POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Potenciação é, por definição, a multiplicação de um determinado valor por si mesmo uma certa quantidade de vezes, desde que essa quantidade seja um número natural. Em outras palavras, sendo a um número (até aqui real) e $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

Essa mesma definição é utilizada agora com $a \in \mathbb{C}$, tendo como única diferença a quantidade de contas que é necessário ser realizado. Por outro lado, a potenciação de números complexos na forma trigonométrica é mais simples do que na forma algébrica e esse será o nosso foco neste tópico.

Seja $z = \rho(cos\theta + i\, sen\theta)$, a potência z^n será dada por:

$$z^n = \rho^n\,(cos(n \cdot \theta) + i\, sen(n \cdot \theta)).$$

Essa fórmula é conhecida como 1ª fórmula de Moivre, formulada pelo francês Abraham de Moivre. O desenvolvimento dessa fórmula segue uma lógica bem simples, basta aplicar o conceito de potência no número complexo na forma trigonométrica e utilizar relações trigonométricas entre seno e cosseno. Vamos utilizar da fórmula para calcular z^2 e w^3 e para $z = 1 + i$ e $w = 4i$. Primeiro devemos determinar sua representação polar, iniciamos por calcular o módulo de cada um deles:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|w| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$$

Na sequência, devemos determinar o valor de θ de modo que $cos\,\theta = \frac{a}{\rho}$ e $sen\,\theta = \frac{b}{\rho}$. Para o número $z = 1 + i$ temos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 45° = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, o valor de θ cujo $cos\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e o $sen\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$. Logo,

$$z = \sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Para o número $w = 4i$ temos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{0}{4} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{4}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \operatorname{sen}\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta = 90° = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, o valor de θ cujo $cos\theta = 0$ e o $sen\theta = 1$ é $\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$. Logo,

$$w = 4 \cdot (\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) = 4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

Agora que determinamos suas representações polares, calcularemos suas potências. Para z:

$$z^2 = \left[\sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)\right]^2$$

$$z^2 = \sqrt{2}^2 \cdot (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)^2$$

$$z^2 = \sqrt{2}^2 \cdot (\cos(2 \cdot 45°) + i \operatorname{sen}(2 \cdot 45°))$$

$$z^2 = 2 \cdot (\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$$

Para w, temos:

$$w^3 = \left[4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\right]^3$$

$$w^3 = 4^3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^3$$

$$w^3 = 4^3 \cdot \left(\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$w^3 = 64 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

A ideia aqui é a mesma que conhecemos, para calcular $\sqrt[n]{z}$ precisamos encontrar um número w, de modo que $w^n = z$. Para conseguirmos essas respostas, recorreremos ao que é conhecido como 2ª fórmula de Moivre. Por meio dela é possível calcular a raiz de um número complexo que esteja representado na forma trigonométrica. Seja então $z = \rho(cos\theta + i\ sen\theta)$, a raiz $\sqrt[n]{z}$ será dada por:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

com $k = \{0, 1, 2, \dots, n{-}1\}$.

Suponha que precisamos descobrir as raízes de $z^4 + 16 = 0$, ou seja, quais são os números que elevados à quarta potência resultam em -16 $\left(z = \sqrt[4]{-16}\right)$. Para utilizarmos a segunda fórmula de Moivre, temos que encontrar a forma trigonométrica do número em questão, uma vez que ele está representado em sua forma algébrica. Deste modo, temos que:

$$w = -16 \Rightarrow \ \rho = |w| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16$$

Na sequência, devemos determinar o valor de θ de modo que $cos\,\theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $sen\,\theta = \dfrac{b}{\rho}$. Assim,

$$\begin{cases}\cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{b}{\rho}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos\theta = \dfrac{-16}{16} \\ \mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{0}{16}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos\theta = -1 \\ \mathrm{sen}\,\theta = 0\end{cases} \Rightarrow \ \theta = 180° = \pi$$

Portanto, o valor de $\rho = 16$ e $\theta = \pi$. Logo,

$$w = 16 \cdot (cos\pi + i\ sen\pi).$$

Agora que determinamos a representação trigonométrica do número complexo, iremos utilizar a fórmula de Moivre para os valores de $\rho = 16$ e $\theta = \pi$. Resultando em:

$$\sqrt[4]{w} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right)$$

Para cada valor de k, obteremos uma raiz w_k. Assim, temos:

$k = 0$:

$$w_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right)\right)$$

$$w_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$k = 1$:

$$w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4}\right)\right)$$

$$w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$k = 2$:

$$w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4}\right)\right)$$

$$w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

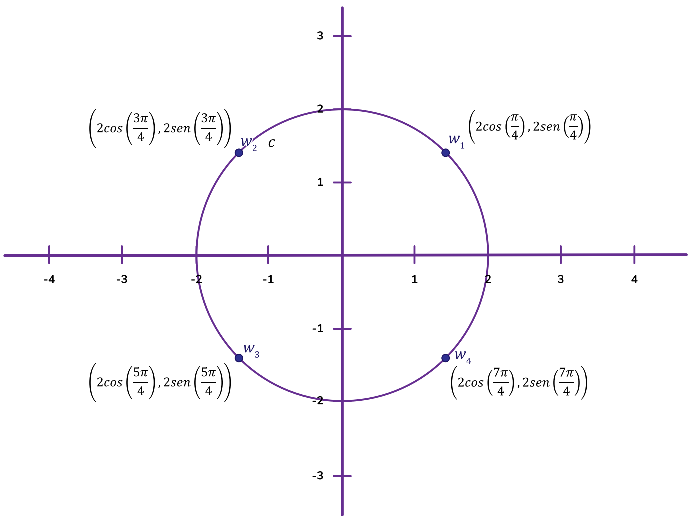
$k = 3$:

$$w_3 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4}\right)\right)$$

$$w_3 = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$$

Portanto, as raízes de $z = \sqrt[4]{-16}$ são w_0, w_1, w_2 e w_3.

Uma característica muito importante das raízes de números complexos é que suas soluções estão sempre sobre uma circunferência no plano Argand-Gauss. No caso anterior, as raízes estarão sobre uma circunferência de raio 2, pois $\sqrt[n]{\rho} = 2$ e ele sempre determina qual será o raio da circunferência sobre a qual as raízes estão dispostas. A imagem abaixo mostra o resultado:



Para posicionar as raízes no plano, basta lembrar que todo ponto no plano Argand-Gauss é da forma (a, b) e que $cos\theta = \frac{a}{\rho}$ e $sen\theta = \frac{b}{\rho}$, ou seja $a = \rho\ cos\theta$ e $b = \rho\ sen\theta$. Deste modo, quando estamos trabalhando com a representação trigonométrica dos números complexos, os pontos passam a ser da forma $(\rho\ cos\theta, \rho\ sen\theta)$. Assim, resta representar as raízes no plano cartesiano e traçar o círculo.

ANOTAÇÕES

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@biologiatotaloficial
@Prof_jubilut
biologiajubilut