TEOREMA DAS BISSETRIZES

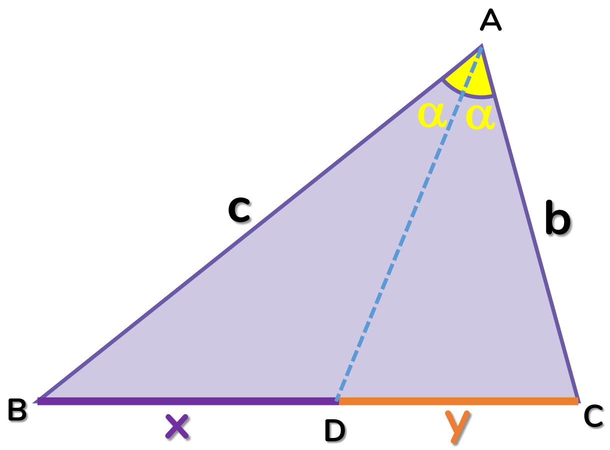
Já estudamos muito sobre triângulos em apostilas anteriores, mas ainda há conteúdos a serem estudados sobre os triângulos. Esta apostila vai tratar mais precisamente sobre os **teoremas da bissetriz interna e externa**.

TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

O teorema da bissetriz interna nos fala o seguinte:

Em um triângulo qualquer, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto a esse ângulo em segmentos de reta proporcionais aos lados adjacentes.

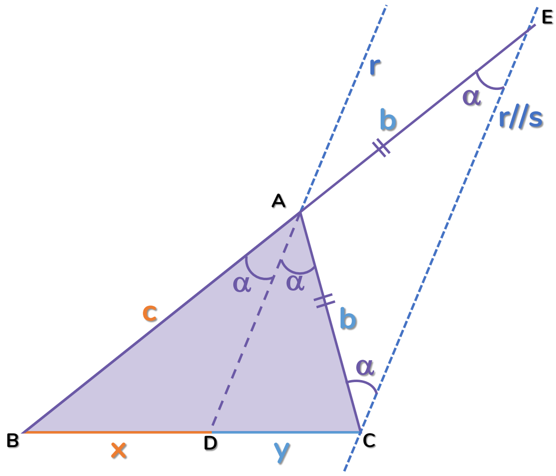
Observe a figura abaixo.



De acordo com o teorema, temos que os segmentos do lado oposto à bissetriz serão proporcionais aos lados adjacentes. Olhando para a figura acima, a razão do lado c pelo lado x (adjacente sobre oposto) será igual à razão do lado b pelo lado y (adjacente sobre oposto). Logo,

$$\frac{c}{x} = \frac{b}{y}$$

Você pode estar se perguntando, “mas como foi possível chegar neste resultado?”. Vamos mostrar rapidamente este fato considerando a figura abaixo.



Ao prolongarmos a reta suporte da bissetriz interna do triângulo ΔABC (reta r) e adicionarmos uma reta s tal que $s//r$ que passe pelo vértice C, vemos que o lado $\overline{AC}$ do triângulo é uma transversal que corta as retas r e s e forma ângulos alternos internos α com elas.

Observamos também que, ao prolongar o segmento $\overline{AB}$ até atingir a reta s, temos outra transversal cortando as retas r e s que forma ângulos correspondentes α (em $\hat{A}$ e $\hat{E}$). Como possuímos dois ângulos congruentes (α) no triângulo ΔACE, sabemos que ele é isósceles.

Observando agora as retas suportes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, percebemos que elas são transversais que cortam as retas r e s. Assim, através do teorema de Tales temos então que:

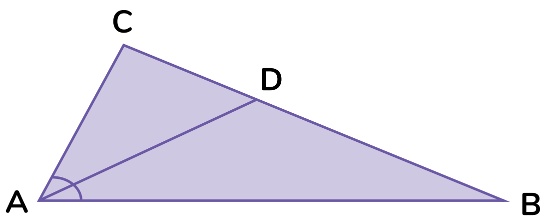
$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$$

E, rearranjando os termos chegamos no teorema da bissetriz interna:

$$\frac{c}{x} = \frac{b}{y}$$

Agora que aprendemos a teoria, vamos fazer um exemplo.

Exemplo: Na figura abaixo, sabemos que $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo Â e divide o segmento oposto em dois segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$, com medidas 5cm e 3cm, respectivamente. O perímetro do triângulo vale 24cm. Quanto vale os outros dois lados do triângulo?



Solução:

O exercício nos forneceu o valor do perímetro do triângulo, de 24 cm. Como perímetro é a soma de todos os lados: o lado $\overline{BC}$ vale 3cm + 5cm = 8 cm, sendo $\overline{AC} = y$ e $\overline{AB} = x$ temos:

$$x + y + 8 = 24$$

$$x + y = 16 \ (1)$$

Como temos informações sobre a bissetriz do triângulo, podemos utilizar o teorema da bissetriz interna para descobrir a segunda equação necessária para encontrar os valores procurados:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$$

$$5x = 3y \ (2)$$

Manipulando algebricamente as equações (1) e (2), encontramos os valores de:

$$x = 6 \text{ e } y = 10$$

Assim, como solução, temos que a medida dos outros dois lados do triângulo são 6cm e 10cm.

