



# MATEMÁTICA

com Valdemar Santos

Geometria Plana 1

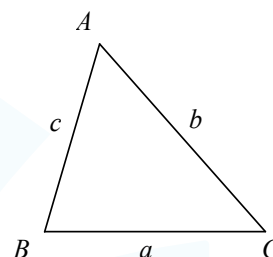
# GEOMETRIA PLANA 1

## TRIÂNGULOS – CONCEITOS, TEOREMA DE PITÁGORAS E TRIÂNGULO EQUILÁTERO E TRIÂNGULOS ESPECIAIS

### DESIGUALDADE TRIANGULAR

(Condição de existência de um triângulo)

*“Cada lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois.”*

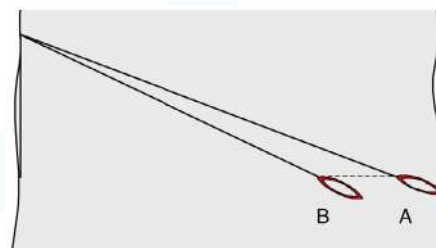


Esta condição pode ser resumida numa única desigualdade:  $|b - c| < a < b + c$

### Vamos praticar

**1. (UFPE)** Um barco está sendo rebocado para a margem de um porto por um cabo de aço. Inicialmente, o barco está no ponto A da ilustração, quando o cabo tem comprimento de 100m. Após puxar o cabo de 20m, o barco ocupa a posição B. Nessas condições, podemos afirmar que a distância AB é:

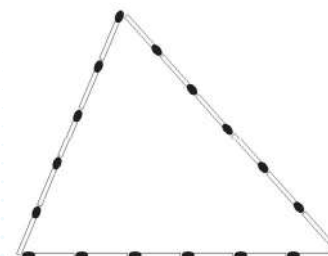
- maior que 20m.
- igual a 20m.
- igual a 19m
- igual a 18m.
- menor que 18m.



**2. (ENEM)** Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.

A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

- 3
- 5
- 6
- 8
- 10





## CLASSIFICAÇÃO DE UM TRIÂNGULO

### A) QUANTO AOS LADOS:

- ▶ Equilátero (3 lados iguais)
- ▶ Isósceles (2 lados iguais)
- ▶ Escaleno (3 lados diferentes)

### B) QUANTO AOS ÂNGULOS

- ▶ Acutângulo (3 ângulos agudos)
- ▶ Retângulo (1 ângulo reto)
- ▶ Obtusângulo (1 ângulo obtuso)

## RECONHECIMENTO DA NATUREZA DE UM TRIÂNGULO

Seja  $a$  o maior lado de um triângulo  $ABC$ . Pela relação

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

(lei dos cossenos)

deduzimos que:

$\Delta ABC$  é acutângulo  $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$ .

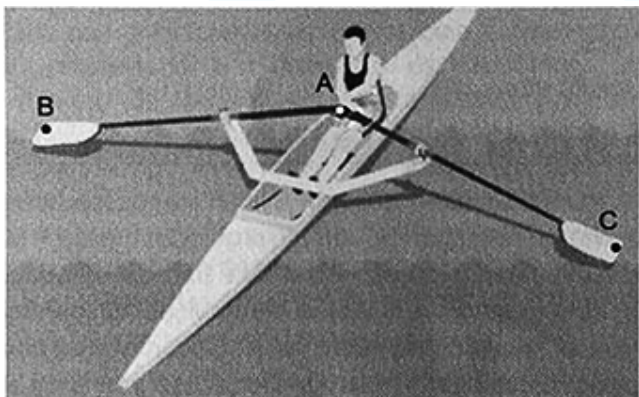
$\Delta ABC$  é retângulo  $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ .

$\Delta ABC$  é obtusângulo  $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$ .



### Vamos praticar

- 1. (ENEM)** O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.



