Livro Eletrônico

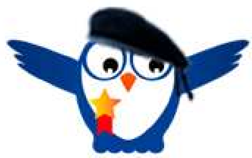
Aula 04

Matemática II p/ Escola de Sargentos das Armas (EsSA) Com videoaulas - Pós-Edital

Ismael de Paula dos Santos, Italo Marinho Sá Barreto

Aula 04: Determinantes

Sumário

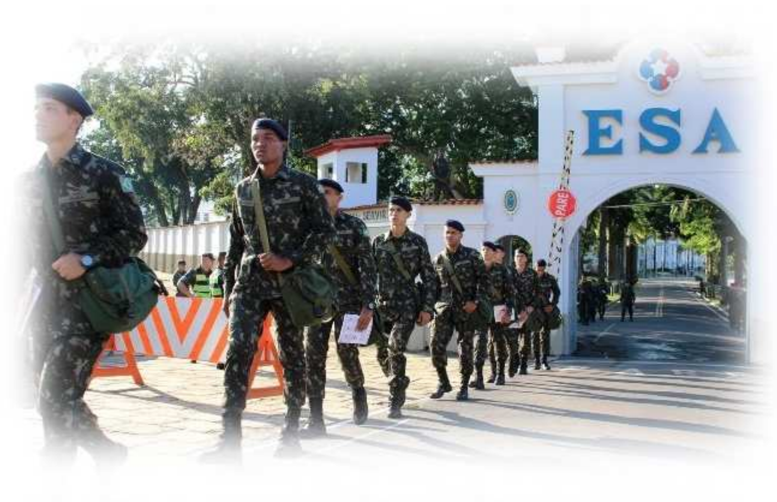


Olá estimado aluno. É um prazer tê-lo conosco novamente neste novo trajeto para o aprendizado da matemática! Sou o professor **Italo Marinho**, formado em matemática pela UERJ; atuo no ensino de matemática e física no estado do Rio de Janeiro há 12 anos com enfoque em concursos militares. Me especializei na produção de materiais didáticos dentro do mesmo enfoque.

Hoje falaremos sobre determinantes. É o segundo conteúdo do trio das matérias que constituem a *Álgebra linear*. Gostaria porém de te dar algumas dicas quanto à utilização desse material específico de determinantes. Vamos lá.

Uma coisa importante para se entender aqui (e eu mencionarei isso à medida que o material decorrer) é que o conteúdo de determinantes é dividido em duas partes: a parte de cálculos e a parte das propriedades. Há uma relevância enorme em dizer para você, estudante, que a parte de cálculos é muito mais presente e importante que a parte das propriedades. Caem com muito mais frequência.

Porém, os concursos vêm se especializando cada vez mais, a cada ano que passa. É por isso que esse livro eletrônico contemplará TODA a matéria de determinantes presentes em edital e que possam vir a serem interpretadas a partir dele. Vamos lá então?


ESA

DISPONÍVEL	*CONTEÚDO*
Aula 00	*Razões e proporções: razão de duas grandezas, proporção e suas propriedades, escala, divisão em partes direta e inversamente proporcionais, regra de três simples e composta.*
Aula 01	*Porcentagem; Juros Simples; Juros Compostos*
Aula 02	*Sequências numéricas: Lei de formação de uma sequência. Progressões aritméticas e geométricas: termo geral, soma dos termos e propriedades.*
Aula 03	*Matrizes: conceito, tipos especiais, operações e matriz inversa.*
Aula 04	*Determinantes: conceito, resolução e propriedades.*
Aula 05	*Sistemas lineares: resolução, classificação e discussão.*
Aula 06	*Números complexos: O número "i". Conjugado e módulo de um número complexo. Representação algébrica e trigonométrica de um número complexo. Operações nas formas algébrica e trigonométrica.*
Aula 07	*Polinômios (parte 1): Função polinomial; polinômio identicamente nulo; grau de um polinômio; identidade de um polinômio, raiz de um polinômio; operações com polinômios; valor numérico de um polinômio. Divisão de polinômios, Teorema do Resto, Teorema de D'Alembert, dispositivo de Briot-Ruffini.*
Aula 08	*Polinômios (parte 2): Equações polinomiais: Definição, raízes e multiplicidade. Teorema Fundamental da Álgebra. Relações entre coeficientes e raízes. Raízes reais e complexas.*
Aula 09	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*
Aula 10	*Geometria analítica: Ponto: o plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, condição de alinhamento de três pontos. Estudo da reta: equação geral e reduzida; interseção, paralelismo e perpendicularidade entre retas; distância de um ponto a uma reta; área de um triângulo.*
Aula 11	*Estudo da circunferência: equação geral e reduzida; posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e duas circunferências; tangência.*
Aula 12	*Análise combinatória: Fatorial: definição e operações. Princípio Fundamental da Contagem. Arranjos, permutações e combinações.*
Aula 13	*Probabilidade: Experimento aleatório, espaço amostral, evento. Probabilidade em espaços amostrais equiprováveis. Probabilidade da união e interseção de eventos. Probabilidade condicional. Eventos independentes.*
Aula 14	*Noções de estatística: População e amostra. Frequência absoluta e frequência relativa. Medidas de tendência central: média aritmética, média aritmética ponderada, mediana e moda.*
Aula 15	*REVISIONAL ESTRATÉGICO*

1.0– Determinantes (cálculo)

1.1– Determinantes 1×1 e 2×2

Noção preliminar

Vamos lá então ao entendimento do que sejam determinantes. Determinantes são *números reais* associados a toda e qualquer matriz *quadrada*.

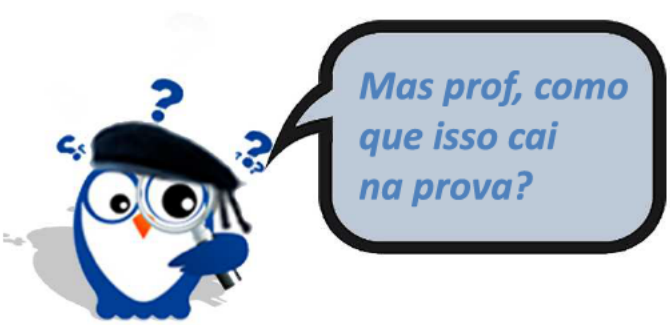
Isso significa que a qualquer matriz quadrada será sempre possível associar um número real chamado de determinante. Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad -11$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad 23$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad -150$$

Acima vemos os números à direita (os determinantes) associados às matrizes à esquerda. Na aula de hoje aprenderemos essencialmente duas coisas: como calculamos esses determinantes e algumas propriedades relacionadas aos determinantes.



As questões EEAr e ESA cobram praticamente apenas os determinantes 1×1, 2×2 e 3×3. As questões dos outros concursos cobram algumas coisas extras que também podem vir a cair nos dois primeiros concursos. Fica esperta então, coruja. Para a gente não se surpreender com as questões que porventura virão a cair, temos de dar uma boa olhada em tudo. Tudo de boas? Daqui a pouco já vamos começar a calcular alguns determinantes. Começaremos pelo simples determinante 1×1, mas antes, algumas notações de determinantes. Sigamos!

Notações

Considere a matriz que apresentamos inicialmente: $A \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. Existem duas principais formas de escrevermos o determinante dessa matriz: Seguem as duas maneiras:

$$\det A \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Veja que na segunda notação apresentada, a "matriz" é apresentada por inteiro porém ao invés de colchetes ou parênteses, apresentam-se barras verticais. Coloquei a palavra *matriz* entre aspas porque não se trata mais de uma matriz; a partir do momento que trocamos os parênteses por barras verticais a expressão deixa de ser uma matriz e passa a ser um *número real*, lembremo-nos sempre disso.

Vamos então aprender a calcular o nosso primeiro determinante.

Determinante 1×1

Esse é realmente bem simples, sem mistério algum. Consideremos uma matriz $A \quad [a_{11}]$. O determinante de A pode ser calculado da seguinte forma:

$$\det A \quad a_{11}.$$

Simples, não é? O determinante de uma matriz 1×1 terá valor igual ao próprio elemento único desta matriz. Veja um exemplo.

Considere a matriz $B \quad [-7]$. Então $\det B \quad -7$, visto que -7 é o elemento único de B. Essa regra segue sem muitos mistérios, ok?

Vamos então ao próximo determinante, o 2×2.

Determinante 2×2

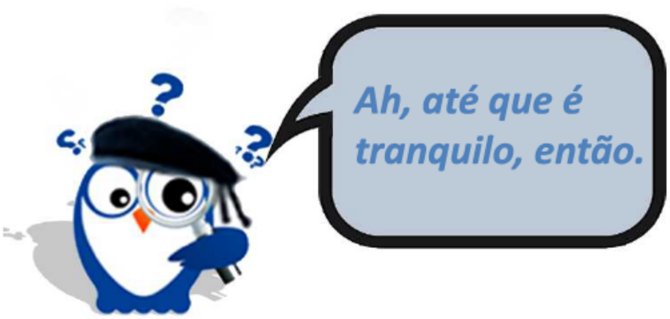
Seja $A \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. O determinante dessa matriz será o produto dos termos da diagonal principal subtraído do produto dos termos da diagonal secundária. Dessa forma aqui:

$$\det A \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Podemos utilizar então a nossa primeira matriz como exemplo. Vejamos: como podemos calcular o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$. Utilizando o que acabamos de aprender:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} \quad 1 \cdot 9 - 5 \cdot 4 \quad 9 - 20 \quad -11.$$

Pela notação que estou utilizando para facilitar o cálculo do determinante, estou multiplicando primeiro os elementos que estão conectados pela linha vermelha e, por último, aqueles conectados pela linha azul.



Sim, sim! A maior dificuldade aqui nem é entender como calcular o determinante; a maior dificuldade é não errar as contas. Até mesmo no próximo, que será o 3×3. Verá que também não é difícil, mas cria possibilidades muito grandes de erros. Não se preocupe. O assunto é razoavelmente tranquilo. Vamos lá então? Aprenderemos a calcular agora os determinantes 3×3; ouso dizer que são os mais cobrados dentre todos, sempre figuram nas principais provas.

1.2– DETERMINANTES 3×3

Seja $A \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Para calcularmos o determinante de uma matriz 3×3, como essa, que está em sua forma geral, utilizamos a conhecida *Regra de Sarrus*. Vejamos como a utilizamos em um exemplo:

Calculemos o determinante da matriz apresentada na seção inicial, isto é, a matriz:

$$A \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para fazermos isso, agimos da seguinte forma. Primeiro, repetimos as primeiras duas colunas ao lado da matriz. Depois, multiplicamos elementos da matriz original da seguinte forma:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right.$$

Primeiro multiplicamos os elementos que estão conectados em vermelho e somamos os resultados:

$$0 \cdot 9 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \cdot (-1) \quad 0 + 1 - 8$$
$$-7.$$

Agora, multiplicamos o que está em azul, porém, *alterando o sinal do produto*:

$$36 + 0 - 6 \quad 30.$$

Agora basta somar ambos os resultados encontrados: $30 + (-7) \quad 23.$

(ESSA-2009) QUESTÃO 1

Uma matriz B de ordem 3, é tal que, em cada linha, os elementos são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 2. Se as somas dos elementos da primeira, segunda e terceira linhas valem 6, 3 e 0, respectivamente, o determinante de B é igual a:

(a) 1
(b) 0
(c) -1
(d) 3
(e) 2

R: Demos uma olhada na matriz B:

$$B \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Vou chamar os elementos a_{12}, a_{22} e a_{32} de x, y e z respectivamente. Dessa forma, como cada linha corresponde a uma PA e, como já foi visto na de sequências numéricas:

$$B \quad \begin{pmatrix} x-2 & x & x+2 \\ y-2 & y & y+2 \\ z-2 & z & z+2 \end{pmatrix}.$$

Como as somas são respectivamente $6, 3$ e 0, temos:

$$\begin{array}{ccc} x-2+x+x+2 \quad 6 & y-2+y+y+2 \quad 3 & z-2+z+z+2 \quad 0 \\ 3x \quad 6 & 3y \quad 3 & 3z \quad 0 \\ x \quad 2 & y \quad 1 & z \quad 0 \end{array}$$

Daí:

$$B \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculando o determinante:

$$\det B \quad \left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \det B \quad & 0 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) \cdot 0 - (-2) \cdot 1 \cdot 4 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 \\ & 0 - 12 + 0 + 8 + 0 + 4 \\ & 0. \end{aligned}$$

Gabarito: B

(EEAR-2000) QUESTÃO 2

Seja $A \quad (a_{ij})$ uma matriz real quadrada de ordem 2 e I_2 a matriz identidade também de ordem 2. Se r_1 e r_2 são as raízes da equação $\det(A - r \cdot I_2) \quad nr$, onde n é um número inteiro positivo, podemos afirmar que:

(a) $r_1 + r_2 \quad a_{11} + a_{22}$

(b) $r_1 + r_2 \quad n(a_{11} + a_{22})$

(c) $r_1 \cdot r_2 \quad \det A$

(d) $r_1 \cdot r_2 \quad -n \cdot \det A$

R: Vamos então abrir a equação informada, chamando $A \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$:

$$\det(A - r \cdot I_2) \quad nr$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \quad nr$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\right] \quad nr$$

$$\det\left[\begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{pmatrix}\right] \quad nr$$

Efetuando o cálculo do determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{vmatrix} \quad nr$$

$$(a_{11} - r)(a_{22} - r) - a_{12}a_{21} \quad nr$$

$$a_{11}a_{22} - a_{11}r - a_{22}r + r^2 - a_{12}a_{21} \quad nr$$

$$r^2 - a_{11}r - a_{22}r - nr + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad 0$$

$$r^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22} + n)}_{\text{soma}}r + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\text{produto}} \quad 0.$$

Veja que chegamos a uma equação de 2º grau de raízes r_1 e r_2, tais que:

$$r_1 + r_2 \quad a_{11} + a_{22} + n$$

$$r_1 \cdot r_2 \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Veja também que $\det A \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Logo, podemos concluir que:

$$r_1 \cdot r_2 \quad \det A.$$

Gabarito: C

(EEAR-2001) QUESTÃO 3

Dada a equação $\begin{vmatrix} x & m & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} \quad 0$, quais os valores de m para os quais as raízes são reais?

(a) $m \leq 3$
(b) $m \geq -1$
(c) $-1 \leq m \leq 3$
(d) $m \leq -1$ ou $m \geq 3$

R: Façamos os cálculos:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & m & -1 & x & m \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 0 & 1 \end{array}\right. \quad 0$$

$$\begin{aligned} x^2 + 0 + 1 - 0 - x + mx &\quad 0 \\ x^2 + 1 - x + mx &\quad 0 \\ x^2 + (m-1)x + 1 &\quad 0. \end{aligned}$$

Para que as raízes sejam reais, basta que $\Delta \geq 0$ (isso baseado no nosso conhecimento de equações de segundo grau, assunto discutido no conteúdo de matemática I). Temos então a resolução da inequação:

$$
\begin{aligned}
\Delta &\geq 0\\
(m-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 &\geq 0\\
(m-1)^2 - 4 &\geq 0\\
(m-1)^2 &\geq 4\\
\sqrt{(m-1)^2} &\geq \sqrt{4}\\
|m-1| &\geq 2\\
m-1 \leq -2 \text{ ou } m-1 &\geq 2\\
m \leq -1 \text{ ou } m &\geq 3.
\end{aligned}
$$

Gabarito: D

(EEAR-2002) QUESTÃO 4

Os valores de x que tornam verdadeira a igualdade $\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & x \end{vmatrix} \quad -2$ são tais que seu produto p é elemento do conjunto

(a) $\{p \in \mathbb{R} \mid p > -3\}$
(b) $\{p \in \mathbb{R} \mid -3 < p \leq 2\}$
(c) $\{p \in \mathbb{R} \mid p < -6\}$
(d) $\{p \in \mathbb{R} \mid -6 \leq p < 2\}$

R: Calculemos o determinante:

$$
\begin{aligned}
\left|\begin{array}{ccc|cc} x & 0 & 2 & x & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & x & 3 & 1 \end{array}\right. &\quad -2\\
-x^2 + 0 - 2 + 6 - x + 0 &\quad -2\\
-x^2 + 4 - x &\quad -2\\
-x^2 - x + 6 &\quad 0\\
x^2 + x - 6 &\quad 0.
\end{aligned}
$$

Veja que os valores de x que satisfazem a equação acima têm produto p -6. Daí, claro, $-6 \leq p < 2$.

Gabarito: D

(EEAR-2002) QUESTÃO 5

Pode-se afirmar que o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} a-x & 0 & 1 \\ 0 & 2-x & x-2 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

é igual a:

(a) $x^2 - 2$
(b) $x^2 + 2x$
(c) $x(x-2)$
(d) $x(x-2a-2)$

R: Até poderíamos usar o Teorema de Laplace, mas não vale o esforço. Façamos as contas normalmente:

$$\det A \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a-x & 0 & 1 & a-x & 0 \\ 0 & 2-x & x-2 & 0 & 2-x \\ a & 0 & 1 & a & 0 \end{array}\right.$$

$$(a-x)(2-x) + 0 + 0 - a(2-x) - 0 - 0$$
$$(a-x)(2-x) - a(2-x)$$

Podemos colocar $2-x$ em evidência:

$$(a-x)(2-x) - a(2-x)$$
$$(2-x)[(a-x) - a]$$
$$(2-x)(-x)$$

Podemos então distribuir o sinal dentro do parêntese:

$$(2-x)(-x)$$
$$(-x)(2-x)$$
$$x(x-2).$$

Gabarito: C

(EEAR-2002) QUESTÃO 6

O determinante da matriz A de ordem 3, tal que a_{ij} $\begin{cases} 2i-j, \text{ se } i \,/\, j \\ 2i, \text{ se } i \quad j \end{cases}$ é igual a:

(a) 72
(b) 60
(c) 48
(d) 40

R: Primeiro, vamos montar a matriz apresentada:

$$A \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Os elementos a_{11}, a_{22} e a_{33} (elementos da diagonal principal) são os casos em que $i \quad j$. O resto seriam os casos em que $i \,/\, j$. Temos então:

$$A \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 1-2 & 2\cdot 1-3 \\ 2\cdot 2-1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 2-3 \\ 2\cdot 3-1 & 2\cdot 3-2 & 2\cdot 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Agora, calculando o determinante:

$$\begin{aligned}
\det A \quad & \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \end{array}\right. \\
\det A \quad & 48 + 0 - 12 + 20 - 8 - 0 \\
\det A \quad & 48 - 12 + 20 - 8 \\
\det A \quad & 48.
\end{aligned}$$

Gabarito: C

(EEAR-2003) QUESTÃO 7

Seja $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & x & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 64. O valor de x que torna verdadeira a igualdade é

(a) 4
(b) 5
(c) -4
(d) -5

R: Façamos os cálculos:

$$\begin{aligned}
\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & x & 0 & 4 & x \\ -2 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right. \quad & 64 \\
-4x + 0 + 0 + 12x - 0 + 24 \quad & 64 \\
8x \quad & 40 \\
x \quad & 5.
\end{aligned}$$

Gabarito: B

(EEAR-2005) QUESTÃO 8

Se $A \quad (a_{ij})$ é a matriz quadrada de ordem 2 em que

$a_{ij} \quad \begin{cases} 2 & \text{se } i < j \\ i+j & \text{se } i \quad j \\ i-j & \text{se } i > j \end{cases}$, então o determinante da matriz A é

(a) -10.

(b) 10.

(c) -6.

(d) 6.

R: A matriz proposta é a seguinte:

$$A \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Os termos da diagonal principal (a_{11} e a_{22}) são os casos em que $i \quad j$. O termo a_{12} é o caso $i < j$ e a_{21} o caso $i > j$. Então:

$$\begin{aligned} A & \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ & \quad \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2-1 & 2+2 \end{pmatrix} \\ & \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

O determinante dessa matriz será, então:

$$\begin{aligned} \det A & \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ & \quad 8-2 \\ & \quad 6. \end{aligned}$$

Gabarito: D

(EEAR-2007) QUESTÃO 9

Se as matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{bmatrix}$ têm determinantes respectivamente iguais a x e y, e ad / bc, então o valor de $\frac{y}{x}$ é

(a) $2.$
(b) $3.$
(c) $-6.$
(d) $-4.$

R: Vamos fazer as contas:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} & \quad x \\ ad - bc & \quad x \end{aligned}$$

Temos também:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{vmatrix} & \quad y \\ -6ad + 6bc & \quad -y \\ 6ad - 6bc & \quad -y \\ 6(\underbrace{ad - bc}_{x}) & \quad -y \\ 6x & \quad -y \\ \frac{y}{x} & \quad -6. \end{aligned}$$

Gabarito: C

(EEAR-2009) QUESTÃO 10

Seja a matriz M $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{bmatrix}$. Se $\det M \quad ax^2 + bx + c$, então o valor de a é

(a) 12.
(b) 10.
(c) -5.
(d) -7.

R: Façamos as contas:

$$\det M \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x & 2 & -3 \\ 4 & 9 & x^2 & 4 & 9 \end{array}\right|$$

$$ax^2 + bx + c \quad -3x^2 + 4x + 18 + 12 - 9x - 2x^2$$

$$ax^2 + bx + c \quad -5x^2 - 5x + 30.$$

Daí $a \quad -5$, $b \quad -5$ e $c \quad 30$.

Gabarito: C

(EEAR-2011) QUESTÃO 11

Sejam as matrizes $A \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. O valor de $\dfrac{\det A}{\det B}$ é:

(a) 4.
(b) 3.
(c) -1.
(d) -2.

R: Basta fazermos os cálculos. Primeiro o determinante de A:

$$\det A \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right|$$

$$10 + 3 + 0 - 45 - 4$$

$$-36.$$

E agora o determinante de B

$$\begin{aligned} \det B \quad & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} \\ & 18 - 0 \\ & 18. \end{aligned}$$

Então $\dfrac{\det A}{\det B} \quad \dfrac{-36}{18} \quad -2.$

Gabarito: D

(EEAR-2013) QUESTÃO 12

O número real x, tal que $\begin{vmatrix} x-1 & x+2 \\ -3 & x \end{vmatrix} \quad 5$, é

(a) -2
(b) -1
(c) 0
(d) 1

R: Façamos as contas:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x-1 & x+2 \\ -3 & x \end{vmatrix} & \quad 5 \\ x(x-1) - (x+2)(-3) & \quad 5 \\ x^2 - x + 3x + 6 & \quad 5 \\ x^2 + 2x + 1 & \quad 0 \\ (x+1)^2 & \quad 0 \\ x + 1 & \quad 0 \\ x & \quad -1. \end{aligned}$$

Gabarito: B

(EEAR-2015) QUESTÃO 13

Se $\begin{vmatrix} 2x & y & 0 \\ z & 0 & 2y \\ 0 & 2z & 0 \end{vmatrix} \quad 16\sqrt{3}$, então $(xyz)^2$ é igual a:

(a) 8
(b) 12
(c) 24
(d) 36

R: Abramos o determinante:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2x & y & 0 & 2x & y \\ z & 0 & 2y & z & 0 \\ 0 & 2z & 0 & 0 & 2z \end{array}\right| \quad 16\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{rl} 0+0+0-0-8xyz-0 & 16\sqrt{3} \\ -8xyz & 16\sqrt{3} \\ xyz & -2\sqrt{3} \\ (xyz)^2 & (-2\sqrt{3})^2 \\ (xyz)^2 & 4\cdot 3 \\ (xyz)^2 & 12. \end{array}$$

(EEAR-2016) QUESTÃO 14

Para que o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ seja 3, o valor de b deve ser igual a

(a) 2
(b) 0

(c) -1
(d) -2

R: Façamos os cálculos:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right. \quad 3$$

$$\begin{array}{rl} 0-b+2-0-2b+1 & 3 \\ -3b+3 & 3 \\ -3b & 0 \\ b & 0. \end{array}$$

Gabarito: B

(EEAR-2018) QUESTÃO 15

Se $A \quad \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & 2 \\ y & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $\det A \quad 4\sqrt{3}$, então x^2y^2 é igual a:

(a) 24
(b) 12
(c) 6
(d) 3

R: Fazendo as contas:

$$
\begin{aligned}
\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & x & y & 0 & x \\ x & 0 & 2 & x & 0 \\ y & 2 & 0 & y & 2 \end{array}\right. &\quad 4\sqrt{3} \\
0 + 2xy + 2xy - 0 - 0 - 0 &\quad 4\sqrt{3} \\
4xy &\quad 4\sqrt{3} \\
xy &\quad \sqrt{3} \\
(xy)^2 &\quad (\sqrt{3})^2 \\
x^2y^2 &\quad 3.
\end{aligned}
$$

Gabarito: D

(EEAR-2018) QUESTÃO 16

Considere a matriz $A \quad \begin{bmatrix} 1 & x-1 \\ 2x & 4x-1 \end{bmatrix}$. Os termos $x-1$, $2x$, $4x-1$, são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão aritmética. Dessa forma, $\det(A)$ é igual a

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

R: Para calcularmos x, utilizamos o fato de que $(x-1, 2x, 4x-1)$ é uma PA. Pelos nossos conhecimentos de progressões aritméticas, o termo central é a média aritmética dos extremos. Então:

$$
\begin{aligned}
2x &\quad \frac{x-1+4x-1}{2} \\
4x &\quad x-1+4x-1 \\
0 &\quad x-1-1 \\
x &\quad 2.
\end{aligned}
$$

Daí: $A \quad \begin{bmatrix} 1 & x-1 \\ 2x & 4x-1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2-1 \\ 2\cdot 2 & 4\cdot 2-1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, e, com isso:

$$\begin{aligned} \det A \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ & 1\cdot 7 - 1\cdot 4 \\ & 3. \end{aligned}$$

Gabarito: C

(ESPCEX-2014) QUESTÃO 17

Seja x um número real, I a matriz identidade de ordem 2 e A a matriz quadrada de ordem 2, cujos elementos são definidos por $a_{ij} \quad i-j$. Sobre a equação em x definida por $\det(A-xI) \quad x+\det A$ é correto afirmar que

(a) as raízes são 0 e $\frac{1}{2}$.
(b) todo x real satisfaz a equação.
(c) uma raiz é nula e a outra negativa.
(d) apresenta apenas raízes inteiras.
(e) apresenta apenas raízes negativas.

R: Montemos, primeiro, a matriz A:

$$\begin{aligned} A \quad & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1-1 & 1-2 \\ 2-1 & 2-2 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculemos o determinante de A:

$$\begin{aligned} \det A \quad & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ & 0+1 \\ & 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos abrir a equação informada:

$$\begin{aligned} \det(A - xI) \quad & x + \det A \\ \det\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \quad & x+1 \\ \det\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right] \quad & x+1 \\ \det\left[\begin{pmatrix} 0-x & -1-0 \\ 1-0 & 0-x \end{pmatrix}\right] \quad & x+1 \\ \det\left[\begin{pmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}\right] \quad & x+1 \\ x^2+1 \quad & x+1 \\ x^2-x \quad & 0 \\ x(x-1) \quad & 0 \end{aligned}$$

Há, portanto, duas raízes: $x \quad 0$ e $x \quad 1$ havendo, portanto, apenas raízes inteiras.

Gabarito: D

(EFOMM-2005) QUESTÃO 18

Dadas as matrizes $A \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e considerando $n \quad \det(AB)$, determine 7^n.

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) 4

R: Temos então:

$$A \cdot B \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \end{bmatrix}.$$

Isso nos permite concluir que:

$$A \cdot B \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Veja que as linhas 2 e 3 dessa matriz são múltiplas uma da outra. Logo, o determinante é nulo, e daí $n \quad \det(AB) \quad 0 \Rightarrow 7^n \quad 7^0 \quad 1$.

Gabarito: B

(EFOMM-2012) QUESTÃO 19

Considere a matriz $A \quad \begin{bmatrix} x & 2-x & 1 \\ 2 & 3x+1 & -1 \\ -4x+1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, então o valor de f no ponto de abscissa 1, onde $f(x) \quad \det A$, é:

(a) 18
(b) 21

(c) 36
(d) 81
(e) 270

R: Façamos inicialmente $x \quad 1$ (absicssa 1):

$$A \quad \begin{bmatrix} x & 2-x & 1 \\ 2 & 3x+1 & -1 \\ -4x+1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2-1 & 1 \\ 2 & 3\cdot 1+1 & -1 \\ -4\cdot 1+1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando agora o determinante, calcularemos $f(1)$, que é o que a questão pede:

$$\det A \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right.$$
$$0+3+4+12+2-0$$
$$21.$$

Gabarito: B

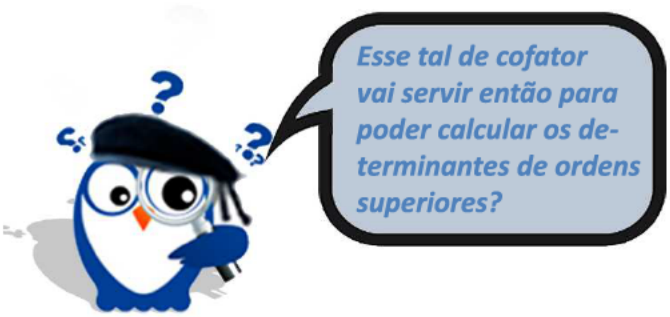
1.3– DETERMINANTES QUAISQUER

Cofator

Bom, agora começaremos a falar sobre o cálculo de determinantes de ordens superiores, isto é, 4×4, 5×5, etc. Na verdade, o método que utilizaremos a seguir serve para calcular *qualquer* determinante.

Gostaria de repetir e reiterar aqui o seguinte: para concursos EEAr/ESA esse tema é mais raro, menos frequente. Para concursos AFA/EFOMM/EsPCEx/EN são mais frequentes. Porém, nossos livros eletrônicos têm a natureza de te entregar sempre TODO o conteúdo que determinado tema poderia vir a exigir. Daí, para não sermos pegos de surpresa, o melhor é estudarmos todo o conteúdo.

Aprenderemos agora o chamado *Teorema de Laplace*. Para isso, precisamos inicialmente aprender o que vem a ser um *cofator*. Vamos lá então?



Exatamente, coruja! Os cofatores aqui terão utilidade prática quase que unicamente para isso. Porém, os cofatores também têm uma utilidade prática no cálculo da inversa de uma matriz, método que, em geral, é muito mais prático que o método convencional. Então vamos lá entender o que vem a ser um cofator e como calculamos essa grandeza.

Um cofator não é mais do que um número associado a cada um dos termos de uma matriz qualquer. O que eu quero dizer com isso é que, por exemplo, o termo a_{23} de uma matriz possui o seu respectivo cofator.

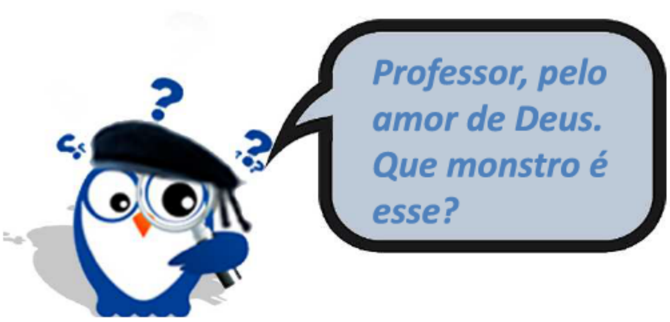
Para entendermos melhor, dê uma boa olhada na matriz abaixo:

$$A \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & -17 \end{pmatrix}.$$

Quantos termos ela possui? Ora, possui nove termos, correto? Por causa disso, podemos dizer que ela possui também nove cofatores, cada um associado a cada um dos dos termos dessa matriz. Então, novamente: cada termo de uma matriz possui um respectivo cofator. Exatamente assim. Ok? Leia e releia esse trecho, estudante, antes de irmos a fundo no cálculo.

Bom, então temos que avaliar agora como podemos calcular, de fato, um cofator. A fórmula para o cálculo de um cofator é a seguinte:

$$\boxed{c_{ij} \quad (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}.}$$



Haha, calma coruja! A fórmula parece complicada mas não é. Fique tranquila. O que precisamos aqui é de alguns exemplos de utilização, para que possamos nos sentir mais seguros em relação

à aplicação. Mas fique calma que com paciência e dedicação tudo conseguimos, ok? Bom, vamos então à utilização.

Primeiro, entendamos o que significa c_{ij}. Como eu disse há pouco, cada termo de uma matriz possui esse número mágico chamado de cofator. Quando escrevemos c_{ij} estamos escrevendo a notação para o cálculo do cofator do termo a_{ij}. Então se eu te peço, por exemplo, para calcular c_{13}, essa notação significará que estamos interessados em calcular o *cofator de* a_{13}. Até aí, foi?

Então suponhamos que queiramos calcular o cofator de a_{21}, de uma matriz qualquer. Escreveremos então, de acordo com a nossa notação, c_{21} como o cofator procurado. Perceba que, por enquanto, não estamos interessados em calcular o cofator. Estamos interessados somente na notação, isto é, na forma de representá-lo. Usaremos essa notação no decorrer do material. Se ainda não conseguiu entendê-la, releia desde o início da seção ou acesso os nossos fóruns para posteriores dúvidas. O objetivo é que você consiga entender tudo.

Vamos agora ao cálculo do cofator de um elemento qualquer de uma matriz. Dê uma olhada novamente na fórmula para o cálculo dos cofatores. Você a entendeu bem? Ou existe alguma parte dela que ficou meio que misteriosa ainda?

Só para trazê-la mas para perto de nossos olhos, observe novamente a fórmula: $c_{ij} \quad (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$. Veja que i e j são os índices característicos da linha e da coluna do elemento a que se deseja calcular o cofator. Por exemplo, se quiséssemos calcular o cofator do elemento a_{21} de determinada matriz, nossas contas ficariam da seguinte forma:

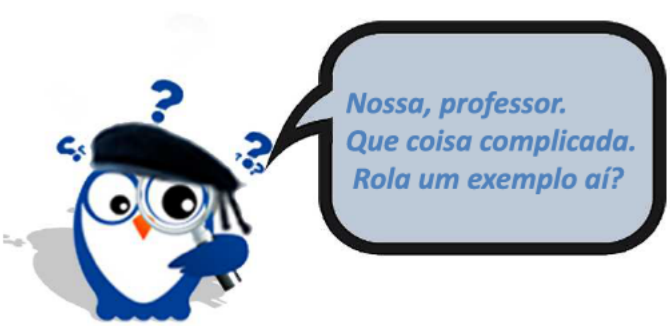
$$
\begin{aligned}
c_{ij} & \quad (-1)^{i+j} \cdot D_{ij} \\
c_{21} & \quad (-1)^{2+1} \cdot D_{21} \\
& \quad (-1)^{3} \cdot D_{21} \\
& \quad (-1) \cdot D_{21} \\
& \quad -D_{21}
\end{aligned}
$$

O cálculo ficaria assim, você concorda? Mas o que raios seriam esse D_{21}? Não estamos familiarizados com essa notação ainda, mas esse D_{ij} no final da fórmula dos cofatores é algo que chamamos de *menor complementar*. Não se preocupe muito com a nomenclatura aqui, jovem. Não é a coisa mais importante do mundo. O importante é você entender que para calcularmos esse tal de cofator, precisaremos aprender a calcular o menor complementar. Agora, como funciona?

Funciona assim. Consideremos a matriz que usamos como exemplo há pouco:

$$A \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & -17 \end{pmatrix}.$$

Assim como o cofator, cada elemento de uma matriz quadrada qualquer também possui esse tal de menor complementar. Podemos calculá-lo da seguinte maneira: primeiro, envolvemos o termo ao qual se deseja calcular o menor complementar. Depois, *excluímos a linha e a coluna a qual esse termo faz parte. Depois, finalmente, calculamos o determinante da matriz formada com os termos restantes.*



Claro, corujinha. Eu não passaria uma coisa complicada dessas para você se eu não pudesse passar ao mesmo tempo um exemplo para complementar o raciocínio. Eu tenho plena noção de que isso é algo complicado e novo para você e para o jovem estudante que está estudando por esse livro eletrônico. E, como já disse, passarei alguns exemplos para conseguirmos assentar bem a teoria. Vamos lá então, continuar no cálculo do menor complementar para, então, conseguirmos aprender a calcular o cofator.

Vejamos então como calcular, por exemplo, o menor complementar do termo a_{21}, isto é, D_{21}. Primeiro, envolvemos o termo a_{21}, como abaixo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & -17 \end{pmatrix}$$

Agora, cortamos a linha e a coluna associadas àquele elemento, como abaixo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & -17 \end{pmatrix}$$

Percebe que sobraram quatro elementos? Pois bem, esses quatro elementos formarão uma nova matriz, como a abaixo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}.$$

Agora, basta calcularmos o determinante da matriz que sobrou, e esse resultado será o menor complementar do elemento a_{21}:

$$\begin{aligned} D_{21} \quad & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 17 \end{vmatrix} \\ & (-1) \cdot 17 - 3 \cdot (-1) \\ & -17 + 3 \\ & -14. \end{aligned}$$

Portanto o menor complementar do termo a_{21} é -14. Perceba que isso nos diz de imediato qual é o cofator do termo a_{21}, observe:

$$\begin{aligned} c_{ij} \quad & (-1)^{i+j} \cdot D_{ij} \\ c_{21} \quad & (-1)^{2+1} \cdot D_{21} \\ & (-1)^{3} \cdot (-14) \\ & (-1) \cdot (-14) \\ & 14. \end{aligned}$$

Então o cofator do termo a_{21} é 14, isto é, $c_{21} \quad 14$. Vejamos outro exemplo, para garantirmos máxima fixação.

QUESTÃO 20

Considere a matriz $B \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcule o cofator do termo a_{23}, isto é, calcule c_{23}.

(a) -3
(b) 0
(c) 3
(d) 6

R: Bom, para calcularmos c_{23}, isto é, o cofator do elemento a_{23}, precisaremos calcular primeiro o menor complementar (D_{23}). Façamos isso então. Primeiro, envolvemos o elemento que se deseja calcular o menor complementar:

$$B \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Após isso, cortamos a linha e a coluna a que aquele termo faz parte:

$$B \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Após isso, reunimos os elementos restantes numa nova matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Depois, finalmente, calculamos o determinante resultante. Como no caso temos uma matriz 3×3, teremos de utilizar a Regra de Sarrus:

$$D_{23} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 9 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right.$$

$$1 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \cdot (-1) + 9 \cdot (-1) \cdot 0 - 9 \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) \cdot 0 - 3 \cdot (-1) \cdot (-2)$$

$$0 + 9 + 0 - 0 - 0 - 6$$

$$3.$$

Isso nos diz que o menor complementar D_{23} 3. Daí podemos substituir na fórmula do cofator:

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &\quad (-1)^{i+j} \cdot D_{ij} \\
c_{23} &\quad (-1)^{2+3} \cdot D_{23} \\
c_{23} &\quad (-1)^{5} \cdot 3 \\
c_{23} &\quad (-1) \cdot 3 \\
c_{23} &\quad -3.
\end{aligned}
$$

Gabarito: C

Então essa é a forma de calcularmos o cofator de um termo qualquer de uma matriz. Tudo bem, estimado e caro aluno? Para podermos entender o Teorema de Laplace, que veremos sem seguida, precisarei que você esteja sabendo calcular um cofator qualquer de qualquer matriz. Esteja atento a isso. Vamos lá então.

Teorema de Laplace

O Teorema de Laplace, como já dito, servirá para calcularmos o determinante de uma matriz qualquer. Sem mais delongas, vamos ao Teorema.

Seja A uma matriz quadrada qualquer. Escolha uma linha ou uma coluna dessa matriz, qualquer uma das duas. Agora efetue a soma dos produtos de cada termo dessa linha/matriz com o seu respectivo cofator. Pois bem, essa soma terá valor igual ao do determinante dessa matriz A.

E sim, eu já sei que a gente não entendeu direito o que eu quis dizer com isso. Relaxa. Vamos ver um exemplo de aplicação desse Teorema. Observe a matriz abaixo:

$$
A \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Suponha que queiramos calcular o determinante dessa matriz. Pois bem, então, pelo Teorema de Laplace, devemos primeiro, antes de tudo, escolher uma linha ou uma coluna. Existe um critério de preferência para essa escolha: prefira escolher a linha ou a coluna que possua mais termos nulos, isto é, que possua mais “zeros”. No caso da matriz exposta, é claro que a linha 2 é aquela a ser escolhida, pois é aquela com a maior quantidade de termos nulos.

Escolhida a linha 2, devemos agora efetuar a soma dos produtos de cada termo pelos seus respectivos cofatores, isto é, devemos efetuar a seguinte operação:

$$\det A \quad a_{21} \cdot c_{21} + a_{22} \cdot c_{22} + a_{23} \cdot c_{23} + a_{24} \cdot c_{24}.$$

Agora, fará sentido o porquê de termos escolhido a linha com mais zeros. É porque como a_{21} a_{23} a_{24} 0, ficaremos com:

$$\begin{aligned} \det A \quad & a_{21} \cdot c_{21} + a_{22} \cdot c_{22} + a_{23} \cdot c_{23} + a_{24} \cdot c_{24} \\ & 0 \cdot c_{21} + 4 \cdot c_{22} + 0 \cdot c_{23} + 0 \cdot c_{24} \\ & 4 \cdot c_{22}. \end{aligned}$$

Daí, não precisaremos calcular os quatro cofatores, apenas um deles, visto que os outros termos se anularam! Então vamos ao cálculo dele (aproveitando para reforçar essa ideia para o cálculo do cofator). Primeiro, precisamos calcular o menor complementar do elemento a_{22}. Para isso, precisamos primeiro envolver o elemento a_{22}:

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora excluímos a linha e a coluna associadas a esse elemento:

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

E agora reunimos os termos restantes em uma matriz à parte:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando esse determinante:

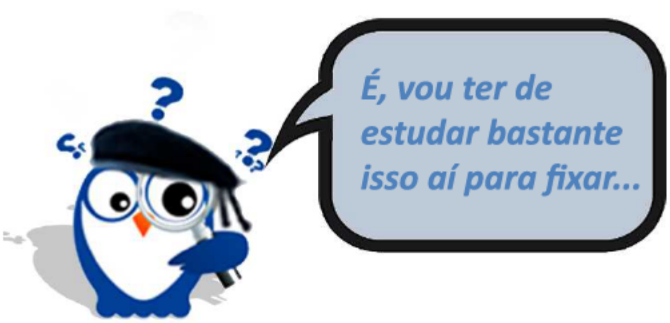
$$
\begin{aligned}
D_{22} \quad & \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 9 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right. \\
& 1\cdot 4\cdot 0+(-1)\cdot 1\cdot 0+9\cdot 2\cdot(-1)-0\cdot 4\cdot 9-(-1)\cdot 1\cdot 1-0\cdot 2\cdot(-1) \\
& 0+0-18+0+1-0 \\
& -17.
\end{aligned}
$$

Substituindo na fórmula para o cálculo do cofator, temos:

$$
\begin{aligned}
c_{ij} \quad & (-1)^{i+j}\cdot D_{ij} \\
c_{22} \quad & (-1)^{2+2}\cdot D_{22} \\
& (-1)^{4}\cdot(-17) \\
& -17.
\end{aligned}
$$

Daí o determinante procurado será:

$$\det A \quad 4\cdot(-17) \quad -68.$$



De fato, coruja. Não há como negar isso. É um assunto tão novo e é algo tão atípico às nossas rotinas (até mesmo dentro do estudo da própria matemática) que não tem jeito a não ser parar e exercitar o conteúdo. Pegue as matrizes que já vimos e tente calcular o determinante usando outra linha. Ou tente usar uma coluna, enfim. Há diversas maneiras de treinarmos, mas sem treinar realmente será bastante complicado.

QUESTÕES
COMENTADAS

(EEAR-2003) QUESTÃO 21

Calculando o valor do determinante $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, obtém-se

(a) -3
(b) -1
(c) 1
(d) 3

R: Como se trata de uma matriz 4×4, não temos escolha a não ser utilizarmos o Teorema de Laplace para podermos calcular o determinante da matriz em questão.
Para utilizarmos, devemos escolher ou uma linha ou uma coluna da referida matriz, de preferência aquela que tiver mais elementos iguais a zero. Nesse matriz, é claro, escolherei a terceira coluna.
Daí, basta multiplicarmos cada elemento da coluna pelos seus respectivos cofatores e, após, somá-los:

$$\begin{aligned} \det A \quad & 0 \cdot c_{13} + 0 \cdot c_{23} + 0 \cdot c_{33} + (-1) \cdot c_{43} \\ & -c_{43}. \end{aligned}$$

Agora, façamos o cálculo de c_{43}:

$$\begin{aligned} c_{43} \quad & (-1)^{4+3} \cdot \underbrace{D_{43}}_{\text{menor complementar}} \\ c_{43} \quad & -D_{43}. \end{aligned}$$

Para finalmente calcularmos o menor complementar, excluamos a linha e a coluna a que pertencem o elemento a_{43}:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante da matriz 3×3 que restou:

$$\det A \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right.$$

$$0 - 2 + 0 - 0 + 1 - 0$$

$$-1.$$

Daí, temos que $D_{43} \quad -1$. Como $c_{43} \quad -D_{43}$, temos $c_{43} \quad 1$. Mas também sabemos que $\det A \quad -c_{43}$, então, finalmente, $\det A \quad -1$.

Gabarito: B

(EEAR-2006) QUESTÃO 22

O determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ é

(a) 9.
(b) 8.
(c) 7.
(d) 6.

R: Podemos resolver usando o Teorema de Laplace ou a Regra de Chió. Farei usando o Teorema de Laplace.

Escolherei a primeira linha para o Teorema. Temos então:

$$\begin{aligned}
\det A &\quad 1 \cdot c_{11} + 0 \cdot c_{12} + 0 \cdot c_{13} + 3 \cdot c_{14} \\
\det A &\quad c_{11} + 3 \cdot c_{14} \\
\det A &\quad (-1)^{1+1} \cdot D_{11} + 3 \cdot (-1)^{1+4} \cdot D_{14} \\
\det A &\quad D_{11} - 3D_{14}.
\end{aligned}$$

Calcularemos agora o valor de cada menor complementar. Vejamos então D_{11} primeiro.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante que sobrou, temos:

$$D_{11} \quad \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

$$36 + 0 + 2 - 0 + 3 - 40 \qquad\qquad 1.$$

Agora façamos o mesmo para D_{14}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante que sobrou, temos:

$$D_{14} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right.$$

$$4 + 27 + 0 - 30 - 0 - 3$$

$$-2.$$

Substituindo na expressão do Teorema de Laplace:

$$\begin{aligned} \det A \quad & D_{11} - 3D_{14} \\ \det A \quad & 1 - 3 \cdot (-2) \\ \det A \quad & 1 + 6 \\ \det A \quad & 7. \end{aligned}$$

Gabarito: C

2.0– Além dos cálculos

2.1– Propriedades dos determinantes

Falaremos a seguir de algumas determinantes que estão diretamente ligadas ao cálculo de determinantes. Falaremos de todas as propriedades sempre com exemplos associados. Assim você sempre terá como calcificar a ideia apresentada. Então, vamos lá?

Propriedade 1: o determinante da transposta

> O determinante da transposta de uma matriz é igual ao determinante da sua matriz original

O que queremos dizer com isso é que, sendo A uma matriz quadrada qualquer:

$$\boxed{\det A \quad \det A^t}$$

Vejamos um exemplo de aplicação dessa propriedade.

QUESTÃO 23

Sabe-se que $\begin{vmatrix} 1 & \pi & 2 & -2 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & -\sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3\pi & k \end{vmatrix} \quad -19$. Podemos afirmar que $\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 & 0 \\ \pi & -1 & -\sqrt{3} & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -3\pi \\ -2 & \frac{1}{2} & -1 & k \end{vmatrix}$ vale:

(a) 19
(b) -19
(c) 0
(d) 1

R: Ele nos dá uma matriz inicial $A \quad \begin{pmatrix} 1 & \pi & 2 & -2 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & -\sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3\pi & k \end{pmatrix}$. A questão, então, pede o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 & 0 \\ \pi & -1 & -\sqrt{3} & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -3\pi \\ -2 & \frac{1}{2} & -1 & k \end{pmatrix}$, que é justamente a matriz transposta de A, isto é, A^t. Logo, pela propriedade vista, o determinante da matriz apresentada é igual ao da matriz original, ou seja, -19.

Gabarito: B

Propriedade 2: troca de filas

Ao trocarmos duas filas de uma matriz, seu determinante será multiplicado por -1.

Quando falo "filas" aqui, quero dizer que pode ser linha ou coluna. Mas podemos trocar apenas linha com linha ou coluna por coluna. Vejamos um exemplo dessa aplicação.

QUESTÃO 24

Sabe-se que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ -150. Calcule, então, $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 & -7 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

(a) 0
(b) 1
(c) -150
(d) 150

R: Perceba que a segunda matriz é idêntica à primeira, à exceção de terem sido trocadas a primeira com a terceira linhas, certo? Consegue ver isso?
A troca foi feita da seguinte maneira:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 & -7 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 & -7 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Pela propriedade que acabamos de ver, só pode ser que o novo determinante será igual ao anterior multiplicado por -1. O novo determinante será de $-150 \cdot (-1) \quad 150$.

Gabarito: D

Propriedade 3: fila nula

Considere uma matriz quadrada em que alguma fila (linha ou coluna) seja completamente nula. Então:

O determinante dessa matriz será nulo também.

Veja um exemplo:

QUESTÃO 25

Sabe-se que $A \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ e $B \quad \begin{pmatrix} -m & 2 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & -16 & 100 \end{pmatrix}$. Calcule $\det(A+B)$.

(a) 0
(b) $-3k$
(c) 5
(d) 100

R: Façamos as contas para achar $A + B$:

$$A+B \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m & 2 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & -16 & 100 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1+(-m) & 7+2 & k+5 \\ 2+(-2) & 3+(-3) & -1+1 \\ 4+1 & -6+(-16) & 5+100 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1-m & 9 & k+5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -22 & 105 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz $A+B$ tem a segunda linha completamente nula, seu determinante também será nulo, pela propriedade que acabamos de ver.

Gabarito: A

Propriedade 4: filas iguais

Se uma matriz possui duas filas iguais, o seu determinante é nulo.

Novamente, aqui tanto faz se são duas linhas ou duas colunas. Vejamos um exemplo:

QUESTÃO 26

Sejam as matrizes $A \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & m & n \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $B \begin{pmatrix} 1 & -x & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 10 & m-2 & n+2 \end{pmatrix}$. Calcule $\det(A+B)$.

(a) $m+n$
(b) 0
(c) x
(d) 1

R: Façamos então as contas:

$$A+B \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & m & n \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -x & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 10 & m-2 & n+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 4+(-x) & -1+3 \\ 7+2 & m+2 & n+5 \\ -1+10 & 4+(m-2) & 3+(n+2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4-x & 2 \\ 9 & m+2 & n+5 \\ 9 & m+2 & n+5 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz $A+B$ tem duas linhas iguais, seu determinante será nulo.

Gabarito: B

Propriedade 5: multiplicação de fila por escalar

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar qualquer (isto é, um número real). É o seguinte: sempre que multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz por λ:

O determinante da matriz será também multiplicado por λ.

Vejamos um exemplo de aplicação:

QUESTÃO 27

Observe as matrizes a seguir: $A \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ m & n & p & q \\ x & y & z & q \\ r & s & t & u \end{pmatrix}$ e $B \quad \begin{pmatrix} a & b & c & 3d \\ m & n & p & 3q \\ 2x & 2y & 2z & 6q \\ r & s & t & 3u \end{pmatrix}$. Se $\det A \quad 15$ calcule $\det B$.

(a) 0

(b) 15

(c) 30
(d) 45
(e) 90

R: Comecemos com a matriz A: $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ m & n & p & q \\ x & y & z & q \\ r & s & t & u \end{pmatrix}$. Seu determinante é 15, correto? Agora, vamos multiplicar a sua terceira linha toda por 2:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ m & n & p & q \\ 2x & 2y & 2z & 2q \\ r & s & t & u \end{pmatrix}.$$

Seu determinante agora é, então, $15 \cdot 2 \quad 30$, certo? Porque multiplicamos a terceira linha toda por $\lambda \quad 2$. Por fim, multiplique a última coluna da matriz resultante por 3:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 3d \\ m & n & p & 3q \\ 2x & 2y & 2z & 6q \\ r & s & t & 3u \end{pmatrix}.$$

Veja que a matriz encontrada é a matriz B, e seu determinante será: $30 \cdot 3 \quad 90$.

Gabarito: E

Propriedade 6: multiplicação de matriz por escalar

Consideremos uma matriz quadrada A, de ordem n (ou seja, é uma matriz $n \times n$). Ao multiplicarmos essa matriz por $\lambda \in \mathbb{R}$:

O determinante da matriz será multiplicado por λ^n.

Vamos então a alguns exemplos?

(EEAR-2004) QUESTÃO 28

Seja uma matriz M do tipo 2×2. Se $\det M \quad 2$, então $\det(10M)$ é

(a) 20.
(b) 80.
(c) 100.
(d) 200.

R: A propriedade que acabamos de ver nos diz que se A é uma matriz $n \times n$, temos que $\det(\lambda A) \quad \lambda^n \cdot \det A$. Logo:

$$\begin{aligned} \det(10M) &\quad 10^2 \cdot \det M \\ &\quad 100 \cdot 2 \\ &\quad 200. \end{aligned}$$

Gabarito: D

(EEAR-2005) QUESTÃO 29

Seja A uma matriz de ordem 2, cujo determinante é -6. Se $\det(2A) \quad x - 87$, então o valor de x é múltiplo de

(a) 13.
(b) 11.
(c) 7.
(d) 5.

R: Novamente: a propriedade nos diz que se A é uma matriz $n \times n$, temos que $\det(\lambda A) \quad \lambda^n \cdot \det A$. Logo:

$$\begin{aligned} \det(2A) &\quad x - 87 \\ 2^2 \cdot \det(A) &\quad x - 87 \\ 4 \cdot (-6) &\quad x - 87 \\ -24 &\quad x - 87 \\ -24 + 87 &\quad x \\ x &\quad 63. \end{aligned}$$

Vendo que 63 é um múltiplo de 7, temos que a alternativa correta é C.

Gabarito: C

Propriedade 7: filas proporcionais

Se uma matriz possui duas filas proporcionais, seu determinante será nulo.

Entenda proporcionalidade da seguinte forma: ao dividir cada elemento de uma fila por outra, encontramos sempre o mesmo valor. Vejamos um caso dessa aplicação.

(EEAR-2015) QUESTÃO 30

O valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ é

(a) -2
(b) 0
(c) 1
(d) 2

R: Veja que a segunda linha é proporcional à primeira linha (basta dividir cada elemento da linha 2 pelos elementos da linha 1; encontraremos sempre -1). Daí, pela propriedade que acabamos de ver, o determinante dessa matriz é nulo.

Gabarito: B

Propriedade 8: Adição de determinantes

Considere duas matrizes A e B idênticas, exceto por alguma linha ou alguma coluna específica(com mesmas posições ordinais). Ao criarmos uma matriz C idêntica a A e B, porém, com a linha diferente igual à soma das duas desiguais de A e B, então:

$$\boxed{\det C \quad \det A + \det B}$$

Sei que essa foi um pouco mais complicada, então, vamos ver dois exemplos.

QUESTÃO 31

Sejam as matrizes $A \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $C \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Calcule $\det C - \det A - \det B$.

(a) 0
(b) 2
(c) 1
(d) 3
(e) -7

R: Observe que as matrizes A e B são de fato idênticas, à exceção da última coluna. Veja também que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & \boxed{7} \\ 2 & 3 & \boxed{4} \\ 5 & -1 & \boxed{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & \boxed{2} \\ 2 & 3 & \boxed{-1} \\ 5 & -1 & \boxed{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \boxed{9} \\ 2 & 3 & \boxed{3} \\ 5 & -1 & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

Isso nos permite dizer que $\det A + \det B \quad \det C$, e, portanto, $\det C - \det A - \det B \quad 0$.

Gabarito: A

(EFOMM-2009) QUESTÃO 32

Se o determinante da matriz A $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ é 5, então $\begin{vmatrix} a & a+b & 3c \\ d & d+e & 3f \\ g & g+h & 3i \end{vmatrix}$ é igual a:

(a) zero.
(b) cinco.
(c) quinze.
(d) trinta.
(e) quarenta e cinco.

R: Utilizando-nos das propriedades dos determinantes, podemos escrever esse determinante da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & 3c \\ d & d+e & 3f \\ g & g+h & 3i \end{vmatrix} \quad \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & 3c \\ d & d & 3f \\ g & g & 3i \end{vmatrix}}_{\text{Determinante nulo, por causa das duas colunas iguais}} + \begin{vmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{vmatrix}.$$

Além disso, podemos retirar o 3 da última coluna, como que colocando-o em evidência:

$$\begin{vmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3i \end{vmatrix} \quad 3\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{5}$$

$$3 \cdot 5$$

$$15.$$

Propriedade 9: Teorema de Jacobi

Ao adicionarmos a uma fila qualquer outra fila multiplicada por um número:

O determinante não se altera.

Vejamos um exemplo:

QUESTÃO 33

Calcule $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & -8 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 11 & 6 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$

(a) 0
(b) -1
(c) 1
(d) 2

R: Podemos fazer utilizando a propriedade 8 ou a propriedade atual. Farei usando a atual, para podermos ver sua utilidade.
Dê uma olhada no primeiro determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & -8 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Agora, faça a soma da última coluna na penúltima:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4+1 & 1 \\ -1 & 3 & 5+6 & 6 \\ 7 & 1 & -8+9 & 9 \\ 1 & -3 & -5+1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 11 & 6 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pela propriedade que aprendemos, o determinante não muda, logo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & -8 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 11 & 6 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Portanto, a diferença entre eles é nula.

Gabarito: A

(ESPCEX-2016) QUESTÃO 34

Considere a matriz $M \quad \begin{bmatrix} a & a^3 - b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Se a e b são números reais não nulos e $\det(M) \quad 0$, então o valor de $14a^2 - 21b^2$ é igual a

(a) 15
(b) 28
(c) 35
(d) 49
(e) 70

R: Podemos diminuir ou somar linhas de matrizes sem alterar o seu determinante. Então, para facilitar o cálculo do determinante, vamos subtrair a segunda linha da primeira linha:

$$\begin{bmatrix} a & a^3 - b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a - a & a^3 - b^3 - a^3 & b - 0 \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante de M, então:

$$\det M \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -b^3 & b & 0 & -b^3 \\ a & a^3 & 0 & a & a^3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right. \quad 0$$

$$\begin{aligned} 0+0+5ab-2a^3b-0+3ab^3 &\quad 0 \\ 5ab-2a^3b+3ab^3 &\quad 0 \\ ab(5-2a^2+3b^2) &\quad 0 \\ 5-2a^2+3b^2 &\quad 0 \\ -2a^2+3b^2 &\quad -5 \\ 2a^2-3b^2 &\quad 5 \\ 14a^2-21b^2 &\quad 35. \end{aligned}$$

Gabarito: C

Propriedade 10: propriedade da combinação linear

Se uma fila de uma matriz é fruto da soma de outras duas, estejam estas multiplicadas ou não por um número:

O determinante dessa matriz será nulo.

Agora, nosso exemplo:

QUESTÃO 35

Calcule $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 9 & 9 & 0 \\ -7 & 3 & -1 & 2 & -18 \end{vmatrix}$.

(a) -1

(b) 2

(c) 3
(d) 0
(e) 4

R: Veja que a segunda coluna somada com a terceira coluna resulta na quarta coluna. Só isso já é suficiente para concluirmos que o determinante dessa matriz será nulo.

Gabarito: D

Propriedade 11: Teorema de Binet

É sempre válido que:

$$\boxed{\det(A \cdot B) \quad \det A \cdot \det B.}$$

Vejamos, então, um exemplo dessa aplicação.

QUESTÃO 36

Considere as matrizes a seguir: $A \quad \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 7 & 5 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $B \quad \begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} & -\frac{1}{3} & -176 \\ \sqrt{3} & \frac{\pi\sqrt{3}}{3} & -5 & -17 \\ -29 & \cos(74°) & -18 & -\pi \\ -\sqrt{47} & 3 & 19 & 18 \end{pmatrix}$.

Calcule $\det(A \cdot B)$.

(a) 0
(b) 1
(c) $\sqrt{2}$
(d) $\pi\sqrt{2}$
(e) $-\pi\sqrt{47}$

R: Veja na matriz A que a segunda linha é fruto da soma da primeira com a terceira linhas. Isso faz com que $\det A \quad 0$. Pelo Teorema de Binet, como $\det(AB) \quad \det A \cdot \det B$, temos:

$$\begin{aligned} \det(AB) \quad & \det A \cdot \det B \\ & 0 \cdot \det B \\ & 0. \end{aligned}$$

Gabarito: A

Propriedade 12: determinante de matriz inversa

Seja A uma matriz inversível, isto é, $\det A \neq 0$. Então:

$$\boxed{\det(A^{-1}) \quad \frac{1}{\det A}.}$$

Vamos então a um exemplo:

(ESPCEX-2004) QUESTÃO 37

Seja a matriz $A \quad (a_{ij})_{2\times 2} \quad \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ i + j - \dfrac{4}{j}, \text{ se } i \quad j \end{cases}$. O determinante da inversa de A é:

(a) $-\dfrac{1}{4}$
(b) $\dfrac{3}{4}$
(c) $\dfrac{3}{2}$
(d) $-\dfrac{1}{2}$
(e) $\dfrac{4}{3}$

R: Montemos a matriz:

$$\begin{aligned} A \quad & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1+1-\dfrac{4}{1} & 0 \\ 0 & 2+2-\dfrac{4}{2} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 2-4 & 0 \\ 0 & 4-2 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mas estudante. Calma agora. Percebe que ele está pedindo o determinante da inversa de A, isto é, o determinante de A^{-1}? Aí você acha que, então, deveríamos calcular a matriz inversa, correto? Pois é, negativo! As propriedades que estudamos são suficientes para que consigamos fazer isso sem ter o trabalho de calcular a inversa. Veja:

Primeiro, vamos calcular o determinante de A:

$$\begin{aligned} \det A \quad & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ & -4 - 0 \\ & -4. \end{aligned}$$

A propriedade que acabamos de aprender nos diz que $\det(A^{-1}) \quad \dfrac{1}{\det A}$, logo:

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}) \quad & \frac{1}{\det A} \\ & \frac{1}{-4} \\ & -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Gabarito: A

Propriedade 13: Regra de Chió

Essa é uma regra prática que nos auxilia a reduzir a ordem de uma matriz quadrada. Vejamos como funciona.

Seja A uma matriz quadrada com $a_{11} \quad 1$. Destaque os elementos da primeira linha (chamarei esses elementos de *teto*) e os elementos da primeira coluna (chamarei esses de *parede*). Agora, cada elemento dessa matriz que não esteja no teto ou na parede possuem um correspondente nesses conjuntos marcados. Veja um exemplo. Considere a matriz: $A \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Observe esse teto e essa parede

$$\begin{array}{cc} & \textbf{Teto} \\ \textbf{Parede} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Agora observe um elemento qualquer, como o 7 (que seria o elemento a_{23} dessa matriz). Veja que ele tem os seus dois correspondentes (no teto é o 4 e na parede é o 2). Vê isso? Vou te ajudar com a imagem abaixo:

$$\begin{array}{cc} & \textbf{Teto} \\ \textbf{Parede} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

A regra de Chió funciona da seguinte forma: primeiro, excluímos a parede e o teto da matriz original. Depois, diminuímos de CADA elemento da matriz resultante *o produto dos correspondentes daquele elemento na parede e no teto*. No 7 da figura acima, por exemplo, os correspondentes seriam 4 e 2. A matriz ficará, então, assim:

$$\begin{pmatrix} 1-3\cdot 2 & 7-4\cdot 2 & 9-5\cdot 2 \\ 3-3\cdot 0 & 1-4\cdot 0 & 9-5\cdot 0 \\ 3-3\cdot 1 & 5-4\cdot 1 & 4-5\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Fazendo as contas, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 7-8 & 9-10 \\ 3-0 & 1-0 & 9-0 \\ 3-3 & 5-4 & 4-5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

E daí, o que a Regra de Chió conclui sobre essa matriz?

Ao aplicarmos a Regra de Chió, não alteramos o determinante da matriz original.

Fazendo o cálculo então, pela Regra de Sarrus:

$$\det A \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} -5 & -1 & -1 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

$$-5\cdot 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 9\cdot 0+(-1)\cdot 3\cdot 1-(-1)\cdot 1\cdot 0-(-5)\cdot 9\cdot 1-(-1)\cdot 3\cdot(-1)$$

$$5+0-3-0+45-3$$

$$44.$$

Vejamos mais um exemplo de aplicação da regra de Chió:

(EFOMM-2017) QUESTÃO 38

Calcule o determinante da matriz A de ordem n:

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$$

(a) $\det(A) \quad \prod_{n=1}^{n-1} 2n$

(b) $\det(A) \quad \prod_{n=1}^{n} 2n-1$

(c) $\det(A) \quad \prod_{n=1}^{n-1} 2^n$

(d) $\det(A) \quad \prod_{n=1}^{n} 2^{n-1}$

(e) $\det(A) \quad 1$

R: Vamos utilizar a *Regra de Chió* para simplificarmos a nossa matriz. Veja que as primeiras linhas e colunas são todas iguais a 1. Basta portanto diminuirmos 1 de cada elemento da matriz, além de reduzir uma unidade da ordem:

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2n-2 \end{pmatrix}$$

Como o determinante da matriz resultante não muda, e como se trata de uma matriz diagonal, seu determinante é o produto dos termos da diagonal principal. Então:

$$\det A \quad 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \quad \prod_{n=1}^{n-1} 2n.$$

Aprenderemos em materiais mais à frente sobre essa notação que utilizei a notação de *produtório*.

Gabarito: A

(ESSA-2014) QUESTÃO 39

Sabendo-se que uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, seu determinante é não-nulo e que, se A e B são duas matrizes quadradas de mesma ordem, então $\det(A\cdot B) \quad (\det A)\cdot(\det B)$, pode-se concluir que, sob essas condições

(a) se A é invertível, então $A\cdot B$ é invertível.
(b) se B não é invertível, então A é invertível.
(c) se $A\cdot B$ é invertível, então A é invertível e B não é invertível.
(d) se $A\cdot B$ não é invertível, então A ou B não é invertível.
(e) se $A\cdot B$ é invertível, então B é invertível e A não é invertível.

R: Comentemos conclusão por conclusão:

(a) Falso. Veja que, B pode, por exemplo, ser a matriz nula, tornando $A\cdot B$ uma matriz não-invertível (pois $\det(A\cdot B)$ seria nulo, justamente a condição que torna uma matriz não invertível (ou seja, uma matriz singular[1])).

(b) Falso. A e B são matrizes totalmente não correlacionadas, uma não interfere na outra.

(c) Falso. O fato de $A\cdot B$ ser invertível garante-nos que $\det(A\cdot B) \;/\; 0$. Mas $\det(A\cdot B) \quad \det A\cdot\det B$, então:

$$\det A\cdot\det B \;/\; 0.$$

Isso garante que ambos os determinantes não sejam nulos e, portanto, é impossível que B não seja invertível.

(d) Verdadeiro. O fato de $A\cdot B$ não ser invertível garante-nos que $\det(A\cdot B) \quad 0$. Mas $\det(A\cdot B) \quad \det A\cdot\det B$, então:

[1] Termo aprendido na aula anterior

$$\det A \cdot \det B \quad 0.$$

Isso garante que pelo menos um dos determinantes seja nulo e, portanto, A ou B não é invertível.

(e) Falso, pelas mesmas razões apresentadas anteriormente.

Gabarito: D

(ESPCEX-2017) QUESTÃO 40

Uma matriz quadrada A, de ordem 3, é definida por $a_{ij} \quad \begin{cases} i-j, \text{ se } i>j \\ (-1)^{i+j}, \text{ se } i \le j \end{cases}$. Então $\det(A^{-1})$ é igual a:

(a) 4
(b) 1
(c) 0
(d) $\frac{1}{4}$
(e) $\frac{1}{2}$

R: Construamos a matriz A, inicialmente:

$$A \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ 2-1 & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ 3-1 & 3-2 & (-1)^{3+3} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos, agora, o determinante de A:

$$\det A \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right.$$

$$1+2+1-2+1+1$$

$$4.$$

Logo, $\det A^{-1} \quad \dfrac{1}{\det A} \quad \dfrac{1}{4}.$

Gabarito: D

(EFOMM-2010) QUESTÃO 41

Sejam as matrizes $A \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $X \quad A \cdot B$. O determinante da matriz $2 \cdot X^{-1}$ é igual a:

(a) $\frac{1}{6}$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) 1
(d) $\frac{8}{3}$
(e) 6

R: Calculemos inicialmente o determinante de A. Trata-se de uma matriz 4×4, portanto, precisaremos utilizar o Teorema de Laplace. Escolherei a última linha para fazê-lo (maior quantidade de zeros):

$$\det A \quad 0 \cdot c_{41} + 0 \cdot c_{42} + 0 \cdot c_{43} + 3 \cdot c_{44}$$

$$\det A \quad 3 \cdot c_{44}$$

$$\det A \quad 3 \cdot (-1)^{4+4} \cdot D_{44}$$

$$\det A \quad 3D_{44}.$$

Calculando o menor complementar:

$$D_{44} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante:

$$D_{44} \quad \left| \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$2+0+0-0-0-0$$

$$2.$$

Podemos utilizar então a expressão encontrada para o cálculo do determinante de A:

$$\begin{aligned} \det A \quad & 3D_{44} \\ \det A \quad & 3 \cdot 2 \\ \det A \quad & 6. \end{aligned}$$

Agora, calculemos o determinante de B. Também se trata de uma matriz 4×4, portanto, precisaremos utilizar o Teorema de Laplace. Escolherei, assim como na matriz A, a última linha para fazê-lo (maior quantidade de zeros):

$$\begin{aligned} \det B \quad & 0 \cdot c_{41} + 0 \cdot c_{42} + 0 \cdot c_{43} + 1 \cdot c_{44} \\ \det B \quad & 1 \cdot c_{44} \\ \det B \quad & 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot D_{44} \\ \det B \quad & D_{44}. \end{aligned}$$

Calculando o menor complementar:

$$D_{44} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando o determinante:

$$D_{44} \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$1$$

Podemos utilizar então a expressão encontrada para o cálculo do determinante de B:

$$\det B \quad D_{44}$$
$$\det B \quad 1.$$

Veja que $X \quad A \cdot B$. Então, pelo Teorema de Binet:

$$\det X \quad \det(A \cdot B)$$
$$\det X \quad \det A \cdot \det B$$
$$\det X \quad 6 \cdot 1$$
$$\det X \quad 6.$$

Precisamos agora calcular o determinante de $2 \cdot X^{-1}$. Vamos nos utilizar das propriedades de determinantes para fazer os cálculos:

$$\begin{aligned}\det(2 \cdot X^{-1}) \quad & 2^4 \cdot \det(X^{-1}) \\ & 16 \cdot \frac{1}{\det X} \\ & 16 \cdot \frac{1}{6} \\ & \frac{16}{6} \\ & \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Gabarito: D

(EFOMM-2011) QUESTÃO 42

Sejam A, B e C matrizes de ordem 3×3 inversíveis tais que $\det A^{-1} \quad 3$ e $\det\left[(AB)^{-1} + \frac{1}{2}I\right] \quad 4$. Sabendo-se que I é a matriz identidade de ordem 3, tal que $I \quad -3C^{-1}\left(2B^{-1} + A\right)^T$, o determinante de C é igual a:

(a) $-\frac{8}{3}$
(b) $-\frac{32}{3}$
(c) -9
(d) -54
(e) -288

R: Essa é um pouco mais complicada, de fato. Mas é só nos utilizarmos das propriedades. Vejamos:

$$\det\left[(AB)^{-1} + \frac{1}{2}I\right] \quad 4$$

Mas o determinante da soma de duas matrizes é a soma dos determinantes, logo:

$$\det\left[(AB)^{-1}\right] + \det\left(\frac{1}{2}I\right) \quad 4$$

Sabemos que o determinante da inversa é a inversa do determinante e, além disso, podemos retirar constantes do cálculo do determinante elevando essa constante à ordem dele, como já vimos:

$$\frac{1}{\det(AB)} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \det(I) \quad 4$$

Como o determinante da matriz identidade vale 1, temos:

$$\frac{1}{\det(AB)} + \frac{1}{8} \quad 4$$
$$\frac{1}{\det(AB)} \quad 4 - \frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{\det(AB)} \quad \frac{31}{8}$$
$$\det(AB) \quad \frac{8}{31}$$

Como $\det(A^{-1}) \quad 3$, então $\det A \quad \frac{1}{3}$. Logo, aplicando novamente o Teorema de Binet:

$$\det A \cdot \det B \quad \frac{8}{31}$$
$$\frac{1}{3} \cdot \det B \quad \frac{8}{31}$$
$$\det B \quad \frac{3 \cdot 8}{31}$$
$$\det B \quad \frac{24}{31}.$$

Agora vamos desenvolver a outra equação:

$$I \quad -3C^{-1}\left(2B^{-1} + A\right)^T$$

Apliquemos o determinante em ambos os membros:

$$\det I \quad \det\left[-3C^{-1}\left(2B^{-1} + A\right)^T\right]$$

Como o determinante da matriz identidade é, como já vimos, 1 e, como já vimos, podemos retirar constantes do cálculo do determinante, temos:

$$1 \quad (-3)^3 \cdot \det\left[C^{-1}\left(2B^{-1} + A\right)^T\right]$$

Pelo Teorema de Binet:

$$1 \quad -27 \cdot \det\left(C^{-1}\right) \cdot \det\left[\left(2B^{-1} + A\right)^T\right]$$

O determinante da transposta de uma matriz é igual ao determinante da própria matriz, então:

$$1 \quad -27 \cdot \frac{1}{\det C} \cdot \det\left(2B^{-1} + A\right)$$

Novamente, o determinante da soma é a soma dos determinantes, logo:

$$1 \quad -27 \cdot \frac{1}{\det C} \cdot \left[\det\left(2B^{-1}\right) + \det A\right]$$

Retirando a constante de dentro do determinante:

$$1 \quad -27 \cdot \frac{1}{\det C} \cdot \left[2^3 \cdot \det\left(B^{-1}\right) + \det A\right]$$

$$1 \quad -27 \cdot \frac{1}{\det C} \cdot \left(8 \cdot \frac{1}{\det B} + \det A\right)$$

Substituindo os valores encontrados há pouco:

$$1 \quad -27 \cdot \frac{1}{\det C} \cdot \left(8 \cdot \frac{1}{\frac{24}{31}} + \frac{1}{3}\right)$$

$$1 \quad -27 \cdot \frac{1}{\det C} \cdot \left(8 \cdot \frac{31}{24} + \frac{1}{3}\right)$$

$$1 \quad -27 \cdot \frac{1}{\det C} \cdot \left(\frac{31}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$1 \quad -27 \cdot \frac{1}{\det C} \cdot \frac{32}{3}$$

$$1 \quad -9 \cdot \frac{1}{\det C} \cdot 32$$

$$\det C \quad -9 \cdot 32$$

$$\det C \quad -288.$$

Gabarito: E

(EFOMM-2015) QUESTÃO 43

Sabendo-se que:

$$\det \begin{pmatrix} e & \pi & \sqrt{2} & 3^{\frac{1}{3}} & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad a$$

, calcule, em função de a,

$$\det\begin{pmatrix} 2e & 2\pi & \sqrt{8} & 24^{\frac{1}{3}} & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16 \end{pmatrix}.$$

(a) $2a$
(b) $-2a$
(c) a
(d) $-a$
(e) $3a$

R: Comecemos a tentar transformar a matriz inicial na matriz informada:

$$\det\begin{pmatrix} e & \pi & \sqrt{2} & 3^{\frac{1}{3}} & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad a$$

Somando a última linha com a penúltima não se altera o valor do determinante, logo:

$$\det\begin{pmatrix} e & \pi & \sqrt{2} & 3^{\frac{1}{3}} & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3+0 & 1+(-1) & 2+3 & 0+5 & 4+12 \end{pmatrix} \quad a$$

$$\det\begin{pmatrix} e & \pi & \sqrt{2} & 3^{\frac{1}{3}} & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16 \end{pmatrix} \quad a$$

Ao trocarmos duas linhas de uma matriz, seu determinante fica multiplicado por -1; troquemos então a segunda linha com a terceira:

$$\det\begin{pmatrix} e & \pi & \sqrt{2} & 3^{\frac{1}{3}} & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16 \end{pmatrix} \quad -a$$

Podemos multiplicar a primeira linha desse determinante por 2; ao fazer isso, o determinante da matriz fica também multiplicado por 2:

$$\det\begin{pmatrix} 2e & 2\pi & 2\sqrt{2} & 2\cdot 3^{\frac{1}{3}} & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16 \end{pmatrix} \quad -2a$$

Veja que $2\sqrt{2} \quad \sqrt{2^2\cdot 2} \quad \sqrt{8}$; ainda: $2\cdot 3^{\frac{1}{3}} \quad 2^{3\cdot\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} \quad 8^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}} \quad 24^{\frac{1}{3}}$; logo:

$$\det\begin{pmatrix} 2e & 2\pi & \sqrt{8} & 24^{\frac{1}{3}} & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16 \end{pmatrix} \quad -2a.$$

Gabarito: B

(EFOMM-2015) QUESTÃO 44

Seja $A \quad (a_{ij})_{3\times 3}$ uma matriz quadrada de ordem 3, onde cada termo é dado pela lei a_{ij}

$$\begin{cases} -i+j, \text{ se } i+j \text{ é par} \\ i-j, \text{ se } i+j \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Pode-se afirmar que o valor de $\det A$ é

(a) 0.

(b) -12.

(c) 12.

(d) 4.

(e) −4.

R: Precisamos analisar quais dos termos dessa matriz 3×3 possuem $i + j$ par ou ímpar:

- **Par:** $a_{11}, a_{13}, a_{22}, a_{31}$ e a_{33}.
- **Ímpar:** a_{12}, a_{21}, a_{23} e a_{32}.

Então, a matriz montada fica assim:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1+1 & 1-2 & -1+3 \\ 2-1 & -2+2 & 2-3 \\ -3+1 & 3-2 & -3+3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos continuar as contas e calcularmos o determinante pela regra de Sarrus naturalmente. Mas existe algo mais específico para essa questão: a matriz que encontramos é uma *matriz antissimétrica de ordem ímpar* (verifique isso!). Toda matriz antissimétrica de ordem ímpar tem determinante nulo, pois:

$$\begin{aligned} A^t &\quad -A \\ \det A^t &\quad \det(-A) \\ \det A &\quad (-1)^n \cdot \det A \\ \det A &\quad -\det A \\ 2\det A &\quad 0 \\ \det A &\quad 0. \end{aligned}$$

Gabarito: A

2.1– ÍNDICE REMISSIVO