Canguru de Matemática Brasil – 2015 – Nível S - Respostas

Problemas de 3 pontos

1. Andrea nasceu em 1997 e sua irmã Carla nasceu em 2001. O que se pode dizer da diferença das idades das duas irmãs?

(A) É menor do que 4 anos (B) É de 4 anos pelo menos (C) É de exatamente 4 anos
(D) É maior do que 4 anos (E) Não é menor do que 3 anos

1. Alternativa E

Se Andrea nasceu no último dia de 1997 e sua irmã no primeiro dia de 2001, a diferença de idades é de 3 anos e um dia. Se ela nasceu no primeiro dia de 1997 e sua irmã no último dia de 2001, a diferença de idades é de 5 anos menos um dia. Concluímos, portanto, que a diferença não é menor do que 3 anos.

2. Para a,b reais, a expressão $(a-b)^5+(b-a)^5$ equivale a

(A) $-10ab$ (B) 0 (C) $2(a-b)^5$ (D) $2a^5-2b^5$ (E) $2a^5+2b^5$

2. Alternativa B

$(a-b)^5+(b-a)^5=(a-b)^5-(a-b)^5=0$

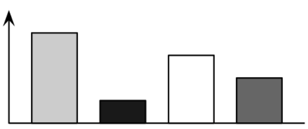
3. Qual é o número de soluções da equação $2^{2x}=4^{x+1}$?

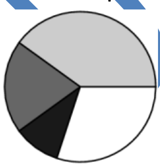
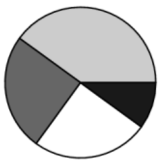
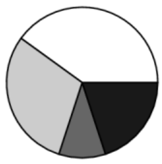
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) maior do que 3

3. Alternativa A

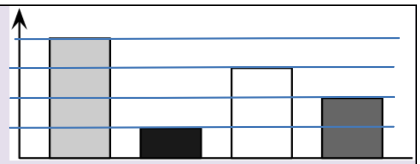
$2^{2x}=4^{x+1}\Leftrightarrow 2^{2x}=\left(2^2\right)^{x+1}\Leftrightarrow 2^{2x}=2^{2(x+1)}\Leftrightarrow 2x=2x+2\Leftrightarrow 0x=2$. Esta equação não tem solução, ou, em outras palavras, o número de soluções é zero.

4. Depois de uma excursão de Biologia, Diana desenhou no seu relatório um gráfico de barras representando a quantidade de indivíduos de quatro espécies de árvores. Seu professor sugeriu que o transformasse num gráfico de pizza, para melhor comparação. Qual é o aspecto do gráfico que ela desenhou?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Alternativa A



Do gráfico de barras, vemos que as alturas das colunas cinza claro, branca e cinza escuro correspondem a, respectivamente, 4, 3 e 2 vezes a altura da coluna preta. Dividindo o círculo (gráfico de pizza) em 10 partes, os ângulos dos setores circulares devem manter a mesma proporção que as alturas. Isto ocorre no gráfico da alternativa A (cinza claro 4 x 36^{O}, branco 3 x 36^{O}, cinza escuro 2 x 36^{O} e preto 36^{O})

5. Somando todos os inteiros desde 2001 até 2031 e dividindo a soma por 31, que número obtemos?

(A) 2012 (B) 2013 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2496

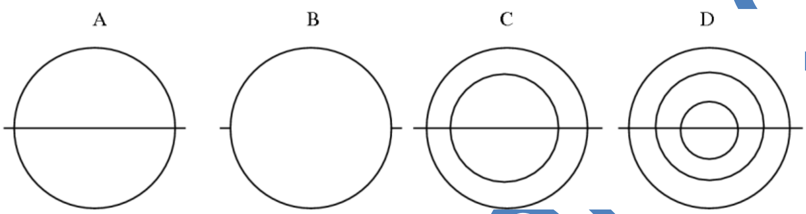
5. Alternativa D

$S = 2001 + 2002 + \ldots + 2031 = 2031 + 2030 + \ldots + 2001 \Rightarrow$

$2S = (2001 + 2031) + (2002 + 2030) + \ldots + \left(2031 + 2001\right) \Leftrightarrow 2S = 31 \cdot 4032 \Leftrightarrow S = 31 \cdot 2016$

$\Leftrightarrow \dfrac{S}{31} = 2016$

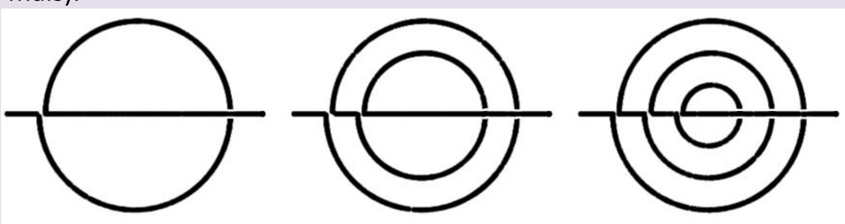
6. Quantas das figuras abaixo Aninha pode desenhar sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes por um mesmo segmento ou arco de circunferência?



