Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Competência(s): 2 e 3

Habilidade(s): 7, 8, 9 e 12

AULAS 11 e 12

Você deve saber!

- Elementos notáveis do triângulo retângulQo
- Relações métricas no triângulo retângulo
- Aplicações do teorema de Pitágoras

Mapeando o saber

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

TEOREMA DE PITÁGORAS

$A^2 = B^2 + C^2$

RELAÇÕES

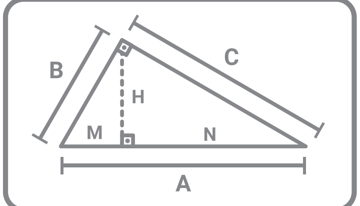
$AH = BC$

$H^2 = M \cdot N$

$B^2 = M \cdot A$

$C^2 = N \cdot A$

O TRIÂNGULO



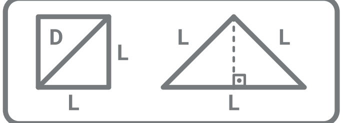
A → HIPOTENUSA

B E G → CATETOS

M → PROJEÇÃO DO LADO B

N → PROJEÇÃO DO LADO C

APLICAÇÕES



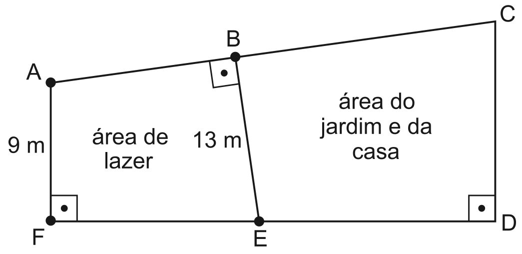
$D^2 = L^2 + L^2$ $\quad L^2 = H^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$

$D = L\sqrt{2}$ $\quad H = \frac{L\sqrt{3}}{2}$

ANOTAÇÕES

Exercícios de sala

1. (UNESP) A figura, fora de escala, representa o terreno plano onde foi construída uma casa.

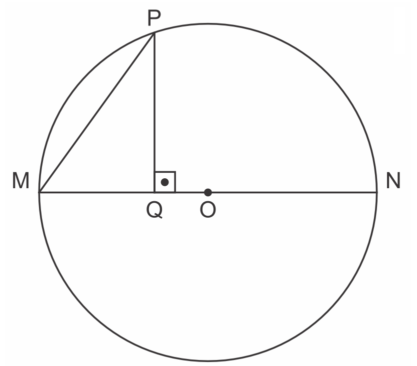


Sabe-se do quadrilátero ABEF que:

- Seus ângulos $A\hat{B}E$ e $A\hat{F}E$ são retos.
- $\overline{AF}$ mede 9 m e $\overline{BE}$ mede 13 m.
- o lado $\overline{EF}$ é 2 m maior que o lado $\overline{AB}$.

Nessas condições, quais são as medidas, em metros, dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$?

2. (ESPCEX (AMAN)) Na figura, o raio da circunferência de centro 0 é $\frac{25}{2}$ cm e a corda MP mede 10 cm.



desenho ilustrativo – fora de escala

A medida, em centímetros, do segmento PQ é

a) $\frac{25}{2}$

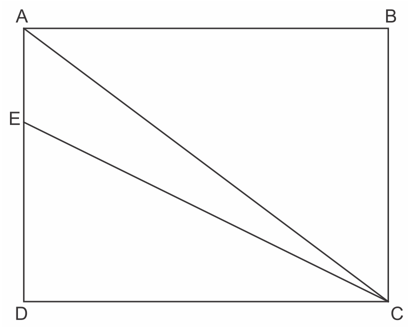
b) 10

c) $5\sqrt{21}$

d) $\sqrt{21}$

e) $2\sqrt{21}$

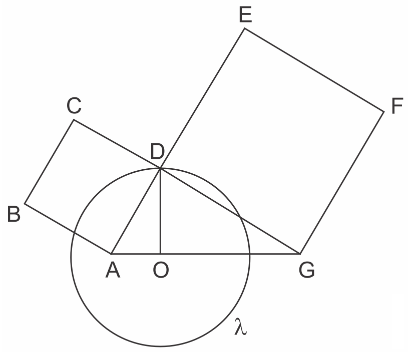
3. (G1 - CFTMG) No retângulo ABCD, o lado $\overline{AB}$ mede 4b e o lado $\overline{BC}$ mede 3b.