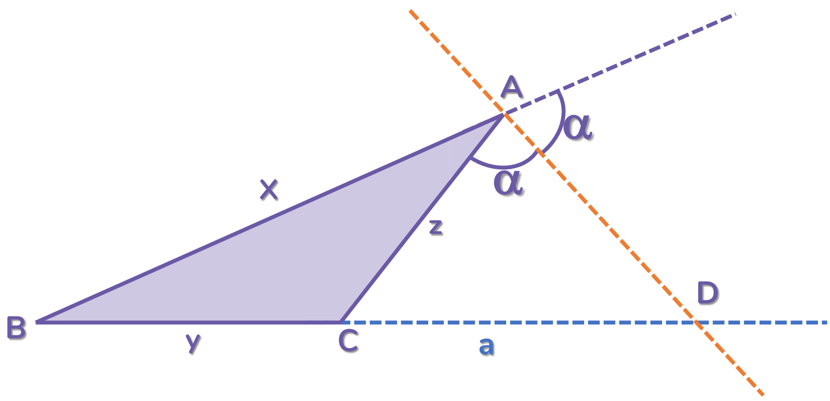
Agora vamos falar sobre o **teorema da bissetriz externa**.

TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA

O teorema da bissetriz externa nos fala o seguinte:

> Em um triângulo qualquer, a reta suporte da bissetriz de um ângulo externo que se encontra com a reta suporte que contém o lado oposto a esse ângulo divide os segmentos do lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados do triângulo.

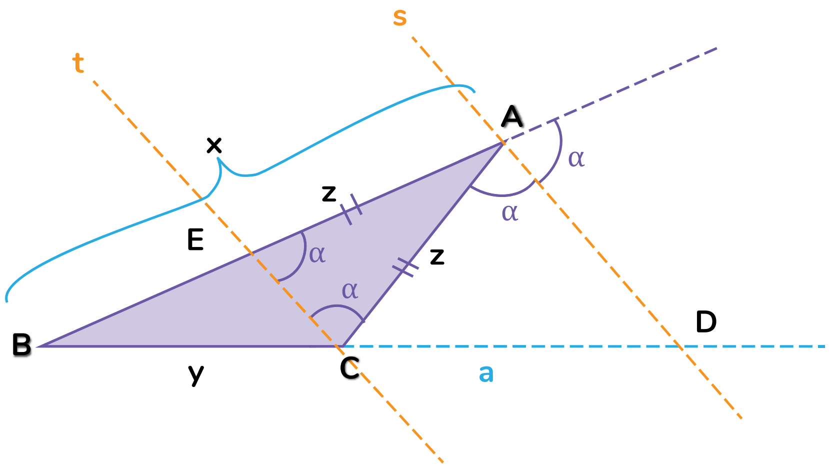
A figura abaixo ilustra esse teorema.



De acordo com o teorema, temos que os segmentos do lado oposto à bissetriz serão proporcionais aos outros dois lados do triângulo. Olhando para a figura, a razão do lado com medida x pelo lado com medida $y + a$ será igual à razão do lado com medida z pelo lado com medida a. Logo,

$$\frac{x}{y+a} = \frac{z}{a}$$

Observe a figura a seguir, a qual usaremos para fazer uma breve dedução deste teorema.



Primeiramente, vamos traçar uma reta t que seja paralela à nossa reta suporte s da bissetriz do ângulo externo. Desta forma, vemos que o ângulo $\mathrm{A\hat{E}C}$ também vale α. Além disso, o ângulo $\mathrm{C\hat{A}D}$ é alterno interno com o ângulo $\mathrm{A\hat{C}E}$, logo, $\mathrm{A\hat{C}E}$ também vale α. Vemos então que o triângulo ΔAEC é isósceles e:

$$\overline{AE} \equiv \overline{AC}$$

Observe que temos duas transversais (retas suportes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$) cortando as retas paralelas t e s. Assim, podemos utilizar o Teorema de Tales para definir relações entre os segmentos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CD}}$$

Porém, como vimos anteriormente, a medida do segmento $\overline{AE}$ é igual à de $\overline{AC}$. Logo:

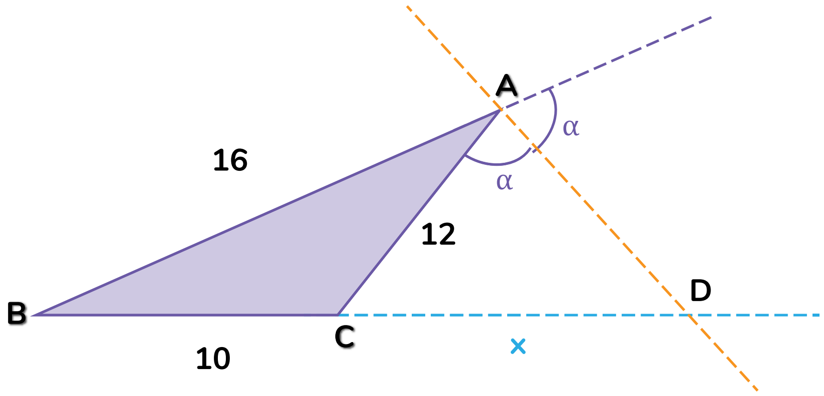
$$\frac{x}{y+a} = \frac{z}{a}$$

Agora que aprendemos a teoria, vamos fazer um exemplo.

Exemplo: Os lados de um triângulo medem 10, 12 e 16 cm. Qual a medida do prolongamento do menor lado, que intercepta a bissetriz do ângulo externo oposto ao menor lado?

Solução:

Podemos construir a seguinte figura baseados nas informações do exemplo:



Assim, aplicando o teorema da bissetriz externa, temos:

$$\frac{16}{10 + x} = \frac{12}{x}$$

$$12 \cdot (10 + x) = 16x$$

$$12x + 120 = 16x$$

$$4x = 120$$

$$x = 30\ cm$$

Assim, temos que a solução do prolongamento do menor lado é igual a 30 cm.

E, com esse exemplo, finalizamos o nosso estudo a respeito dos teoremas das bissetrizes internas e externas de um triângulo.

ANOTAÇÕES