Estou na área, grande guerreiro, futuro oficial da Marinha, Marinha Mercante ou Aeronáutica do Brasil!

Esta é a aula 01 do nosso curso de Matemática 1 para as provas da AFA, EFOMM e ESCOLA NAVAL e veremos hoje algumas noções básicas de álgebra imprescindíveis para o seu bom andamento ao longo do curso: veremos produtos notáveis e fatoração (que serão de muita valia em trigonometria e geometria analítica por exemplo), também veremos uma teoria sobre inequações e os principais erros cometidos! Pronto para esta primeira batalha?? Então vem comigo!!

Para você que ainda não me conhece, sou o professor Matheus Secco, de Matemática, e falarei um pouquinho sobre minha trajetória em concursos para motivá-los: quando eu tinha 9 anos, fiz o meu primeiro concurso na vida: a prova para a antiga 5ª série do Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ). Entrei no Maracanã com cerca de outras 6000 crianças fazendo prova e tremi, suei frio. Após a prova, o resultado veio: eu não havia conseguido a aprovação na prova de Matemática e estava eliminado do concurso. Fui para casa e fiquei arrasado: não queria mais saber da prova do CMRJ. No meio do ano seguinte (ainda com aquela derrota na cabeça), resolvi entrar em um cursinho para me preparar para a prova novamente. Superando todas as dificuldades encontradas, consegui minha primeira grande vitória: fui aprovado em 13º lugar no concurso. A partir daí, tomei um gosto muito grande pelos estudos e percebi que estudando eu poderia chegar ainda mais longe.

Fiz em seguida os concursos da EPCAr e do Colégio Naval, sendo aprovado em 4º lugar e 1º lugar. Depois vieram os vestibulares do IME, onde fui aprovado em 2º lugar, e o vestibular do ITA. Formei-me em Matemática pela PUC-Rio e hoje em dia sou professor de Matemática em turmas militares.

Escrevi este texto para mostrar que todos podem chegar aonde almejam!
Basta acreditar, ter foco e fé no objetivo!

Acredite em você mesmo!
Esta é a chave para o sucesso!
Todos os dias, fale para você mesmo: "EU VOU PASSAR!!!"
Vamos começar agora nossa aula?

SUMÁRIO

FUNDAMENTOS ALGÉBRICOS

1. PRODUTOS NOTÁVEIS

Os produtos notáveis são expressões algébricas que aparecem a todo instante na Matemática. Por isso, chamam-se notáveis e, assim sendo, é fundamental que você memorize as fórmulas que colocarei a seguir, que serão deduzidas utilizando a propriedade distributiva (o famoso "chuveirinho") da multiplicação. Vamos a elas? Não passe para o assunto seguinte (FATORAÇÃO) sem ter decorado todas as fórmulas abaixo!!!

1.1. QUADRADO DA SOMA E DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

$$(a-b)^2=(a+(-b))^2=a^2+2a\cdot(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

Exemplos:

$$(a+4)^2=a^2+2\cdot a\cdot 4+4^2=a^2+8a+16$$
$$(a-7)^2=a^2-2\cdot a\cdot 7+7^2=a^2-14a+49$$

1.2. QUADRADO DA SOMA DE TRÊS TERMOS

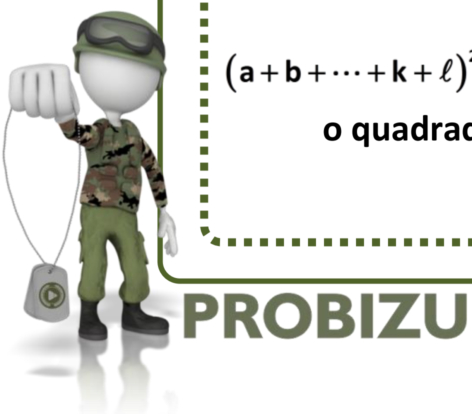
$$(a+b+c)^2=((a+b)+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$\boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$$

Exemplos:

$$(a+b+1)^2=a^2+b^2+1^2+2ab+2a\cdot 1+2b\cdot 1=a^2+b^2+2ab+2a+2b+1$$
$$(a+2b-3c)^2=a^2+(2b)^2+(-3c)^2+2a\cdot(2b)+2a\cdot(-3c)+2\cdot(2b)\cdot(-3c)=$$
$$a^2+4b^2+9c^2+4ab-6ac-12bc$$

Se quisermos calcular o quadrado da soma de mais termos, o procedimento é completamente análogo. Temos $(a+b+\cdots+k+\ell)^2 = a^2+b^2+\cdots+k^2+\ell^2+2ab+2ac+\cdots+2a\ell+\cdots+2k\ell$, ou seja, o quadrado da soma é igual à soma dos quadrados mais duas vezes a soma dos produtos dos termos tomados dois a dois.



1.3. PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Exemplo:

$$(x+4y)(x-4y) = x^2 - (4y)^2 = x^2 - 16y^2$$

1.4. CUBO DA SOMA E DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 =$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2\cdot(-b) + 3a\cdot(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Exemplos:

$$(x+2)^3 = x^3 + 3x^2\cdot 2 + 3x\cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(a-4b)^3 = a^3 - 3a^2\cdot(4b) + 3a\cdot(4b)^2 - (4b)^3 = a^3 - 12a^2b + 48ab^2 - 64b^3$$

Pode ser útil escrever estes produtos notáveis das seguintes formas:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)}$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)}$$

1.5. TRIÂNGULO DE PASCAL

Podemos generalizar os produtos notáveis 2.1 e 2.4 para calcular expressões como $(a+b)^4, (a+b)^5, (a+b)^6, \ldots$. Para isso, usaremos o triângulo de Pascal (associado ao binômio de Newton que será estudado mais adiante):

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}$$

A linha de número k (a contagem inicia da linha 0) do triângulo de Pascal corresponde aos coeficientes da expansão de $(a+b)^k$. Assim, temos por exemplo:

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

$$\boxed{(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5ab^4 + b^5}$$

$$\boxed{(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15\,a^4b^2 + 20\,a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6}$$

Exemplo:

$$(a+2)^5 = a^5 + 5a^4\cdot 2 + 10a^3\cdot 2^2 + 10a^2\cdot 2^3 + 5a\cdot 2^4 + 2^5 = a^5 + 10a^4 + 40a^3 + 80a^2 + 80a + 32$$

Vejamos alguns exercícios resolvidos:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1

Considere as afirmativas:

1. Efetuando $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2$, obtemos $30-12\sqrt{6}$

2. O valor de $\left(\sqrt{1\frac{7}{9}}+\sqrt{1\frac{24}{25}}\right)^2$ é igual a $\frac{1681}{225}$

3. Simplificando $\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2$ obtemos $\frac{3}{4}$

4. O valor de $\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}-\sqrt{48}\right)^2$ é 6

Conclua que:

a) Todas são verdadeiras

b) Três são verdadeiras e uma é falsa

c) Duas são verdadeiras e duas são falsas

d) Somente (3) é falsa

e) Todas são falsas

RESOLUÇÃO:

1. $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}+\left(3\sqrt{2}\right)^2=12-12\sqrt{6}+18=30-12\sqrt{6}$

(VERDADEIRA)

2. $\left(\sqrt{1\frac{7}{9}}+\sqrt{1\frac{24}{25}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{16}{9}}+\sqrt{\frac{49}{25}}\right)^2=\left(\frac{4}{3}+\frac{7}{5}\right)^2=\left(\frac{20+21}{15}\right)^2=\frac{1681}{225}$

(VERDADEIRA)

3. $\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt{6\frac{3}{4}}\right)^2=\left(\sqrt[6]{3^3}-\sqrt{\frac{27}{4}}\right)^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{\frac{27}{4}}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{27}{4}}+\left(\sqrt{\frac{27}{4}}\right)^2=$

$3-2\cdot\frac{9}{2}+\frac{27}{4}=\frac{27}{4}-6=\frac{3}{4}$

(VERDADEIRA)

4. $\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}-\sqrt{48}\right)^2=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right)^2=\left(-\sqrt{3}\right)^2=3$

(FALSA)

RESPOSTA: B

EXERCÍCIO RESOLVIDO 2

Se $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}=\frac{8}{3}$ e x + y + z = 16, o produto xyz é:

a) 192

b) 48

c) 32

d) 108

e) 96

RESOLUÇÃO:

A expressão $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}=\frac{8}{3}$ pode ser reescrita como $\frac{2yz+2xz+2xy+x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{8}{3}$. Reconhecendo o numerador da fração como o produto notável $(x + y + z)^2$, segue que $\frac{16^2}{xyz}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow 8xyz=3\cdot 16^2\Leftrightarrow xyz=96$.

RESPOSTA: E

Antes de prosseguir para o próximo assunto, faça os exercícios de 1 a 10 para que você possa fixar os conceitos aqui passados!

2. FATORAÇÃO

Fatorar uma expressão algébrica significa escrever tal expressão como produto de fatores mais simples. Tal procedimento é útil para, por exemplo, resolver equações algébricas. Vejamos agora algumas técnicas de fatoração e fatorações conhecidas que você deve saber!

TÉCNICA 1 (COLOCAR EM EVIDÊNCIA): Quando um termo aparece em todas as parcelas de uma expressão algébrica, é possível colocar este em evidência. Matematicamente, temos o seguinte:

$$\boxed{ab+ac=a(b+c)}$$

Exemplo: $x^4+x^2y+xy^2=x(x^3+xy+y^2)$

TÉCNICA 2 (AGRUPAMENTO): Esta técnica é muito utilizada e consiste na seguinte ideia:
$ab+ac+bd+cd=a(b+c)+d(b+c)=(b+c)(a+d)$. Veja que o agrupamento nada mais é que uma aplicação sucessiva da técnica de colocar em evidência.

Exemplo 1: $x^6+x^4+x^2+1=x^4(x^2+1)+1\cdot(x^2+1)=(x^2+1)(x^4+1)$.

Exemplo 2: Como consequência do agrupamento, podemos deduzir o chamado Produto de Stevin:
$x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab=x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b)$.

• **FATORAÇÃO 1 (DIFERENÇA DE QUADRADOS):** Esta fatoração é a mesma coisa que o produto notável 2.3 (**PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA**). Por sua grande importância, estamos ressaltando novamente:

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$

Exemplo: $x^4-81=(x^2)^2-9^2=(x^2-9)(x^2+9)=(x^2-3^2)(x^2+9)=(x-3)(x+3)(x^2+9)$.

• **FATORAÇÃO 2 (SOMA DE CUBOS):** O objetivo aqui é fatorar a expressão a^3+b^3. Para isso, vamos nos lembrar da expressão do cubo da soma como escrita no PROBIZU. Lembre que vimos que $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Como queremos fatorar a^3+b^3, é natural isolar esta expressão de um dos lados da igualdade que vimos no PROBIZU. Assim, temos que $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

Colocando (a + b) em evidência, temos que $a^3+b^3=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Assim, chegamos à seguinte fatoração:

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

Exemplo: $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-3x+9)$

• **FATORAÇÃO 3 (DIFERENÇA DE CUBOS):** Agora, queremos fatorar a expressão $a^3 - b^3$. Para isso, vamos aproveitar a fatoração anterior: $a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3 = (a + (-b))\left(a^2 - a \cdot (-b) + (-b)^2\right) = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$. Assim, temos:

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)}$$

Exemplo: $x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)\left(x^2 + 4x + 16\right)$

• **FATORAÇÃO 4 (SOMA E DIFERENÇA DE POTÊNCIAS):** Generalizando as duas últimas fatorações, temos os seguintes resultados um pouco mais avançados:

Para n inteiro positivo qualquer, vale:

$$\boxed{x^n - a^n = (x - a)\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}\right)}$$

Observe que as potências de *x* vão caindo de 1 em 1 e as de *a* vão aumentando de 1 em 1.

Exemplo: $x^5 - 32 = x^5 - 2^5 = (x - 2)\left(x^4 + x^3 \cdot 2 + x^2 \cdot 2^2 + x \cdot 2^3 + 2^4\right) = (x - 2)\left(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16\right)$

Para *n* inteiro positivo **ÍMPAR**, vale:

$$\boxed{x^n + a^n = (x + a)\left(x^{n-1} - x^{n-2}a + \ldots - xa^{n-2} + a^{n-1}\right)}$$

Observe que as potências de *x* vão caindo de 1 em 1 e as de *a* vão aumentando de 1 em 1. Além disso, repare também, que os sinais vão alternando.

Exemplo:

$$x^5 + 32 = x^5 + 2^5 = (x + 2)\left(x^4 - x^3 \cdot 2 + x^2 \cdot 2^2 - x \cdot 2^3 + 2^4\right) = (x + 2)\left(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16\right)$$

TÉCNICA 3 (COMPLETANDO QUADRADOS): Esta técnica é muito útil quando temos uma expressão que é quase um quadrado perfeito, mas não é. Vejamos dois exemplos para fixar as ideias:

Exemplos:

(Identidade de Sophie Germain) A expressão a ser fatorada é $a^4 + 4b^4$. Veja que $a^4 + 4b^4 = \left(a^2\right)^2 + \left(2b^2\right)^2$. Da forma que escrevemos, a expressão lembra muito o quadrado de uma soma (de fato já temos o quadrado do primeiro termo e o do segundo termo). Pense agora: o que está faltando para isto ser o quadrado de uma soma? Está faltando o termo do meio!! Para consertar isso, vamos somar e subtrair o termo do meio, que é $2 \cdot a^2 \cdot \left(2b^2\right) = 4a^2b^2$. Assim, temos que:

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - (2ab)^2.$$

Agora, temos uma diferença de quadrados e podemos fatorar nossa expressão, obtendo o seguinte:

$$\boxed{a^4 + 4b^4 = \left(a^2 + 2ab + 2b^2\right)\left(a^2 - 2ab + 2b^2\right)}$$

Vejamos mais um exemplo:

(Identidade de Argand) A expressão a ser fatorada é $x^4 + x^2 + 1$. Você, ao olhar para

esta expressão, deve ter pensado: “poxa, se em vez de x^2, fosse $2x^2$, eu saberia fatorar como quadrado de uma soma!”. Você pensou muito bem e com este pensamento, podemos obter a fatoração. Se você quer que ali seja $2x^2$, basta somar e subtrair x^2, obtendo assim: $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2$. Mais uma vez, chegamos a uma diferença de quadrados e obtemos:

$$\boxed{x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

TÉCNICA 4 (EXPRESSÕES DO SEGUNDO GRAU): É bem possível que você se depare com expressões da forma $ax^2 + bx + c$ pela frente. Fique tranquilo: é bem fácil fatorar expressões deste tipo. Vejamos como:

1) Encontre as raízes x_1 e x_2 da equação $ax^2 + bx + c = 0$ usando a fórmula de Bhaskara, por exemplo. $\left(x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$

2) Feito isso, temos a seguinte fatoração: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Vejamos um exemplo para fixar a ideia:

Exemplo: Fatore $6x^2 + x - 2$.

Vamos seguir o passo a passo:

1) As raízes são $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1^2 - 4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6} = \dfrac{-1+7}{12} = \dfrac{1}{2}$ e $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{1^2 - 4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6} = \dfrac{-1-7}{12} = -\dfrac{2}{3}$.

2) Desta forma, temos que: $6x^2 + x - 2 = 6\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x - \left(-\dfrac{2}{3}\right)\right) = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)3\left(x + \dfrac{2}{3}\right) = (2x-1)(3x+2)$.

TÉCNICA 5 (ENCONTRANDO RAÍZES DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA): O seguinte resultado é extremamente útil: se uma expressão algébrica em x se anula para x = a, então x – a deve ser um fator da expressão. Vejamos um exemplo:

Exemplo: Fatore $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Veja que substituindo x por 1, temos que a expressão se anula. Desta forma, x – 1 deve ser um fator. Sabendo desta informação, vamos buscá-lo com alguns artifícios:

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$. Ainda podemos fatorar $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, obtendo assim que $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Vejamos mais três exercícios resolvidos:

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3

Se *a* e *b* são números reais tais que a - b = 7 e $a^2b - ab^2 = 210$, determine o valor de *ab*.

RESOLUÇÃO:

Podemos colocar ab em evidência na expressão $a^2b - ab^2$, obtendo que $ab(a-b)=210$. Como $a-b=7$, temos que $7ab=210 \Rightarrow ab=30$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 4

A expressão $\dfrac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2-\left(x^3-y^3-z^3\right)^2}{y^3+z^3}$, $x \cdot y \cdot z \neq 0$, é equivalente a:

a) $4x^3$

b) $4yzx^3$

c) $4yx^3$

d) $4xyz$

e) $4xz^3$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2-\left(x^3-y^3-z^3\right)^2}{y^3+z^3}=$$

$$=\frac{\left(x^3+y^3+z^3+x^3-y^3-z^3\right)\left(x^3+y^3+z^3-x^3+y^3+z^3\right)}{y^3+z^3}=$$

$$=\frac{2x^3\cdot 2\left(\cancel{y^3+z^3}\right)}{\cancel{y^3+z^3}}=4x^3$$

RESOLUÇÃO: A

EXERCÍCIO RESOLVIDO 5

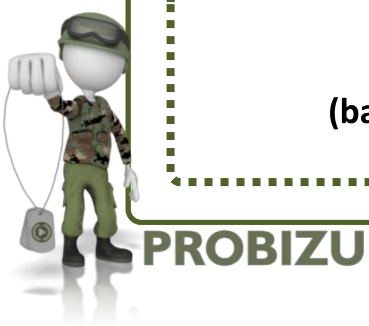
Fatore a expressão $a^3+b^3+c^3-3abc$.

