

1. Centro de gravidade

Vamos demonstrar a seguinte propriedade:

Se a aceleração da gravidade \vec{g} é a mesma em qualquer ponto de um corpo, seu centro de gravidade G coincide com seu centro de massa C .

Consideremos um sistema de n partículas de massas:

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

e pesos:

$$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$$

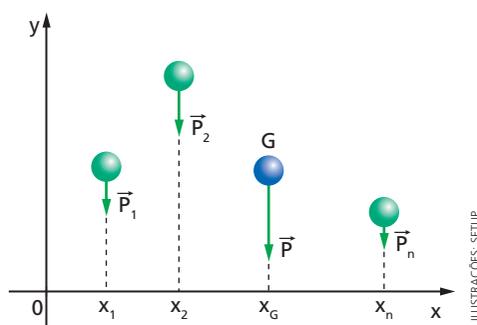
Sejam

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

e

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n$$

Se esse sistema está numa região em que \vec{g} é constante, então todos os pesos deverão ter a mesma direção e sentido.



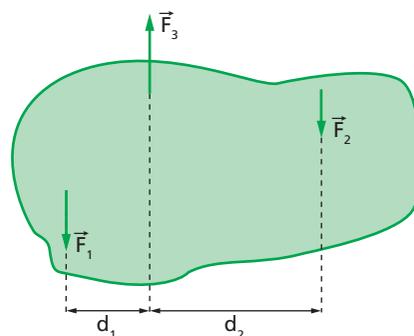
O centro de gravidade G é o ponto que tem a seguinte propriedade: aplicando-se o peso total \vec{P} em G , seu torque deve ser igual à soma dos torques dos pesos de cada partícula. Tomando torques em relação a O :

$$\begin{aligned} M_p &= M_{p_1} + M_{p_2} + \dots + M_{p_n} \Rightarrow P \cdot x_G = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n \Rightarrow \\ \Rightarrow Mg x_G &= m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + \dots + m_n g x_n \Rightarrow x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{M} \quad (1) \end{aligned}$$

Mas, como vimos no capítulo 22, a equação (1) nos dá a abscissa x_C do centro de massa do sistema, isto é, $x_G = x_C$. Procedendo do mesmo modo, veremos que o mesmo ocorre para a ordenada y de C e para a cota z de C .

2. Teorema das três forças

Consideremos um corpo rígido em equilíbrio sob a ação de apenas três forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 e \vec{F}_3 . É fácil perceber que uma das possibilidades é que as três forças sejam paralelas, como no exemplo a seguir:



$$\begin{aligned} F_3 &= F_1 + F_2 \\ F_1 d_1 &= F_2 d_2 \end{aligned}$$

Figura 1.

Suponhamos agora que duas delas (\vec{F}_1 e \vec{F}_2) tenham retas suportes que se cruzam em um ponto D , e a terceira (\vec{F}_3) tenha uma direção qualquer (fig. 2), de modo que a reta suporte de \vec{F}_3 está a uma distância d do ponto D .

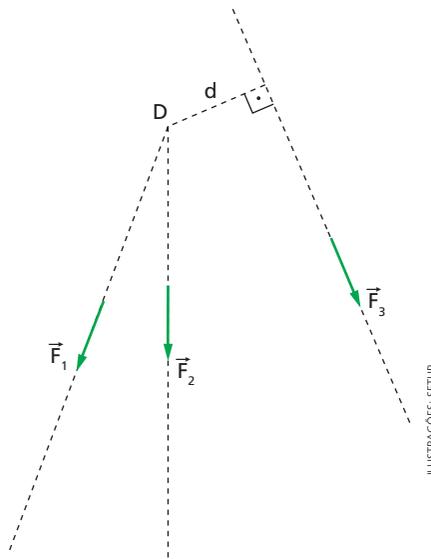


Figura 2.

Tomemos torques em relação ao ponto D . Se o corpo está em equilíbrio, a soma dos torques deve ser nula:

$$M_{F_1} + M_{F_2} + M_{F_3} = 0$$

$$F_1(0) + F_2(0) + F_3 \cdot d = 0 \Rightarrow F_3 \cdot d = 0 \Rightarrow d = 0$$

Portanto, a reta suporte de \vec{F}_3 também passa por D , isto é, as três retas suportes são concorrentes em um único ponto D .

3. Conservação do momento angular

Momento de inércia

Consideremos uma partícula de massa m em movimento circular não uniforme, sendo r o raio da trajetória (fig. 3). A força resultante \vec{F} tem uma componente tangencial \vec{F}_t e uma componente centrípeta \vec{F}_n . Num determinado instante, a partícula tem aceleração escalar α e aceleração angular γ , e vale a equação:

$$\alpha = \gamma \cdot r \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\alpha}{r} \quad (1)$$

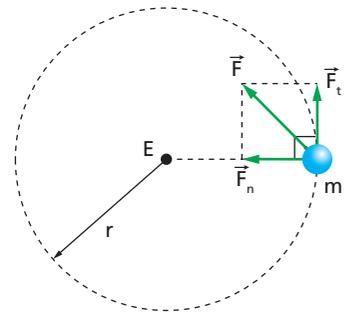


Figura 3.

De acordo com a Segunda Lei de Newton, temos:

$$F_t = m \cdot \alpha = m \cdot \gamma \cdot r \quad (2)$$

Tomando como polo o centro E da circunferência, o torque de \vec{F}_n é nulo. Portanto, o torque da força resultante é igual ao torque de \vec{F}_t :

$$M_F = M_{F_t} = F_t \cdot r \quad (3)$$

Introduzindo (2) em (3), temos:

$$M_F = F_t \cdot r = (m \gamma r)r \Rightarrow M_F = (mr^2) \gamma \quad (4)$$

A equação (4) é análoga à equação da Segunda Lei de Newton, com o termo mr^2 representando um tipo de inércia, chamado **inércia rotacional** ou **momento de inércia**, sendo representado por I :

$$I = mr^2 \quad (5)$$

Desse modo, a equação ④ pode ser escrita:

$$M_F = I\gamma \quad \text{⑥}$$

Consideremos agora um corpo extenso formado por n partículas, de massas:

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

girando com aceleração angular γ em torno de um eixo E , de modo que as distâncias das partículas ao eixo são:

$$r_1, r_2, \dots, r_n$$

Os torques resultantes em cada partícula são:

$$M_1, M_2, \dots, M_n$$

sendo:

$$M_1 = (m_1 r_1^2)\gamma$$

$$M_2 = (m_2 r_2^2)\gamma$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$M_n = (m_n r_n^2)\gamma$$

Portanto, o torque total M sobre o corpo é:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = (m_1 r_1^2)\gamma + (m_2 r_2^2)\gamma + \dots + (m_n r_n^2)\gamma = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2)\gamma$$

Assim, o momento de inércia do corpo é dado por:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 \quad \text{⑦}$$

e:

$$M = I \cdot \gamma \quad \text{⑧}$$

Na realidade, o número de partículas de um corpo extenso tende a infinito e a soma que aparece na equação ⑦ torna-se uma soma com infinitos termos que só pode ser efetuada com o auxílio do Cálculo Integral.