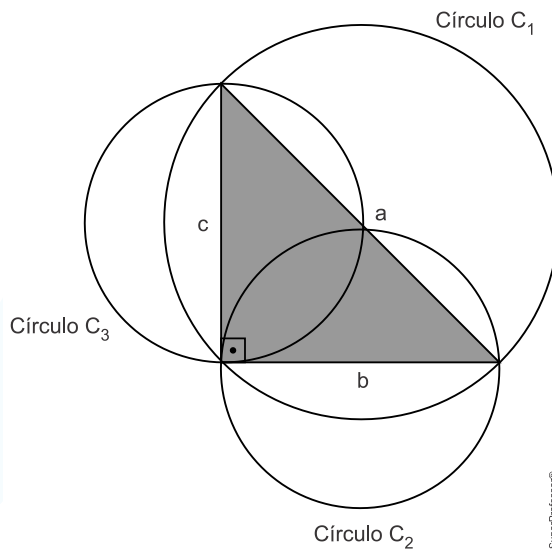
Disponível em: [www.remobrasil.com](http://www.remobrasil.com). Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto  $A$  e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos  $B$  e  $C$ . Esses três pontos formam um triângulo  $ABC$  cujo ângulo  $B\hat{A}C$  tem medida de  $170^\circ$ .

O tipo de triângulo com vértices nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , no momento em que o remador está nessa posição, é

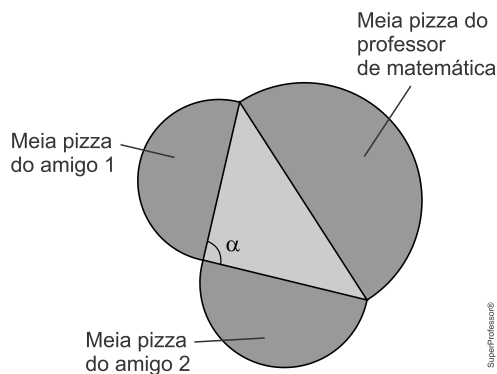
- retângulo escaleno.
- acutângulo escaleno.
- acutângulo isósceles.
- obtusângulo escaleno.
- obtusângulo isósceles.

- 2. (ENEM)** Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas dos lados de um triângulo retângulo, tendo  $a$  como medida da hipotenusa. Esses valores  $a$ ,  $b$  e  $c$  são, respectivamente, os diâmetros dos círculos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , como apresentados na figura.



Observe que essa construção assegura, pelo teorema de Pitágoras, que  $\text{área } C_1 = \text{área } (C_2) + \text{área } (C_3)$ .

Um professor de matemática era conhecedor dessa construção e, confraternizando com dois amigos em uma pizzaria onde são vendidas pizzas somente em formato de círculo, lançou um desafio: mesmo sem usar um instrumento de medição, poderia afirmar com certeza se a área do círculo correspondente à pizza que ele pedisse era maior, igual ou menor do que a soma das áreas das pizzas dos dois amigos. Assim, foram pedidas três pizzas. O professor as dividiu ao meio e formou um triângulo com os diâmetros das pizzas, conforme indicado na figura.

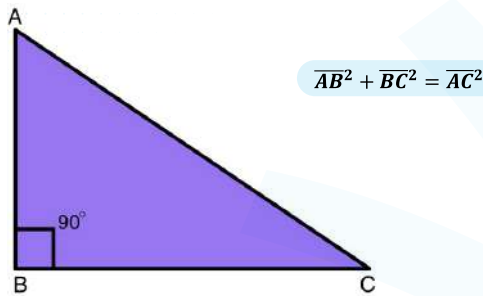


A partir da medida do ângulo  $\alpha$ , o professor afirmou que a área de sua pizza é maior do que a soma das áreas das outras duas pizzas.

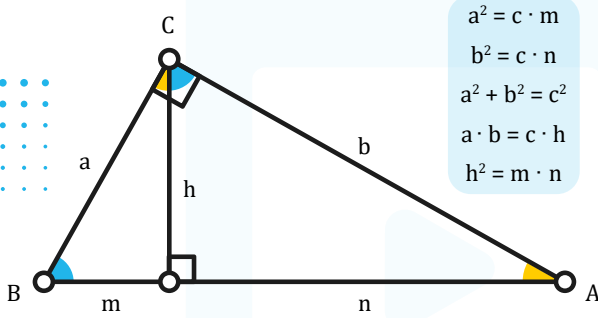
A área da pizza do professor de matemática é maior do que a soma das áreas das outras duas pizzas, pois

- a)  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
- b)  $\alpha = 90^\circ$
- c)  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
- d)  $\alpha = 180^\circ$
- e)  $180^\circ < \alpha < 360^\circ$

