = \frac{L_T\sqrt{3}}{2}$. Portanto,

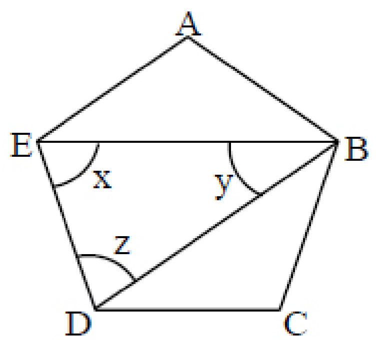
$$L_T = r\sqrt{3} \therefore L_T = 24\sqrt{3}$$

Gabarito: “d”.

---

102. (EEAR/2002)

Na figura abaixo, $ABCDE$ é um pentágono regular.



As medidas dos ângulos x, y e z, em graus, são, respectivamente

a) $36°; 36°; 72°$

b) $72°; 36°; 72°$

c) $72°; 36°; 36°$

d) $36°; 72°$; **36°**

Comentário:

É notório que $x = z > y$, por simetria. Daí segue que a resposta é **b**. Mas para ter certeza:

Circunscreva o pentágono com uma circunferência. Os vértices do pentágono a dividem igualmente em cinco arcos cuja soma deve dar $360°$. Logo, cada arco mede $72°$. Os ângulos inscritos x e z enxergam dois arcos de $72°$ cada um, então cada um deles mede a metade do arco total que ele enxerga, isto é, $x = z = \frac{1}{2} \cdot (72° \cdot 2) = 72°$.

O ângulo y enxerga apenas um arco de $72°$, e por isso mede $y = \frac{1}{2} \cdot 72° = 36°$.

Gabarito: "b"

---

103. (EEAR/2002)

A soma dos ângulos internos e dos ângulos externos de um polígono regular vale $1800°$. O número de diagonais desse polígono é

a) 25.

b) 35.

c) 45.

d) 55.

Comentário:

Seja n o número de lados desse polígono. Triangularizando o polígono, obtemos $n - 2$ triângulos, em cada qual a soma dos ângulos internos deve ser $180°$. Portanto, se s é a soma dos ângulos internos do nosso polígono, temos:

$S = (n - 2) \cdot 180°$.

Sendo o polígono convexo, a soma dos seus ângulos externos deve ser $360°$, pois o ângulo de variação entre dois lados consecutivos é sempre positivo e ao percorrer os lados do polígono se dá exatamente uma volta em torno de seu centro. Portanto, sendo S a soma dos ângulos externos,

$$S = 360°.$$

Logo: $1800° = s + S = (n - 2) \cdot 180° + 360° = n \cdot 180° \therefore n = 10$.

O número de diagonais de um polígono convexo de n lados, D_n, é:

$$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2},$$

pois de cada vértice parte uma diagonal para cada outro vértice que não seja ele próprio e os dois a ele adjacentes, mas cada diagonal é contada duas vezes, uma para cada extremo dela. Portanto:

$$D_{10} = \frac{10 \cdot 7}{2} = 35$$

Gabarito: “b”

---

104. (EEAR/2002)

Coloque V ou F conforme as afirmações sejam verdadeiras ou falsas:

( ) Dois ângulos adjacentes são suplementares.

( ) Dois ângulos que têm o mesmo complemento são congruentes.

( ) Dois ângulos suplementares são adjacentes.

( ) Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles.

( ) Um triângulo retângulo é escaleno.

Assinale a sequência correta.

a) F - V - F - V - V

b) F - V - V - V - F

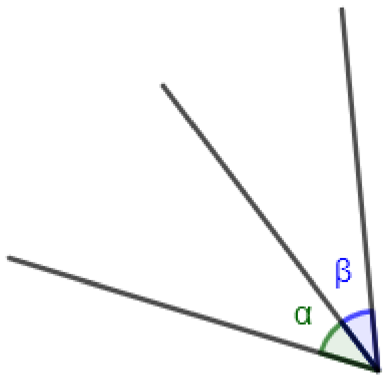
c) F - V - F - V - F

d) F - F - V - V - F

Comentário:

“Dois ângulos adjacentes são suplementares.” ⇒ F.

A imagem a seguir mostra um contraexemplo. α e β são ângulos adjacentes, mas não há nenhuma restrição quanto a eles serem suplementares ou não.



"Dois ângulos que têm o mesmo complemento são congruentes." ⇒ V.

Suponha que γ seja o complemento de α e de β. Devemos mostrar que $\alpha = \beta$. De fato,

$$\alpha = 90° - \gamma = 90° - (90° - \beta) = \beta.$$

"Dois ângulos suplementares são adjacentes."⇒ F

Se os ângulos são suplementares, quer dizer que a sua soma é $180°$. Mas eles podem estar deslocados. Não necessariamente têm um lado em comum.

"Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles."⇒ V

Tome, por exemplo, no hexágono regular $ABCDEF$, o triângulo ABC. O triângulo claramente é isósceles pois têm dois lados congruentes (ao lado do hexágono, e portanto, entre si). Além disso, o hexágono tem 6 lados, o ângulo interno $A\hat{B}C$ mede

$$\frac{(6-2) \cdot 180°}{6} = 120° > 90°.$$

Logo, o triângulo ABC é obtusângulo e isósceles.

"Um triângulo retângulo é escaleno."⇒ F

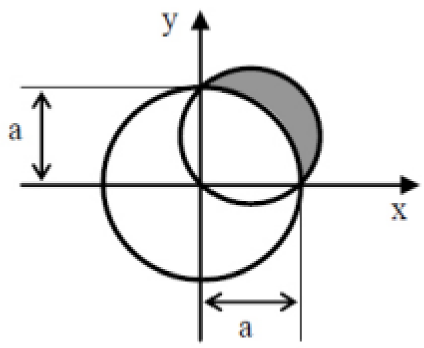
Existe triângulo retângulo que é isósceles. Basta que os catetos tenham a mesma medida.

Gabarito: "c"

---

105. (EEAR/2002)