O torque total M sobre o corpo é a soma do torque total das forças internas com o torque total das forças externas. Mas o torque total das forças internas é nulo, pois estas forças aparecem como pares de forças opostas. Portanto, o torque total sobre o corpo é igual ao torque total das forças externas.

Exemplo 1

Duas partículas A e B , de massas $m_A = 3,0 \text{ kg}$ e $m_B = 5,0 \text{ kg}$, estão nas extremidades de uma barra de massa desprezível cujo comprimento é $4,0 \text{ m}$. Vamos determinar o momento de inércia do sistema quando:

- ele gira em torno de um eixo E_1 , perpendicular à barra e passando pelo seu ponto médio (fig. 4);
- ele gira em torno de um eixo E_2 , ortogonal à barra, como ilustra a figura 5.

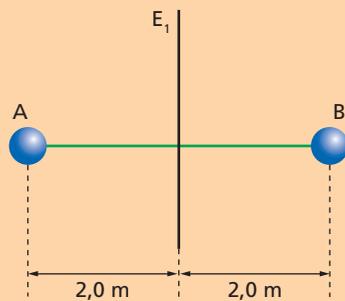


Figura 4.

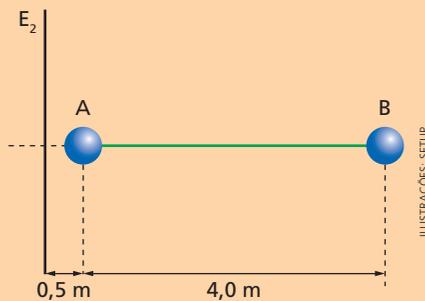


Figura 5.

$$\text{a) } I = m_A r_A^2 + m_B r_B^2 = (3,0 \text{ kg})(2,0 \text{ m})^2 + (5,0 \text{ kg})(2,0 \text{ m})^2 = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow I = 32 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\text{b) } I = m_A r_A^2 + m_B r_B^2 = (3,0 \text{ kg})(0,5 \text{ m})^2 + (5,0 \text{ kg})(4,5 \text{ m})^2 = 0,75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 101,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow I = 102 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

O exemplo 1 ilustra dois fatos importantes. Em primeiro lugar, o momento de inércia de um sistema depende do eixo de rotação. Em segundo lugar, no caso *b*, vemos que a partícula próxima ao eixo contribui pouco para o momento de inércia total. A razão disso é que a distância (*r*) aparece elevada ao quadrado, enquanto a massa (*m*) está elevada à primeira potência.

Na tabela a seguir apresentamos alguns momentos de inércia, obtidos por meio do Cálculo Integral.

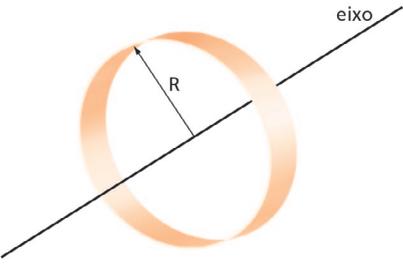
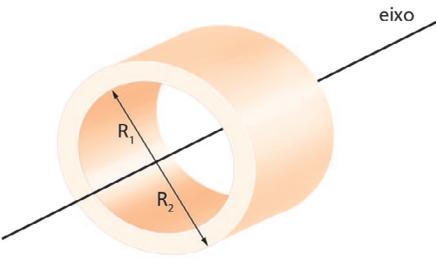
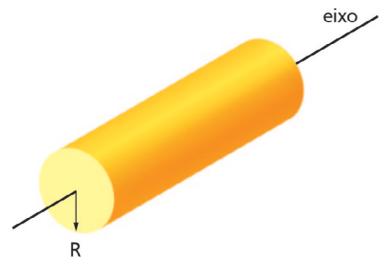
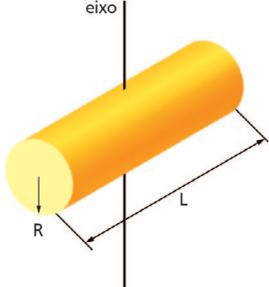
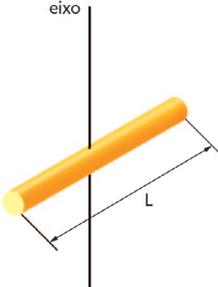
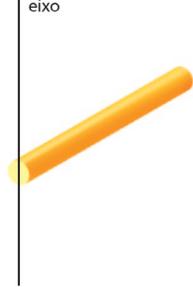
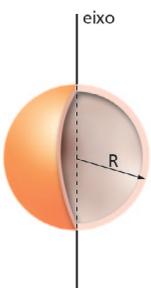
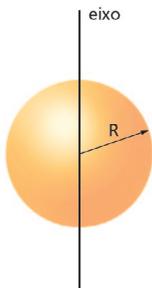
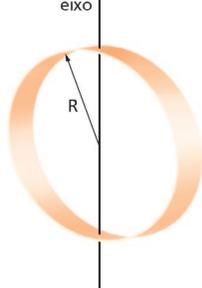
 <p>$I = MR^2$ casca cilíndrica fina</p>	 <p>$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ casca cilíndrica grossa</p>	 <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$ cilindro maciço</p>
 <p>$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ cilindro maciço</p>	 <p>$I = \frac{1}{12}ML^2$ cilindro maciço muito fino ($R \cong 0$)</p>	 <p>$I = \frac{1}{3}ML^2$ cilindro maciço muito fino ($R \cong 0$)</p>
 <p>$I = \frac{2}{3}MR^2$ casca esférica fina</p>	 <p>$I = \frac{2}{5}MR^2$ esfera maciça</p>	 <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$ casca cilíndrica fina</p>

Tabela 1. Alguns momentos de inércia.

Raio de giração

Consideremos um corpo de massa *M*, girando em torno de um eixo *E*, com momento de inércia *I*. Imaginemos toda a massa do corpo concentrada em um ponto situado a uma distância *k* de *E*, de modo que essa “partícula imaginária” tenha o mesmo momento de inércia do corpo:

$$I = Mk^2 \quad (9)$$

A distância *k* é chamada **raio de giração** do corpo em relação ao eixo *E*.