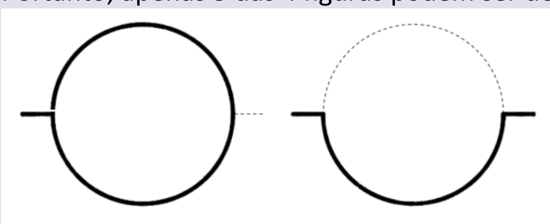
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

6. Alternativa D

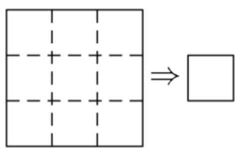
Temos abaixo uma maneira de desenhar as figuras A, C e D sem tirar o lápis do papel e sem desenhar duas vezes uma mesma linha (observe que para desenhar C e D, basta repetir o padrão em A para cada círculo a mais).



Mas o mesmo não é possível para a figura B: observe que devemos começar e terminar o desenho pelas extremidades dos segmentos, mas ao começar por uma extremidade, ou conseguimos completar o círculo e fica faltando um segmento ou desenhamos os dois segmentos, mas fica faltando uma semicircunferência. Portanto, apenas 3 das 4 figuras podem ser desenhadas conforme descrito no enunciado.



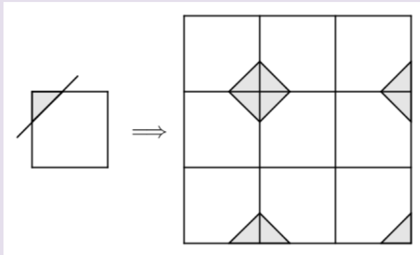
7. Uma folha quadrada de papel foi dobrada ao longo das linhas tracejadas, uma dobra de cada vez, sem importar a ordem. Em seguida, cortou-se um canto da folha dobrada e abriu- se a folha de volta. Quantos buracos são vistos nessa folha aberta?



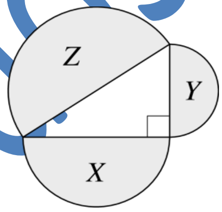
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

7. Alternativa B

Após fazer as dobras na folha, verificamos que os nove quadrados que surgem com as dobras da folha são empilhados em um único quadrado e após fazer o corte, cada quadrado perderá exatamente um vértice. Desdobrando a folha, vemos que apenas um dos vértices do quadrado central será cortado, o que resultará em um buraco, sendo que os outros cortes terão que ocorrer nas bordas da folha (para evitar que o quadrado central perca mais de um vértice), o que não resultará em mais buracos.



8. Três semicírculos têm como diâmetros os lados de um triângulo retângulo e têm áreas *X*, *Y* e *Z*, conforme figura. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

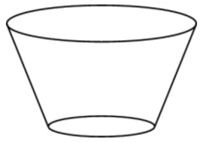


(A) $X+Y<Z$ (B) $\sqrt{X}+\sqrt{Y}=\sqrt{Z}$ (C) $X+Y=Z$ (D) $X^2+Y^2=Z^2$ (E) $X^2+Y^2=Z$

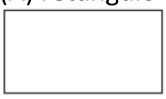
8. Alternativa C

Sendo os semicírculos X,Y,Z de raios a,b,c, respectivamente, temos pelo teorema de Pitágoras que $(2a)^2+(2b)^2=(2c)^2 \Leftrightarrow 4a^2+4b^2=4c^2 \overset{\times\frac{\pi}{8}}{\Leftrightarrow} \frac{\pi a^2}{2}+\frac{\pi b^2}{2}=\frac{\pi c^2}{2} \Leftrightarrow X+Y=Z$.

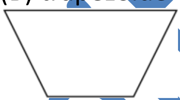
9. Um copo tem a forma de um cone truncado, conforme figura. Juliana quer colar um plástico colorido ao redor do copo, do lado de fora. Como ela deve cortar o plástico para colar perfeitamente na lateral do copo, sem enrugar?



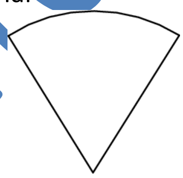
(A) retângulo



(B) trapezóide

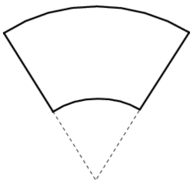


(C) setor circular



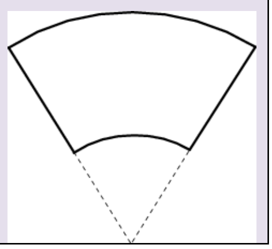
(D) tira curva de lados paralelos

(E) parte de setor circular



9. Alternativa E

Um cone aberto, ao ser planificado por um corte ao longo de uma geratriz, é um setor circular. Um tronco de cone é um cone do qual se retira outro cone menor, de mesmo vértice. Logo, a planificação de um tronco de cone aberto é exatamente a superfície lateral desse tronco e consiste em um setor circular subtraído de outro setor circular de mesma abertura (ângulo) e centro, como na figura.

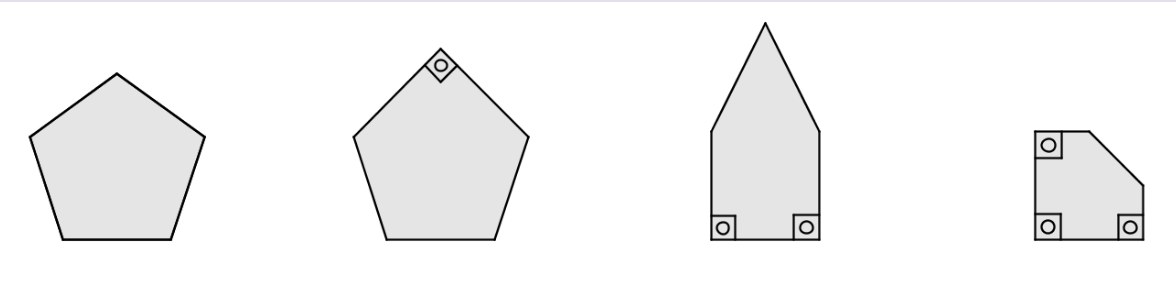


10. Um pentágono convexo tem *n* ângulos internos retos. Qual é a lista de possíveis valores de *n*?

(A) 1, 2, 3 (B) 0, 1, 2, 3, 4 (C) 0, 1, 2, 3 (D) 0, 1, 2 (E) 1, 2

10. Alternativa C

Exemplos de pentágonos com 0, 1, 2 e 3 ângulos retos são mostrados a seguir.



Sabemos que a soma dos ângulos internos de um pentágono é $(5-2)\cdot 180° = 540°$. Se 4 dos 5 ângulos de um pentágono forem retos, o quinto ângulo medirá $540° - 4\cdot 90° =$ $540° - 360° = 180°$, absurdo. Portanto, não pode haver mais de 3 ângulos retos num pentágono.

Problemas de 4 pontos

11. $\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)}$

(A) $\sqrt{2015}$ (B) 2015 (C) 2016 (D) 2017 (E) 4030

11. Alternativa C

$\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)} =$

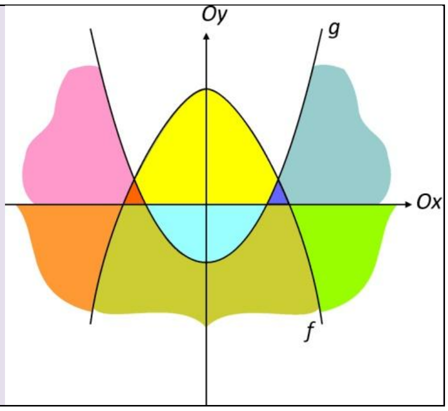
$\sqrt{2\cdot 2015+0+2015^2+1} = \sqrt{2015^2+2\times 2015+1} = \sqrt{(2015+1)^2} = 2015+1 = 2016$

12. O eixo *Ox* e os gráficos das funções $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = x^2 - 1$ dividem o plano cartesiano em quantas regiões?

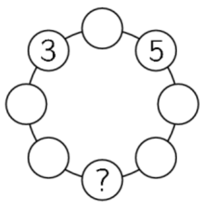
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

12. Alternativa D

Representando os gráficos das funções *f* e *g* no mesmo sistema de coordenadas, assinalamos as distintas regiões definidas pelos gráficos e pelo eixo das abscissas Ox. São 10 regiões.



13. Elias quer escrever um número em cada círculo da figura ao lado de modo que cada número seja a soma dos números vizinhos. Qual número ele deve escrever no círculo com o ponto de interrogação?



(A) -5 (B) -16 (C) -8 (D) -3 (E) Isto é impossível.

13. Alternativa E
O círculo de cima tem o número $3+5=8$. Caminhando no sentido horário, devemos completar os círculos seguintes com os números $5-8=-3$, $-3-5=-8$, $-8-(-3)=-5$, $-5-(-8)=3$ e $3-(-5)=8$. Mas ao verificar a soma dos vizinhos do último círculo antes de voltarmos ao de cima, temos que $3 \neq 8+8$, logo não é possível preencher os círculos de forma que cada número seja a soma dos seus dois vizinhos.

14. São dados cinco números inteiros positivos distintos *a, b, c, d, e* tais que $c:e=b, a+b=d$ e $e-d=a$. Qual dos cinco números é o maior?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

14. Alternativa C
Os números *a,b,c,d,e* são inteiros positivos. Logo

$c:e=b \Leftrightarrow c=b\cdot e \Rightarrow c \geq e$ e $c \geq b$ (1)

$a+b=d \Rightarrow d>a$ e $d>b$ (2)

$e-d=a \Leftrightarrow e=a+d \Rightarrow e>a$ e $e>d$

Como $a \geq 1$ e de (3) temos $e>a$ concluímos que $e>1$. Logo, de (1), temos $c>e$ e $c>b$.

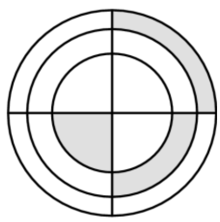
Assim, temos $c>e>a$, $c>e>d$ e $c>b$. Portanto, *c* é o maior dos cinco números.

15. A média geométrica de um conjunto de *n* números inteiros positivos é definida como sendo a raiz *n*-ésima do produto desses números. Se a média geométrica de um conjunto de três números é igual a 3 e a média geométrica de outro conjunto de três números é 12, qual é a média geométrica do conjunto desses seis números?

(A) 4 (B) 6 (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{15}{6}$ (E) 36

15. Alternativa B
O primeiro conjunto é formado pelos números *a,b,c* e o segundo pelos números *x, y, z*. Então $\sqrt[3]{abc}=3 \Leftrightarrow abc=3^3$ e $\sqrt[3]{xyz}=12 \Leftrightarrow xyz=12^3$. A média geométrica dos seis números é $\sqrt[6]{abcxyz}=\sqrt[6]{3^3\cdot 12^3}=\sqrt{3\cdot 12}=6.$

16. Na figura, os três círculos são concêntricos e os dois eixos são perpendiculares. Se as áreas das três regiões cinzentas são iguais e o raio do menor círculo é 1, qual é o produto dos raios dos três círculos?



(A) $\sqrt{6}$ (B) 3 (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) 6

16. Alternativa A
Temos que cada uma das 12 regiões em que a figura está dividida tem uma mesma área S, assim os três círculos têm áreas iguais a $4S$, $8S$ e $12S$. As áreas dos círculos estão na razão $1:2:3$, logo os raios destes três círculos estão na razão $\sqrt{1}:\sqrt{2}:\sqrt{3}$. Como o círculo menor tem raio 1, então os outros dois círculos tem raios $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, e, portanto, o produto dos raios é $1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

17. Um lojista comprou dois carros para vendê-los em seguida. Ele vendeu o primeiro com ganho de 40% sobre o valor da compra e o segundo com ganho de 60%. A quantia que recebeu pela venda dos dois carros foi 54% maior do que a desembolsada para a compra dos mesmos. Qual é a razão entre o preço de custo do primeiro carro e o preço de custo do segundo carro?

(A) 10:13 (B) 20:27 (C) 3:7 (D) 7:12 (E) 2:3

17. Alternativa C

Sejam p_1 e p_2 os preços de venda dos carros e, respectivamente, seus valores de custo e ganho c_1, c_2 e g_1, g_2.
Temos $g_1 = 1{,}4c_1$ e $g_2 = 1{,}6c_2$. Então $g_1 + g_2 = 1{,}4c_1 + 1{,}6c_2$. Como $g_1 + g_2 = 1{,}54(c_1 + c_2)$ temos
$1{,}4c_1 + 1{,}6c_2 = 1{,}54(c_1 + c_2) \Leftrightarrow 1{,}4c_1 + 1{,}6c_2 = 1{,}54c_1 + 1{,}54c_2 \Leftrightarrow 0{,}14c_1 = 0{,}06c_2$
$\Leftrightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{0{,}06}{0{,}14} = \frac{3}{7}$

18. Amanda tem um dado comum, com os pontos 1,2,3,4,5 e 6 em suas faces. Bruna tem um dado estranho, com os pontos 2, 2, 2, 5, 5 e 5 em suas faces. Elas combinam lançar os dois dados simultaneamente e quem tirar a maior pontuação é a vencedora. Caso os números sejam iguais, ninguém vence. Qual é a probabilidade de Bruna vencer?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{7}{18}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{11}{18}$

18. Alternativa C

A probabilidade de Bruna tirar 2 é $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e, neste caso, a probabilidade de vencer Amanda é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ e a probabilidade de Bruna tirar 5 é $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e a de vencer Amanda é $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$. Portanto, a probabilidade de vencer Amanda no lançamento dos dados é $\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1+4}{12} = \frac{5}{12}$.

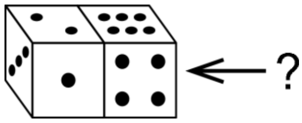
19. Numa caixa há 2015 bolinhas de gude, numeradas de 1 a 2015. Bolinhas cujos números têm somas iguais para seus algarismos têm a mesma cor e bolinhas com números cujos algarismos têm somas diferentes têm cores diferentes. Por exemplo, as bolinhas com números 12 e 13 têm cores diferentes, pois $1+2 \neq 1+3$. Quantas cores diferentes têm as bolinhas dessa caixa?

(A) 10 (B) 27 (C) 28 (D) 29 (E) 2015

19. Alternativa C

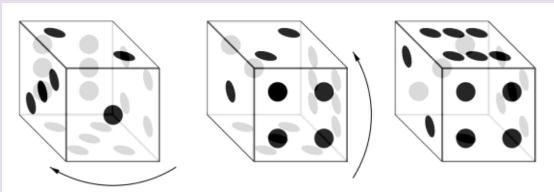
Entre os números naturais de 1 a 2015, aquele que tem a maior soma dos algarismos é 1999, que é $1+9+9+9=28$. Todos os números de 1 a 28 podem ser soma dos algarismos dos números de 1 a 2015, conforme exemplos: 1998 tem soma 27, 1997 tem soma 26, ..., 1990 tem soma 19, 1980 tem soma 18, 1970 tem soma 17, ..., 1901 tem soma 11, tem soma 10 e os números 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18 têm somas 1, 2, ..., 9, respectivamente. Portanto, há bolas de 28 cores diferentes na caixa.

20. Nos dados comuns, a soma dos pontos em faces opostas é sempre 7. Dois dados comuns iguais apoiados sobre uma mesa foram colocados em contato, como na figura. Quantos pontos podem aparecer na face não visível, indicada pelo ponto de interrogação?



(A) somente 2 (B) somente 5 (C) 2 ou 5 (D) 1, 2, 3 ou 5 (E) 2, 3 ou 5

20. Alternativa B



Observe que, no dado da esquerda, podemos determinar a posição dos números 4, 5 e 6 (pois 1 é oposto a 6, 2 é oposto a 5 e 3 é oposto a 4). Ao rotacionar o dado para ficar na mesma posição do dado da direita, percebemos que a face entre os dois dados possui um 2 e a face indicada pelo ponto de interrogação só pode ter um 5.

Problemas de 5 pontos

21. Temos, ao lado, a tabela de multiplicação dos números de 1 a 10. Qual é a soma dos 100 produtos encontrados nesta tabela?

(A) 1000 (B) 2025 (C) 2500 (D) 3025 (E) 5500

x	1	2	3	...	10
1	1	2	3	...	10
2	2	4	6	...	20
3	3	6	9	...	30
...	...	...	...	...	...
10	10	20	30	...	100

21. Alternativa D

A soma dos produtos é

$$(1+2+3+\ldots+10)+2(1+2+3+\ldots+10)+3(1+2+3+\ldots+10)+\ldots10(1+2+3+\ldots+10)=$$

$$(1+2+3+\ldots+10)(1+2+3+\ldots+10)=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2=55^2=3025.$$

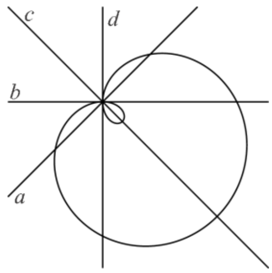
22. Se lermos as afirmações a seguir na ordem de (A) para (E), qual delas é a primeira que é verdadeira?

(A) A (C) é verdadeira. (B) A (A) é verdeira. (C) A (E) é falsa.
(D) A (B) é falsa. (E) $1+1=2$.

22. Alternativa D

Inicialmente, temos que a afirmação E é verdadeira. A partir dela, concluímos que a alternativa C é falsa, em seguida que a alternativa A é falsa, a alternativa B é falsa e a alternativa D é verdadeira. Portanto, a primeira alternativa a ser verdadeira é a D.

23. A curva ao lado é descrita pela equação $\left(x^2+y^2-2x\right)^2=2\left(x^2+y^2\right)$. Qual das retas *a*, *b*, *c*, *d* representa o eixo das ordenadas *Oy*?



(A) a (B) b (C) c (D) d (E) nenhuma delas

23. Alternativa A

A equação $\left(x^2+y^2-2x\right)^2=2\left(x^2+y^2\right)$ não se modifica se substituirmos y por $-y$, pois a variável *y* só tem expoente par, não ocorrendo o mesmo com a variável *x*. Isto significa que o gráfico da relação definida por esta equação é simétrico somente em relação ao eixo das abcissas do plano ortogonal cartesiano. No diagrama apresentado este eixo é a reta *c*, logo o eixo das ordenadas é a reta *a*.

Observação: a afirmação de que a reta *a* é realmente o eixo das ordenadas pode ser demonstrada considerando-se que é a única entre as retas *a*, *b* ou *d* que intersecta a curva em três pontos, como se segue. Façamos as substituições $y=0$ e $x=0$ na equação:

- $y=0$

$$\left(x^2+0^2-2x\right)^2=2\left(x^2+0^2\right)\Leftrightarrow\left(x^2-2x\right)^2-2x^2=0\Leftrightarrow\left(x^2-2x+\sqrt{2}x\right)\left(x^2-2x-\sqrt{2}x\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x=0 \text{ ou } x=2-\sqrt{2} \text{ ou } x=2+\sqrt{2}\right)$$

- $x=0$

$$\left(0^2+y^2-2\cdot 0\right)^2=2\left(0^2+y^2\right)\Leftrightarrow y^4-2y^2=0\Leftrightarrow\left(y=0 \text{ ou } y=-\sqrt{2} \text{ ou } y=\sqrt{2}\right)$$

Como $0<2-\sqrt{2}<2+\sqrt{2}$, concluímos da primeira substituição que a origem do sistema está na primeira ou terceira intersecções de *c* com o gráfico da equação. Mas da segunda substituição, temos que o eixo *Oy* tem 3 interseções com o gráfico da equação, logo a origem e o eixo *Oy* estão sobre a reta *a*.

24. Quantos são os polígonos regulares cujos ângulos internos têm como medida um número inteiro de graus?

(A) 17 (B) 18 (C) 22 (D) 25 (E) 60

24. Alternativa C

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular de $n\geq 3$ lados é $(n-2)180^{\circ}$, logo a medida de cada ângulo interno é $\dfrac{(n-2)180^{\circ}}{n}=\dfrac{180^{\circ}n}{n}-\dfrac{2\cdot 180^{\circ}}{n}=180^{\circ}-\dfrac{360^{\circ}}{n}$. Para que esta medida seja um número inteiro, *n* deve ser divisor de 360. Como $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5^1$, concluímos que 360 tem $(3+1)(2+1)(1+1)=4\cdot 3\cdot 2=24$ divisores. Os divisores 1 e 2 não servem, pois $n\geq 3$. Logo, há 24 – 2 = 22 possibilidades para *n*, ou seja, há 22 polígonos regulares cujos ângulos internos têm como medida um número inteiro.

25. Quantos números positivos de três algarismos podem ser representados como a soma de exatamente nove diferentes potências de dois?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

25. Alternativa E

As potências de 2 com até 3 algarismos são em número de dez: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. A soma desses dez números é 1023. Devemos tirar uma única dessas parcelas da soma, de modo que o resto seja um número de três algarismos. Esta parcela pode ser 32, 64, 128, 256 ou 512. Portanto, há 5 números que podem ser representados como soma de nove potências diferentes de base 2.

26. Quantos triângulos ABC existem tais que $m\left(A\hat{B}C\right)=90^{o}$, AB = 20 e as medidas de todos os seus lados são números inteiros?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26. Alternativa D

Se o ângulo $\hat{B}$ é reto, então $\overline{AB}$ é cateto. Sejam *a* e *b* as medidas do outro cateto e da hipotenusa, respectivamente. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos $b^2=20^2+a^2 \Leftrightarrow b^2-a^2=400 \Leftrightarrow (b-a)(b+a)=400$. Como *a* e *b* são inteiros, os dois fatores de 400 são inteiros. Logo, sendo *b* > *a*, temos:

$$\left|\begin{array}{l} b-a=1 \text{ e } b+a=400 \\ \text{ou} \\ b-a=2 \text{ e } b+a=200 \\ \text{ou} \\ b-a=4 \text{ e } b+a=100 \\ \text{ou} \\ b-a=5 \text{ e } b+a=80 \\ \text{ou} \\ b-a=8 \text{ e } b+a=50 \\ \text{ou} \\ b-a=10 \text{ e } b+a=40 \\ \text{ou} \\ b-a=16 \text{ e } b+a=25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=199{,}5 \text{ e } b=200{,}5 \\ \text{ou} \\ a=99 \text{ e } b=101 \\ \text{ou} \\ a=48 \text{ e } b=52 \\ \text{ou} \\ a=37{,}5 \text{ e } b=42{,}5 \\ \text{ou} \\ a=21 \text{ e } b=29 \\ \text{ou} \\ a=15 \text{ e } b=25 \\ \text{ou} \\ a=199{,}5 \text{ e } b=200{,}5 \end{array}\right.$$

Dessas equações, apenas quatro têm soluções inteiras. Portanto, o número triângulos que satisfazem as condições dadas é 4.

Solução alternativa

Sejam x e y as medidas do cateto $\overline{BC}$ e da hipotenusa $\overline{AC}$ do triângulo retângulo ABC, respectivamente. Pelo teorema de Pitágoras, temos $20^2+x^2=y^2 \Leftrightarrow y^2-x^2=400 \Leftrightarrow (y-x)(y+x)=400$. Como os lados são inteiros, então $y-x$ e $y+x$ também são inteiros e divisores de 400. Se $y-x=d$, sendo d um dos divisores de 400 (1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, 400), temos:

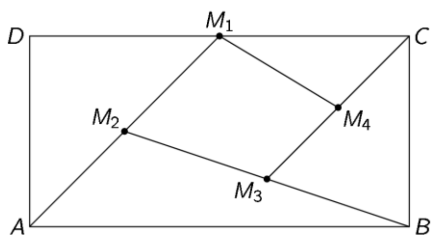
$$\begin{cases} y - x = d \\ y + x = 400/d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{200}{d} - \dfrac{d}{2} \\ y = \dfrac{200}{d} + \dfrac{d}{2} \end{cases}$$

Concluímos que para x e y serem inteiros positivos, d deve ser par, um divisor de 200 e $\dfrac{200}{d} > \dfrac{d}{2}$. Assim os possíveis valores de x e y são:

- Para $d = 2$: $x = \dfrac{200}{2} - \dfrac{2}{2} = 99$ e $x = \dfrac{200}{2} + \dfrac{2}{2} = 101$
- Para $d = 4$: $x = \dfrac{200}{4} - \dfrac{4}{2} = 48$ e $y = \dfrac{200}{4} + \dfrac{4}{2} = 52$
- Para $d = 8$: $x = \dfrac{200}{8} - \dfrac{8}{2} = 21$ e $y = \dfrac{200}{8} + \dfrac{8}{2} = 29$
- Para $d = 10$: $x = \dfrac{200}{10} - \dfrac{10}{2} = 15$ e $y = \dfrac{200}{10} + \dfrac{10}{2} = 25$
- Para $d = 16$, $x = \dfrac{200}{16} - \dfrac{16}{2} = \dfrac{9}{2} \notin N^*$
- Para $d \geq 20$, $x \leq \dfrac{200}{20} - \dfrac{20}{2} = 0$

Portanto, há 4 triângulos ABC possíveis.

27. No retângulo $ABCD$ da figura, os pontos M_1, M_2, M_3, M_4 são pontos médios dos segmentos a que pertencem. Qual é a razão entre a área do quadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ e a do retângulo $ABCD$?



(A) $\dfrac{7}{16}$ (B) $\dfrac{3}{16}$ (C) $\dfrac{7}{32}$ (D) $\dfrac{9}{32}$ (E) $\dfrac{1}{5}$

27. Alternativa C

Sejam $AB = x$ e $AD = y$. No que segue, são utilizadas várias semelhanças de triângulos.

A área do triângulo ADM_1 é igual a $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x}{2} \cdot y = \dfrac{xy}{4}$, pois M_1 é ponto médio de $\overline{CD}$. A área do triângulo ABM_2 é igual a $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{y}{2} \cdot x = \dfrac{xy}{4}$, pois M_2 é ponto médio de AM_1, logo a distância de M_2 ao lado $\overline{AB}$ é $\dfrac{y}{2}$.

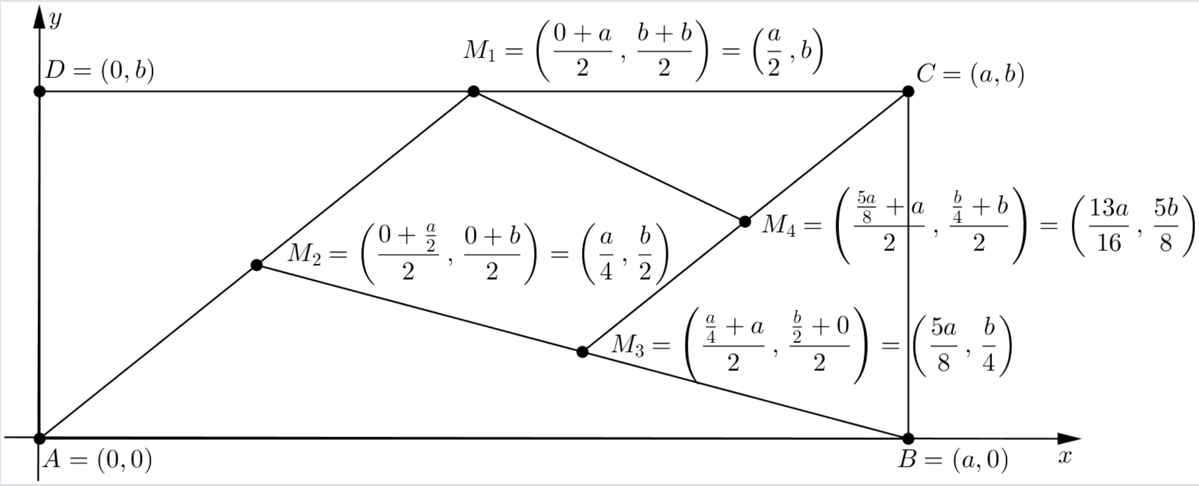
A distância de M_2 ao lado $\overline{BC}$ é $x - \dfrac{x}{4} = \dfrac{3x}{4}$ e como M_3 é ponto médio de $\overline{BM_2}$ concluímos que a distância de M_3 ao lado $\overline{BC}$ é $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3x}{4} = \dfrac{3x}{8}$. Logo, a área do triângulo BCM_3 é igual a $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3x}{8} \cdot y = \dfrac{3xy}{16}$.

A distância de M_2 ao lado $\overline{CD}$ é $\dfrac{y}{2}$. Como M_3 é o ponto médio de $\overline{BM_2}$ a distância de M_3 ao lado $\overline{AB}$ é $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{y}{2} = \dfrac{y}{4}$. Logo, a distância do ponto M_3 ao lado $\overline{CD}$ é $y - \dfrac{y}{4} = \dfrac{3y}{4}$. Como M_4 é ponto médio de $\overline{CM_3}$, a distância de M_4 ao lado $\overline{CD}$ é $\frac{1}{2}\cdot\frac{3y}{4}=\frac{3y}{8}$. Portanto, a área do triângulo CM_1M_4 é $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{3y}{8}=\frac{3xy}{32}$.

Consequentemente, a área do quadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ é igual à área do retângulo menos as áreas dos quatro triângulos acima, ou seja, $xy-2\cdot\frac{xy}{4}-\frac{3xy}{16}-\frac{3xy}{32}=\frac{32xy-16xy-6xy-3xy}{32}=\frac{7xy}{32}$. Logo, a razão entre a área desse quadrilátero e a área do retângulo é igual a $\frac{7}{32}$.

Solução alternativa

Colocando o retângulo $ABCD$ de lados a e b num sistema de coordenadas cartesianas, podemos calcular as coordenadas de cada um dos pontos médios M_1, M_2, M_3, M_4 a partir da média das coordenadas das extremidades, conforme a figura abaixo.



Portanto, a área de cada um dos triângulos AM_1D, AM_2B, BM_3C e CM_4M_1 é $\frac{b\cdot\frac{a}{2}}{2}=\frac{ab}{4}$, $\frac{a\cdot\frac{b}{2}}{2}=\frac{ab}{4}$, $\frac{b\cdot\left(a-\frac{5a}{8}\right)}{2}=\frac{3ab}{16}$ e $\frac{\left(a-\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{5b}{8}\right)}{2}=\frac{3ab}{32}$, respectivamente, e a área do quadrilátero $M_1M_2M_3M_4$ é $ab-\frac{ab}{4}-\frac{ab}{4}-\frac{3ab}{16}-\frac{3ab}{32}=\frac{7ab}{32}$, ou seja, a área deste quadrilátero é $\frac{7}{32}$ da área do retângulo $ABCD$.

28. Juliana desenhou vários retângulos azuis e vermelhos no quadro-negro, sendo que exatamente sete deles são quadrados. Além disso, há três retângulos vermelhos a mais do que quadrados azuis e dois quadrados vermelhos a mais do que retângulos azuis. Quantos retângulos azuis Juliana desenhou?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 10

28. Alternativa B

Há 7 quadrados, azuis ou vermelhos. Se x é o número de quadrados azuis, então $7-x$ é o número de quadrados vermelhos. Este número excede o número de retângulos azuis, quadrados ou não, em 2. Portanto, o número total de retângulos azuis é $7-x-2=5-x$. Logo, o número de retângulos azuis que não são quadrados é $5-x-x=5-2x$ (1). O número total de retângulos vermelhos, quadrados ou não, é $x+3$. O número total de retângulos vermelhos, não quadrados, é $x+3-(7-x)=2x-4$ (2). Comparando as equações (1) e (2), concluímos que $x=2$. Logo, o número de retângulos azuis desenhados é $5-x=5-2=3$.

29. Na hora do recreio, 96 crianças deram as mãos formando uma grande roda. Então uma criança começou a contar a partir do 1, seguida pelas demais, no sentido horário, até chegar à última criança, que contou 96. Cada criança que disse um número par saiu da roda. As restantes continuaram contando a partir do número 97, saindo novamente da roda todas que disseram um número par. Elas continuaram a brincadeira, da mesma forma, até que sobrou uma única criança. Que número esta criança disse na primeira rodada?

(A) 1 (B) 17 (C) 33 (D) 65 (E) 95

29. Alternativa D

Se há um número par de crianças ao começar uma rodada, metade delas dirá um número par e sairão da roda, sobrando a outra metade. Assim, as primeiras 6 rodadas começam com 96, 48, 24, 12, 6 e 3 crianças. Ao chegar na 6ª rodada, a princípio não sabemos se uma ou duas crianças dirão números pares, porém nós sabemos quantos números já foram contados, que são $96+48+24+12+6=186$. Assim, na 6ª rodada, elas dirão os números 187, 188 e 189. A criança do meio sairá da roda e na 7ª rodada as duas últimas dirão os números 190 e 191.

Portanto, a criança que diz o número 191 é a última a ficar na roda. Agora basta voltar até a 1ª rodada e saber qual número esta criança disse. Observe que para voltarmos do ponto em que estamos (191) até o início da roda (1), devemos adicionar uma criança à roda para cada número par dito e um número ímpar é dito por alguém que já estava na roda. Assim começamos com a última criança dizendo 191. Em seguida, devemos adicionar uma criança para dizer o número 190 e depois a última criança diz 189. Agora, devemos adicionar duas crianças para dizer os números 188 e 186, enquanto as crianças que disseram 190 e 191 agora dirão os números 187 e 185. Até agora temos quatro crianças. No próximo passo, estas crianças dirão os números 183, 181, 179 e 177, enquanto adicionaremos mais quatro crianças para dizerem os números 184, 182, 180 e 178.

Continuando esse raciocínio, a cada passo o número de crianças dobra, com as crianças que já estavam dizendo os números ímpares e as crianças que entram dizendo os números pares. A criança que diz 191 é sempre a última a falar um número a cada passo, assim ela dirá os números 191, 191 – 2 = 189, 189 – 4 = 185, 185 – 8 = 177, 177 – 16 = 161, 161 – 32 = 129 e 129 – 64 = 65. Como $65 \le 96$, este foi o número dito na 1ª rodada.

30. Bete e Beto substituem as letras da palavra KANGAROO por algarismos, de forma que o número resultante seja um múltiplo de 11. Eles substituem diferentes letras por diferentes algarismos e a mesma letra pelo mesmo algarismo, sendo K diferente do zero. Bete obtém o maior número possível enquanto que Beto obtém o menor número possível. Qual é o algarismo que substitui a mesma letra nos dois casos?

(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

30. Alternativa D
Pela regra de divisibilidade por 11, um número da forma "*KANGAROO*" será divisível por 11 se, e somente se, $K-A+N-G+A-R+O-O=K+N-G-R=11n$, para algum n inteiro, ou seja, se $K+N=G+R+11n$ para algum n.

Agora, verifiquemos qual o menor e o maior número deste formato. Tentemos minimizar o número fazendo-o começar com 102 ("*KAN*" = 102). Assim, $K+N=3$, logo $G+R$ pode ser 3 ou $3+11=14$. Como $G+R=3$

implica $\{G,R\}=\{1,2\}$ ou $\{G,R\}=\{0,3\}$ e os números 0, 1 e 2 já foram utilizados, temos que $G+R=14$ e o menor valor de G possível é 5. Assim, já temos determinados os seis primeiros dígitos ("*KANGAR*" = 102509) e escolhendo o menor dígito possível para O, temos que o menor número da forma "*KANGAROO*" múltiplo de 11 é 10250933.

Já ao tentar maximizar o número, fazendo-o começar com 987 ("*KAN*" = 987), temos $K+N=16$, logo $G+R=16$ ou $G+R=16-11=5$. Analogamente, $G+R=16$ implica $\{G,R\}=\{7,9\}$ ou $\{G,R\}=\{8\}$, e estes algarismos já foram utilizados. Assim, $G+R=5$ e o maior valor para G é 5. Assim, o maior múltiplo de 11 da forma "*KANGAROO*" é 98758066.

Comparando os dois números, o único algarismo a ser utilizado para uma mesma letra é o 5, que aparece em G nos dois casos.