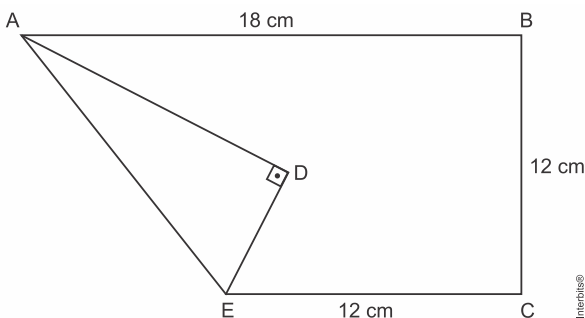
## O TRIÂNGULO RETÂNGULO E O TEOREMA DE PITÁGORAS



## RELAÇÕES MÉTRICAS



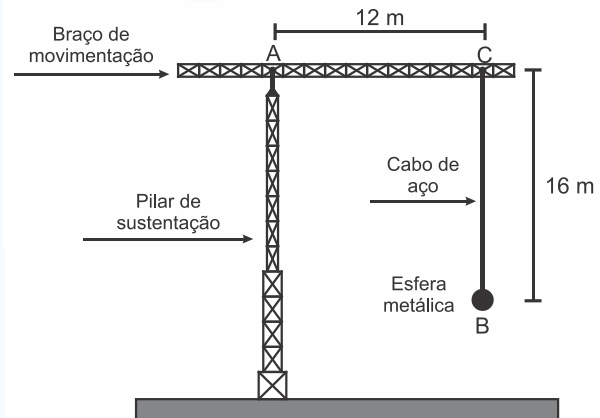
**1. (ENEM 2019)** Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do *origami* (*ori* = dobrar; *kami* = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



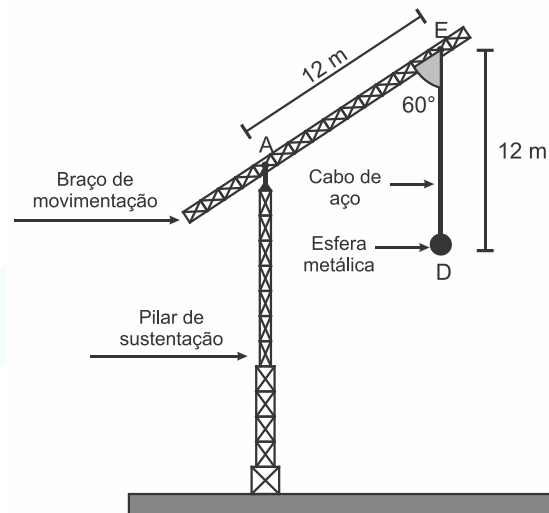
Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

- a)  $2\sqrt{22}$  cm
- b)  $6\sqrt{3}$  cm
- c) 12 cm
- d)  $6\sqrt{5}$  cm
- e)  $12\sqrt{2}$  cm

**2. (ENEM DIGITAL 2020)** Considere o guindaste mostrado nas figuras, em duas posições (1 e 2). Na posição 1, o braço de movimentação forma um ângulo reto com o cabo de aço CB que sustenta uma esfera metálica na sua extremidade inferior. Na posição 2, o guindaste elevou seu braço de movimentação e o novo ângulo formado entre o braço e o cabo de aço ED, que sustenta a bola metálica, é agora igual a  $60^\circ$ .



Posição 1



Posição 2

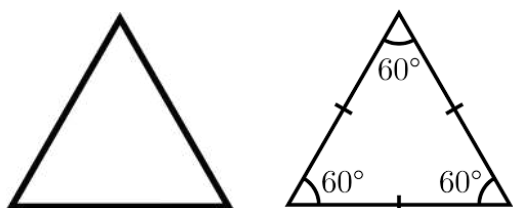
Assuma que os pontos A, B e C, na posição 1, formam o triângulo  $T_1$  e que os pontos A, D e E, na posição 2, formam o triângulo  $T_2$ , os quais podem ser classificados em obtusângulo, retângulo ou acutângulo, e também em equilátero, isósceles ou escaleno.

Segundo as classificações citadas, os triângulos  $T_1$  e  $T_2$  são identificados, respectivamente, como

- a) retângulo escaleno e retângulo isósceles.
- b) acutângulo escaleno e retângulo isósceles.
- c) retângulo escaleno e acutângulo escaleno.
- d) acutângulo escaleno e acutângulo equilátero.
- e) retângulo escaleno e acutângulo equilátero

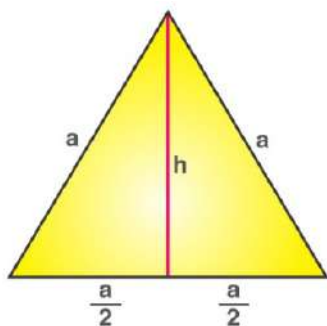
## O TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Um triângulo é classificado como equilátero quando ele possui as medidas dos três lados iguais, assim, conseqüentemente, os seus ângulos internos também possuem a mesma medida. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a  $180^\circ$  e os ângulos são iguais, ao dividirmos  $180^\circ$  por 3, chegaremos a ângulos de  $60^\circ$ .