Por exemplo, consultando a tabela 1, observamos que o momento de inércia de uma esfera de raio R em relação a um eixo que passa por seu centro é:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Portanto, o raio de giração (k) da esfera em relação a esse eixo é calculado por:

$$\frac{2}{5}MR^2 = Mk^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2}{5}} R$$

Energia cinética de rotação

Consideremos uma partícula de massa m em movimento circular, sendo R o raio da trajetória. Se, num determinado instante, sua velocidade escalar é v , sua energia cinética é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

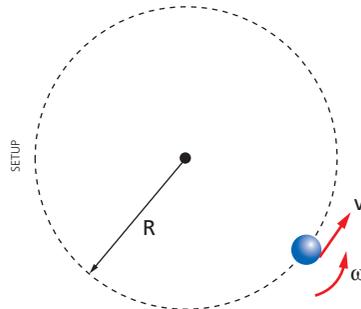


Figura 6.

Lembrando que a relação entre a velocidade escalar v e a velocidade angular ω é:

$$v = \omega \cdot R$$

a energia cinética pode ser calculada por:

$$E_c = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}(mR^2)\omega^2 \quad (10)$$

Mas mR^2 é o momento de inércia I da partícula. Portanto, a equação (10) transforma-se em:

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (11)$$

Seguindo o mesmo raciocínio usado no cálculo do torque resultante, concluímos que a equação (11) vale também para um corpo extenso.

Exemplo 2

Vamos determinar a energia cinética de rotação de um cilindro maciço, de massa $M = 30$ kg e raio da base $R = 0,10$ m, que gira em torno de um eixo que passa pelos centros de suas bases, com velocidade angular $\omega = 8,0$ rad/s.

Consultando a tabela 1, vemos que o momento de inércia do cilindro, para esse eixo, é:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(30 \text{ kg})(0,10 \text{ m})^2 \Rightarrow I = 0,15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Assim:

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(0,15 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(8,0 \text{ rad/s})^2 \Rightarrow E_c = 4,8 \text{ joules}$$

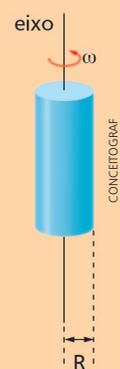


Figura 7.

Exercícios

1. Na figura *a* representamos um sistema já analisado por nós no capítulo 13, considerando a polia como tendo massa desprezível. Agora vamos analisar o sistema supondo que a polia seja um disco (cilindro) homogêneo, de raio $R = 0,10$ m e massa $M = 4,0$ kg. São dados: $m_A = 12$ kg; $m_B = 6,0$ kg; $g = 10$ m/s²; $h_A = 6$ m.

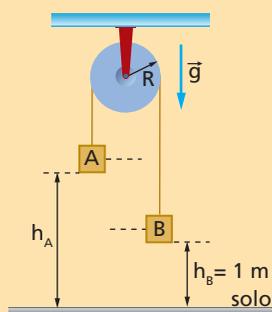


Figura a.

ILUSTRAÇÕES: MARCO A. SISMOTTO

Desprezando o atrito da polia com o eixo, admitindo que o fio seja ideal e supondo que o sistema tenha sido abandonado na posição da figura, determine:

- o módulo das acelerações dos blocos;
- o módulo da aceleração angular da polia;
- a velocidade de A ao atingir o solo.

Resolução:

Neste caso, pelo fato de a polia ter massa, as trações nos dois lados são diferentes (fig. *b*).

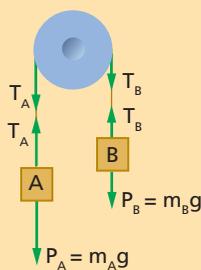


Figura b.

$$P_A = m_A \cdot g = (12 \text{ kg}) \cdot (10 \text{ m/s}^2) = 120 \text{ N}$$

$$P_B = m_B \cdot g = (6,0 \text{ kg}) \cdot (10 \text{ m/s}^2) = 60 \text{ N}$$

Consultando a tabela 1, vemos que o momento de inércia da polia é:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} (4,0 \text{ kg})(0,10 \text{ m})^2 = 0,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

A relação entre a aceleração escalar α de cada bloco e a aceleração angular γ da polia é:

$$\gamma = \frac{\alpha}{R}$$

- a) 1º modo:

Aplicamos a Segunda Lei de Newton a cada bloco:

$$\text{bloco A: } m_A g - T_A = m_A \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A = m_A g - m_A \alpha \quad (1)$$

$$\text{bloco B: } T_B - m_B g = m_B \alpha \Rightarrow T_B = m_B g + m_B \alpha \quad (2)$$

O torque total sobre a polia é:

$$M = M_A - M_B = T_A R - T_B R = (T_A - T_B) R$$

Assim:

$$M = I\gamma \Rightarrow (T_A - T_B) R = \left(\frac{1}{2} MR^2\right) \left(\frac{\alpha}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A - T_B = \frac{1}{2} M\alpha \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3):

$$(m_A g - m_A \alpha) - (m_B g + m_B \alpha) = \frac{1}{2} M\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B + \frac{M}{2}} g \quad (4)$$

Substituindo em (4) os valores dados, obtemos:

$$\alpha = \frac{12 - 6}{12 + 6 + \frac{4}{2}} (10) \Rightarrow \alpha = 3,0 \text{ m/s}^2$$

- 2º modo:

Vamos aplicar a conservação da energia mecânica. Tomando como referencial de energia potencial o solo e observando que no início o sistema está em repouso, a energia mecânica inicial é:

$$E_i = m_A g h_A + m_B g h_B \quad (5)$$

Quando o bloco A atingir o solo, sua altura será nula e a altura de B será $h_B + h_A$. Nesse instante, as energias cinéticas dos blocos serão:

$$E_{cA} = \frac{1}{2} m_A v^2; \quad E_{cB} = \frac{1}{2} m_B v^2$$

e a energia cinética de rotação da polia será:

$$E_{cp} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2\right) \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} Mv^2$$

Portanto, a energia mecânica final é:

$$E_f = m_B g (h_B + h_A) + \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_B v^2 + \frac{1}{4} Mv^2 \quad (6)$$

Como $E_i = E_f$, de (5) e (6) obtemos:

$$m_B g h_B + m_B g h_A + \frac{1}{2} m_A v^2 + \frac{1}{2} m_B v^2 + \frac{1}{4} Mv^2 = m_A g h_A + m_B g h_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = 2 \cdot \left[\frac{(m_A - m_B) g}{m_A + m_B + \frac{M}{2}} \right] h_A \quad (7)$$