Sabendo-se que a medida do segmento $\overline{AE}$ é $\frac{1}{3}$ da medida de $\overline{AD}$, então, o perímetro do triângulo ACE é

a) 16b.
b) 46b.
c) $b(5 + 4\sqrt{5})$.
d) $b(6 + 2\sqrt{5})$.

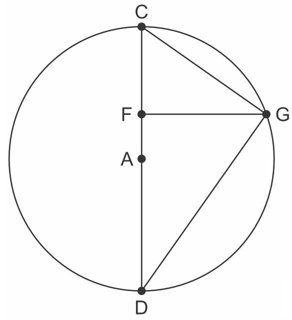
4. (G1 - CFTMG) Na figura a seguir, os quadrados ABCD e DEFG possuem áreas iguais a 9 e 16m², respectivamente. O triângulo ADG é retângulo em D e λ é a circunferência cujo centro está no ponto O.



Sabendo-se que a área de um círculo de raio r é πr^2, então o valor da área delimitada por λ, em m², é igual a

a) 4,55π
b) 5,76π
c) 7,24π
d) 9,30π

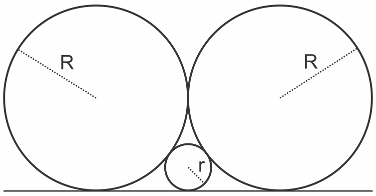
5. **(G1 - CFTMG)** Na figura, A é o centro da circunferência, CD é o diâmetro e GF é a altura do triângulo CDG.



Sendo CG = 3 cm e DG = 4 cm, o segmento AF mede, em centímetros,

a) 0,3.
b) 0,5.
c) 0,7.
d) 0,9.

6. **(UNICAMP)** A figura abaixo exibe três círculos tangentes dois a dois e os três tangentes a uma mesma reta. Os raios dos círculos maiores têm comprimento R e o círculo menor tem raio de comprimento r.



A razão R/r é igual a

a) 3.
b) $\sqrt{10}$
c) 4.
d) $2\sqrt{5}$.

Estudo individualizado (E.I.)

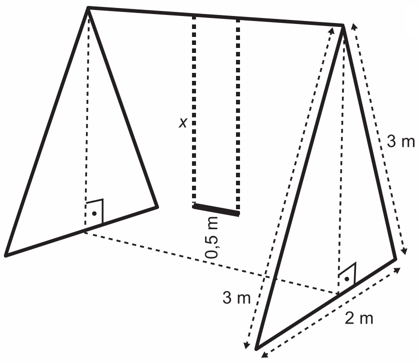
1. **(UNESP)** Observe as medidas indicadas em um mapa do Parque Ibirapuera, região plana da cidade de São Paulo.

(www.google.com. Adaptado.)

De acordo com o mapa, uma caminhada em linha reta do Museu Afro Brasil (P) até o Museu de Arte Moderna de São Paulo (Q) corresponde a

a) 400 m.
b) 625 m.
c) 676 m.
d) 484 m.
e) 576 m.

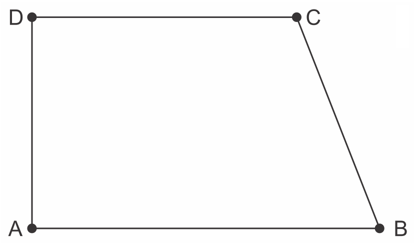
2. **(ENEM PPL)** Um brinquedo muito comum em parques de diversões é o balanço. O assento de um balanço fica a uma altura de meio metro do chão, quando não está em uso. Cada uma das correntes que o sustenta tem medida do comprimento, em metro, indicada por x. A estrutura do balanço é feita com barras de ferro, nas dimensões, em metro, conforme a figura.



Nessas condições, o valor, em metro, de x é igual a

a) $\sqrt{2}$ - 0,5
b) 1,5
c) $\sqrt{8}$ - 0,5
d) $\sqrt{10}$ - 0,5
e) $\sqrt{8}$

3. O trapézio retângulo ABCD da figura representa a superfície de um reservatório de água.
Na figura, tem-se que:



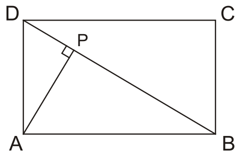
AB = 20 m;
CD = 15 m;
AD = 12 m;

o ângulo DÂB é reto.

Se, por uma questão de segurança, o reservatório precisa ser cercado, então o comprimento dessa cerca será, em metros, de

a) 60.
b) 59.
c) 58.
d) 57.
e) 56.

4. **(UEPB)** No retângulo ABCD de lado $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = \sqrt{7}$cm, o segmento AP é perpendicular à diagonal BD.



O segmento BP mede em cm:

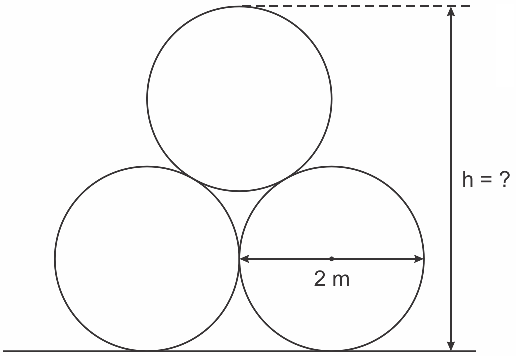
a) $\frac{9}{2}$
b) $\frac{7}{4}$
c) $\frac{9}{4}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{5}{4}$

5. **(ESA)** Considere um triângulo retângulo ABC, retângulo em A. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa e sabendo que AH = 6 cm e BH = 2cm, o produto dos comprimentos dos catetos é igual a:

a) 150 cm^2
b) 144 cm^2
c) 120 cm^2
d) 180 cm^2
e) 108 cm^2

6. **(UFGD)** Um hotel mexicano oferece aos visitantes uma estadia (estada) diferente da comum. Respeitando os preceitos das construções ecológicas, as acomodações do TuboHotel são instaladas em tubos de concreto reciclados, provenientes de bueiros e de esgotos industriais. O hotel situa-se a aproximadamente 45 minutos, ao sul da Cidade do México, na aldeia de Tepoztlan, em Morelos.

Disponível em: https://estadodeminas.lugarcerto.com.br/app/noticia/noticias/2012/10/17/interna_noticias,46616/quartos-de-hotel-no-mexico-são-instalados-em-tubos-de-concreto.shtml. Acesso em: 20 ago. 2020 (adaptado).



Considerando que os tubos dos quartos têm um diâmetro de 2 m, qual é a altura h de cada conjunto de quartos do hotel?

Despreze a espessura do tubo.

a) $\sqrt{3}$m
b) 3m
c) 2 + $\sqrt{3}$m
d) 4m
e) 5 + $\sqrt{2}$m

7. **(G1 - ifsc)** Um triângulo ABC, retângulo em B possui catetos medindo (x - 2) metros e (x + 5) metros, com hipotenusa igual a (x + 7) metros.

João percorrerá o caminho de A a C sobre os catetos e Maria também irá de A a C, mas pela hipotenusa.

Assim, é correto afirmar que <u>Maria fará um trajeto, em relação a João</u>:

Assinale a alternativa **CORRETA**.

a) 6 (seis) metros menor
b) 4 (quatro) metros menor
c) de mesma distância
d) 4 (quatro) metros maior
e) 6 (seis) metros maior

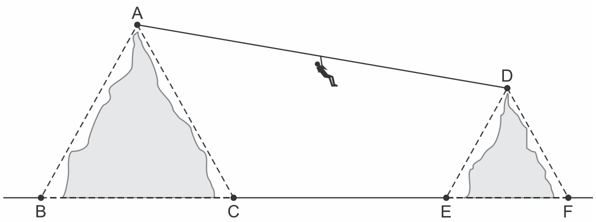
8. **(UECE)** Uma folha de papel plana e retangular é dividida em três partes retangulares e congruentes de duas maneiras distintas, referenciadas à largura e ao comprimento da folha de papel. Na primeira, a medida do menor lado de cada parte é igual a 4 cm e, analogamente, na segunda, a medida do menor lado de cada parte é igual a 5 cm. Nessas condições, a medida, em cm, da diagonal da folha de papel é igual a

a) $4\sqrt{41}$.
b) $3\sqrt{41}$.
c) $6\sqrt{39}$.
d) $5\sqrt{39}$.

9. **(UECE)** Se a razão entre as medidas dos catetos de um triângulo retângulo é igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ o valor do seno do menor dos ângulos internos desse triângulo é

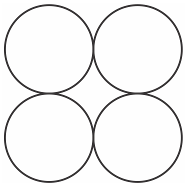
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. **(G1 - CP2)** Para incentivar o turismo, o prefeito de uma cidade decide criar uma tirolesa ligando duas montanhas do Parque Ecológico Municipal. Um engenheiro foi contratado para projetar a atração e precisa saber quantos metros de cabo de aço necessitará para ligar os topos dessas duas montanhas.
Para facilitar esses cálculos, o engenheiro criou, em seu projeto, os triângulos equiláteros ABC e DEF, pertencentes a um mesmo plano vertical, em que A e D representam os topos das montanhas e os pontos B, C, E e F estão alinhados no plano horizontal. Observe a figura a seguir com a situação descrita:



Sabendo que os triângulos equiláteros ABC e DEF têm, respectivamente, 32 metros e 16 metros de lado; e que a distância entre os pontos C e E é de 23 metros, a medida de cabo de aço (AD), em metros, que o engenheiro encontrará será de
a) 47.
b) 49.
c) 51.
d) 53.

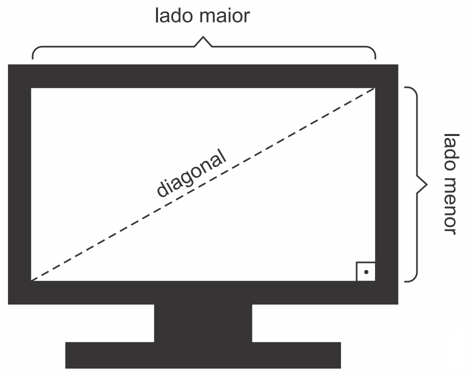
11. **(UFRGS)** Quatro círculos de raio r foram traçados de forma que sejam tangentes entre si dois a dois, como na figura abaixo. As distâncias entre os centros de dois círculos não tangentes entre si têm a mesma medida.



A distância entre os centros de dois círculos não tangentes entre si é

a) 2r.
b) r^2.
c) $r\sqrt{2}$.
d) $2r\sqrt{2}$.
e) $r^2\sqrt{2}$.

12. (UEL) Convenciona-se que o tamanho dos televisores, de tela plana e retangular, é medido pelo comprimento da diagonal da tela, expresso em polegadas. Define-se a proporção dessa tela como sendo o quociente do lado menor pelo lado maior, também em polegadas. Essas informações estão dispostas na figura a seguir.



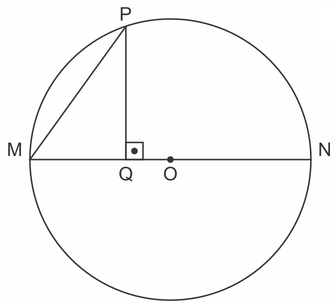
Suponha que Eurico e Hermengarda tenham televisores como dado na figura e de proporção 3/4. Sabendo que o tamanho do televisor de Hermengarda é 5 polegadas maior que o de Eurico, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, quantas polegadas o lado maior da tela do televisor de Hermengarda excede o lado correspondente do televisor de Eurico.

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

13. (ESPCEX (AMAN)) Os centros de dois círculos distam 25 cm. Se os raios desses círculos medem 20 cm e 15 cm, a medida da corda comum a esses dois círculos é

a) 12 cm.
b) 24 cm.
c) 30 cm.
d) 32 cm.
e) 26 cm.

14. (ESPCEX (AMAN)) Na figura, o raio da circunferência de centro O é $\frac{25}{2}$ cm e a corda MP mede 10 cm.