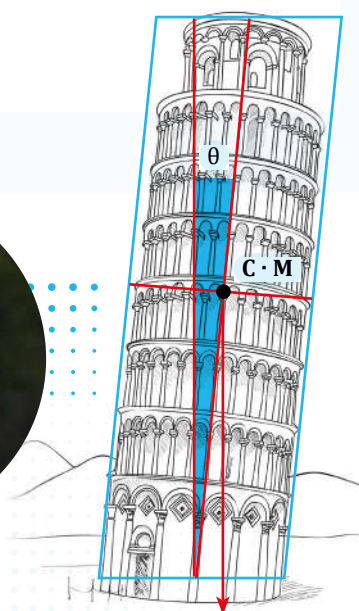
## ALTURA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Dado o triângulo ABC, vamos estabelecer uma expressão geral para o cálculo da altura.



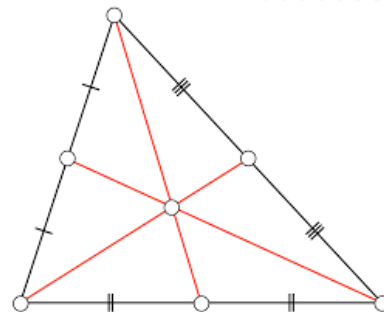
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

## BARICENTRO - CENTRO DE GRAVIDADE

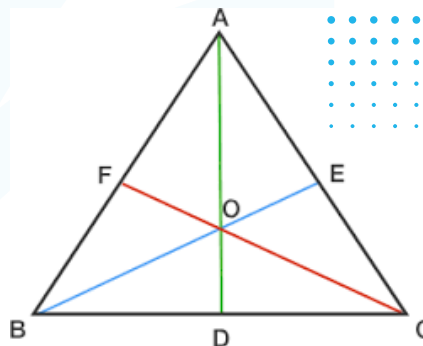


Em um triângulo qualquer, o baricentro está situado no ponto de encontro de suas medianas

O Baricentro divide a mediana em duas partes com comprimentos na razão 2:1

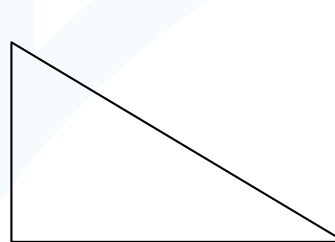


No triângulo equilátero, os principais pontos notáveis coincidem (incentro, ortocentro, baricentro e circuncentro). Com isso, podemos lançar mão da ideia de que o baricentro, no triângulo equilátero, divide sua altura na razão 2:1. Ou seja, a menor parte vale  $h/3$  e a maior vale  $2h/3$ .

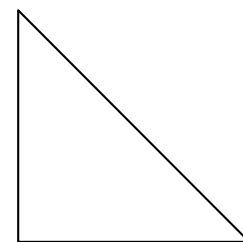


## TRIÂNGULOS ESPECIAIS

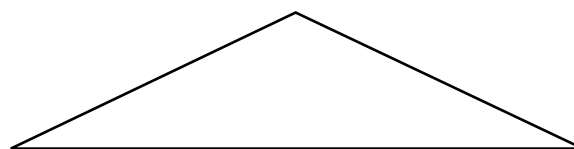
### RETÂNGULO E ESCALENO



Retângulo e escaleno



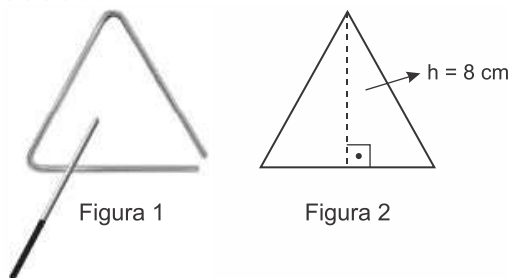
Retângulo e isósceles



Obtusângulo e isósceles

**Vamos praticar**

**1. (ENEM 2021)** O instrumento de percussão conhecido como triângulo é composto por uma barra fina de aço, dobrada em um formato que se assemelha a um triângulo, com uma abertura e uma haste, conforme ilustra a Figura 1.