Por outro lado, de acordo com a equação de Torricelli, devemos ter:

$$v^2 = 2\alpha h_A \quad (8)$$

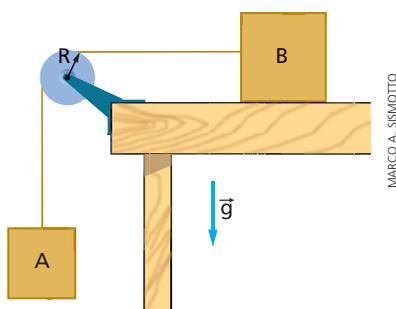
Comparando (7) com (8), concluímos:

$$\alpha = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B + \frac{M}{2}} g$$

b) $\gamma = \frac{\alpha}{R} = \frac{3,0 \text{ m/s}^2}{0,10 \text{ m}} \Rightarrow \gamma = 30 \text{ rad/s}^2$

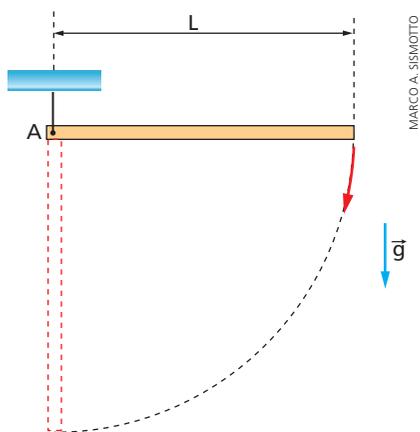
c) $v^2 = 2\alpha h_A = 2(3,0 \text{ m/s}^2)(6,0 \text{ m}) \Rightarrow v = 6,0 \text{ m/s}$

2. O sistema esquematizado na figura é abandonado em repouso. Despreze os atritos e suponha fio ideal. As massas de A, de B e da polia são, respectivamente, 4,0 kg, 5,0 kg e 2,0 kg.

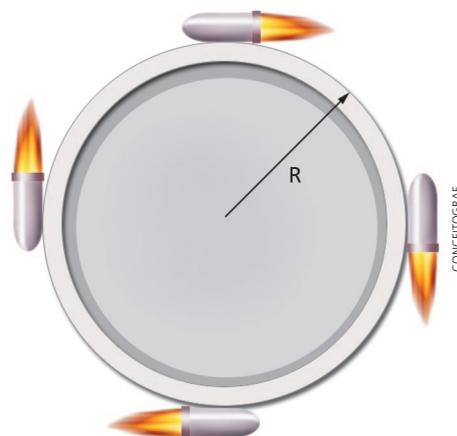


Sabendo que $R = 20 \text{ cm}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, determine:

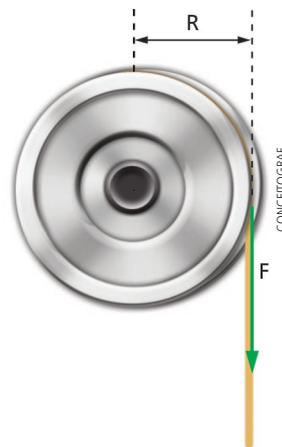
- o módulo da aceleração de cada bloco;
 - a aceleração angular da polia;
 - as trações no fio, no trecho ligado a A e no trecho ligado a B.
3. Uma barra cilíndrica fina e homogênea, vinculada a um eixo que passa por sua extremidade A, é abandonada na posição horizontal, como ilustra a figura. Sabe-se que $L = 2,0 \text{ m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$. Desprezando atritos, determine a velocidade angular da barra quando passa pela posição vertical.



4. Bem longe da Terra, um satélite artificial cilíndrico, de massa 3000 kg e raio da base $R = 4,0 \text{ m}$, está inicialmente em repouso. Num determinado instante, quatro foguetes idênticos são ligados, fazendo com que o satélite comece a girar, atingindo a velocidade angular $\omega = 3,0 \text{ rad/s}$ após 5,0 minutos. Qual a força desenvolvida por cada foguete?



5. Uma força de intensidade $F = 12,0 \text{ N}$ é aplicada a uma corda de massa desprezível enrolada em uma polia de raio $R = 30,0 \text{ cm}$ e massa 4,50 kg. A polia, que estava em repouso, acelera uniformemente, atingindo a velocidade angular 60,0 rad/s em 6,00 s.



Sabendo que o atrito no eixo da polia ocasiona um torque resistivo de módulo $1,2 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine:

- o momento de inércia da polia;
- o raio de giração da polia;
- a energia cinética rotacional da polia ao final dos 6,00 s.

Rolamento

No capítulo 11 estudamos a cinemática do movimento de rolamento. Agora vamos analisar sua dinâmica, recordando inicialmente alguns fatos vistos.

Na figura 8 representamos a seção transversal de um cilindro (ou esfera) de raio R que rola (sem deslizar) sobre uma superfície plana S .

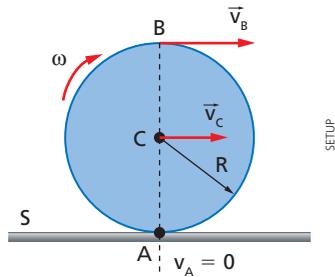


Figura 8.

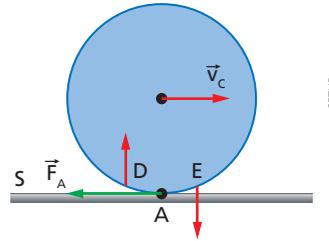


Figura 9.

Vimos que a velocidade do ponto de contato (A) é nula, enquanto a velocidade do ponto B é o dobro da velocidade do centro de massa C :

$$\vec{v}_B = 2\vec{v}_C$$

Vimos também que, sendo ω a velocidade angular do corpo que rola, temos:

$$v_C = \omega \cdot R \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{v_C}{R} \quad (12)$$

A partir da equação (12), é possível demonstrar que:

$$\alpha_C = \gamma \cdot R \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\alpha_C}{R} \quad (13)$$

sendo:

α_C = aceleração escalar do centro de massa C

γ = aceleração angular do corpo que rola

Para que exista rolamento, é necessário que exista atrito entre o corpo que rola e a superfície S . Mas um fato importante é que, neste caso, a força de atrito (\vec{F}_A) não realiza trabalho, pois não há deslocamento do ponto de aplicação dessa força. Outro modo de perceber isso é tomar dois pontos D e E **muito próximos** do ponto de contato A , como ilustra a figura 9. Observe que esses pontos têm deslocamentos perpendiculares à força de atrito \vec{F}_A e, portanto, esta não realiza trabalho.

Exercícios

6. Um cilindro homogêneo de massa M e cujo raio da base é R é abandonado em repouso sobre uma superfície plana S , que forma ângulo θ com a horizontal, como ilustra a figura a .