Na figura, considere o segmento $a = 2m$



A área da superfície sombreada é, em m^2, igual a

a) 2π

b) 4π

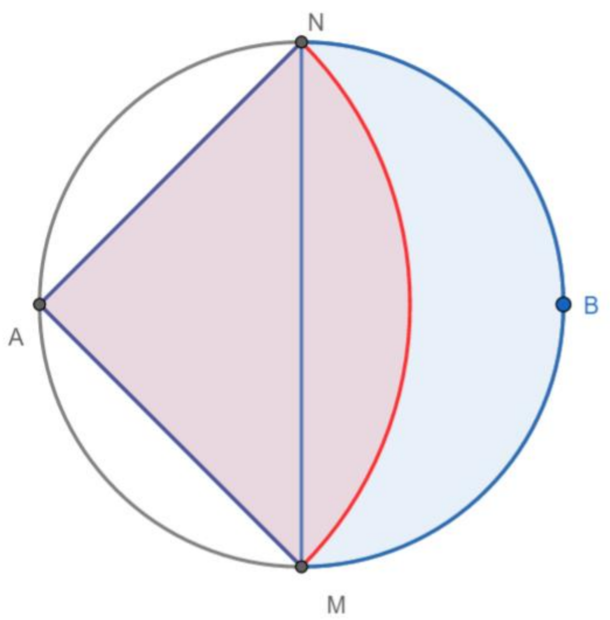
c) 2

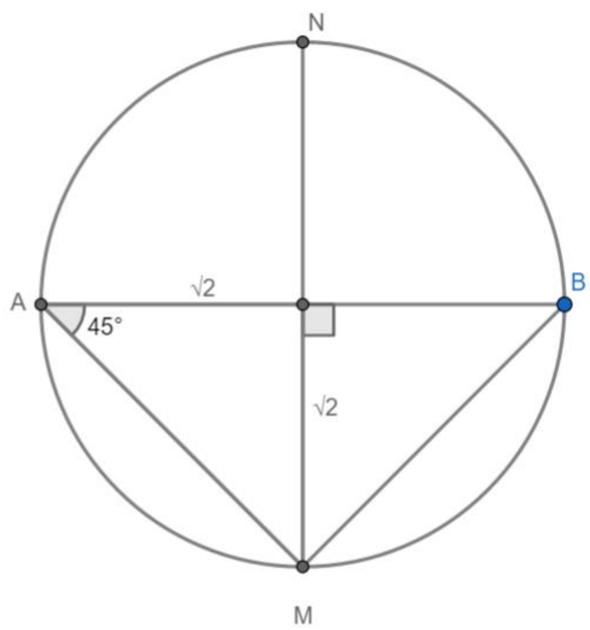
d) 4

Comentários

Primeiramente, perceba que a circunferência menor passa pelos pontos $(\mathbf{0};\mathbf{0})$, $(\mathbf{0};\mathbf{2})$ e $(\mathbf{2};\mathbf{0})$. Estes três pontos formam um triângulo retângulo isósceles de catetos medindo $\mathbf{2}\ \boldsymbol{m}$ e hipotenusa medindo $\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{m}$. A circunferência menor circunscreve este triângulo retângulo, portanto, a hipotenusa do triângulo define seu diâmetro $\boldsymbol{D} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$. Portanto, seu raio mede $\boldsymbol{r} = \sqrt{\mathbf{2}}$.

Posto isso, temos a seguinte situação na circunferência menor - após uma leve rotação de $\mathbf{45}°$:





$\boldsymbol{M\widehat{A}B = 45°}$ devido ao ângulo central de $\boldsymbol{90°}$ que demarca o arco $\boldsymbol{BM}$

Sendo assim, é fácil perceber que $\overline{\boldsymbol{AM}} = \boldsymbol{2\ m}$

Perceba que haverá uma simetria em relação ao eixo $\overline{\boldsymbol{AB}}$, logo o ângulo $\boldsymbol{N\widehat{A}B = 45°}$

Portanto a área definida pela circunferência maior que deve ser removida da área da circunferência menor pode ser calculada como a diferença entre a área $\boldsymbol{S_1}$ de um setor circular de $\boldsymbol{90°} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$ e raio $\boldsymbol{R = 2\ m}$ e a área $\boldsymbol{S_2}$ do triângulo retângulo isósceles $\boldsymbol{MAN}$ de catetos medindo $\boldsymbol{2\ m}$.

$$\boldsymbol{S' = S_1 - S_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)(2)^2 - \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (2) = \pi - 2\ m^2}$$

Agora calcularemos a área do setor de $\boldsymbol{90°}$ e raio $\boldsymbol{r = \sqrt{2}\ m}$. Na circunferência menor

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot (\pi) r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = \pi\ m^2}$$

Portanto a área tracejada é dada por

$$\boldsymbol{S - S' = \pi - (\pi - 2) = 2\ m^2}$$

Gabarito: "c"

---

106. (EEAR/2002)

Num triângulo ABC têm-se $\overline{AB} = 2\ cm, B\widehat{A}C = 30°$ e $A\widehat{C}B = 45°$. A área do triângulo ABC, em cm^2, vale

a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

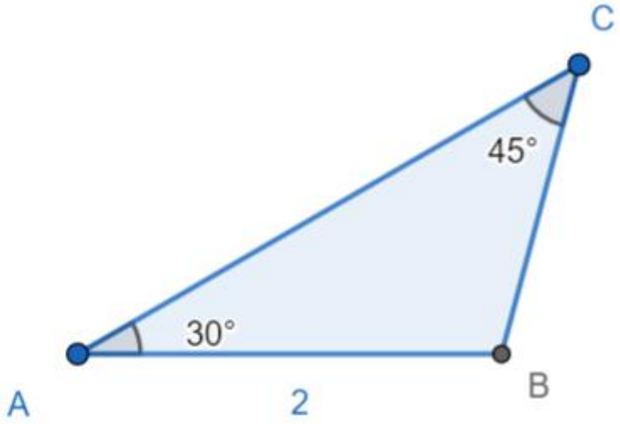
b) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Aplicando a Lei dos Senos a fim de obter o valor de $\overline{BC}$, obtemos:

$$\frac{\overline{BC}}{sen\,30°} = \frac{\overline{AB}}{sen\,45°}$$

$$\frac{\overline{BC}}{1/2} = \frac{2}{\sqrt{2}/2} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = \sqrt{2}\,cm$$

Perceba que $A\hat{B}C = 105°$. Queremos aplicar o cálculo de área a partir dos lados e do valor do seno entre eles, mas antes precisamos obter o valor de $sen(105°)$. Iremos aplicar a fórmula para cálculo do seno da soma:

$$sen(105°) = sen(60° + 45°) = sen(60°) \cdot \cos(45°) + sen(45°) \cdot \cos(60°) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$sen(105°) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Sendo assim o valor da área do triângulo é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (\overline{BC}) \cdot (\overline{AB}) \cdot sen\,(105°) = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2}) \cdot (2) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$S = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,cm^2$$

Gabarito: “a”

107. (EEAR/2002)

A área de um retângulo, cujas diagonais medem $20\ m$ cada uma e formam entre si um ângulo de $60°$, em m^2, é

a) 100

b) 200

c) $100\sqrt{3}$

d) $200\sqrt{3}$

Comentários

Perceba que um retângulo é um caso particular de paralelogramo, logo, pode-se aplicar a mesma formula para o cálculo de área do paralelogramo:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot (D) \cdot (d) \cdot sen(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (20) \cdot (20) \cdot sen(60°) = 100\sqrt{3}}$$

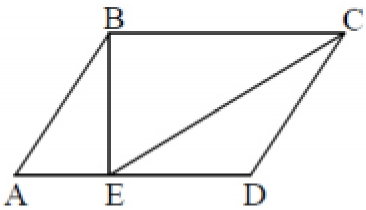
$$\boldsymbol{S = 100\sqrt{3}\ m^2}$$

Gabarito: "c"

---

108. (EEAR/2002)

No paralelogramo $ABCD$, tem-se que $\overline{BE} \perp \overline{AD}$; $\overline{BE} = 5\ cm, \overline{BC} = 12\ cm$ e $\overline{AE} = 4\ cm$.