RESOLUÇÃO:

Vamos escrever $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$, onde utilizamos a expressão do PROBIZU para o cubo da soma. Agora, nos dois primeiros termos, usaremos soma de cubos e nos dois últimos colocaremos $-3ab$ em evidência. Desta forma, temos:

$a^3+b^3+c^3-3abc=((a+b)+c)((a+b)^2-(a+b)c+c^2)-3ab(a+b+c)$. Colocando a + b + c em evidência, segue que

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)((a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab)=$$
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$



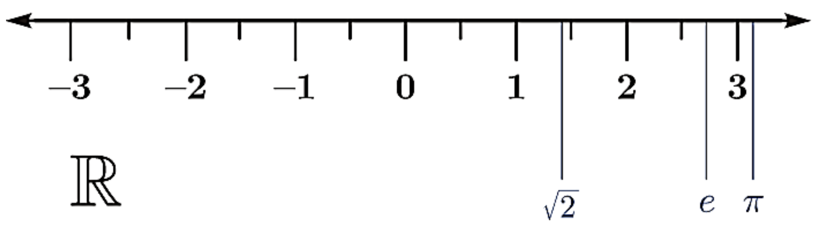
Se a + b + c = 0, então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

(basta usar a fatoração do exercício resolvido 5).

3. INEQUAÇÕES

3.1. O CONJUNTO DOS REAIS POSITIVOS

Podemos fazer uma associação entre os pontos de uma reta orientada e o conjunto dos números reais. Essa reta é chamada de **reta real**.



Ainda podemos dividir esta reta real em duas partes: os números menores que 0 (**NEGATIVOS)** e os números maiores que 0 (**POSITIVOS**). O conjunto dos reais positivos é denotado por $\mathbb{R}_+^*$ e o conjunto dos reais negativos é denotado por $\mathbb{R}_-^*$ .Vejamos abaixo a propriedade fundamental acerca do conjunto dos reais positivos:

PROPRIEDADE: Se $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, então $xy \in \mathbb{R}_+^*$ e $x + y \in \mathbb{R}_+^*$. Em outras palavras, a soma de dois números positivos é positiva e o produto de dois números positivos é positivo.

3.2. MAIOR E MENOR

Vamos introduzir agora uma simbologia muito útil:

Dizemos que $a > b$ se a diferença $a - b$ pertence ao conjunto dos reais positivos, isto é, se $a - b > 0$. Uma outra maneira de escrever isto é que $b < a$.

Dizemos que $a \geq b$ se $a = b$ ou $a > b$.

Vejamos alguns exemplos:

i) $7 > 4$
ii) $5 \geq 3$
iii) $3 \geq 3$

OBSERVAÇÃO

Pensando na reta real, a > b significa que a está à direita de b.

3.3. PROPRIEDADES

i) TRANSITIVIDADE:

Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$. (Isto é bem intuitivo pensando-se na reta real)

ii) ADIÇÃO:

Se $a > b$ e $c > d$, podemos somar as duas desigualdades: $a + c > b + d$.

CUIDADO!

Não podemos subtrair duas inequações!!!
Veja o seguinte problema que isso nos causaria: 5 > 3 e 0 > –3.
Se pudéssemos subtrair as inequações, chegaríamos a 5 –0 > 3 –(–3),
ou seja, $5 > 6$, o que é um absurdo!!! Então grava essa: NUNCA SUBTRAIR INEQUAÇÕES!!

iii) MULTIPLICAÇÃO POR UMA CONSTANTE:

Se c é um número positivo e $a > b$, então $ac > bc$.

Agora, preste bastante atenção: se c é um número negativo e $a > b$, então $ac < bc$ (**VEJA QUE O SINAL INVERTE!!!!**)

Por exemplo, temos que 3 > 2. Ao multiplicar ambos os lados por – 1, devemos inverter o sinal, obtendo –3 < –2.

CUIDADO!

Se chegarmos a uma situação como ac > bc, temos que analisar dois casos antes de cortar o c: se c for positivo, teremos a > b e se c for negativo, teremos a < b (MAIS UMA VEZ O SINAL INVERTE!!). Fique bastante atento a isto!!

iv) INVERTENDO DESIGUALDADES:

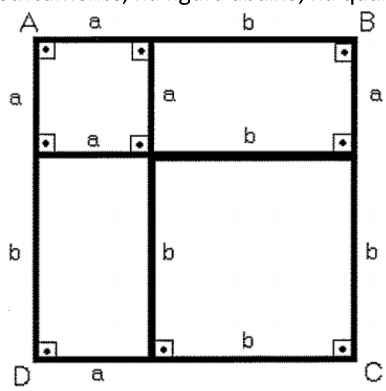
Se $a > b > 0$, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

v) DESIGUALDADE BÁSICA:

Se *x* é um número real, então $x^2 \geq 0$.

Estes conceitos de inequações serão muito úteis para módulos que virão pela frente! Guarde-os bem para não ser surpreendido lá na frente. Vamos enfrentar uma maratona de exercícios agora?? Lute bastante com eles e não deixe de ver as soluções no final!

1. Qual é o produto notável representado geometricamente, na figura abaixo, na qual ABCD é um quadrado?



a) a^3+b^3
b) $(a+b)^3$
c) $(a+b)^2$
d) $(a^2+b^2)^2$
e) $(a+b)^4$

2. Dado que $x+\frac{1}{x}=3$, o valor de $x^2+\frac{1}{x^2}$ é:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

3. Se $(a^2+b^2)^3=(a^3+b^3)^2$, com a e b não nulos, então o valor numérico de $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ é:

a) 1
b) 2
c) 1/2
d) 2/3
e) 3/2

4. Dado que $x^2 + y^2 = 6xy$ ($x > y > 0$), o valor de $\frac{x+y}{x-y}$ é:

a) 1
b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}$
d) 2
e) $\sqrt{5}$

5. Se m + n + p = 6, mnp = 2 e mn + mp + np = 11, podemos dizer que o valor de $\frac{m}{np} + \frac{n}{mp} + \frac{p}{mn}$ é:

a) 1
b) 3
c) 7
d) 18
e) 22

6. Sabendo que $x^2 + y^3 = 1$ e $x^4 + y^6 = 2$, o valor de $(x^2 - y^3)^2 - x^4 - 2x^2y^3 - y^6$ é

a) 0
b) 1
c) –1
d) 2
e) –2

7. O produto $P = \left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)$ é:

a) 100
b) 101
c) 102
d) 103
e) 104

8. O valor de $199919981997^2 - 2 \cdot 199919981994^2 + 199919981991^2$ é igual a:
a) 12
b) 14
c) 16
d) 18
e) 20

9. Se x é um quadrado perfeito, a expressão do quadrado perfeito imediatamente superior a x é:
a) $\sqrt{x} + 1$
b) $x^2 + 1$
c) $x^2 + 2x + 1$
d) $x^2 + x$
e) $x + 2\sqrt{x} + 1$

10. Sejam 'a', 'b' e 'c' números reais não nulos tais que $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=p$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=q$ e $ab+ac+bc=r$. O valor de q^2+6q é sempre igual a

a) $\frac{p^2r^2+9}{4}$

b) $\frac{p^2r^2-9p}{12}$

c) p^2r^2-9

d) $\frac{p^2r^2-10}{4r}$

e) p^2r^2-12p

11. Sabendo que $\sqrt[3]{n+\sqrt{n^2+8}}+\sqrt[3]{n-\sqrt{n^2+8}}=8$ onde n é um número inteiro, determine n.

12. Um aluno encontrou zero para o valor numérico da expressão $x^2+y^2-2x+5+4y$. Pode-se concluir que os valores pelos quais substituiu as variáveis x e y são tais que sua soma é:
a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

13. Para se explicitar $\underline{x}$ na equação $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, usa-se o recurso da complementação de quadrados. Usando-se o recurso da complementação de cubos um aluno determinou uma raiz real r da equação $x^3-6x^2+12x-29=0$. Pode-se afirmar que:
a) $0<r<1$
b) $1<r<2$
c) $2<r<3$
d) $3<r<4$
e) $4<r<5$

14. Simplificando-se a fração $\frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{a^2-b^2+2ab}$, onde $a>b$, obtém-se

a) a^2-b^2-2ab

b) a^2-b^2+2ab

c) a^2+b^2-2ab

d) a^2+b^2+2ab

e) a^2+b^2

15. Fatore as seguintes expressões:

a) $ab^3x^2 - a^2b^2x^2 + ab^2x^3 - a^2bx^3$

b) $15a^3bx^2y - 5a^3bxy^2 - 15a^2b^2x^2y + 5a^2b^2xy^2$

c) $5a^4 - 3a^3b - 45a^2b^2 + 27ab^3$

d) $a^4 - a^2 + 16$

e) $x^5 + y^5 - xy^4 - x^4y$

f) $x^4 + 4y^4$

g) $\left(x^2 + y^2 - 5\right)^2 - 4\left(xy + 2\right)^2$

h) $\left[\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) - 4xy\right]^2 - 4\left[x\left(1+y^2\right) - y\left(1+x^2\right)\right]^2$

i) $3xyz + x\left(y^2 + z^2\right) + y\left(z^2 + x^2\right) + z\left(x^2 + y^2\right)$

j) $bc\left(b+c\right) + ca\left(c+a\right) + ab\left(a+b\right) + 2abc$

k) $\left(x-y\right)^3 + \left(y-z\right)^3 + \left(z-x\right)^3$

l) $ab\left(c^2 + d^2\right) + cd\left(a^2 + b^2\right)$

m) $1 + y\left(1+x\right)^2\left(1+xy\right)$

16. Calcule o valor da expressão $S = \dfrac{\left(2004^3 - 1003^3 - 1001^3\right)}{2004 \times 1003 \times 1001}$.

17. Simplificando a expressão $\dfrac{\left(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right)\cdot\left(a+b-c\right)}{\left(a+b+c\right)\cdot\left(a^2 + c^2 - 2ac - b^2\right)}$ para os valores de a, b, c que não anulam o denominador, obtêm-se:

a) 1
b) 2
c) 3
d) a + b + c
e) a – b + c

18. (OBM) Assinale a alternativa que apresenta o maior dos cinco números.

a) 2014^5
b) 3015^4
c) 4016^3
d) 5017^2
e) 6018^1

19. (OBM) Determine $x+y$, sabendo que $x^3+y^3=9$, $x^2y+xy^2=6$ e que *x* e *y* são números reais.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

20. (OBM) Sejam a e b reais positivos tais que $\frac{a+2b}{b}=\frac{a+b}{a}$. O valor de $\frac{(a+b)^2}{ab}$ é:

a) 4
b) $3+\sqrt{3}$
c) $2+2\sqrt{2}$
d) $2+\sqrt{5}$
e) 5

21. (OBM) Sendo a e b reais tais que $0\le a\le 1$ e $0\le b\le 1$, o maior valor que $\frac{ab}{a+b}$ pode assumir é

a) 0
b) 1/4
c) 1/3
d) 1/2
e) 1

22. O valor mínimo da expressão $E=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, onde *a* e *b* são reais positivos, é:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

1. Veja que a área do quadrado ABCD é composta pela soma de quatro áreas: Dois retângulos de lados a e b, um quadrado de lado a e um quadrado de lado b.

Assim, área total = $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$

RESPOSTA: C

2. Ao elevar $x+\frac{1}{x}=3$ ao quadrado temos $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 9$, o que nos leva a

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$.

RESPOSTA: C

3. Vamos desenvolver ambos os lados da equação:

$$(a^2+b^2)^3 = (a^3+b^3)^2 \Leftrightarrow$$
$$(a^2)^3 + 3\cdot(a^2)^2\cdot(b^2) + 3\cdot(a^2)\cdot(b^2)^2 + (b^2)^3 = (a^3)^2 + 2\cdot a^3\cdot b^3 + (b^3)^2 \Leftrightarrow$$
$$a^6 + 3\cdot a^4\cdot b^2 + 3\cdot a^2\cdot b^4 + b^6 = a^6 + 2\cdot a^3\cdot b^3 + b^6 \Leftrightarrow$$
$$3\cdot a^4\cdot b^2 + 3\cdot a^2\cdot b^4 = 2\cdot a^3\cdot b^3 \Leftrightarrow$$
$$3\cdot a^2\cdot b^2(a^2+b^2) = 2\cdot a^3\cdot b^3$$

Como a e b são não nulos, podemos dividir ambos os lados por $a^2\cdot b^2$, com isso:

$3\cdot\left(a^2+b^2\right)=2\cdot a\cdot b$. Como queremos a soma $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, vamos passar o $a\cdot b$ dividindo para a esquerda. E com isso temos:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=\frac{2}{3}.$$

RESPOSTA: D

4. $x^2 + y^2 = 6xy$, queremos $\frac{x+y}{x-y}$, para encontrar a soma x + y, vamos somar 2xy à equação:

$$x^2+2xy+y^2=8xy \Leftrightarrow$$
$$(x+y)^2=8xy$$

Como $x>y>0$, podemos tirar raiz dos dois lados:

$$|x+y|=\sqrt{8xy} \Leftrightarrow$$
$$|x+y|=2\sqrt{2xy}$$

Novamente usamos que x e y são positivos:

$$x+y=2\sqrt{x+y}$$

Para encontrar o x – y subtrairemos 2xy à equação:

$$x^2-2xy+y^2=4xy \Leftrightarrow$$
$$(x-y)^2=4xy$$

Usando que ambos são positivos, e x > y, temos que:

$$x-y=2\sqrt{xy}.$$

Assim: $\frac{x+y}{x-y}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}}=\sqrt{2}$.

RESPOSTA: B

5. Queremos $\frac{m}{np}+\frac{n}{mp}+\frac{p}{mn}$, ao fazer o m.m.c: $\frac{m^2}{mnp}+\frac{n^2}{mnp}+\frac{p^2}{mnp}=\frac{m^2+n^2+p^2}{mnp}(*)$.

Sabemos, pelo enunciado que o denominador de (*) é igual a 2.

Para encontrar o numerador, vamos elevar m + n + p ao quadrado:

$$(m+n+p)^2=m^2+n^2+p^2+2(mn+mp+np).$$

Substituindo as informações do enunciado:

$$(6)^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2\cdot(11) \Leftrightarrow$$
$$m^2 + n^2 + p^2 = 36 - 22 \Leftrightarrow$$
$$m^2 + n^2 + p^2 = 14$$

Com isso: $\frac{m}{np} + \frac{n}{mp} + \frac{p}{mn} = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{mnp} = \frac{14}{2} = 7$

RESPOSTA: C

6. Vamos desenvolver o que queremos:

$$\left(x^2 - y^3\right)^2 - x^4 - 2x^2y^3 - y^6 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 - y^3\right)^2 - \left(x^4 + 2x^2y^3 + y^6\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 - y^3\right)^2 - \left(x^2 + y^3\right)^2 \ (*)$$

Como $\left(x^2 + y^3\right) = 1$, temos que

$$(*) = \left(x^2 - y^3\right)^2 - 1 \Leftrightarrow \quad ,$$
$$(*) = x^4 - 2x^2y^3 + y^6 - 1$$

Sabemos que $x^4 + y^6 = 2$. Para encontrar x^2y^3, vamos elevar $\left(x^2 + y^3\right)$ ao quadrado:

$$\left(x^2 + y^3\right)^2 = x^4 + 2x^2y^3 + y^6$$

Com isso temos que:

$$1 = 2 + 2x^2y^3 \Leftrightarrow$$
$$2x^2y^3 = -1$$

Finalmente: $(*) = 2 - (-1) - 1 = 2$

RESPOSTA: D

7.

$$P = \left(\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}\right) \Leftrightarrow$$
$$P = \left(\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right) + \sqrt{7}\right)\left(\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right) - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7} + \left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right)\right)\left(\sqrt{7} - \left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$P = \left(\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)^2 - 7\right)\left(7 - \left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right)^2\right) \Leftrightarrow$$
$$P = \left(5 + 2\sqrt{30} + 6 - 7\right)\left(7 - 5 + 2\sqrt{30} - 6\right) \Leftrightarrow$$
$$P = \left(2\sqrt{30} + 4\right)\left(2\sqrt{30} - 4\right) \Leftrightarrow$$
$$P = 4\cdot 30 - 16 = 120 - 16 = 104$$

RESPOSTA: E

8.

$$X = 199919981997^2 - 2 \cdot 199919981994^2 + 199919981991^2 \Leftrightarrow$$
$$X = \left(199919981997^2 - 199919981994^2\right) - \left(199919981994^2 - 199919981991^2\right) \Leftrightarrow$$
$$X = (199919981997 + 199919981994)(199919981997 - 199919981994) -$$
$$(199919981994 + 199919981991)(199919981994 - 199919981991) \Leftrightarrow$$
$$X = 3 \cdot (199919981997 + 199919981994) - 3 \cdot (199919981994 + 199919981991) \Leftrightarrow$$
$$X = 3 \cdot (199919981997 + 199919981994 - (199919981994 + 199919981991)) \Leftrightarrow$$
$$X = 3 \cdot (6) \Leftrightarrow$$
$$X = 18$$

RESPOSTA: D

9. x é quadrado perfeito: $\sqrt{x}^2 = x$. O próximo quadrado perfeito é: $\left(\sqrt{x}+1\right)^2 = \sqrt{x}^2 + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot 1 + 1^2 = x + 2\sqrt{x} + 1$.

RESPOSTA: E

10.

$$p \cdot r = \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)(ab + ac + bc) \Leftrightarrow$$
$$p \cdot r = 1 + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + 1 \Leftrightarrow$$
$$p \cdot r = 3 + q(*)$$

Elevando (*) ao quadrado em ambos os lados:

$$(p \cdot r)^2 = 9 + 6q + q^2 \Leftrightarrow$$
$$q^2 + 6q = p^2 r^2 - 9$$

RESPOSTA: C

11. $\sqrt[3]{n + \sqrt{n^2 + 8}} + \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2 + 8}} = 8$

Elevando ambos os lados ao cubo, fazemos uma mudança de variáveis:

$$a = \sqrt[3]{n + \sqrt{n^2 + 8}}$$
$$b = \sqrt[3]{n - \sqrt{n^2 + 8}}$$

Então:

$$a + b = 8$$

Elevando ambos os lados ao cubo:

$$(a+b)^3 = 8^3 \Leftrightarrow$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 512 \Leftrightarrow$$
$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 512(*)$$

Veja que:

$$a^3 + b^3 = 2n$$
$$ab = \sqrt[3]{\left(n+\sqrt{n^2+8}\right)\left(n-\sqrt{n^2+8}\right)} = \sqrt[3]{n^2-\left(n^2+8\right)} = -2$$
$$a+b = 8$$

Assim, substituindo em (*):

$$(*)2n + 3\cdot(-2)\cdot 8 = 512 \Leftrightarrow$$
$$2n = 512 + 48 \Leftrightarrow$$
$$2n = 560 \Leftrightarrow$$
$$n = 280$$

12. $x^2 + y^2 - 2x + 5 + 4y = 0$

Organizando as parcelas de forma a termos quadrados perfeitos, temos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

Para uma soma de quadrados ser zero, todas as parcelas devem ser zero, assim:

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
$$y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$$
$$x + y = 1 + (-2) = -1$$

RESPOSTA: B

13. Podemos escrever $x^3 - 6x^2 + 12x - 29$ como $(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

Igualando o coeficiente de x^2, temos: $-6 = -3a \Leftrightarrow a = 2$.

Com a = 2 podemos escrever: $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, com isso:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 29 = (x-2)^3 - 21$$

Assim, usando que $x^3 - 6x^2 + 12x - 29 = 0$, temos que:

$$(x-2)^3 - 21 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^3 = 21 \Leftrightarrow$$
$$x = \sqrt[3]{21} + 2$$

Para localizar entre quais inteiros está a raiz:

$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{21} < \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow$$
$$2 < \sqrt[3]{21} < 3 \Leftrightarrow$$
$$4 < \sqrt[3]{21} + 2 < 5$$

Com isso: $4 < r < 5$.

RESPOSTA: E

14. Vamos olhar para o numerador:

$$a^4 + b^4 - 6a^2b^2 =$$
$$= a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - 4a^2b^2 =$$
$$= \left(a^2 - b^2\right)^2 - 4a^2b^2 =$$
$$= \left(a^2 - b^2 - 2ab\right)\left(a^2 - b^2 + 2ab\right)$$

Assim, a fração que queremos simplificar fica: $\dfrac{\left(a^2 - b^2 - 2ab\right)\left(a^2 - b^2 + 2ab\right)}{\left(a^2 - b^2 + 2ab\right)}$.

Cortando o fator comum, encontramos a resposta: $\left(a^2 - b^2 - 2ab\right)$.

RESPOSTA: A

15.

a)
$$ab^3x^2 - a^2b^2x^2 + ab^2x^3 - a^2bx^3 =$$
$$abx^2\left(b^2 - ab + bx - ax\right) =$$
$$abx^2\left(b\left(b-a\right) + x\left(b-a\right)\right) =$$
$$abx^2\left(b+x\right)\left(b-a\right)$$

b)
$$15a^3bx^2y - 5a^3bxy^2 - 15a^2b^2x^2y + 5a^2b^2xy^2 =$$
$$5a^2bxy\left(3ax - ay - 3bx + by\right) =$$
$$5a^2bxy\left(3x\left(a-b\right) - y\left(a-b\right)\right) =$$
$$5a^2bxy\left(3x - y\right)\left(a-b\right)$$

c)
$$5a^4 - 3a^3b - 45a^2b^2 + 27ab^3 =$$
$$a\left(5a^3 - 3a^2b - 45ab^2 + 27b^3\right) =$$
$$a\left(5a\left(a^2 - 9b^2\right) - 3b\left(a^2 - 9b^2\right)\right) =$$
$$a\left(5a - 3b\right)\left(a^2 - 9b^2\right) =$$
$$a\left(5a - 3b\right)\left(a - 3b\right)\left(a + 3b\right)$$

d)
$$a^4 - a^2 + 16 =$$
$$a^4 - a^2 + 16 + 9a^2 - 9a^2 =$$
$$a^4 + 8a^2 + 16 - 9a^2 =$$
$$\left(a^2 + 4\right)^2 - 9a^2 =$$
$$\left(a^2 - 3a + 4\right)\left(a^2 + 3a + 4\right)$$

e)
$$x^5 + y^5 - xy^4 - x^4y =$$
$$x^4\left(x - y\right) - y^4\left(x - y\right) =$$
$$\left(x - y\right)\left(x^4 - y^4\right) =$$
$$\left(x - y\right)\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - y^2\right) =$$
$$\left(x - y\right)\left(x^2 + y^2\right)\left(x - y\right)\left(x + y\right) =$$
$$\left(x - y\right)^2\left(x^2 + y^2\right)\left(x + y\right)$$

f)
$$x^4 + 4y^4 =$$
$$x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 =$$
$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - 4x^2y^2 =$$
$$\left(x^2 - 2xy + y^2\right)\left(x^2 + 2xy + y^2\right) =$$
$$\left(x - y\right)^2\left(x + y\right)^2$$

g)
$$\left(x^2 + y^2 - 5\right)^2 - 4\left(xy + 2\right)^2 =$$
$$\left(x^2 + y^2 - 5 - 2\left(xy + 2\right)\right)\left(x^2 + y^2 - 5 + 2\left(xy + 2\right)\right) =$$
$$\left(x^2 + y^2 - 2xy - 9\right)\left(x^2 + y^2 + 2xy - 1\right) =$$
$$\left(\left(x - y\right)^2 - 9\right)\left(\left(x + y\right)^2 - 1\right) =$$
$$\left(x - y + 3\right)\left(x - y - 3\right)\left(x + y + 1\right)\left(x + y - 1\right)$$

h)

$$a=\left(1+x^2\right)$$
$$b=\left(1+y^2\right)$$
$$\left[\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)-4xy\right]^2-4\left[x\left(1+y^2\right)-y\left(1+x^2\right)\right]^2=$$
$$\left(ab-4xy\right)^2-4\left(xb-ya\right)^2=$$
$$\left(ab-4xy-2\left(xb-ya\right)\right)\left(ab-4xy+2\left(xb-ya\right)\right)=$$
$$\left(ab-4xy-2xb+2ya\right)\left(ab-4xy+2xb-2ya\right)=$$
$$\left(a\left(b+2y\right)-2x\left(b+2y\right)\right)\left(a\left(b-2y\right)+2x\left(b-2y\right)\right)=$$
$$\left(a-2x\right)\left(b+2y\right)\left(a+2x\right)\left(b-2y\right)=$$
$$\left(1+x^2-2x\right)\left(1+y^2+2y\right)\left(1+x^2+2x\right)\left(1+y^2-2y\right)=$$
$$\left(x-1\right)^2\left(y+1\right)^2\left(x+1\right)^2\left(y-1\right)^2$$

i)

$$3xyz+x\left(y^2+z^2\right)+y\left(z^2+x^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)=$$
$$xyz+xyz+xyz+xy^2+xz^2+yz^2+yx^2+zx^2+zy^2=$$
$$xyz+xy^2+yx^2+xyz+xz^2+zx^2+xyz+yz^2+zy^2=$$
$$xy\left(x+y+z\right)+xz\left(x+y+z\right)+yz\left(x+y+z\right)=$$
$$\left(x+y+z\right)\left(xy+xz+yz\right)$$

j)

$$bc\left(b+c\right)+ca\left(c+a\right)+ab\left(a+b\right)+2abc=$$
$$b^2c+c^2b+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2+2abc=$$
$$a^2\left(b+c\right)+a\left(b^2+2bc+c^2\right)+bc\left(b+c\right)=$$
$$a^2\left(b+c\right)+a\left(b+c\right)^2+bc\left(b+c\right)=$$
$$\left(b+c\right)\left(a^2+ab+ac+bc\right)=$$
$$\left(b+c\right)\left(a\left(a+b\right)+c\left(a+b\right)\right)=$$
$$\left(b+c\right)\left(a+c\right)\left(a+b\right)$$

k) Veja que $\left(x-y\right)+\left(y-z\right)+\left(z-x\right)=0$.

Então, pelo PROBIZU, temos que:

$$\left(x-y\right)^3+\left(y-z\right)^3+\left(z-x\right)^3=3\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)$$

l)

$$ab\left(c^2+d^2\right)+cd\left(a^2+b^2\right)=$$
$$abc^2+abd^2+a^2cd+b^2cd=$$
$$ad\left(bd+ac\right)+bc\left(ac+bd\right)=$$
$$\left(ad+bc\right)\left(bd+ac\right)$$

m) Faça a mudança de variável:

$$1+x=a$$
$$x=a-1$$

Ficamos com:

$$1+y(1+x)^2(1+xy)=$$
$$1+ya^2(1+(a-1)y)=$$
$$1+ya^2+y^2a^3-y^2a^2=$$
$$1-a^2y^2+ya^2(1+ya)=$$
$$(1-ay)(1+ay)+ya^2(1+ay)=$$
$$(1+ay)(ya^2-ay+1)$$

16. $S=\dfrac{\left(2004^3-1003^3-1001^3\right)}{2004\times1003\times1001}$

Veja que: $2004-1003-1001=0$, então, usando o probizu, temos que:

$$S=\frac{\left(2004^3-1003^3-1001^3\right)}{2004\times1003\times1001}=\frac{2004\times1003\times1001}{2004\times1003\times1001}=1$$

RESPOSTA: A

17.

$$\frac{\left(a^2-b^2-c^2-2bc\right)\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot\left(a^2+c^2-2ac-b^2\right)}=$$
$$\frac{\left(a^2-(b+c)^2\right)\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot\left((a-c)^2-b^2\right)}=$$
$$\frac{(a-b-c)\cdot(a+b+c)\cdot(a+b-c)}{(a+b+c)\cdot(a-c-b)\cdot(a-c+b)}=1$$

RESPOSTA: A

18. Veja que:

$$2014^5 > 2000^5 = 32 \cdot 10^{15}$$
$$3015^4 < 4000^4 = 64 \cdot 10^{12}$$
$$4016^3 < 5000^3 = 125 \cdot 10^9$$
$$5017^2 < 6000^2 = 36 \cdot 10^6$$
$$6018^1 < 7000 = 7 \cdot 10^3$$

Analisando o número de dígitos de cada uma das opções, vemos que o maior número é 2014^5.

RESPOSTA: A

19. $x^3 + y^3 = 9; \; x^2y + xy^2 = 6$

Sabemos que $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3(xy^2 + x^2y)$.

Assim:

$$(x+y)^3 = 9 + 3 \cdot 6 \Leftrightarrow$$
$$x + y = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow$$
$$x + y = 3$$

RESPOSTA: C

20.

$$\frac{a+2b}{b} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow$$
$$a^2 + 2ab = ab + b^2 \Leftrightarrow$$
$$a^2 + ab - b^2 = 0$$

Dividindo ambos os lados por b^2, temos:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Fazendo a substituição de variável $x = \frac{a}{b}$:

$$x^2 + x - 1 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como a e b são positivos:

$$\frac{a}{b}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Assim:

$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot b$, e podemos escrever:

$$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot b+b\right)^2}{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot b^2}=\frac{b^2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdot b^2}=\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4}}{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{6+2\sqrt{5}}{2\cdot\left(-1+\sqrt{5}\right)}=\frac{3+\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt{5}-1\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{3\sqrt{5}+3+5+\sqrt{5}}{5-1}=\frac{8+4\sqrt{5}}{4}=2+\sqrt{5}$$

RESPOSTA: D

21. Queremos maximizar $\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

Como em $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ o numerador é constante, precisamos minimizar o denominador.

Para minimizar $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, precisamos que $\dfrac{1}{a}$ e $\dfrac{1}{b}$ sejam mínimos. Assim, precisamos de a e b máximos. Com isso a = 1 e b = 1.

Então $\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

RESPOSTA: D

22.

$$E=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Leftrightarrow$$

$$E=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$$

Vamos provar que $x+\frac{1}{x}\geq 2$, $\forall x>0$:

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x-2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x+\frac{1}{x}\geq 2, \forall x>0$$

Com isso:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$$

e

$$E\geq 2+2=4$$

RESPOSTA: B