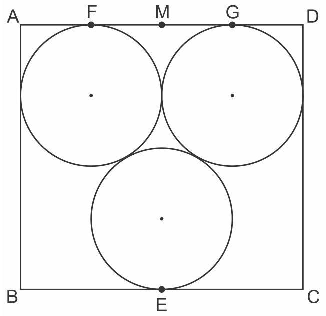


desenho ilustrativo – fora de escala

A medida, em centímetros, do segmento PQ é

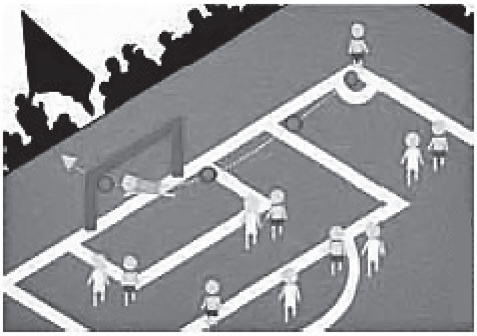
a) $\frac{25}{2}$
b) 10
c) $5\sqrt{21}$
d) $\sqrt{21}$
e) $2\sqrt{21}$

15. (G1 - COTUCA) Na figura a seguir, temos três circunferências de raio 1, tangentes entre si e inscritas no retângulo ABCD. Sabendo que M é ponto do segmento $\overline{AD}$ e que F, G e E são pontos de tangência entre as circunferências e os lados do retângulo, calcule o valor da tangente do ângulo $M\hat{E}F$.

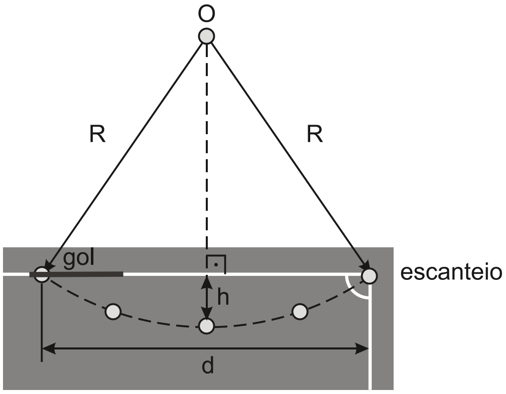


a) $2 + \sqrt{3}$
b) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$
c) $2 - \sqrt{3}$
d) $\sqrt{3} - 1$
e) $\frac{1}{4}$

16. (UNESP) No futebol, um dos gols mais bonitos e raros de se ver é o chamado gol olímpico, marcado como resultado da cobrança direta de um escanteio.



(www.nominuto.com)

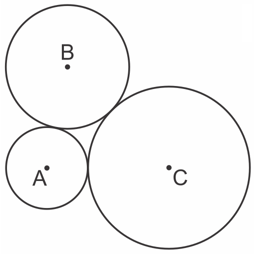


Suponha que neste tipo de gol:

1. A projeção da trajetória da bola descreva um arco de circunferência no plano do gramado;
2. A distância (d) entre o ponto da cobrança do escanteio e o ponto do campo em que a bola entra no gol seja 40 m;
3. A distância máxima (h) da projeção da trajetória da bola à linha de fundo do campo seja 1 m.

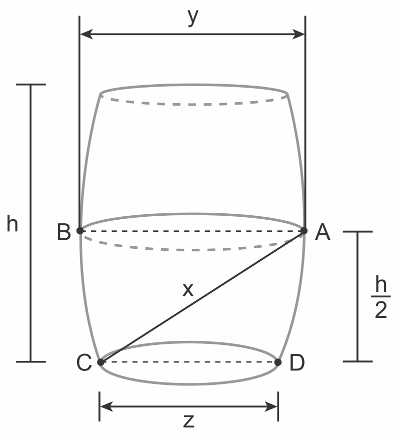
Determine o raio da circunferência (R), em metros, do arco descrito pela trajetória da bola, com uma casa decimal de aproximação.

17. (UNICAMP) A figura abaixo exibe três círculos no plano, tangentes dois a dois, com centros em A, B e C e raios de comprimentos a, b e c, respectivamente.



a) Determine os valores de a, b e c, sabendo que a distância entre A e B é de 5 cm, a distância entre A e C é de 6 cm e a distância entre B e C é de 9 cm.
b) Para a = 2 cm e b = 3 cm, determine o valor de c > b de modo que o triângulo de vértices em A, B e C seja retângulo.

18. (UERJ) Barris de carvalho costumam ser usados para dar sabor a muitos tipos de vinho. Considere um desses barris, representado na ilustração abaixo.



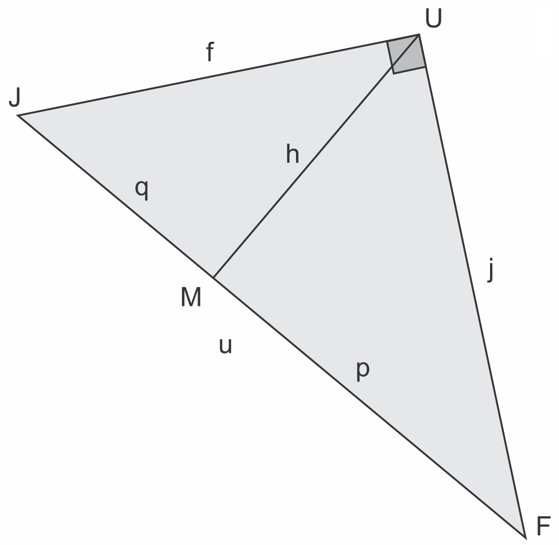
- diâmetro maior $\overline{AB} = y$
- diâmetro menor $\overline{CD} = z$
- distância $\overline{AC} = x$
- altura = h

Um dos métodos usados para calcular o volume aproximado V desses barris, em litros, consiste em medir com uma vareta a distância interna x, em metros, do furo A, na metade da altura do barril, ao ponto C da base, situado no lado oposto. Em seguida, aplica-se fórmula $V = 605 \cdot x^3$ litros.

Admita um barril com as seguintes medidas: $y = 0{,}7$ m; $z = 0{,}5$ m; $h = 1{,}6$ m.

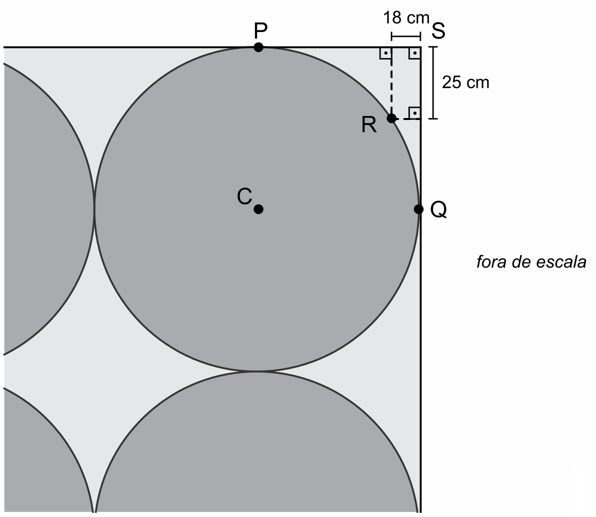
Calcule o volume aproximado, em litros, de vinho que pode ser armazenado nesse barril.

19. (UFJF-PISM 1) Considere o triângulo UJF a seguir, retângulo em U e h a altura relativa à base JF de medida u.



a) Se a área do triângulo UJF é igual a $2\sqrt{2}$ cm^2, $h = \sqrt{6}$ cm e $p = 2$ cm, determine o valor da projeção q.
b) Mostre que $uh = jf$ e $f^2 = uq$.
c) Mostre que $h < f$.

20. (Unifesp) Em um tapete retangular decorado com círculos idênticos, o círculo de centro C tangencia as laterais do tapete em P e Q. O ponto R pertence à circunferência desse círculo e está à distância de 18 cm e de 25 cm das laterais do tapete, como mostra a figura.

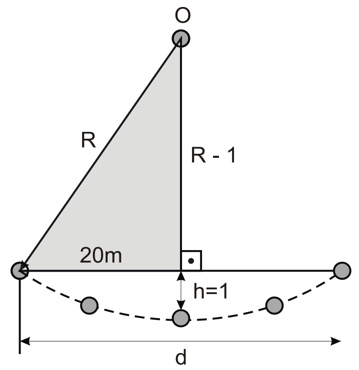


a) Calcule a distância de R até o canto superior do tapete, indicado por S. Deixe a resposta indicada com raiz quadrada.
b) Calcule o raio dos círculos que compõem a decoração do tapete.

Gabarito

1. B	**2.** C	**3.** A	**4.** C	**5.** C
6. C	**7.** A	**8.** B	**9.** B	**10.** B
11. D	**12.** C	**13.** B	**14.** E	**15.** C

16.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo assinalado, temos:

$R^2 = (R - 1)^2 + 20^2$
$R^2 = R^2 - 2 \cdot R + 01 + 400$
$2 \cdot R = 401$
$R = 200{,}5$ m.

17.

a) Tem-se que

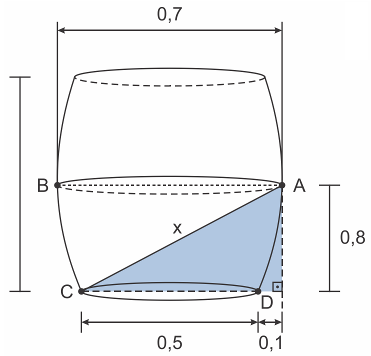
$$\begin{cases} a+b=5 \\ a+c=6 \\ b+c=9 \end{cases} \sim \begin{cases} a+b=5 \\ a-b=-3 \\ c=9-b \end{cases}$$
$$\sim \begin{cases} a=1\,\text{cm} \\ b=4\,\text{cm} \\ c=5\,\text{cm} \end{cases}.$$

b) Se $c > b$, então a hipotenusa do triângulo ABC é BC. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$(c+3)^2 = (c+2)^2 + 5^2 \Leftrightarrow (c+3+c+2)(c+3-c-2) = 25$$
$$\Leftrightarrow 2c+5 = 25$$
$$\Leftrightarrow c = 10\,\text{cm}.$$

18.

De acordo com as informações acima, temos a seguinte figura:



Portanto, o valor de x será dado por:

$$x^2 = (0{,}5 + 0{,}1)^2 + 0{,}8^2$$
$$x = \sqrt{1}$$
$$x = 1\,\text{m}$$

Portanto, o volume do barril será:

$$V = 605 \cdot x^3 = 605 \cdot 1^3 = 605\text{L}$$

19.

a) Sendo $h = \sqrt{6}$ cm e $p = 2$ cm, temos

$$h^2 = p \cdot q \Rightarrow (\sqrt{6})^2 = 2 \cdot q$$
$$\Rightarrow q = 3\,\text{cm}.$$

Por outro lado, vem

$$(UJF) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot u \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow u = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}.$$

Mas $p + q = u$ e $p = 2$ cm implicam em

$$q = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}\,\text{cm}.$$

O que nos leva a uma contradição. Portanto, segue que os dados do problema são inconsistentes.

b) Os triângulos UFJ e MUJ são semelhantes por AA. Em consequência, temos

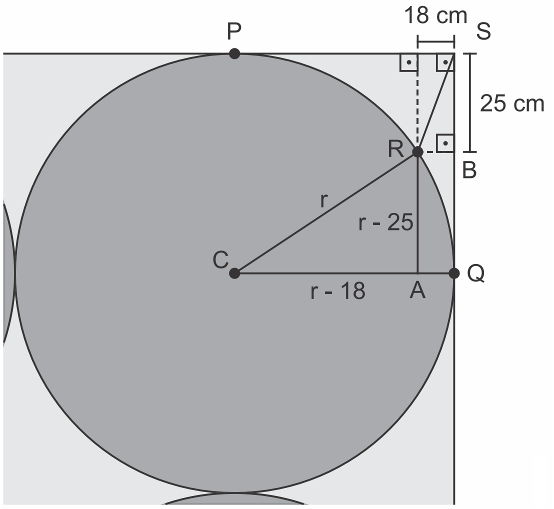
$$\frac{f}{q} = \frac{u}{f} = \frac{j}{h} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} uh = fj \\ f^2 = uq \end{array} \right. .$$

c) Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo MUJ, vem

$$f^2 = h^2 + q^2 \Rightarrow f = \sqrt{h^2 + q^2}$$
$$> \sqrt{h^2}$$
$$= h.$$

20.

Conforme enunciado:



a) Calculando:

$$\overline{RS}^2 = 18^2 + 25^2 \Rightarrow \overline{RS} = \sqrt{949}$$

b) Calculando:

$$r^2 = (r-25)^2 + (r-18)^2 \Rightarrow r^2 = r^2 - 50r + 625 + r^2 - 36r + 324$$

$$0 = r^2 - 86r + 949 \Rightarrow \begin{cases} r = 13 \text{ (não convém, pois } r > 25) \\ \text{ou} \\ r = 73 \end{cases}$$