A área do triângulo EDC, em cm^2 , é

a) 48

b) 30

c) 24

d) 20

Comentários

Sendo $\boldsymbol{ABCD}$ paralelogramo $\boldsymbol{\overline{BC} = \overline{AD} = 12 \Rightarrow \overline{ED} = \overline{AD} - \overline{AE} = 12 - 4 = 8\ cm}$, $\boldsymbol{\overline{ED}}$ é base do triângulo $\boldsymbol{EDC}$

Perceba que $\overline{BE}$ possui a medida da altura do triângulo EDC, logo, a altura h do triângulo também mede $5\ cm$.

Portanto,

$$S = \frac{1}{2} \cdot B \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (8) \cdot (5) = 20\ cm^2$$

Gabarito: “d”

---

109. (EEAR/2002)

Dado um quadrado de diagonal igual $\sqrt{2}\ cm$. Sobre cada lado do quadrado se constrói externamente um triângulo equilátero de lado igual ao do quadrado. A área da figura toda, assim obtida, é ____cm^2.

a) $2\sqrt{3}$

b) $1 + \sqrt{3}$

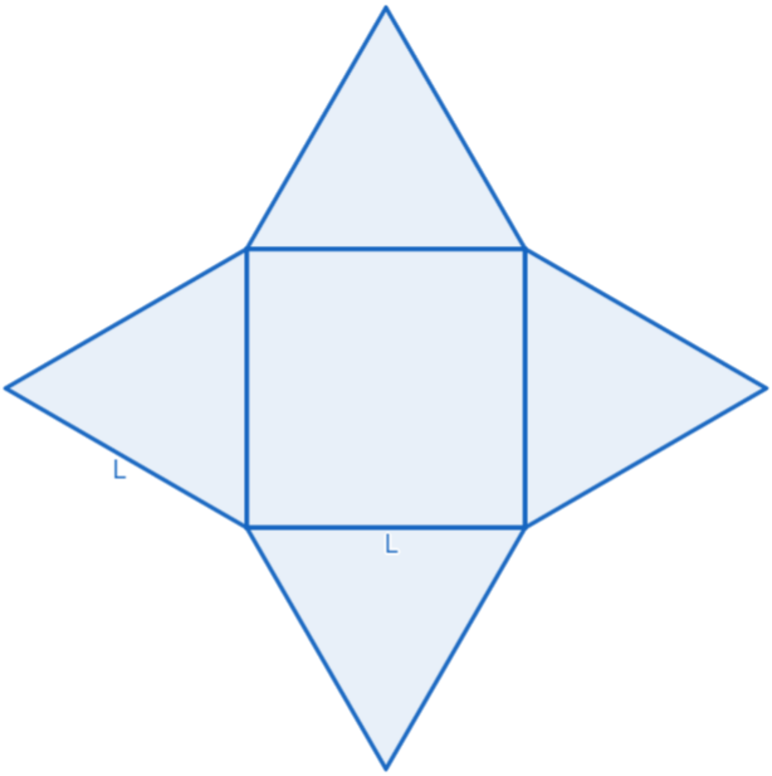
c) $1 + 2\sqrt{3}$

d) $2 + 4\sqrt{3}$

Comentários

Primeiramente, a diagonal de um quadrado é dada por $D = L\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad L = 1\ cm$

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



A área do quadrado em função do lado é dada por:

$$S_1 = L^2$$

A área do triângulo equilátero em função do lado é dada por:

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}L^2}{4}$$

A área da figura pedida é dada por:

$$S = S_1 + 4 \cdot S_2 = (L^2) + 4\left(\frac{\sqrt{3}L^2}{4}\right) = L^2\left(\sqrt{3}+1\right) = (1)^2\left(\sqrt{3}+1\right) = \sqrt{3}+1$$

$$S = 1 + \sqrt{3}\ cm^2$$

Gabarito: "b"

---

110. (EEAR/2002)

A área, em cm^2, de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência cujo comprimento é de $8\pi\sqrt{3}\ cm$ é

a) $36\sqrt{3}$

b) $64\sqrt{3}$

c) $72\sqrt{3}$

d) $144\sqrt{3}$

Comentários

Sabemos que o comprimento de uma circunferência é dado por $\boldsymbol{C = 2\pi R = 8\pi\sqrt{3} \;\Rightarrow\; R = 4\sqrt{3}}$

Sendo assim, a área de um triângulo equilátero inscrito nesta circunferência será dada por:

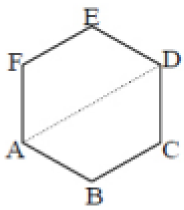
$$\boldsymbol{S = (3)\cdot\frac{1}{2}\cdot R^2\cdot sen\left(\frac{360°}{3}\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 36\sqrt{3}}$$

Gabarito: "a"

---

111. (EEAR/2002)

Dado o hexágono regular $ABCDEF$, a área do quadrilátero $ABCD$, em cm^2, sabendo-se que AB mede 6 cm, é



a) 54

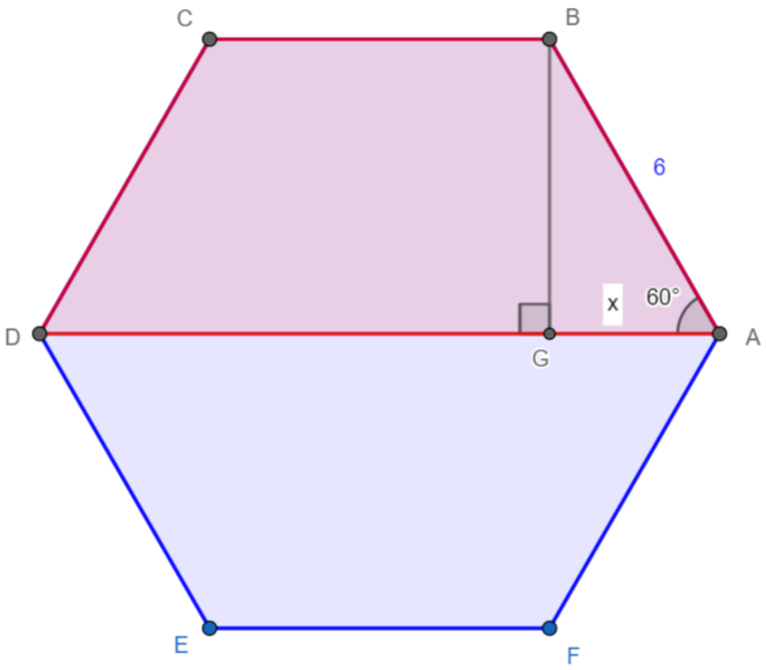
b) $54\sqrt{3}$

c) $18\sqrt{3}$

d) $27\sqrt{3}$

Comentários

Considere as propriedades de ângulos internos em um hexágono regular. Isolaremos agora apenas o trapézio isósceles que se forma, sendo assim, temos a seguinte figura:



Aplicando as propriedades do seno de $\mathbf{60°}$ constatamos que o lado $\overline{\boldsymbol{BG}} = \mathbf{3\sqrt{3}}\ \boldsymbol{cm}$ que corresponde a própria altura do trapézio $\boldsymbol{ABCD}$. Aplicando cosseno de $\mathbf{60°}$ constatamos, também, que $\overline{\boldsymbol{AG}} = \boldsymbol{x} = \mathbf{3}\ \boldsymbol{cm}$. Assim sendo, o lado $\overline{\boldsymbol{AD}} = \overline{\boldsymbol{BC}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} = \mathbf{6} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} = \mathbf{12}\ \boldsymbol{cm}$.