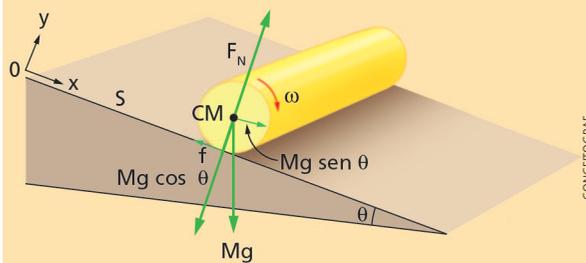


Figura a .

Supondo que o atrito seja suficiente para que o cilindro role sem deslizar e que o coeficiente de atrito estático seja μ_e , determine:

- o módulo da aceleração do centro de massa;
- o módulo da aceleração angular;
- a velocidade do centro de massa depois que este desceu uma distância vertical h ;
- o valor máximo de θ de modo que o cilindro role sem deslizar.

Resolução:

Na figura indicamos a força de atrito \vec{f} , o peso $M\vec{g}$, as componentes do peso nas direções x e y ($Mg \sin \theta$ e $Mg \cos \theta$) e a força normal \vec{F}_N .

Consultando a tabela 1, vemos que o momento de inércia de um cilindro em relação a um eixo que passa pelos centros de suas bases é:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

O peso e a força normal \vec{F}_n têm retas suportes que passam pelo centro de massa. Portanto, o torque resultante em relação ao centro de massa é o torque da força de atrito f . Representando por T_f esse torque, temos:

$$T_f = f \cdot R$$

a) 1º modo:

Sendo γ a aceleração angular do cilindro, temos:

$$T_f = I\gamma \Rightarrow f \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{2f}{MR}$$

Como a aceleração escalar (α) do centro de massa é dada por $\alpha = \gamma R$, temos:

$$\alpha = \gamma R = \left(\frac{2f}{MR}\right)R = \frac{2f}{M} \Rightarrow f = \frac{\alpha M}{2}$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton ao movimento de translação do cilindro, temos:

$$Mg \sin \theta - f = M\alpha \Rightarrow Mg \sin \theta - \frac{\alpha M}{2} = M\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}(g \sin \theta)$$

Como vimos no capítulo 13, se não houvesse atrito, o cilindro deslizaria com aceleração $g \cdot \sin \theta$. Observe que o valor de α não depende nem da massa nem do raio do cilindro.

2º modo:

Como a força de atrito não realiza trabalho, podemos aplicar a conservação da energia mecânica. Tomando o plano β (fig. b) como referencial de alturas, a energia potencial gravitacional do cilindro é Mgh no início e nula no final.

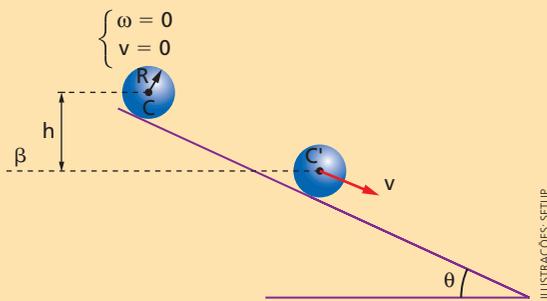


Figura b.

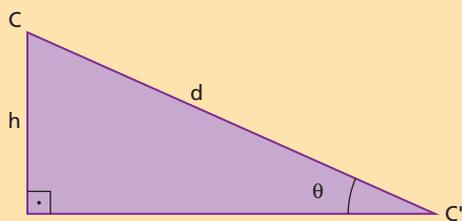


Figura c.

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1)$$

$$\text{Mas: } I = \frac{1}{2}MR^2 \text{ e } \omega = \frac{v}{R}$$

Substituindo em (1):

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{4}{3}gh \quad (2)$$

Da figura c tiramos: $h = d \cdot \sin \theta$

Substituindo em (2):

$$v^2 = \frac{4}{3}g(d \sin \theta) \Rightarrow v^2 = 2\left(\frac{2}{3}g \sin \theta\right)d \quad (3)$$

Mas, pela equação de Torricelli, devemos ter:

$$v^2 = 2 \cdot \alpha \cdot d \quad (4)$$

Comparando (3) com (4), tiramos: $\alpha = \frac{2}{3}g \sin \theta$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \frac{\alpha}{R} \\ \alpha = \frac{2}{3}g \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma = \frac{2g \sin \theta}{3R}$$

c) Tomemos a equação (2) obtida no item a):

$$v^2 = \frac{4}{3}gh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \Rightarrow v = \frac{2\sqrt{3}}{3}gh$$

$$d) f \cdot R = I\gamma \Rightarrow f \cdot R = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{2g \sin \theta}{3R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{3}Mg \sin \theta \quad (5)$$

Por outro lado:

$$f \leq \mu_e \cdot F_N \Rightarrow f \leq \mu_e \cdot Mg \cos \theta \quad (6)$$

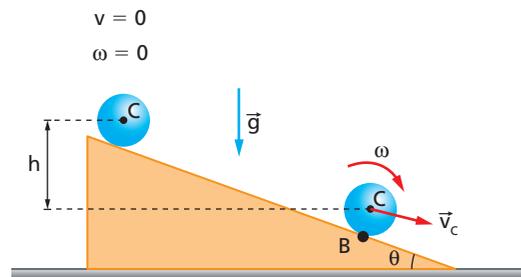
De (5) e (6):

$$\frac{1}{3}Mg \sin \theta \leq \mu_e \cdot Mg \cos \theta \Rightarrow \text{tg } \theta \leq 3\mu_e$$

Portanto, o maior valor de θ tal que o cilindro role sem deslizar é:

$$\theta_{\text{máx}} = \text{arc tg } 3\mu_e$$

7. Uma esfera homogênea, de massa M e raio R , é abandonada no alto de um plano inclinado, como ilustra a figura.

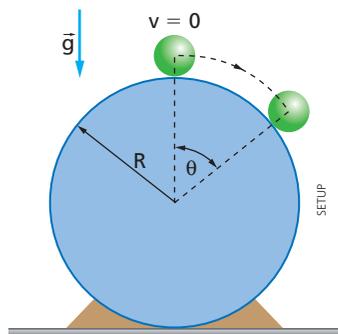


Supondo que o atrito seja suficiente para que a esfera role sem deslizar, determine, em função de M , R , g , h e θ :

- o módulo da aceleração do centro de massa;
- o módulo da aceleração angular;

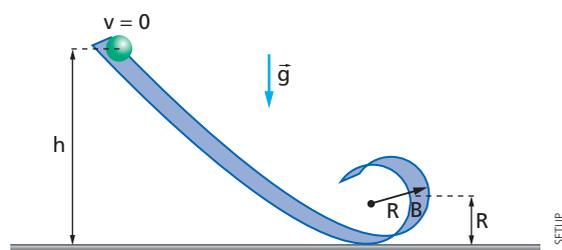
- c) os módulos da velocidade do centro de massa e da velocidade angular quando a esfera passa pelo ponto B ;
- d) o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre a esfera e o plano inclinado para que a esfera role sem deslizar.