Uma empresa de brindes promocionais contrata uma fundição para a produção de miniaturas de instrumentos desse tipo. A fundição produz, inicialmente, peças com o formato de um triângulo equilátero de altura  $h$ , conforme ilustra a Figura 2. Após esse processo, cada peça é aquecida, deformando os cantos, e cortada em um dos vértices, dando origem à miniatura. Assuma que não ocorram perdas de material no processo de produção, de forma que o comprimento da barra utilizada seja igual ao perímetro do triângulo equilátero representado na Figura 2.

Considere 1,7 como valor aproximado para  $\sqrt{3}$ .

Nessas condições, o valor que mais se aproxima da medida do comprimento da barra, em centímetro, é

- a) 9,07
- b) 13,60
- c) 20,40
- d) 27,18
- e) 36,24

**2. (ENEM 2017)** A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

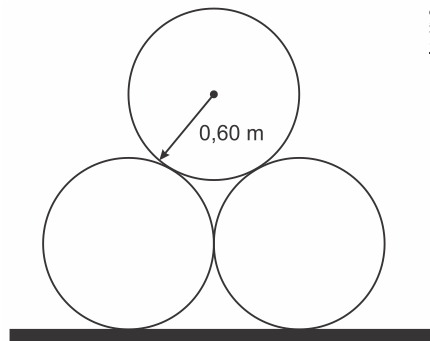
**Caminhão entala em viaduto no Centro**

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.



Disponível em: [www.caminhoes-e-carretas.com](http://www.caminhoes-e-carretas.com). Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



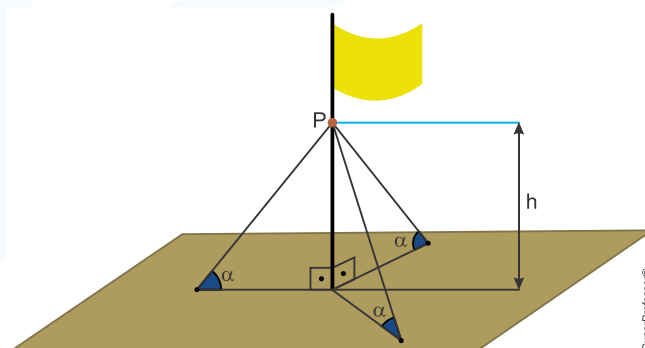
A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere 1,7 como aproximação para  $\sqrt{3}$ .

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

- a) 2,82
- b) 3,52
- c) 3,70
- d) 4,02
- e) 4,20

**3. (ENEM 2023)** O mastro de uma bandeira foi instalado perpendicularmente ao solo em uma região plana. Devido aos fortes ventos, três cabos de aço, de mesmo comprimento, serão instalados para dar sustentação ao mastro. Cada cabo de aço ficará perfeitamente esticado, com uma extremidade num ponto P do mastro, a uma altura  $h$  do solo, e a outra extremidade, num ponto no chão, como mostra a figura.



Os cabos de aço formam um ângulo  $\alpha$  com o plano do chão e instalação:

Por medida de segurança, há apenas três opções de instalação:

- opção I:  $h = 11\text{ m}$  e  $\alpha = 30^\circ$
- opção II:  $h = 12\text{ m}$  e  $\alpha = 45^\circ$
- opção III:  $h = 18\text{ m}$  e  $\alpha = 60^\circ$

A opção a ser escolhida é aquela em que a medida dos cabos seja a menor possível.

Qual será a medida, em metro, de cada um dos cabos a serem instalados?

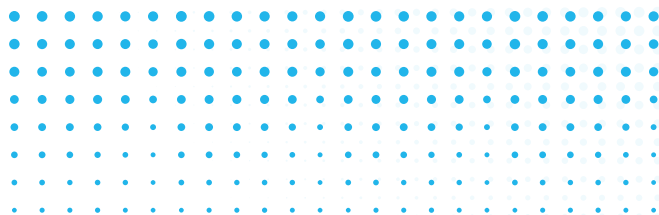
- a)  $\frac{22\sqrt{3}}{3}$
- b)  $11\sqrt{2}$
- c)  $12\sqrt{2}$
- d)  $12\sqrt{3}$
- e) 22

## GABARITO

1. [D]

2. [D]

3. [C]



**Anote aqui**





*Estamos juntos nessa!*



CURSO  
**FERNANDA PESSOA**  
ONLINE

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS.