GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Sistemas Lineares

GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Sistema de Equações

É o conjunto de duas ou mais Equações Lineares.

Equações Lineares são equações com uma ou mais variáveis, cujo expoente é igual a um.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 7 \end{cases}$$

Representação Matricial

Para representar matricialmente um sistema usamos uma matriz onde cada coluna representa o coeficiente de uma incógnita multiplicada pela matriz das incógnitas, igualadas a uma matriz que representa os termos independentes. Conforme o exemplo:

Sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y - 9z = 7 \\ x - 5y + 4z = 6 \\ 2x + 6y - 3z = -1 \end{cases}$$

Representação Matricial do Sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & -9 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathrm{P}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathrm{k}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathrm{B}}$$

Solução do Sistema

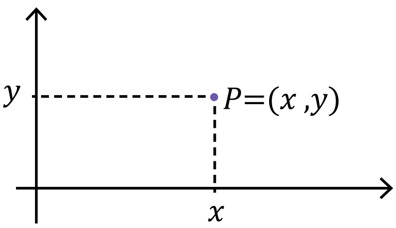
Solucionar um sistema consiste em encontrar os valores de suas incógnitas.

Costumamos representar a solução pela letra S e as soluções da seguinte forma:

$$S=\{(x,y)\}$$

Representação Geométrica

Quando um sistema possui duas incógnitas, sua representação geométrica é dada por um ponto no plano cartesiano. Se x e y são as soluções, então a representação geométrica será dada pelo ponto P, conforme a ilustração:



Agora, se o sistema possuir três incógnitas, então sua representação geométrica é no espaço tridimensional.

Sistemas Normais

Chamamos um sistema de Normal quando o número de incógnitas for igual ao número de equações. Quando isso não ocorre lhe denominamos Sistema Não Normal.

Sistema Normal

$$\begin{cases} 4x + 3y - 9z = 7 \\ x - 5y + 4z = 6 \\ 2x + 6y - 3z = -1 \end{cases}$$

Sistemas Não Normais

$$\begin{cases} x + 4y + 2z = 9 \\ 3x + 5y - z = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x + 5y = 23 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$$

Regra de Cramer

Regra de Cramer é um método utilizado para solucionar problemas, utilizando somente determinantes. Mas, atenção: só podemos usar essa regra em **sistemas normais** cujo **determinante é diferente de zero.**

Tendo um sistema linear com a forma matricial $Pk=B$, conforme o exemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathrm{P}} . \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathrm{k}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathrm{B}}$$

O valor de cada incógnita k_i do sistema será dado por:

$$k_i = \frac{\det P_i}{\det P}$$

Determinante da matriz P com sua coluna i trocada pela matriz B.

Elementos da matriz k.

Determinante da matriz P.

Exemplo:

Encontre o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

Resolução:

1º passo: Encontrar o determinante de P:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = [1.(-1)] - (2.3) = -1 - 6 = -7$$

2º passo: Trocar a primeira coluna de P pela matriz B e achar o determinante da matriz P_x.

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{P_x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = [1.(-1)] - (-5.3) = -1 + 15 = 14$$

Assim, detP_x=14.

3º passo: Trocar a segunda coluna de P pela matriz B e achar o determinante da matriz P_y.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow P_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = [1.(-5)] - (2.1) = -5 - 2 = -7$$

Assim, detP_y =−7.

4º passo: Encontrar os valores das incógnitas substituindo na fórmula.

$$x = \frac{\det P_x}{\det P} = \frac{14}{-7} = -2$$

$$y = \frac{\det P_y}{\det P} = \frac{-7}{-7} = 1$$

Logo, temos que a solução do sistema linear é dada por $S=\{(-2,1)\}$.

Escalonamento

Escalonar nada mais é que encontrar uma matriz equivalente à matriz original, que facilite o processo de encontrar a solução do sistema. O método de Gauss é um tipo de escalonamento e consiste em zerar todos os elementos abaixo da diagonal principal. Para isso devemos seguir os seguintes passos:

1° Passo: Representar o sistema de forma matricial.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

2° Passo: Zerar todos elementos abaixo da diagonal principal, através de operações entre as linhas da matriz.

As operações que podemos fazer com as linhas são:

- Trocar de posição as linhas da matriz;
- Multiplicar as linhas por um número não nulo;
- Somar uma linha com múltiplos de outra linha.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 = 2L_1 - L_2 \\ L_3 = 3L_1 - L_3 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 23 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} L_2 \Leftrightarrow L_3 \\ L_3 = 3L_2 - L_3 \end{matrix}$$

3° Passo: Voltar a representar o sistema na chave. Você terá encontrado um novo sistema, equivalente ao primeiro.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ y + 8z = 2 \\ 23z = 0 \end{cases}$$

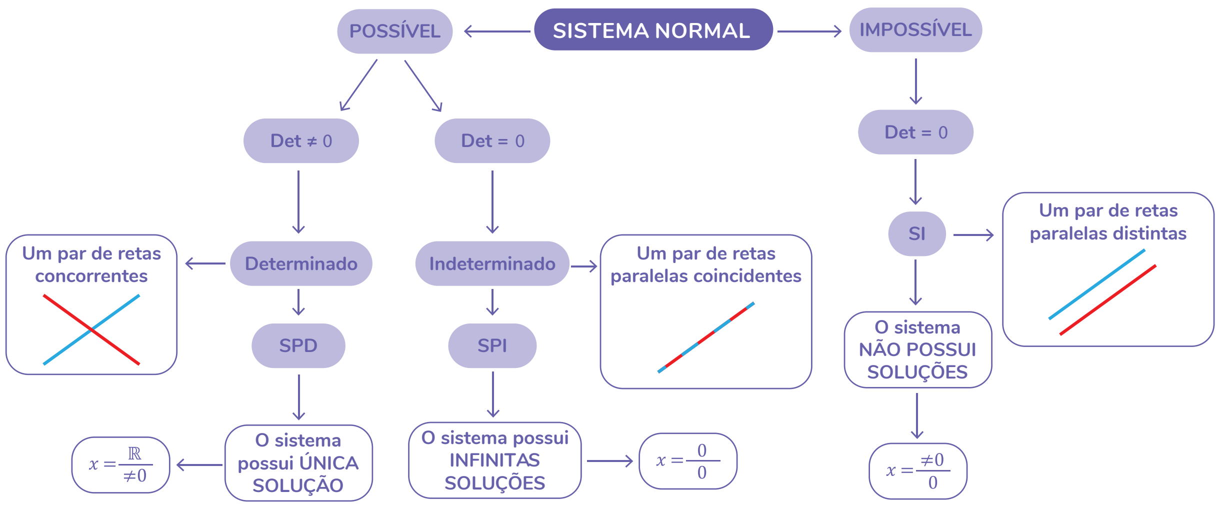
4° Passo: Resolver o novo sistema e encontrar o conjunto solução.

$$\begin{aligned} 23z &= 0 \\ z &= \frac{0}{23} \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y + 8z &= 2 \\ y + 8.0 &= 2 \\ y &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + 3z &= 3 \\ x + 2 + 3.0 &= 3 \\ x &= 3 - 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$S = \{(1, 2, 0)\}$$

Discussão de Sistemas

Um sistema normal pode ser classificado em:



Grau de indeterminação

O grau de indeterminação de um sistema é a diferença entre o número de variáveis e o número de equações.

Número de equações x Número de incógnitas

N° de Equações < N° de Incógnitas

Neste caso a solução ficará sempre em função de incógnitas e o número de incógnitas no conjunto solução será igual ao grau de indeterminação do sistema.

Para solucionar esse tipo de sistema devemos escolher a quantidade de incógnitas igual ao grau de indeterminação e isolar as demais incógnitas em função da escolhida.

Por exemplo, se um conjunto possui 3 incógnitas e apenas 2 equações, então o grau de indeterminação é um. Devemos então escolher uma incógnita e isolar as demais em função dela.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 2 \\ 2x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$S = \left\{\left(\frac{9z+5}{7}, \frac{3+4z}{7}\right) z \in \mathbb{R}\right\}$$

N° de Equações > N° de Incógnitas

Nesse sistema não há grau de indeterminação.

Para resolvê-lo utilize o método da substituição, isolando uma das incógnitas na primeira equação, substituindo o valor encontrado na segunda equação e assim sucessivamente, até encontrar o valor de todas as incógnitas.

N° de Equações = N° de Incógnitas

Nesse tipo de sistema você pode optar por resolver por substituição ou por escalonamento. Todas as soluções serão dadas em valores numéricos.

Sistema Linear Homogêneo

É o sistema cujas equações possuem todos os termos independentes iguais a zero. **Exemplo:**

$$\begin{cases} 4x+3y-9z=0 \\ x-5y+4z=0 \\ 2x+6y-3z=0 \end{cases}$$

Esse sistema nunca será um Sistema Impossível e sempre haverá uma solução em que x, y e z são iguais a 0. Portanto resta saber se o sistema é Possível Determinado ou Indeterminado. No sistema acima a solução é possível e determinada, portanto:

$$S=\{(0,0,0)\}$$

ANOTAÇÕES

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@paulojubilut
@Prof_jubilut
biologiajubilut
+biologiatotalbrjubilut