Em posse desses dados, podemos agora calcular a área

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{B} + \boldsymbol{b}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{h} = \frac{\mathbf{12} + \mathbf{6}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{3\sqrt{3}} = \mathbf{27\sqrt{3}}$$

Gabarito: "d"

---

112. (EEAR/2002)

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo regular é de $720°$. Sabendo-se que o seu lado mede $4\ cm$ e que ele está inscrito numa circunferência, então a área desse polígono, em cm^2, é

a) $6\sqrt{3}$

b) $12\sqrt{3}$

c) $18\sqrt{3}$

d) $24\sqrt{3}$

Comentários

O ângulo externo mede $\frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}$, então o ângulo interno deve medir

$$A° = 180° - \frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}(n-2)$$

Sendo n ângulos internos, então a soma dos ângulos terá

$$n \cdot A° = n\left(\frac{180°}{n}(n-2)\right) = 180° \cdot (n-2) = 720° \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

Portanto, trata-se de um hexágono regular de lado $4\ cm$, mas sabemos que o lado do hexágono é igual ao raio da circunferência circunscrita $L = R = 4\ cm$, logo, podemos calcular a área do hexágono:

$$S = (6) \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot sen\left(\frac{360°}{(6)}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (4)^2 = 24\sqrt{3}$$

$$S = 24\sqrt{3}\ \ cm^2$$

Gabarito: “d”

---

113. (EEAR/2002)

Se de um retângulo de perímetro 4 e dimensões x e $y, x < y$, retira-se um quadrado de lado x, então a área remanescente em função de x é

a) $1 - 2x$

b) $2x - 2x^2$

c) $x - 2x^2$

d) $2x - 4x^2$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:

Dadas as condições do problema, a área azul terá lados medindo $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y-x}$, mas sabemos que

$$\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}=\mathbf{4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y}=\mathbf{2}-\boldsymbol{x}$$

Então, $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}=(\mathbf{2}-\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}=\mathbf{2}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}$

Portanto a área da região é dada por

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{x}\cdot(\mathbf{2}-\mathbf{2}\boldsymbol{x})=\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$$

Gabarito: "b"

---

114. (EEAR/2002)

A área de um triângulo de perímetro $54\ m$ circunscrito a um círculo de $25\pi\ m^2$, em m^2, é

a) 125

b) 130

c) 135

d) 140

Comentários

Sabemos que o raio do círculo inscrito mede:

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{p}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}$$

Sendo $\boldsymbol{S}$ a área e $\boldsymbol{p}$ o semiperímetro do triângulo.

Do enunciado, $S_{cir} = 25\pi = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad r = 5\ m$

Sabemos também que $2p = 54 \quad \Rightarrow \quad p = 27\ m$

Portanto,

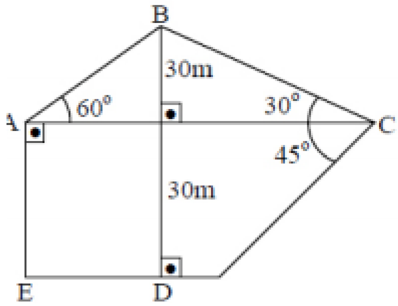
$$S = 5 \cdot 27 = 135\ m^2$$

Gabarito: "c"

---

115. (EEAR/2002)

Feito o levantamento de um terreno pentagonal, foram determinados os dados indicados na figura a seguir.



A área do terreno, em

a) 450

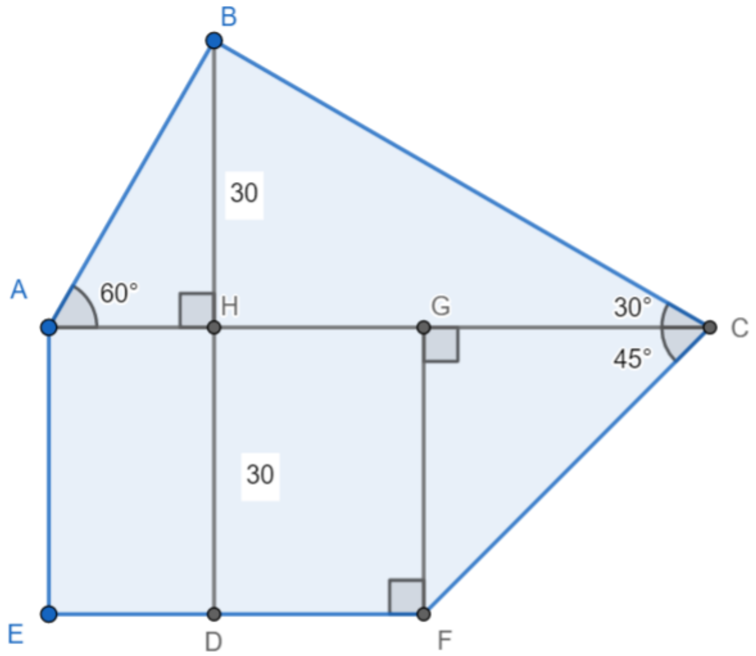
b) $450(4\sqrt{3} - 1)$

c) 900

d) $900(3\sqrt{3} - 2)$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Usaremos as definições de seno e cosseno e tangente sucessivamente até chegarmos em todas as medidas necessárias.

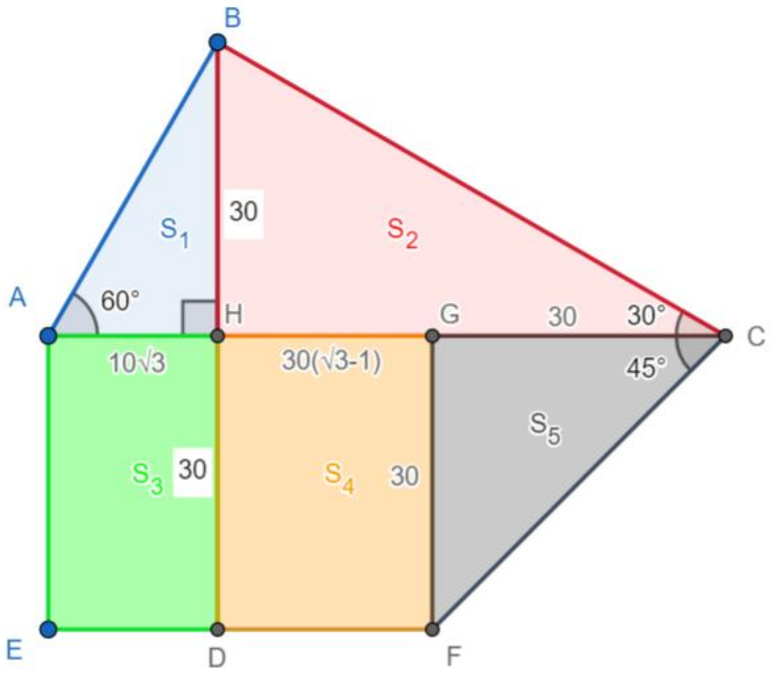
No triângulo $\boldsymbol{ABH}$, aplicando tangente de $\mathbf{60}°$, obtemos que $\overline{\boldsymbol{AH}} = \mathbf{10}\sqrt{\mathbf{3}}$

No triângulo $\boldsymbol{BCH}$, aplicando tangente de $\mathbf{30}°$, obtemos que $\overline{\boldsymbol{CH}} = \mathbf{30}\sqrt{\mathbf{3}}$

No triângulo $\boldsymbol{CFG}$, aplicando tangente de $\mathbf{45}°$, obtemos que $\overline{\boldsymbol{CG}} = \mathbf{30}$

Sabemos que $\overline{\boldsymbol{GH}} = \overline{\boldsymbol{CH}} - \overline{\boldsymbol{CG}} = \mathbf{30}\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{30} = \mathbf{30}(\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1})$

Agora redesenhando a figura em posse de todos esses dados, obtemos



Posto isso, calcularemos as áreas:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot (10\sqrt{3}) \cdot (30) = 150\sqrt{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot (30\sqrt{3}) \cdot (30) = 450\sqrt{3}$$

$$S_3 = (10\sqrt{3}) \cdot (30) = 300\sqrt{3}$$

$$S_4 = (30(\sqrt{3} - 1)) \cdot (30) = 900(\sqrt{3} - 1)$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot (30) \cdot (30) = 450$$

Logo, a área do terreno é dada por:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 150\sqrt{3} + 450\sqrt{3} + 300\sqrt{3} + 900(\sqrt{3} - 1) + 450 = 450(4\sqrt{3} - 1)$$

$$S = 450(4\sqrt{3} - 1)\ m^2$$

Gabarito: “b”

---

116. (EEAR/2001)

Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmativas:

1^a: Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles.

2^a: Um triângulo isósceles pode ser retângulo.

3^a: Um triângulo isósceles não pode ser equilátero.

Assinale a alternativa correta:

a) Todas são falsas.

b) Todas são verdadeiras.

c) A 2^a é verdadeira e a 3^a é falsa.

d) A 1^a é falsa e a 3^a é verdadeira.

Comentário:

1^a: Verdadeira. Exemplo: o triângulo ΔABC de um hexágono regular $ABCDEF$ têm ângulo $A\hat{B}C = 120°$ e é isósceles.

2^a: Verdadeira. Exemplo: o triângulo ΔABC de um quadrado $ABCD$.

3^a: Falso. Um triângulo equilátero tem três lados iguais, e em particular, tem dois lados iguais. Da mesma forma que um quadrado também é um retângulo, e que números pares também são números inteiros!

Gabarito: “c”

---

117. (EEAR/2001)

Se em um triângulo retângulo um dos catetos mede $2\sqrt{5}\ cm$ e a altura relativa à hipotenusa mede $\sqrt{2}\ cm$, então a área desse triângulo, em cm^2, é

a) $\frac{10}{3}$

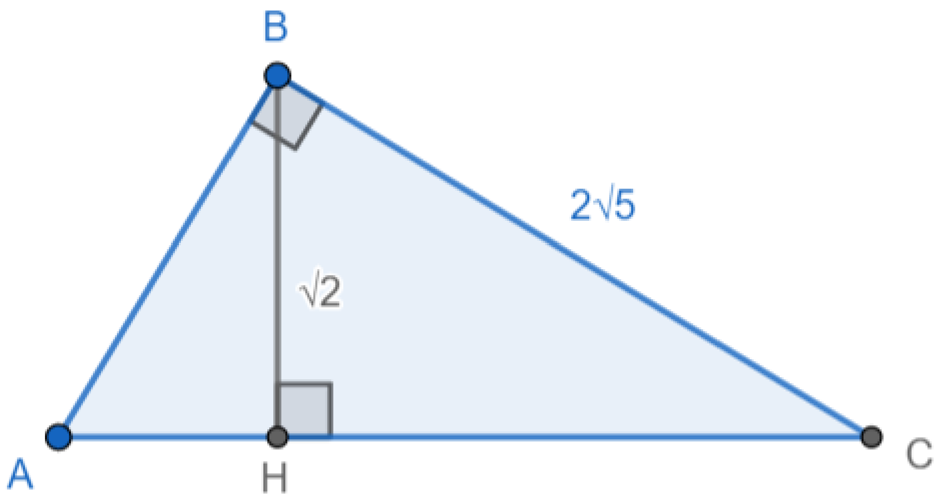
b) $\frac{20}{3}$

c) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

d) $2\sqrt{10}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Aplicando Pitágoras no triângulo BCH. Descobrimos que $\overline{CH} = 3\sqrt{2}$

Perceba que os triângulos ABC e BHC são semelhantes, ambos triângulos retângulos e ambos compartilham o ângulo do vértice C.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{CH}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

$$\overline{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

Calculando o valor da área, obtemos:

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = \frac{10}{3}$$

Gabarito: "a"

---

118. (EEAR/2001)

De um pedaço quadrado de metal corta-se uma peça circular de diâmetro máximo, e desta corta-se outro quadrado de lado máximo. O material desperdiçado tem

a) $\frac{1}{4}$ **da área do quadrado original**

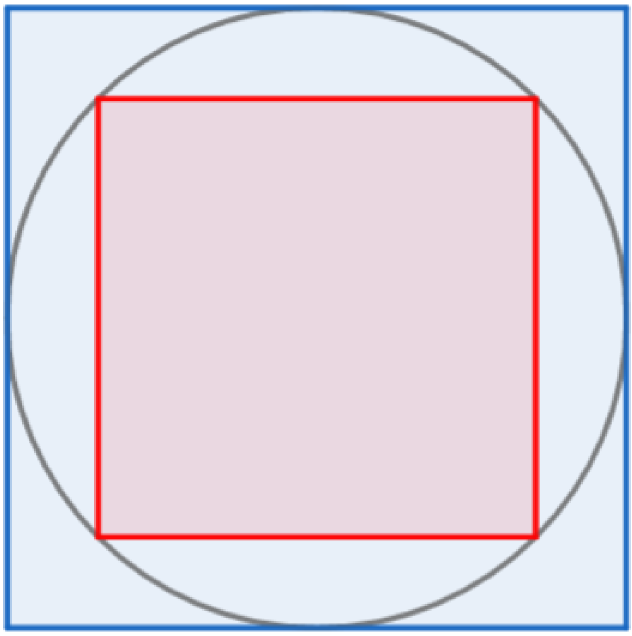
b) $\frac{1}{2}$ **da área do quadrado original**

c) $\frac{1}{2}$ **da área da peça circular**

d) $\frac{1}{4}$ **da área da peça circular**

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Seja L o lado do quadrado maior, l o lado do quadrado menor e R o raio da circunferência.

O diâmetro do quadrado menor corresponde ao diâmetro da circunferência e este, por sua vez, corresponde ao lado do quadrado maior.

$$\boldsymbol{l\sqrt{2} = 2R = L \quad \Rightarrow \frac{l}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \frac{l^2}{L^2} = \frac{1}{2}}$$

Mas a razão entre as áreas dos quadrados é dada por

$$\boldsymbol{\frac{l^2}{L^2} = \frac{1}{2}}$$

Logo, a área usada tem metade da área original, então a área desperdiçada corresponderá à outra metade. Portanto a razão buscada vale $\frac{1}{2}$

Obs: Calculando em relação ao círculo.

$$2R = L \quad \Rightarrow \quad \frac{l^2}{L^2} = \frac{l^2}{(2R)^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{l^2}{R^2} = 2$$

Mas,

$$\frac{S_{quad}}{S_{cir}} = \frac{l^2}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{l^2}{R^2} = \frac{2}{\pi}$$

Lembrando que a área desperdiçada é igual a área do quadrado menor (metade do quadrado maior), então a razão da área desperdiçada em relação ao círculo vale $\frac{2}{\pi}$.

Gabarito: "b"

---

119. (EEAR/2001)

Se a área da coroa circular definida por dois círculos concêntricos de raios r e $R, r < R$, é igual a área do círculo menor, então a razão $\frac{R}{r}$ é igual a:

a) 1

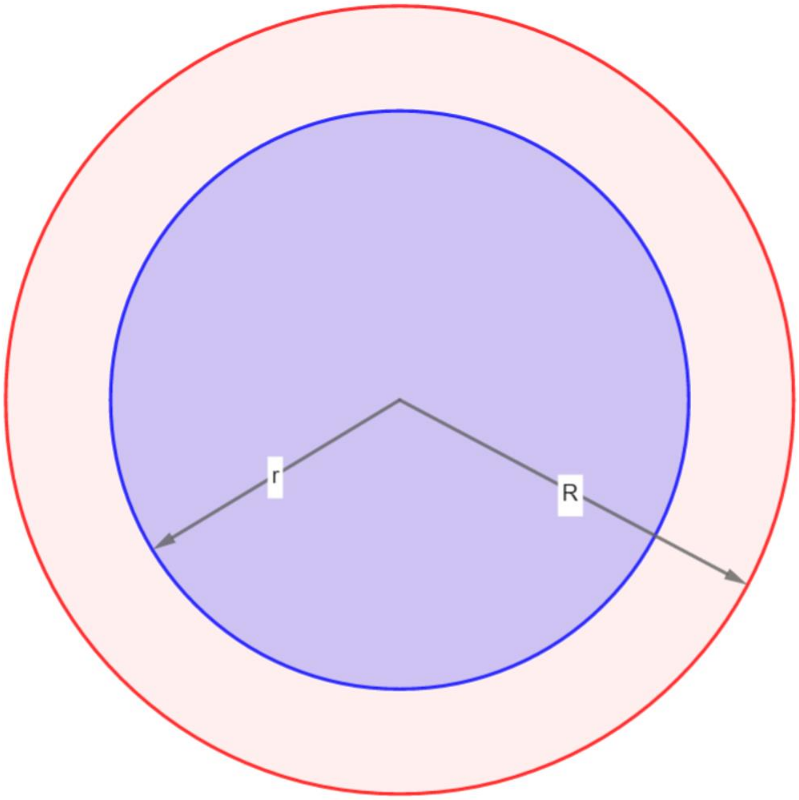
b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $2\sqrt{2}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Segundo o enunciado:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi r^2$$

$$R^2 = 2r^2 \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt{2}$$

Gabarito: "b"

---

120. (EEAR/2001)

Um círculo de raio r e um retângulo de base b são equivalentes. Então, a altura do retângulo é:

a) $\sqrt{\pi r}$

b) $\pi r^2 b$

c) $\frac{\pi r^2}{b}$

d) $\frac{\pi r^2}{b^2}$

Comentários

A área do círculo e do retângulo são iguais, então

$$\pi r^2 = b \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\pi r^2}{b}$$

Gabarito: “c”

121. (EEAR/2001)

Um segmento AB, de $6\ metros$, é diâmetro de uma circunferência de centro O. Sendo C um ponto dessa circunferência, tal que a medida do ângulo $A\hat{B}C$ seja $30°$, a medida da superfície limitada pelas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e pelo arco AC, em metros quadrados, é:

a) $\frac{3}{4}(2\pi + 3\sqrt{3})$

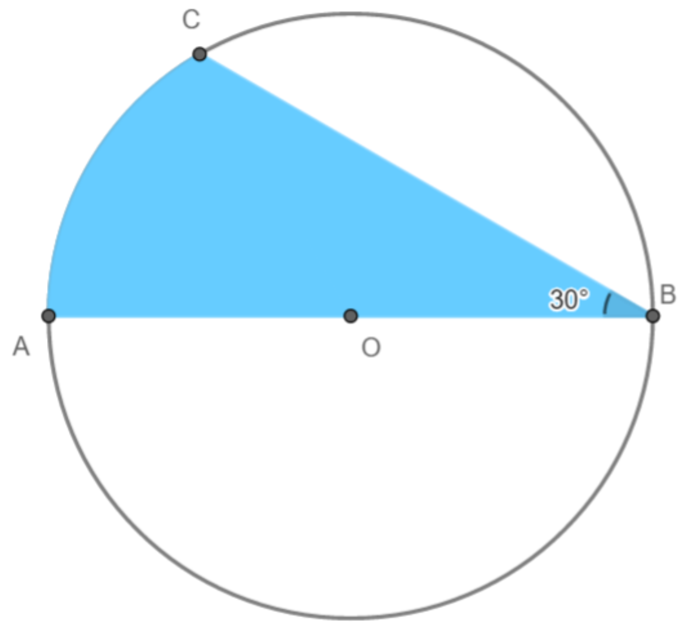
b) $\frac{3}{2}(\pi + \sqrt{3})$

c) $\frac{9\pi\sqrt{3}}{2}$

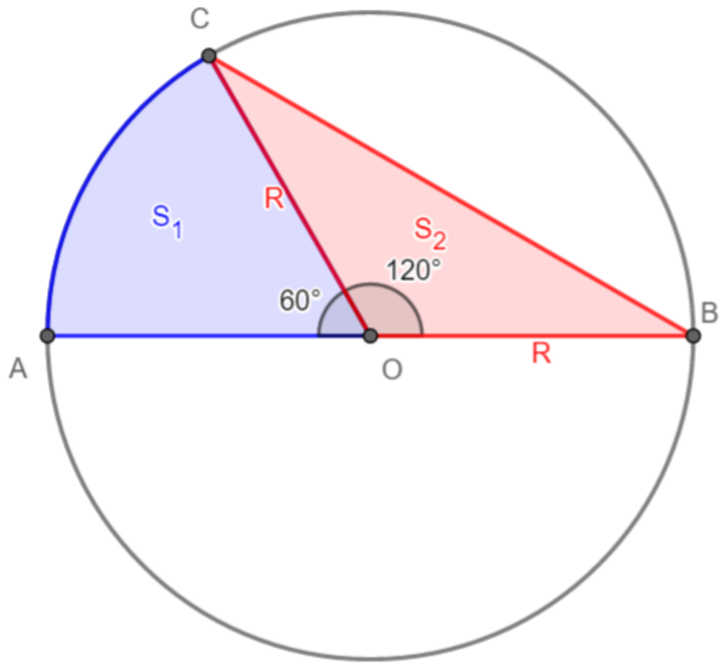
d) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Perceba que o ângulo central do arco AC em O possui ângulo de $60°$, portanto, trata-se de $\frac{1}{6}$ da área da circunferência. O ângulo $C\hat{O}B = 120°$, pois este é suplementar ao ângulo de $60°$ acima citado. Logo temos a seguinte figura para representar a divisão feita:



Portanto:

$$S_1 = \frac{1}{6} \cdot \pi R^2 = \frac{\pi(3)^2}{6} = \frac{3}{2}\pi$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot sen(120°) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(3)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

Logo:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{3}{2}\pi + \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$$

Gabarito: "a"

---

122. (EEAR/2001)

Se o raio de um círculo for aumentado de 100%, sua área aumentará de:

a) 100%

b) 200%

c) 300%

d) 400%

Comentários

Seja uma circunferência de raio R

$$S_1 = \pi R^2$$

Aumentando o raio em 100% seu novo raio medirá $2R$

$$S_2 = \pi(2R)^2 = 4\pi R^2$$

Então:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R^2}{\pi R^2} = 4$$

Portanto, sua área foi aumentada em 300%.

Gabarito: "c"

---

123. (EEAR/2001)

Em um círculo de $3\ cm$ de raio, a área e o perímetro de um setor circular de $60°$ (sessenta graus) são, respectivamente, em cm^2 e cm:

a) $1,5\pi$ **e** $(\pi + 6)$

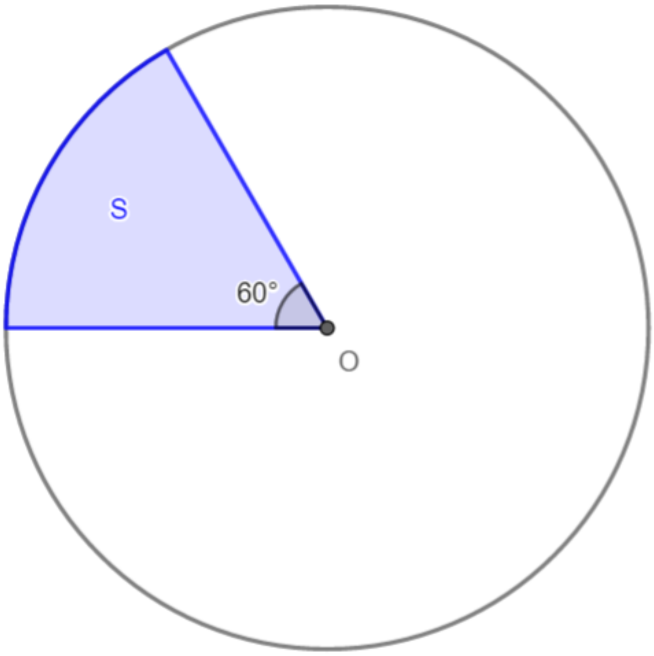
b) $1,5\pi$ **e** π

c) π **e** $(\pi + 6)$

d) 6π **e** π

Comentários

Um setor circular de $60°$ corresponde a $\frac{1}{6}$ de circunferência, então ambas a medida de área será correspondente a $\frac{1}{6}$ do total, mas no perímetro, haverá a medida do arco de circunferência correspondente a $\frac{1}{6}$ do total além das medidas dos raios compondo o perímetro:



$$S = \frac{1}{6} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{6}\pi(3)^2 = \frac{3}{2}\pi = 1,5\pi$$

$$L = \frac{1}{6} \cdot 2\pi R + 2R = \frac{1}{3}\pi(3) + 2 \cdot 3 = \pi + 6$$

Gabarito: "a"

---

124. (EEAR/2001)

A soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono convexo é $3600°$. O número de diagonais desse polígono é um número:

a) par divisível por 15.

b) par maior que 150.

c) ímpar múltiplo de 19.

d) ímpar primo.

Comentário:

Seja n o número de lados desse polígono. Triangularizando o polígono, obtemos $n-2$ triângulos, em cada qual a soma dos ângulos internos deve ser $180°$. Portanto, se s é a soma dos ângulos internos do nosso polígono, temos:

$S = (n-2) \cdot 180°.$

Sendo o polígono convexo, a soma dos seus ângulos externos deve ser $360°$, pois o ângulo de variação entre dois lados consecutivos é sempre positivo e ao percorrer os lados do polígono se dá exatamente uma volta em torno de seu centro. Portanto, sendo S a soma dos ângulos externos,

$$S = 360°.$$

Logo: $3600° = s + S = (n-2)\cdot 180° + 360° = n \cdot 180° \therefore n = 20.$

O número de diagonais de um polígono convexo de n lados, D_n, é:

$$D_n = \frac{n\cdot(n-3)}{2},$$

pois de cada vértice parte uma diagonal para cada outro vértice que não seja ele próprio e os dois a ele adjacentes, mas cada diagonal é contada duas vezes, uma para cada extremo dela. Portanto:

$$D_{20} = \frac{20\cdot 17}{2} = 170$$

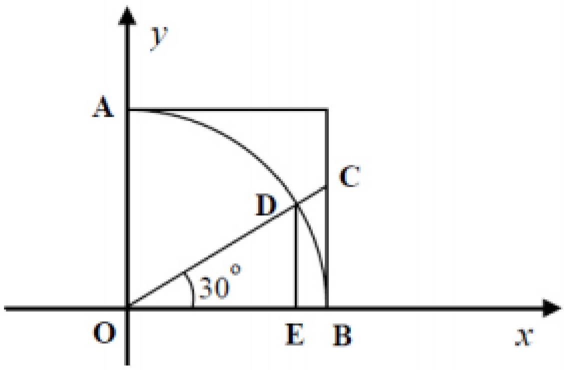
é um número par maior que 150.