8. Uma bolinha maciça e homogênea, cujo raio é r , é abandonada no ponto mais alto de um cilindro de raio R fixo no solo, como ilustra a figura.



Supondo que a bolinha role sem deslizar, determine o ângulo θ para o qual a bolinha perde o contato com o cilindro.

9. Uma bolinha de raio r e massa m é abandonada em uma pista inclinada que termina em forma circular de raio R .



Supondo que a bolinha role sem deslizar, determine, em função de R , r , m e g :

- a) o valor mínimo de h de modo que a bolinha consiga fazer o *loop* sem perder o contato com a pista;
- b) o módulo da força normal exercida pela pista sobre a bolinha no ponto B , para o valor de h obtido no item a e supondo $r \ll R$.

10. Um corpo redondo homogêneo (que pode ser um anel, um cilindro maciço ou uma esfera) tem massa M , raio R e momento de inércia I . Esse corpo é abandonado no alto de um plano inclinado com atrito e rola sem escorregar.

- a) Determine a aceleração do centro de massa desse corpo em função de g , M , R , I e do ângulo θ de inclinação do plano.
- b) Se um anel fino, um cilindro maciço e uma esfera maciça forem abandonados simultaneamente no alto do plano inclinado, qual chegará ao solo em primeiro lugar?

Velocidade angular e torque vetoriais

No estudo das rotações às vezes é interessante considerar a velocidade angular como um vetor que tem a mesma direção do eixo de rotação. Para mostrar como se obtém o sentido de $\vec{\omega}$, consideremos os exemplos da figura 10, em que uma bolinha tem trajetória circular num plano horizontal.

Curvamos a mão direita de modo a acompanhar o sentido do movimento e o polegar dá o sentido de $\vec{\omega}$.

O torque de uma força também pode ser considerado como uma grandeza vetorial. Sendo \vec{M}_F o torque de uma força \vec{F} , sua direção é perpendicular ao plano determinado pela reta suporte da força e o polo (fig. 11). O sentido é obtido pela regra da mão direita, observando a tendência de rotação produzida pela força \vec{F} .

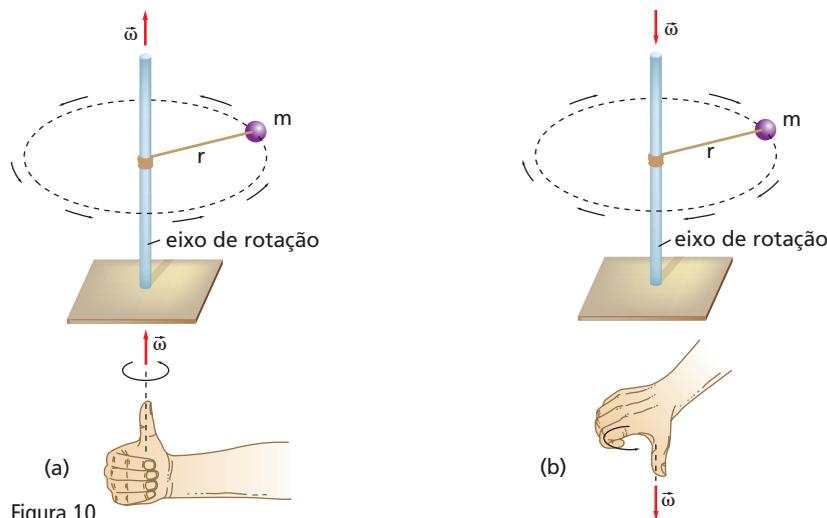


Figura 10.

ILUSTRAÇÕES: ALEX ARGOZINO

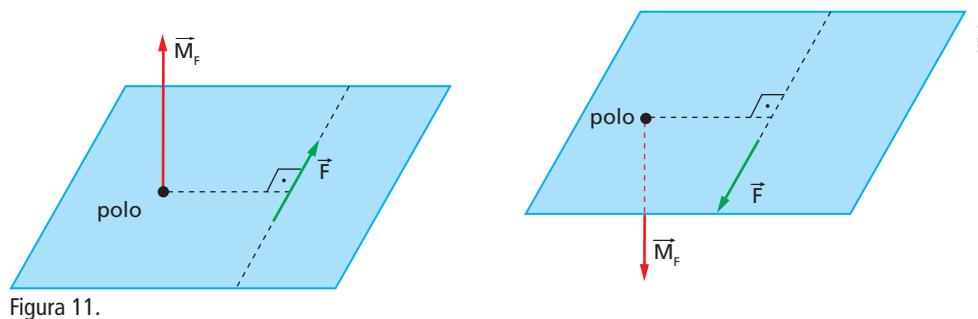


Figura 11.

Momento angular

No estudo do movimento de translação estudamos uma importante grandeza, que é a **quantidade de movimento** ou **momento linear** (\vec{Q}). Para uma partícula de massa m e velocidade \vec{v} , vimos que o momento linear é dado por:

$$\vec{Q} = m\vec{v} \quad (14)$$

No estudo das rotações usa-se uma grandeza análoga, denominada **momento angular** (\vec{L}). Consideremos um corpo girando em torno de um eixo com velocidade angular $\vec{\omega}$. Sendo I o momento de inércia do corpo em relação a esse eixo, o momento angular do corpo é definido por:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad (15)$$

Como o momento de inércia é uma grandeza escalar positiva, da equação (15) concluímos que os vetores \vec{L} e $\vec{\omega}$ devem ter a mesma direção e o mesmo sentido.

Vimos que $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ é uma forma simplificada da Segunda Lei de Newton. Na realidade, Newton enunciou sua segunda lei na forma:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta t} \quad (16)$$

Sendo \vec{M} o torque total de todas as forças que atuam num corpo, é possível demonstrar que há, para a rotação, uma equação análoga à equação (16):

$$\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \quad (17)$$

sendo \vec{L} o momento angular do corpo.

Como a soma dos torques das forças internas é igual a zero, o momento total \vec{M} que aparece na equação (17) é igual à soma dos torques das forças externas.

Princípio da Conservação do Momento Angular

Observando a equação (17), percebemos que, se \vec{M} for nulo, teremos $\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = 0$, o que significa que $\vec{L} = \text{constante}$. Obtemos assim o **Princípio da Conservação do Momento Angular**:

Se a soma dos torques das forças externas que atuam em um corpo for nula, o momento angular do corpo é constante.

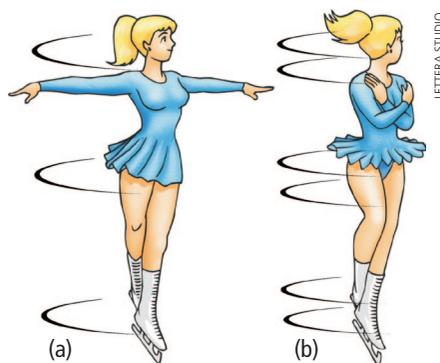


Figura 12.

Vejamos alguns exemplos. Na figura 12 representamos uma patinadora sobre o gelo. Na figura 12a ela está girando, com os braços abertos e com velocidade angular ω_a . Seu momento angular é:

$$L = I_a \omega_a$$

sendo I_a seu momento de inércia. Ao fechar os braços, algumas partículas de seus braços se aproximam do eixo de rotação e, assim, seu momento de inércia passa para um valor I_b tal que $I_b < I_a$. Conseqüentemente, sua velocidade angular aumenta para um valor ω_b , pois seu momento angular deve permanecer constante, já que não há torque externo.

$$L = I_a \omega_a = I_b \omega_b$$

Embora o momento angular da patinadora fique constante, sua energia cinética de rotação aumenta ao encolher os braços, pois o trabalho muscular interno transforma-se em energia cinética, isto é, temos transformação de energia química em energia cinética.

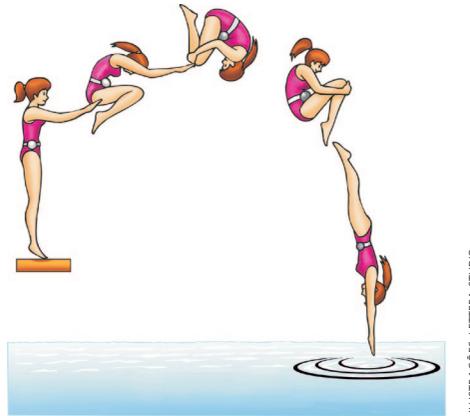


Figura 13.

Uma situação semelhante está representada na figura 13. A única força externa (desprezando o atrito) que atua na saltadora é seu peso \vec{P} , que está aplicado em seu centro de gravidade. Portanto, o torque de \vec{P} em relação ao centro de gravidade é nulo, o que acarreta a conservação do momento angular. Quando ela encolhe seu corpo, há uma diminuição do momento de inércia e um aumento da velocidade angular.

Na figura 14 ilustramos outra situação interessante. Na situação inicial da figura 14a a moça está sentada numa cadeira giratória que está em repouso. Porém, ela está segurando um eixo em torno do qual gira uma roda de bicicleta com momento angular \vec{L}_R . Como a moça está em repouso, o momento angular total do sistema na situação inicial é igual ao momento angular da roda:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_R$$

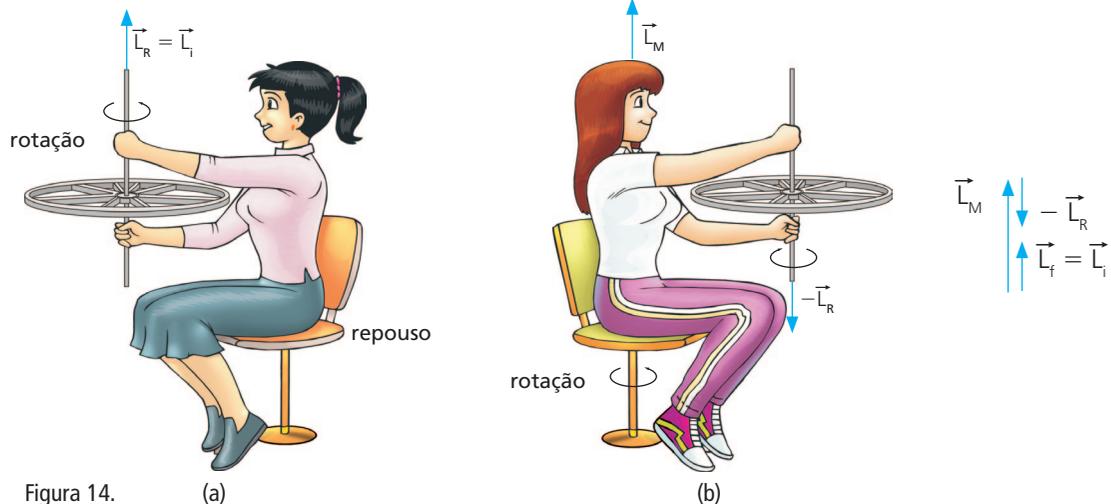


Figura 14. (a)

(b)

Repentinamente, a moça inverte o eixo de rotação (fig. 14b), de modo que agora o momento angular da roda é $-\vec{L}_R$, com sentido **para baixo**. Portanto, para manter constante a quantidade de movimento do sistema, a moça começa a girar no sentido oposto ao da roda, de modo que o momento angular da moça é \vec{L}_M e o momento angular final do sistema é $\vec{L}_f = \vec{L}_M + (-\vec{L}_R)$, sendo $\vec{L}_i = \vec{L}_f$.

Algo semelhante acontece (ou poderia acontecer) com um helicóptero inicialmente em repouso, com os motores desligados; nessas condições seu momento angular total é nulo. Suponhamos que num determinado instante suas pás A , B e C (fig. 15) comecem a girar no sentido anti-horário. Como isso ocorre por efeito de forças internas, o momento angular total deve permanecer constante, isto é, deve continuar a ser nulo e, para que isso ocorra, o helicóptero deveria começar a girar no sentido oposto (horário). Para evitar esse desastre é que existem as hélices H na traseira.

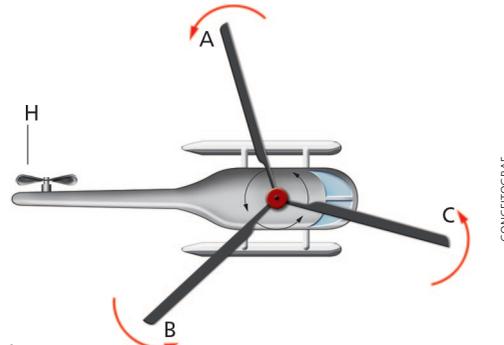
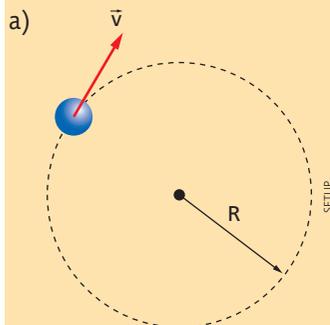


Figura 15.

Exercícios

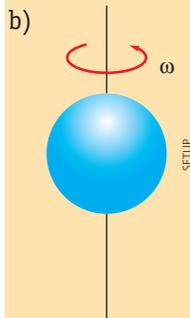
11. Determine os módulos dos momentos angulares de:
- uma partícula de massa m movendo-se em trajetória circular de raio R com velocidade escalar v ;
 - uma esfera maciça e homogênea, de raio $R = 10$ cm e massa $M = 20$ kg, girando em torno de um eixo que passa por seu centro, com velocidade angular $\omega = 25$ rad/s.

Resolução:



O momento de inércia da partícula é $I = mR^2$. Portanto:

$$L = I\omega = (mR^2)\left(\frac{v}{R}\right) \Rightarrow L = mRv$$



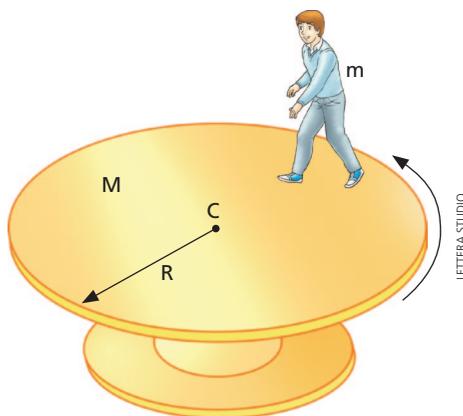
Para uma esfera maciça e homogênea, o momento de inércia é $I = \frac{2}{5}MR^2$. Portanto:

$$L = I\omega = \frac{2}{5}MR^2\omega = \frac{2}{5}(20 \text{ kg})(0,10 \text{ m})^2(25 \text{ rad/s})$$

$$L = 2,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

12. (UF-RN) Em revista de circulação nacional, uma reportagem destacou a reação da natureza às agressões realizadas pelo homem ao meio ambiente. Uma das possíveis consequências citadas na reportagem seria o derretimento das geleiras dos polos, o que provocaria uma elevação no nível do mar. Devido ao movimento de rotação da Terra, esse efeito seria especialmente sentido na região do equador, causando inundações nas cidades litorâneas que hoje estão ao nível do mar. Levando-se em conta **apenas esse efeito** de redistribuição da água devido ao degelo, podemos afirmar que:
- o momento de inércia da Terra, em relação ao seu eixo de rotação, aumentará.
 - a velocidade angular da Terra, em relação ao seu eixo de rotação, aumentará.
 - o período de rotação da Terra, duração do dia e da noite, diminuirá.
 - o momento angular da Terra, em relação ao seu centro de massa, diminuirá.
13. Uma plataforma circular e homogênea, de massa $M = 400$ kg e raio $R = 2,0$ m, gira sem atrito em torno de um eixo que passa por seu centro com velocidade angular constante $\omega_0 = 1,5$ rad/s. Na beirada da plataforma há uma pessoa de massa $m = 80$ kg,

parada em relação à plataforma. Num determinado instante, a pessoa começa a caminhar em direção ao centro C da plataforma, parando a 50 cm deste.



Calcule:

- a velocidade angular (ω) final do sistema;
- a energia cinética inicial do sistema;
- a energia cinética final do sistema.

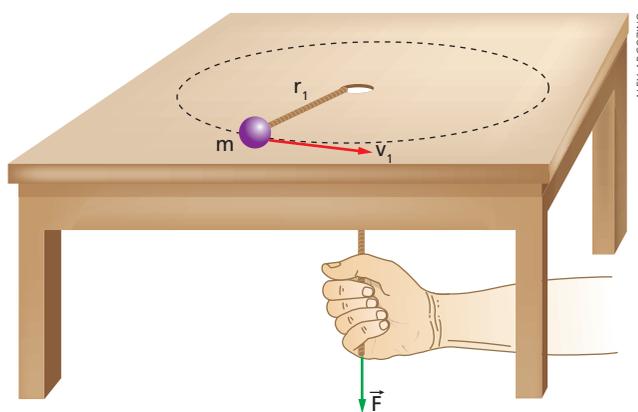
14. Na situação do exercício anterior, a energia cinética do sistema aumentou. De onde veio a energia cinética adicional?

15. Um jovem de massa 50 kg está inicialmente em repouso na beirada de uma plataforma circular, semelhante à do exercício 13, que também está inicialmente em repouso. A plataforma tem massa 250 kg, raio 2,0 m e pode girar sem atrito em torno de um eixo vertical que passa por seu centro.

Num determinado instante, o jovem começa a caminhar pela beirada da plataforma, no sentido anti-horário (para quem olha de cima), com velocidade escalar 2,0 m/s em relação ao solo.

- Qual o sentido da rotação adquirida pela plataforma?
- Qual a velocidade angular adquirida pela plataforma?
- Qual o trabalho realizado pelo jovem para colocar o sistema em movimento?

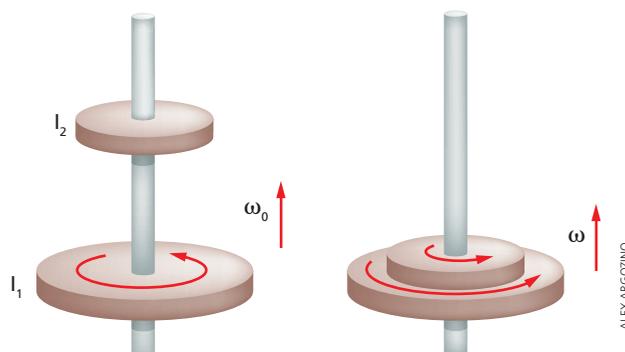
16. Uma partícula de massa $m = 0,20$ kg, presa à extremidade de um fio ideal, tem movimento circular uniforme, de raio $r_1 = 0,80$ m e velocidade escalar $v_1 = 2,4$ m/s, sobre uma mesa sem atrito. A partir de certo instante, uma pessoa passa a puxar o fio verticalmente, como mostra a figura, até que o raio da trajetória se reduza para $r_2 = 0,48$ m.



Calcule:

- a velocidade escalar final da partícula;
- a energia cinética inicial da partícula;
- a energia cinética final da partícula;
- o trabalho realizado pela pessoa.

17. Um disco, cujo momento de inércia é $I_1 = 70$ kg · m²/s, gira sem atrito em torno de um eixo vertical, com velocidade angular $\omega_0 = 4,0$ rad/s. Outro disco, cujo momento de inércia é $I_2 = 30$ kg · m²/s e que inicialmente não estava girando, cai sobre o primeiro disco. Supondo que haja atrito entre os discos, depois de algum tempo ambos estarão girando com a mesma velocidade angular ω .



Calcule:

- o módulo de ω ;
- a energia cinética inicial do sistema;
- a energia cinética final do sistema.

18. Na situação do exercício anterior houve diminuição de energia cinética. Por quê?