Gabarito: "b"

---

125. (EEAR/2000)

Na figura, AB é um arco de circunferência de centro O e de raio $1\ cm$. A área do trapézio retângulo $BCDE$, em cm^2, é



a) $\frac{\sqrt{3}}{24}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{18}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{12}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Comentários

Atente-se para o raio unitário, pense no ciclo trigonométrico e perceba as seguintes correspondências nas medidas.

$$\overline{DE} = sen(30°)$$

$$\overline{BC} = \text{tg}(30°)$$

$$\overline{BE} = 1 - \cos(30°)$$

Logo,

$$\overline{DE} = \frac{1}{2} = b$$

$$\overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3} = B$$

$$\overline{BE} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = h$$

Portanto a área do trapézio $BCDE$ é:

$$S = \frac{(B+b)}{2} \cdot h = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right)}{2} \cdot \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}+3}{12}\right) \cdot \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{24}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{24}\ cm^2$$

Gabarito: "a"

---

126. (EEAR/2000)

Consideremos um triângulo retângulo que simultaneamente está circunscrito à circunferência C_1 e inscrito na circunferência C_2. Sabendo-se que a soma dos comprimentos dos catetos do triângulo é $k\ cm$, então, a soma dos comprimentos dessas duas circunferências, em cm, é

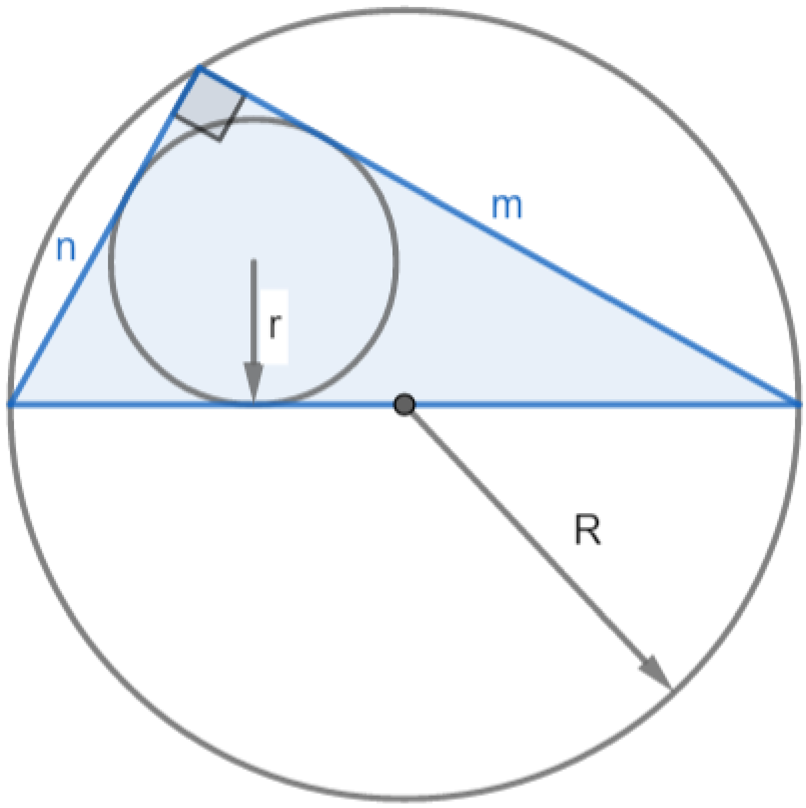
a) $\frac{4k\pi}{3}$

b) $\frac{2k\pi}{3}$

c) $k\pi$

d) $2k\pi$

Comentários



A medida da hipotenusa do triângulo é dada pelo teorema de Pitágoras e vale $\sqrt{\boldsymbol{m^2+n^2}}$

Primeiramente lembremos que podemos obter o valor de r a partir da área e do semiperímetro como sendo:

$$\boldsymbol{r=\frac{A}{p}=\frac{\frac{m\cdot n}{2}}{\frac{m+n+\sqrt{m^2+n^2}}{2}}=\frac{m\cdot n}{m+n+\sqrt{m^2+n^2}}}\qquad \boldsymbol{eq.1}$$

O valor de R é mais simples de obter, devido ao fato de que o diâmetro da circunferência circunscrita à um triângulo retângulo é igual a hipotenusa do triângulo.

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{2R=\sqrt{m^2+n^2}}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{R=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}}\qquad \boldsymbol{eq.2}$$

Mas perceba que $\boldsymbol{k^2=(m+n)^2=m^2+2mn+n^2}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{k^2-2mn}}\quad \boldsymbol{eq.3}$

Fazendo eq. 3 em eq. 1 e eq. 2, obtemos:

$$\boldsymbol{r=\frac{m\cdot n}{k+\sqrt{k^2-2mn}}}\qquad \boldsymbol{eq.4}$$

$$R = \frac{\sqrt{k^2 - 2mn}}{2} \qquad eq.5$$

O enunciado nos pede o valor da soma dos comprimentos das circunferências, logo:

$$S = 2\pi r + 2\pi R = 2\pi(R + r) \qquad eq.6$$

Substituindo eq. 4 e eq. 5 em eq. 6, obtemos

$$S = 2\pi(R + r) = 2\pi\left(\frac{\sqrt{k^2 - 2mn}}{2} + \frac{mn}{k + \sqrt{k^2 - 2mn}}\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\left(k + \sqrt{k^2 - 2mn}\right) \cdot \sqrt{k^2 - 2mn} + 2mn}{2\left(k + \sqrt{k^2 - 2mn}\right)}\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\left(k\sqrt{k^2 - 2mn} + k^2 - 2mn\right) + 2mn}{2\left(k + \sqrt{k^2 - 2mn}\right)}\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{k\sqrt{k^2 - 2mn} + k^2 - 2mn + 2mn}{2\left(k + \sqrt{k^2 - 2mn}\right)}\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{k\sqrt{k^2 - 2mn} + k^2}{2\left(k + \sqrt{k^2 - 2mn}\right)}\right) = 2\pi\left(\frac{k\left(k + \sqrt{k^2 - 2mn}\right)}{2\left(k + \sqrt{k^2 - 2mn}\right)}\right) = 2\pi\left(\frac{k}{2}\right) = k\pi$$

$$S = k\pi$$

Gabarito: "c"

---

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Finalizamos um assunto muito cobrado nas provas militares. É muito provável que tenha algumas questões de geometria plana no seu concurso.

Nessa aula, é importante saber trabalhar com polígonos e como calcular as medidas dos lados e os ângulos internos dessas figuras. No tópico de áreas, você deve memorizar as fórmulas das áreas das figuras planas e também saber como resolver questões envolvendo esse tema.

Tente resolver todas os exercícios ao longo da teoria e das provas anteriores, sempre que tiver dúvidas consulte a resolução ou comentários das questões.

Nunca deixe uma dúvida sua passar! Caso isso aconteça, entre em contato conosco pelo fórum de dúvidas ou se preferir:

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Dolce, Osvaldo. Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. 9. ed. Atual, 2013. 456p.

[2] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria I. 5 ed. Livraria Francisco Alves Editora, 1990. 151p.

[3] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria II. 1 ed. FC & Z Livros, 2002. 296p.

7. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.